UNIDAD 5: DERIVADAS

Hasta ahora, vimos muchas cosas que tal vez ya habías visto antes. Y puede ser que las derivadas tampoco sean algo nuevo para vos. Ojo, en muchos colegios no se llega a ver este tema, o se ve "muy por arriba". Y si lo viste con profundidad, no te confíes: en esta materia, vamos a ir más allá. ¿Por qué? Porque estamos en Análisis Matemático. No sólo vamos a hacer cuentas, vamos a analizar qué es lo que nos quieren decir, y usarlas para otras cosas. Y la derivada es una herramienta fundamental, que vas a usar siempre.

Entonces, la primera pregunta que nos podríamos hacer, es:

¿QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE UNA DERIVADA?

Si ya viste derivadas, te sabés la tabla, las propiedades, etc.,¿podés responder esta pregunta? No te sorprendas si no es así. No es que no hayas aprendido bien. Es que seguramente no te lo enseñaron.

Antes de empezar a dar las fórmulas, pensemos en este ejemplo.

Tenés que trasladar un carrito por estas escaleras hacia arriba:

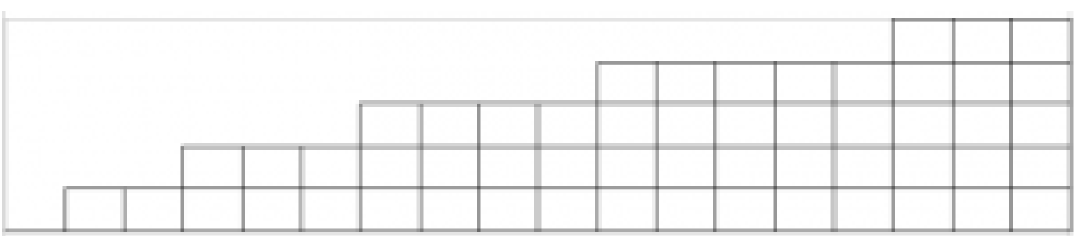


Figura 1

Disponés de unos tablones que irás poniendo de peldaño a peldaño (Figura 2) para poder desplazar tu carro:

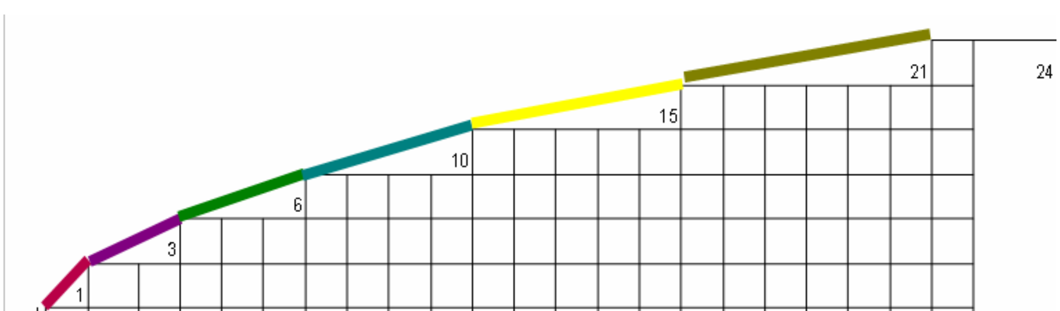


Figura 2

Fijate en ellos, observá la figura 2 ¿Qué podés ver con relación a su inclinación?

Tendrás que hacer mucho esfuerzo al inicio para desplazar tu carro y menos al final en el último tramo. La pendiente, aunque subas todo el tiempo, es más elevada al inicio que al final.

Si establecemos el ángulo entre el tablero y la horizontal (Figura 3), vemos que el ángulo se va reduciendo a medida que vamos avanzando a lo largo de los tablones. Se dice que el coeficiente director de la pendiente va reduciéndose.

Por ejemplo, en el punto 6, o 7, o 8, y 9 (el tablero azul) tenemos una pendiente con un coeficiente director de $\frac{1}{4}$ ya que tiene que recorrer 4 unidades de medida (la profundidad de la escalera) para subir 1 unidad en el punto 10 (altura de la escalera) . La pendiente es la división de lo que ha subido (1 punto) sobre lo que ha avanzado (4 unidades), es decir la pendiente es de 1/4 = 0,25 (es lo que se llama el coeficiente director de la recta). La pendiente del tablero amarillo, es de 0,2, ya que hay que recorrer 5 para subir 1. Si, por ejemplo en este mismo punto, en lugar de una unidad se subiese 10 unidades ¿Cuál sería la pendiente en este caso?

La pendiente en ese caso sería de 10/5 = 2.

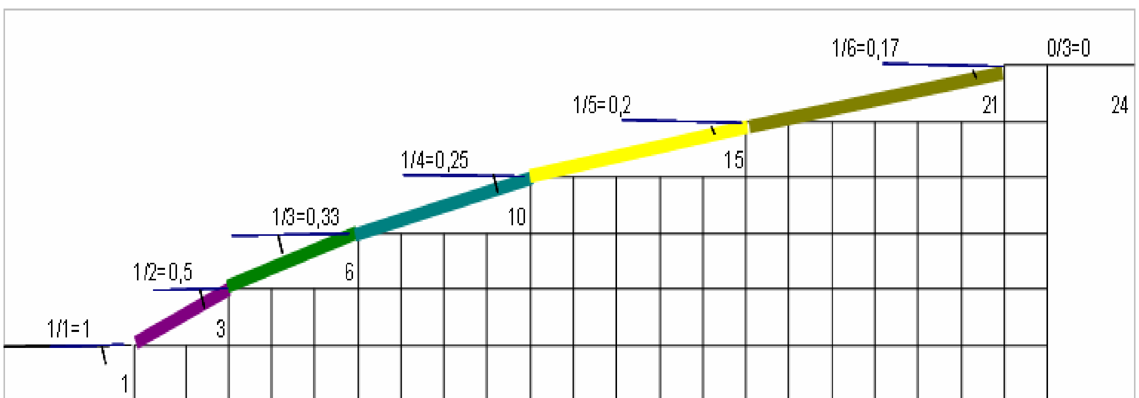


Figura 3

Eso que acabamos de explicar es la clave de la derivada. Así de fácil.

La derivada nos muestra la evolución de la inclinación de los tablones a lo largo del trayecto.

Así que la derivada tiene que ver con los cambios de los coeficientes directores o los ángulos de los tablones con relación a la horizontal. En el ejemplo los coeficientes son positivos hasta el punto 21, a partir del punto 21 el coeficiente director es 0 ya que el tablón está paralelo al suelo, si a partir de ahí se fuese avanzando y las escaleras fuesen bajando, en lugar de subir, el coeficiente director sería negativo. Si fuese bajando de modo simétrico al que ha ido subiendo encontraríamos los mismos indices angulares pero negativos.

La derivada muestra la evolución de la pendiente, en cada punto de los tablones, a lo largo de la curva. ¿Se entiende?

Así que si remplazamos todos esos tablones por una solo tablero flexible que se posiciona sobre la escalera, podríamos decir que es una subida continua ya que la rueda de mi carro no siente ningún tipo de discontinuidad a lo largo del trayecto (no hay rupturas entre tablones) y escribiríamos una función continua *f(x)* que nos indicaría por cada punto que avanzamos en que punto de la altura nos encontramos. Mientras que la derivada sería una función ***f'(x)*** derivada de la anterior función que ya no nos da la altura sino que nos dice de cuánto cambia aquella función primitiva y la pendiente que tiene en cada punto del tablero flexible.

Los matemáticos dicen que la derivada es la función ***f'(x)*** que da la tangente en cada punto de la curva *f(x).* De todo esto lo importante es que lleguemos a imaginar y a visualizar con algún ejemplo como la derivada mide las evoluciones y los cambios de una variable (en el ejemplo, la altura de la escalera del dibujo) con relación a otra (la profundidad de la escalera del dibujo).

Ahora vamos a imaginar otras funciones en las que hay una derivada. ¿Se te ocurre alguna? Por ejemplo el incremento de mi peso en función de los años. ¿Qué me dará la derivada? Eso ya lo podés responder: la evolución de ese incremento de peso que no es otra cosa la evolución del ángulo de los tablones sobre la horizontal.

¿Para qué sirve entonces la derivada? La derivada permite ver, a través de la pendiente en todo punto de la curva, la evolución o el cambio de muchos fenómenos físicos. Permite calcular los puntos clave ahí donde la pendiente es 0 (máximos y mínimos) para buscar los óptimos por ejemplo. Permite hacer otros muchos cálculos asociados a este hecho de la pendiente de la tangente en cada punto de la curva. En física, electricidad, electrónica, en química, permite estudiar muchos fenómenos evolutivos asociados como la velocidad, la aceleración, los flujos, las acumulaciones. Las derivadas están siempre presentes. Se utiliza en economía, se utiliza en gestión, se utiliza en arquitectura. Los sistemas de cálculo de frenado y de automatización utilizan derivadas, los sistemas y las máquinas automatizadas para fabricar o para controlar utilizan derivadas. Por ejemplo, los sistemas que controlan la parada de vuestro ascensor para que ésta sea suave, se controla el "jerk" que es la derivada de la aceleración con relación al tiempo. El estudio de la cantidad de carbono 14 en un hueso permite, por ejemplo, a través de una diferencial, llegar a calcular su edad.

A partir del trabajo Newton, en el año 1669, la derivada se convirtió en una herramienta fundamental para el análisis matemático.

Un ejemplo que de una aplicación de la derivada y que es más fácil de visualizar que los clásicos sobre el movimiento, las velocidades y las aceleraciones que se suelen utilizar habitualmente en física.

Ahora sí, vamos a ir trabajando sobre los temas que vamos a ver en la práctica.

Recta tangente

Recordá que la pendiente de una recta que pasa por los puntos
$(x_1 , y(x_1))$; $(x_2 , y(x_2))$ se calcula como:

$$\boxed{m = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Por ejemplo, si tenemos la curva $y = x^2 - 1$, y queremos encontrar la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1 , 0) y (2 , y(2)), hacemos lo siguiente:

pasa por $(\underbrace{1}_{x_1};\ \underbrace{0}_{y(x_1)})$ y $(\underbrace{2}_{x_2};\ \underbrace{y(2)}_{y(x_2)=2^2-1=3})$

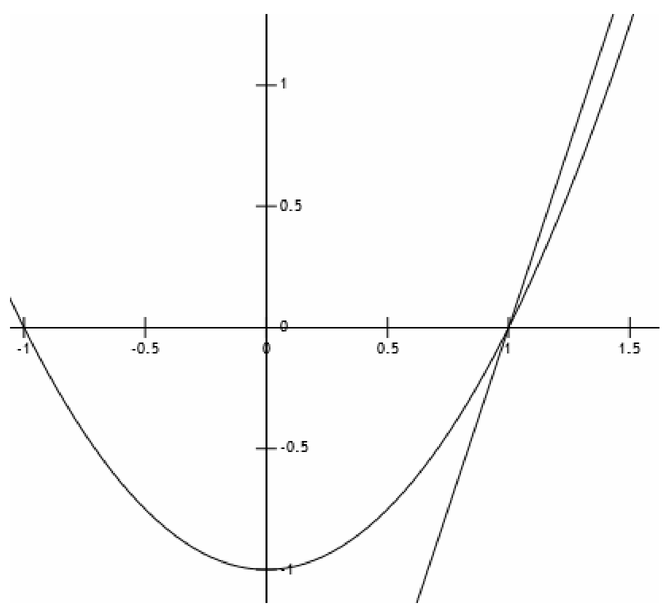
$$\Rightarrow m = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{2-1} = 3 \Rightarrow m = 3$$

Entonces la recta que buscamos tendrá ecuación: $y = 3x + b$
Calculamos b usando que la recta pasa por el $(\underbrace{1}_{x};\underbrace{0}_{y})$:

$$\Rightarrow 0 = 3.1 + b \Rightarrow b = -3$$

Y la recta tiene ecuación: $y = 3x - 3$

Hagamos un gráfico de esto para ver mejor de qué se trata:



Fijate que cerca del punto (1,0), la recta "roza" (y toca) a la curva. Eso quiere decir que la recta es "tangente" a la curva.

De ahí viene el concepto de "recta tangente", Buscamos una recta que sea tangente a una curva en un punto.

O sea, podríamos haber hecho lo mismo con cualquier otro punto, PERO sólo si pertenecía a la curva. Por ejemplo, no hubiera sido posible hacer esto con el punto (0,0).

En general, para una misma función y(x), y' cambia con el x_0 considerado, es decir y' también es función de x y conviene calcularla (para cualquier x adecuado) con un sólo límite parecido al anterior:

$$\boxed{\underbrace{y'(x)}_{\text{función derivada}} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}} \text{ (definición de derivada)}$$

(no usamos x_0, que indica un valor determinado, sino el x genérico. h es un valor muy chico, infinitésimo. Medimos la variación de la función de esta manera)

Acostumbrate a que a partir de ahora, si nos referimos a la derivada de y, lo llamamos **y'**. O si es la derivada de f(x), lo escribimos **f'(x)**.

Y acá va otra fórmula, que vas a usar siempre que te pidan la recta tangente (y) en un punto:

$$\boxed{\mathbf{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}}$$

(donde x es la variable de la recta, y x_0 es el punto por donde pasa la recta tangente)

Fijate que si la función no existe en ese punto, cuando queramos calcular $f(x_0)$, ¡va a ser imposible!

Ahora, calculemos un par de derivadas usando la definición, para que veas cómo funciona esto:

a) y(x) = k (constante, no depende de x. Esta función siempre tiene la misma imagen)

$$\Rightarrow y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \Rightarrow y'(x) = 0$$

b) y(x) = ax + b

$$\Rightarrow y'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{[a.(x+h)+b]}^{y(x+h)}-\overbrace{[a.x+b]}^{y(x)}}{h} \underbrace{=}_{\text{distribuyo}} \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h} =$$

$$= y'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} a = a \text{ (es un número real)}$$

$$\Rightarrow y'(x) = a$$

c) $y(x) = x^2$

$$\Rightarrow y'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{(x+h)^2}^{y(x+h)}-\overbrace{x^2}^{y(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \underbrace{=}_{\substack{\text{factor}\\ \text{común}}} \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

$$\Rightarrow y'(x) = 2x$$

d) $y(x) = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow y'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \underbrace{=}_{\substack{\text{multplico}\\ \text{xconjugado}}} \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \underbrace{=}_{\text{cancelo}} \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Y ahora, usando lo que hicimos en c), calculemos la recta tangente para $x_0 = 1$:

Necesitamos f(1) y f'(1). Los calculamos:

$$f(1) = 1^2 = 1$$
$$f'(1) = 2.1 = 2$$

Reemplazamos en la fórmula:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$
$$y = 2.(x - 1) + 1$$
$$y = 2x - 1 + 1$$
$$y = 2x$$

¿Casualidad que sea igual que y'(x)? NO. ¿Y eso que significa?
Rta: que la derivada en un punto y la recta tangente representan lo mismo.

¿Y para otro valor de x pasa lo mismo? Veamos con $x_0 = 3$:

Calculamos f(3) y f'(3):

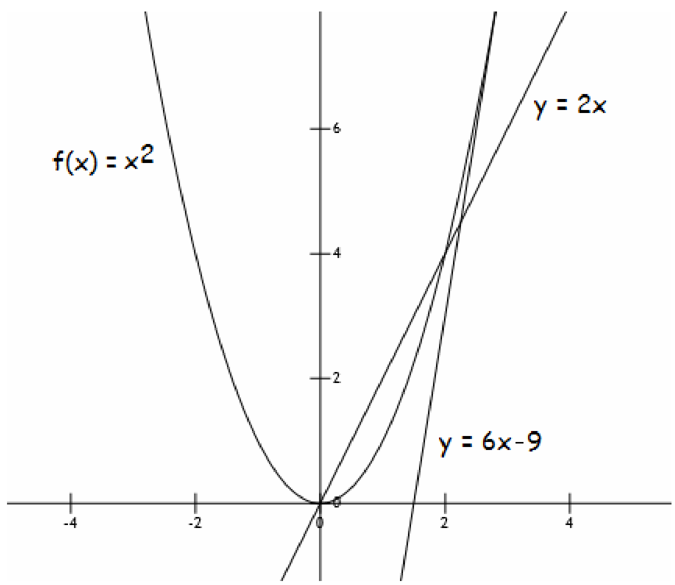
$$f(3) = 3^2 = 9$$
$$f'(3) = 2.3 = 6$$

Reemplazamos en la fórmula:

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$
$$y = 6.(x - 3) + 9$$
$$y = 6x - 18 + 9$$
$$y = 6x - 9$$

Ahora no son lo mismo, es cierto. Pero fijate que si reemplazamos por 3 en la recta tangente, nos va a dar igual que f(3). Eso siempre tiene que pasar, para cualquier recta tangente.

Grafiquemos la función y las dos rectas tangentes en el mismo gráfico para verlo:



¿Ves? Las rectas tangentes aproximan, con más o menos exactitud, a la función en ese punto.

Reglas de derivación - Función derivada

Si las funciones se complican, puede resultar muy tedioso calcular el límite para hallar la derivada por definición, aunque sea un x_0 conocido. Y, a la vez, existen funciones sencillas que aparecen repetidamente formando parte de otras más complejas. Entonces, lo que se hace, en general para derivar es usar una lista (o tabla) de derivadas elementales y propiedades que nos permiten derivar funciones más complejas.

El límite que vinimos calculando lo reservaremos para casos especiales, donde no podamos usar la tabla. En general, esto pasa cuando la función no existe en ese punto, o no podemos asegurarnos que sea continua.

No te olvides que para que exista derivada en un punto x_0, primero tiene que existir $f(x_0)$. Y por lo que vimos en unidades anteriores, eso no se puede asegurar si la función no es continua en ese punto.

Tabla de derivadas

y	y'	Ejemplo
k = constante	0	$y = 9 \rightarrow y' = 0$
k.x	k	$y = 3x \rightarrow y = 3$
x^n ($n \in R$)	$n.\ x^{n-1}$	$y = 3x^2 \rightarrow y' = 2.3x = 6x$
$1/x$	$-1/x^2$	
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	
e^x	e^x	
ln x	$1/x$	
sen x	cos x	
cos x	- sen x	
a^x	a^x . ln a	$y = 2^x \rightarrow y' = 2^x$. ln 2

Reglas de derivación

1) Para sumas y restas: $f(x) = g(x) + h(x) - y(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) - y'(x)$
2) Para producto de funciones: $f(x) = g(x).h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$

3) Para producto (multiplicación) con una constante: $f(x) = k.h(x) \Rightarrow f'(x) = k.h'(x)$
(este es el caso anterior con $g(x) = k$. Entonces, $g'(x) = 0$)

4) Para cocientes (divisiones): $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$

5) Para composiciones ("una función adentro de otra"): es la regla de la cadena:

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h\ (g(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(g(x)).g'(x)$$

6) Para la función inversa: (lo vemos más adelante)

Ejemplos de las reglas:

1) $f(x) = 2x + \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 2 + 1/x$

2) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \cdot x^2 + \operatorname{sen}(x) \cdot 2x$

3) $f(x) = 8.\cos(x) \Rightarrow f'(x) = -8.\operatorname{sen}(x)$

4) $f(x) = \dfrac{x.\ln x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x.\ln x)'.(x^2+1) - x\ln x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(\ln x+1).(x^2+1) - x\ln x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(\ln x+1).(x^2+1) - 2x^2\ln x}{(x^2+1)^2}$$

5) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2) \Rightarrow \begin{cases} h(x) = \operatorname{sen} x \leftarrow \text{función de "afuera"} \\ g(x) = 5x^2 \leftarrow \text{función de "adentro"} \end{cases}$

$\Rightarrow h'(x) = \cos x$ y $g'(x) = 10x$ y usamos la fórmula:

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{h'(g(x))}_{\cos(g(x))}.\underbrace{g'(x)}_{10x} = \left[\cos\left(\underbrace{g(x)}_{5x^2}\right)\right].10x = \left[\cos(5x^2)\right].10x = 10x.\cos(5x^2)$$

Como te habrás dado cuenta, aprender a usar estas reglas es una cuestión de practicar mucho. Al menos al principio, siempre tenete la tablita y el listado de reglas a mano, y miralo todo el tiempo. Con esto te alcanza y te sobra para derivar cualquier función que tengas (que se pueda derivar!)

Hagamos un ejemplo donde haya que aplicar varias reglas juntas:

$f(x) = (\ln x).(\log_a x) - (\ln a).(\log_a x)$

$$\text{(regla 1)} \Rightarrow f'(x) = [(\ln x).(\log_a x)]' - [(\ln a).(\log_a x)]'$$

Para el término de la izquierda usamos la regla 2, pero para el de la derecha, podemos usar la regla 3, porque ln a es una constante. Entonces:

$$= (\ln x)'(\log_a x) + (\ln x)(\log_a x)' - (\ln a).(\log_a x)' = \frac{1}{x}(\log_a x) + (\ln x).\frac{1}{x.\ln a} - (\ln a).\frac{1}{x.\ln a} =$$

$$= \frac{1}{x}(\log_a x) + \frac{\ln x}{x.\ln a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(\log_a x) + \frac{1}{x}(\log_a x) - \frac{1}{x} \underbrace{=}_{\text{sumar}} \frac{2}{x}(\log_a x) - \frac{1}{x} \underbrace{=}_{\substack{\text{factor}\\ \text{común}}} \frac{1}{x}[2(\log_a x) - 1]$$

Nota: puede resultar fastidioso, una vez terminada la derivación, transformar con operaciones algebraicas la función que encontraste. En estos casos no es indispensable, pero será muy útil para que te hayas acostumbrado a hacerlo cuando usemos la derivada para estudiar funciones (unidad 7).

Funciones derivables y no derivables

Recordá que definimos:

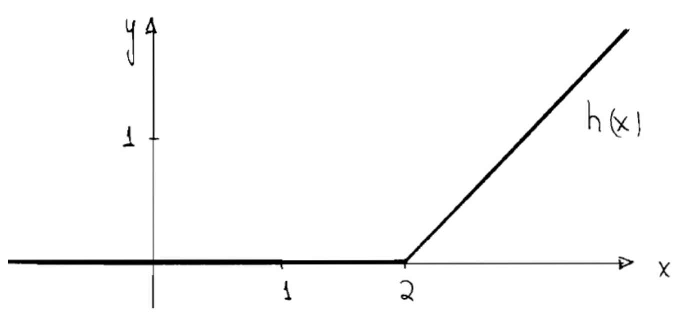
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Si este límite existe y es finito, decimos que f es derivable en x_0. Y decimos que f es derivable (a secas, sin aclarar dónde) cuando lo es en cada punto de su dominio: esto pasa con la mayoría de las funciones que venimos derivando hasta ahora. Con ellas, entonces, valen tabla y reglas de derivación.
Cuando el límite anterior no existe o da infinito (+ ó - ∞), decimos que f no es derivable en x_0. Esto puede pasar, por ejemplo, en funciones definidas por pedazos allí donde cambia la fórmula de f. En estos casos que pueden ser problemáticos, necesitamos recurrir a la definición para ver qué pasa con el límite y decidir, en consecuencia, acerca de la derivabilidad de f en x_0.

Por ejemplo, si tenemos que analizar la derivabilidad de esta función en x = 2, primero miramos la continuidad:

h(x) = $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

El gráfico sería así:



Continuidad en x = 2 (en el gráfico se ve que h es continua en x = 2)

$$* \lim_{x \to 2+} h(x) = \lim_{x \to 2+} (x - 2) = 0$$

$$* \lim_{x\to 2-} h(x) = \lim_{x\to 2-} 0 = 0$$

$$* \; h(2) = 2 - 2 = 0$$

Como los valores coinciden, podemos decir que g es continua en x = 2.

<u>Derivabilidad en x = 2</u> (¿hay recta tangente no vertical en el punto (2 ; h(2))?)

$$* \lim_{h\to 0+} \frac{h(2+h)-h(2)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{[2+h-2]-0}{h} = \lim_{h\to 2+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

$$* \lim_{h\to 0-} \frac{h(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

Los límites no dan lo mismo, entonces podemos decir que no existe la derivada en x = 2. Por lo tanto, h no es derivable en x = 2.

Veamos que ésta sí es derivable:

$$\mathbf{t(x)} = \begin{cases} x^2.\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

b) <u>Continuidad en x = 0</u>

$$* \lim_{x\to 0} t(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} . \underbrace{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotado}} = 0 \text{(propiedad "cero por acotado")}$$

$$* \; s(0) = 0$$

Los valores coinciden, así que t es continua en x = 0.

<u>Derivabilidad en x = 0</u>

$$\lim_{h\to 0} \frac{t(h)-t(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2.\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2.\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \underbrace{h}_{\to 0} . \underbrace{\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{acotado}} = 0$$

(propiedad "cero por acotado")

Como existe t'(0) = 0, t es derivable en x = 0.

Fijate que la recta tangente será y = 0.x + f(0) = 0

Entonces, la recta tangente es y = 0

Nota: Observá que si f es derivable en (x_0 ; $f(x_0)$), entonces podemos trazar su recta tangente y esta no será vertical (es decir, tendrá ecuación: y = m.x + b con m = $f'(x_0)$ justamente).
Pero hay un caso en que no tenemos derivada en un punto y sí existe recta tangente: cuando el límite da infinito y la tangente es vertical. El ejemplo es la función $g(x) = x^{1/3}$ en x = 0 : allí la recta tangente existe, es vertical y tiene ecuación x = 0.

Derivada de la función inversa

$A \subseteq R$ es un conjunto (podría ser A = R) y f:A -> R una función que cumple que f'(x) existe y tiene el mismo signo para cualquier x ϵ $I \subseteq R$ (*).

Entonces:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \text{ si } f(a) = b \text{ y } a \in I$$

Nota: la condición (*) acerca del signo constante de f' en I nos sirve para asegurar la monotonía (creciente o decreciente) de la función en el intervalo (y con ello, su inyectividad y la existencia de inversa). Ya lo vas a ver con más detalle en la próxima unidad.

Un ejemplo: $f(x) = 5.e^{x^3+2x}$ con f : R -> R (R sería la A del teorema)

$$\Rightarrow \text{(regla 3) } f'(x) = 5.\left(e^{x^3+2x}\right)' \underbrace{=}_{\text{regla5}} 5.e^{x^3+2x}.(3x^2+2) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{5}_{+}.\underbrace{e^{x^3+2x}}_{\substack{e>0 \\ \forall x \in R}}.\underbrace{(3x^2+2)}_{\substack{>0 \\ \forall x \in R}}$$

Vemos que f'(x) es producto de tres factores siempre positivos en R. Entonces será: $f'(x) > 0 \ \forall x \in R = I$. O sea, la derivada es positiva sea cual sea x.
Se cumple la condición (*) del teorema. Por lo tanto, existe la inversa $f^{-1}(x)$ y tiene sentido buscar su derivada.
* Para controlar que f(0) = 5 basta reemplazar por x = 0 y resolver:

$$f(0) = 5.e^{0^3+2.0} = 5.\underbrace{e^0}_{=1} = 5$$

Entonces, tendemos los valores reales a = 0 y b = 5.

Otro ejemplo : Sea f : [-1 , +∞) → R..., $f(x) = -x - \sqrt{x+1}$

a) Mostrar que f'(x) < 0 para todo x > -1. Además, notar que f(3) = -5
b) Usar el teorema de la función inversa para justificar la existencia de $(f^{-1})'(-5)$ y calcular su valor.

a) * f'(x) = (regla 1) $(-x)' - \underbrace{\left(\sqrt{x+1}\right)'}_{\text{regla5}} = -1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Observá que f'(x) no existe si x = -1, pero en cualquier otro caso, existe y es negativa. Entonces, $f'(x) < 0 \ \forall x \in (-1;+\infty) = I$. Con esto, aseguramos la existencia de f^{-1} y su derivada.

* Además:

$$f(3) = -3 - \sqrt{3+1} = -3 - 2 = -5$$

Entonces, tenemos los valores a = 3 y b = - 5, que pertencen al conjunto I.

b) Sólo nos queda calcular $(f^{-1})'(-5)$, usando el teorema:

$$\left(f^{-1}\right)'(\underbrace{-5}_{b}) = \frac{1}{f'(\underbrace{3}_{a})} \underset{\text{uso } f'(x)}{=} \frac{1}{-1 - \dfrac{1}{2.\sqrt{3+1}}} = \frac{1}{-1 - \dfrac{1}{4}} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(-5) = -\frac{4}{5}$$

Algunas aplicaciones: velocidad, razón de cambio, diferencial

Ya estuvimos hablando en general de aplicaciones de la derivada. Ahora, vamos a ver algunas que podríamos usar con lo que ya sabemos, y aparecen en la práctica:

*** Velocidad**

Si f(t) es una función, la **velocidad** con que varía f (cómo cambia ante cambios en la variable t) está dada por su derivada f'(t).

Un ejemplo de esto, sería este ejercicio:

La ley de movimiento de un punto a lo largo de una recta es s'(t) = 3 - 2t (en el instante t = 0 el punto se encuentra en el origen). Hallar la velocidad del movimiento del punto para los instantes t = 0, t = 1 y t = 2.

Bastará con buscar la derivada y evaluarla en los tiempos indicados:

$$s(t) = 3t - t^2 \Rightarrow \text{(reglas y tabla) } s'(t) = 3 - 2t$$

* para t = 0: s'(0) = 3 - 2.0 = 3 => velocidad = 3 (t = 0)
* para t = 1: s'(1) = 3 - 2.1 = 1 => velocidad = 1 (t = 1)
* para t = 2: s'(2) = 3 - 2.2 = -1 => velocidad = -1 (t = 2)

En el último caso, como la velocidad es negativa, se interpreta que el móvil está regresando.

<u>* Razón de cambio</u>

Vamos directa a hacer un ejemplo para que veas mejor cómo se usa esto:

Un objeto circular va aumentando de tamaño con el tiempo, de modo que su radio r, en centímetros, viene dado por r = 3t + 2 siendo t el tiempo en minutos.
a) ¿cuál es la velocidad de crecimiento del radio r?
b) ¿Cuál es la velocidad de variación del área?

a) $r(t) = 3t + 2$ (r en cm. y t en minutos)

=> si llamo $V_r(t)$ = velocidad de crecimiento del radio, es:

$$V_r(t) = r'(t) = 3 \Rightarrow V_r(t) = 3 \text{ (está en cm/min)}$$

b) Primero tenemos que hallar una expresión a(t) que nos indique cómo se va aumentando el área respecto del tiempo. Se trataba de un objeto circular, entonces su área es:

$$a = \pi.r^2$$

donde r es el radio, que en este caso está dado por $r(t) = 3t + 2$

=> reemplazando, queda: $a(t) = \pi.(3t + 2)^2$ (en cm^2)

Y ahora ya podemos calcular su velocidad de variación, derivándola; a(t) es una composición, así que usaremos la regla 5 ("de la cadena")

$$\begin{cases} h(x) = \pi.t^2 \\ g(x) = 3t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h'(x) = 2\pi t \\ g'(x) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a'(t) = h'(g(t)) \,.\, g'(t) = 2\pi.g(t).3 = 2\pi\,(3t + 2).3 \Rightarrow a'(t) = 6\pi.(3t + 2) = V_a(t)$$

(la unidad en este caso es cm^2/min, y $V_a(t)$ representa la velocidad de variación del área)

<u>* Diferencial</u>

Se trata de usar estas fórmulas:

$$\Delta y = y\,(x + h) - y(x) \qquad y \qquad dy = y'(x).dx$$

Veamos un ejemplo:

Para y = x + 1/x, hallar Δy - dy

$$\Delta y - dy = \underbrace{h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}_{\Delta y} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).h}_{dy} \underbrace{=}_{\text{distribuir}} h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} - h + \frac{h}{x^2} = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} + \frac{h}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 - x.(x+h) + h.(x+h)}{x^2(x+h)} = \frac{x^2 - x^2 - x.h + h.x + h^2}{x^2(x+h)} \Rightarrow \Delta y - dy = \frac{h^2}{x^2(x+h)}$$

Derivadas sucesivas

Las funciones no sólo se pueden derivar una vez. Las podemos derivar todas las veces que queramos, siempre que sean derivables. Ojo, en muchos casos, como los polinomios, a partir de algún momento nos van a dar siempre 0, así que no va a tener mucho sentido derivarlas muchas veces.
Pero otras, como las trigonométricas (sen x, cos x), o las exponenciales, se pueden seguir derivando infinitamente.

Las derivadas sucesivas se expresan así:

Si y'(x) es una función:

* y'(x) <- es su derivada primera
* $(y'(x))' = y''(x)$ <- es su derivada segunda
* $(y''(x))' = y'''(x)$ <- es su derivada tercera

Todas son funciones también

En general:

$$(y^{(n-1)}(x))' = y^{n}(x)$$

donde $(y^{(n-1)}(x))'$ es la derivada de orden anterior, y $y^{n}(x)$ es la derivada enésimo, o de orden n.

Por ejemplo, si f(x) = sen x, usamos tabla cada vez, y reglas, para derivar:

* f'(x) = (sen x)' = cos x
* f''(x) = (f(x))' = (cos x)' = -sen x
* f'''(x) = (f''(x))' = (-sen x)' = - (sen x)' = -cos x
* $f^{(IV)}(x)$ = (f'''(x))' = (-cos x)' = -(cos x)' = - (-sen x) = sen x
* $f^{(V)}(x)$ = ($f^{(IV)}(x)$)' = (sen x)' = cos x

=> $f^{(V)}(x)$ = cos x

Ejercicios

Hasta acá estamos con la teoría de derivadas. Pero no se terminó acá.

Nos quedan por ver, en las próximas unidades, teoremas y reglas muy importantes que usan derivadas, y su aplicación para el estudio de funciones.

Además, las vamos a seguir usando para integrales, que es el tema que le sigue.

Ahora, vamos a hacer algunos ejercicios sacados de exámenes, parciales y finales.

1) (de parcial)

Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 1$.

Nos dan esta función, y nos piden que hallemos un valor a, real, para que sea continua y derivable en x = 1.
Cuando trabajamos con una función, tenemos que mirar el dominio antes de empezar a hacer cualquier cosa. La primera es polinómica, así que es continua siempre. La otra es una homográfica, una división, así que no la podemos dividir por 0. Pero también nos dicen que esa rama vale entre 0 y 1, así que la única manera de que no se pueda calcular es que a valga justamente 0.

El único punto problemático es, justamente, el que nos dice la consigna. ¿Cuál es el problema en x = 1? Que si lo reemplazamos en el denominador nos queda 0 (si a vale 0), y no podemos dividir por 0! ¿Qué hacemos entonces?

Para ver que es continua, tendríamos que reemplazar por 1 en la función y verificar que nos de la otra rama de la función. Lo hacemos en cada tramo y vemos qué pasa:

$$f(1) = 3 - ax^2 = 3 - a(1)2 = 3 - a$$
$$f(1) = 2 / ax = 2 / a$$

De un lado nos queda 3 - a y del otro 2 / a. Igualamos y vemos qué pasa:

$$3 - a = 2 / a$$
$$(3 - a).a = 2$$
$$3a - a^2 - 2 = 0$$
$$- a^2 + 3a - 2 = 0$$

Nos quedó una cuadrática. La resolvemos con la fórmula resolvente para encontrar los valores de a:

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.(-1).(-2)}}{2.(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

Así que los valores de a para los cuales f (x) es continua son a_1 = 1 y a_2 = 2.
¡Ya tenemos los valores de a! Ahora, podemos reescribir nuestra función, reemplazando a por 1 y 2, respectivamente. Nos quedan dos posibilidades.

Si a = 1:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } 1 \le x \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Si a = 2:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2 & \text{si } 1 \le x \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

No termina acá el ejercicio. Todavía falta calcular f '(1) en cada caso, para ver que es derivable para esos valores de a. Usamos el cociente incremental, o sea, por definición.
Repasemos un poco cómo se calcula la derivada por cociente incremental (la derivada por definición):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Vamos a hacerlo con cada caso por separado. ¿Qué rama usamos para calcular f(h)? h es un número que tiende a cero, pero no sabemos si es positivo o negativo. Para que el límite exista, tiene que dar lo mismo por izquierda ($h \to 0^-$, o sea, h negativo) que por derecha ($h \to 0+$, h toma valores un poco más grandes que cero). Si no coincide, f (x) no es derivable si x = 1 para ese valor de a
No nos queda otra que calcular los dos límites y ver qué pasa:

Si a = 1:

Antes calculamos f (1). Por supuesto, tiene que coincidir para ambas ramas de la función. Sino, ¡no es continua! Veamos:

$$f(1) = 3 - 1^2 = 2$$
$$f(1) = 2 / 1 = 2$$

Coinciden, así que estamos bien. Vamos con los límites:

* **Por derecha**:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3 - (1+h)^2 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3 - (1+h)^2 - 2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{3-(h^2+2h+1)-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3-h^2-2h-1-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(-h-2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} -h-2 = -2$$

Entonces, el límite por derecha vale -2.

* **Por izquierda**:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{2}{h+1}-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2-2h-2}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2}{h+1} = -2$$

El límite por izquierda vale -2, lo mismo que por derecha, así que x = 1 es continua y derivable si a = 1.

Si a = 2:

Igual que antes, calculamos f (1) para ambas ramas de la función:

$$f(1) = 3 - 2x^2 = 3 - 2(1)^2 = 3 - 2 = 1$$

$$f(1) = 1 / x = 1 / 1 = 1$$

Coinciden! Veamos los límites en este caso:

* **Por derecha**:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3-2(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3-2(1+h)^2-1}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{3-2(h^2+2h+1)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3-2h^2-4h-2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h^2-4h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(-2h-4)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} -2h-4 = -4$$

Entonces, el límite por derecha vale - 4.

* **Por izquierda**:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{h+1}-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-h-1}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{h+1} = -1$$

El límite por izquierda vale - 1, pero por derecha vale - 4, así que x = 1 es continua y pero no derivable si a = 2.

Por lo tanto, f (x) es continua y derivable en x = 1 si a = 1.

---

2) (de final)

La recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x}$ en x = 1 es

☐ y = x - 1 ● $\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ ☐ y = 2x - 2 ☐ y = $\frac{1}{2}$x

La recta tangente en un punto se calcula con esta formulita:

$$y = f'(x_0) . (x - x_0) + f(x_0)$$

donde x_0 es el punto por el que pasa nuestra recta tangente

En esta caso, $x_0 = 1$, así que la recta tangente quedaría así:

$$y = f'(1) . (x - 1) + f(1)$$

Así que lo único que tenemos que hacer es calcular f(1) y f'(1) y reemplazarlo en la formulita. Empecemos por f(1):

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x} \Rightarrow f(1) = \frac{\ln(1)}{1+1} = \frac{0}{2} \Rightarrow f(1) = 0$$

Entonces f(1) = 0. Ahora derivemos para encontrar f'(1). Para derivar una división usamos la fórmula:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x) - \ln(x).1}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1}{x} + 1 - \ln(x).1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{\frac{1}{1} + 1 - \ln(1).1}{(1+1)^2} = \frac{1+1-0}{(2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2}{4} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

Listo, ya tenemos los dos datos que necesitamos: f(1) = 0 y f´(1) = $^1/_2$. Los reemplazamos en la fórmula de la recta y listo:

$$y = f'(1) . (x - 1) + f(1) \Rightarrow y = {}^1/_2 . (x - 1) + 0 \Rightarrow \boxed{y = {}^1/_2 . x - {}^1/_2}$$

Y esa es la respuesta.

---

3) (de final)

Si $g(x) = f(x^2)$ y $f'(x) = \sqrt{5x-1}$ entonces la derivada de g(x), g´(x) es igual a

☐ $\sqrt{5x-1}$ ☐ $\sqrt{5x^2-1}$ ☐ $2x\sqrt{5x-1}$ ● $\boxed{2x\sqrt{5x^2-1}}$

Para derivar g(x), usamos la Regla de la Cadena. Nos queda:

$$g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = f'(x^2).2x$$

Ahora, ¿cómo sabemos cuánto vale $f'(x^2)$? Tenemos como dato f'(x), así que lo único que tenemos que hacer es reemplazar:

$$f'(x) = \sqrt{5x-1} \Rightarrow f'(x^2) = \sqrt{5x^2-1}$$

Sólo nos queda reemplazar esto en g´(x):

$$g'(x) = f'(x^2).2x \Rightarrow g'(x) = \sqrt{5x^2 - 1}.2x \Rightarrow g'(x) = 2x\sqrt{5x^2 - 1}$$

Entonces, la respuesta es que $\boxed{g'(x) = 2x\sqrt{5x^2 - 1}}$

---

4) (de final)

La función $f(x) = x + 3.(x - 2)^{2/3}$ en x = 2

● es continua pero no derivable ☐ es continua y derivable

☐ no es continua pero es derivable ☐ no es continua ni derivable

Para saber si esta función es continua y/o derivable en x = 2, primero la reescribimos para ver mejor de qué se trata. No te olvides que si tenemos un exponente fraccionario, el numerador (el numerito de arriba) indica potencia, y el denominador (el de abajo), indica raíz. Quedaría así:

$$f(x) = x + 3.(x - 2)^{2/3} = x + 3\sqrt[3]{(x - 2)^2}$$

Ahora, para ver que es continua en x = 2, tendríamos que ver si se puede calcular f(2) sin problemas. Veamos:

$$f(2) = 2 + 3\sqrt[3]{(2 - 2)^2} = 2 + 3\sqrt[3]{(0)^2} = 2 + 3\sqrt[3]{0} = 2 + 3.0 \Rightarrow f(2) = 2$$

Pudimos calcular f(2), así que es continua. Ahora derivamos para poder calcular f'(2). Si existe, también es derivable:

$$f(x) = x + 3.(x - 2)^{2/3} \Rightarrow f'(x) = 1 + 3.\frac{2}{3}.(x - 2)^{-1/3} = 1 + 2.(x - 2)^{-1/3} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x - 2}}$$

Ojo acá. Si reemplazamos por x = 2 en la derivada, nos quedaría 2 / 0, y eso es una indeterminación, no se puede calcular. Así que la derivada la tenemos que calcular por definición. ¿Te acordás como era? Teníamos que usar esta fórmula:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

Veamos qué queda:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 + h + 3\sqrt[3]{(2 + h - 2)^2} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 3\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 3h^{2/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(1 + 3h^{-1/3})}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(1 + 3h^{-1/3})}{h} = \lim_{h \to 0} 1 + 3h^{-1/3} = \lim_{h \to 0} 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{h}}$$

Nos vuelve a quedar una indeterminación, esta vez 3 / 0. Eso tiende a + ∞ (sumarle 1 no cambia la cosa), y eso significa que la derivada no existe. Por lo tanto, la respuesta es que la función en x = 2 **es continua pero no derivable**

---

5) (de final)

Sean f una función inversible e y = 3x + 5 la recta tangente al gráfico de f en el punto (0 , f(0)). Entonces la recta tangente al gráfico de f^{-1} en (5 , $f^{-1}(5)$) es

☐ $y = -3x + 3$ ☐ $y = -3x$ ☐ $y = {}^1/_3\, x$ ● $\boxed{y = {}^1/_3\, x - {}^5/_3}$

La recta tangente en un punto se calcula con esta formulita:

$$y = f'(x_0) \,.\, (x - x_0) + f(x_0)$$

donde x_0 es el punto por el que pasa nuestra recta tangente

En este caso, ya nos don la recta tangente, y nos dicen que el punto es (0, f(0). Esto quiere decir que $x_0 = 0$. Calculemos a partir de la recta tangente cuánto vale $f(x_0)$:

$$y = 3x + 5 \Rightarrow 3.\,(x - 0) + 5$$

De acá, podemos deducir que f(0) = 5, y además, que f'(0) = 3 (es la pendiente de la recta).

También nos dicen que f es inversible, y nos piden que encontremos la recta tangente en
f^{-1} (5) (la inversa de f). Justamente, 5 es el valor que toma f en 0. Así que el punto sería $(x_0 , f^{-1}(x_0)) = (5 , 0)$.

Ahora, para encontrar la recta tangente, lo que vamos a hacer es buscar la inversa de la que nos dan. ¿Cómo se hace? Despejando x en la ecuación, y después cambiando una variable por otra. Así:

$$y = 3x + 5 \Rightarrow y - 5 = 3x \Rightarrow (y - 5) : 3 = x \Rightarrow {}^y/_3 - {}^5/_3 = x$$

Cambiamos una variable por otra, y la recta queda: $\boxed{\mathbf{y = {}^1/_3\, x - {}^5/_3}}$, y esa es la respuesta.

---

6) (de final)

La recta tangente al gráfico de $f(x) = (2x)^{2x}$ en el punto (${}^1/_2$, $f({}^1/_2)$) tiene ecuación

☐ $y = 2x + 1$ ☐ $y = 4x + 1$ ● $\boxed{y = 2x}$ ☐ $y = 4x + 3$

Otra vez nos piden una recta tangente, así que volvemos a necesitar la fórmula:

$$y = f'(x_0) \,.\, (x - x_0) + f(x_0)$$

donde x_0 es el punto por el que pasa nuestra recta tangente

Primero calculamos $f({}^1/_2)$ para saber cuál es el punto:

$$f({}^1/_2) = (2.{}^1/_2)^{2.(1/2)} = (1)^1 \Rightarrow f({}^1/_2) = 1$$

Ahora vamos con la derivada. En esta hay que usar esta formulita, que no siempre aparece en las tablas de derivadas. No hay que confundirse: acá hay una función elevada a la otra, y ninguna de las dos es una constante. Así que no nos sirven las formulas que usaríamos para derivar 2^x o x^2. Necesitamos esta:

$$[f(x)^{g(x)}]' = g(x) . f(x)^{g(x)-1} . f'(x) + f(x)^{g(x)} . g'(x) . \ln (f (x))$$

En este caso, la derivada quedaría así:

$$f'(x) = [2x^{2x}]' = 2x . (2x)^{2x-1} . 2 + (2x)^{2x} . 2. \ln (2x) = (2x)^{2x} . 2 + (2x)^{2x} . 2. \ln (2x) \Rightarrow$$
$$f'(x) = (2x)^{2x} . 2 . (1 + \ln (2x))$$

Ahora reemplazamos por $^1/_2$:

$$f'(^1/_2) = (2.{}^1/_2)^{2.(1/2)} . 2 . (1 + \ln (2.{}^1/_2)) = 1^1 . 2 (1 + \ln 1) = 2 (1 + 0) = 2$$

Sólo nos queda reemplazar con los datos en la fórmula de la recta:

$$y = f'(x_0) . (x - x_0) + f (x_0) \Rightarrow y = f'(^1/_2) . (x - {}^1/_2) + f (^1/_2) \Rightarrow y = 2 . (x - {}^1/_2) + 1 \Rightarrow$$
$$y = 2x - 2.(^1/_2) + 1 \Rightarrow y = 2x - 1 + 1 \Rightarrow y = 2x$$

Entonces, la respuesta es $\boxed{\mathbf{y = 2x}}$

Una aclaración: si estás pensando ponerte a hacer modelos primeros parciales para ir practicando, seguramente podrías hacer, con lo que vimos hasta ahora, el primer ejercicio, que suele ser de sucesiones y límite.

Tal vez el segundo ejercicio te parezca que lo podés hacer, pero te encuentres con un límite que no sabés resolver: eso es porque todavía no vimos una regla, la de L'Hopital, que se ven en la Unidad 6.

De todos modos, ya podés resolver toda la práctica 5, completa. Tratá de hacer todos los ejercicios que puedas, especialmente los de la sección "Problemas Varios", que relacionan todo lo visto en la unidad.