UNIDAD 2: NÚMEROS REALES

Tal vez ya te hayan hablado de números reales en el colegio secundario. Y te hayan dicho, más o menos, que eran "todos los números", porque englobaban a todos los demás conjuntos numéricos. Recordemos cuáles eran:

* Naturales (N): Todos los que se pueden usar para contar los elementos de un conjunto. Serían, por ejemplo, 1, 2, 3, 4…. Ojo: el 0 no es un número natural

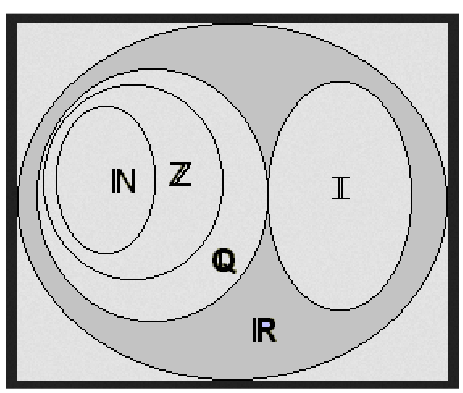
* Enteros (Z): Son todos los anteriores, y ahora agregamos el 0, y los opuestos de los naturales (o sea, los negativos de éstos). Por ejemplo: ….-3, -2, -1, 0, 1, 2…

* Racionales (Q): Son todos los números que podemos escribir como la división p/q entre un entero (p) y un natural (q). O sea, las fracciones
También lo podés ver como la división entre dos enteros, siempre que el de abajo, el denominador no sea 0 (¡no te olvides que no se puede dividir por cero!). Ojo: los enteros también son racionales. ¡Pero cómo, si no son fracciones!
Es cierto eso, pero se pueden escribir como fracciones, con denominador 1. Por ejemplo, 2 es lo mismo que $\frac{2}{1}$. O que $\frac{30}{15}$. Además, podríamos encontrarnos con que más de una fracción representa lo mismo, como en este caso.
Entonces, por ejemplo, estos son números raciones: -3/4, 1/2, 0, 5, -2, etc.

* Irracionales (I): hay algunos números que no se pueden escribir como fracciones, porque tienen infinitos decimales periódicos. Por eso, se llaman irraciones. Ejemplos de esto, serían $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, 1,01001000100001…., π, o el número e (del que ya vamos a hablar más adelante)

* Reales (R): Este es el conjunto que junta a los racionales y a los irracionales. O sea, un número que sea racional o irracional, es real. Así que cualquiera de los ejemplos anteriores serviría acá.

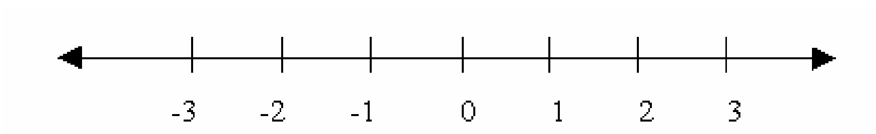
Haciendo un dibujito:



Ojo: no todos los números que se podrían obtener son reales. Aunque esto te pueda parecer nuevo, tal vez te suena de acá: las raíces del polinomio $x^2 + 1$ no son reales, porque son $\pm\sqrt{-1}$, y ese número (por ahora, y a lo largo de esta materia) no lo podemos calcular. Este número pertecene al conjunto de los números complejos (*C*), de hecho, a $\sqrt{-1}$ se lo conoce como *i*.
Pero eso lo vas a ver en Álgebra del CBC, y en muchas materias que siguen.
De todos modos, esta aclaración es importante para que entiendas que no todas las cuentas que hagas te van a dar números reales. Y eso no tiene nada de malo. Ya vamos a aprender a interpretar qué significa cuando algo no nos da real.

La recta real

Los números reales se pueden dibujar en una recta, que conocemos como la **recta real**, y continúa hasta los infinitos (positivo y negativo):



Ahora, te hago una pregunta, ¿podríamos contar la cantidad de números reales que existen?
Respuesta: no, son infinitos. ¡Es como contar ovejas! (suponiendo que no te quedes dormido/a en algún momento)

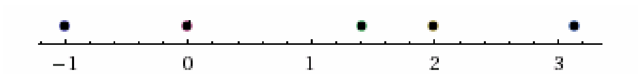
¿Y si contamos a partir del 0?
Respuesta: tampoco.

Achiquemos un poco: contemos cuántos números reales hay entre 1 y 2.
Veamos: empiezo por 1. Después viene 1,1, después 1,2 ; 1,3 ; 1,4....
¿Está bien esto? No. Porque entre 1,1 y 1,2 podría estar, por ejemplo, el 1,11. Y el 1,111. Y el 1,1111.
¿Entonces? Este conjunto también es infinito. Es como si hiciéramos "zoom" en la recta real. No terminaríamos nunca.

Y acá hablamos bastante de un concepto que se va a repetir mucho a lo largo de la materia: el **infinito**. Esto significa algo que no termina nunca. Aún así, vamos a trabajar bastante en esta materia con infinitos. Si bien son algo que no termina nunca, los podemos comparar entre sí. Por ejemplo, aunque no los podemos contar, nos podemos imaginar que hay más numeros entre 0 y 3 que entre 1 y 2. No sólo midiendo en la recta real (con conjuntos más grandes esto es imposible) sino pensando así: todos los números entre 1 y 2 están metidos adentro del espacio entre 0 y 3. Así que entre 0 y 3 seguro que hay más números.

Aunque los números reales no se puedan contar, hay algo que sí se puede hacer: ordenarlos. Siempre que tengamos un par de números reales, sólo pueden pasar tres cosas: que el primero sea más grande que el segundo, que el segundo sea mayor que el primero, o que sean iguales.
De esta manera, los podemos ordenar.

Por ejemplo, podríamos ubicar los números -1, 0, 2, π (parecido a 3,14, lo podés ver en la calculadora) y $\sqrt{2}$ (parecido a 1,41. Se puede escribir más resumido así: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$) Veamos:



Intervalos

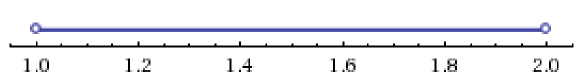
Como ya estuvimos hablando, el conjunto de los reales se puede restringir, o sea, recortar todo lo que queramos. Como antes, cuando nos referimos a todos los números que están entre 1 y 2. Este conjunto se puede expresar de 3 maneras:

* Como inecuación: acá aparece la x, porque hablamos de todos los números x adentro de este intervalo.

$$1 < x < 2$$

* Como intervalo: Es parecido a lo anterior, pero más resumido: $x \in (1 , 2)$, o simplemente (1,2). El símbolo $\in$ significa "pertenece".

* En la recta: marcamos los extremos (no los incuimos, porque estamos entre 1 y 2, pero no los "tocamos"), y "pintamos" todo lo de adentro, así:



Entonces, generalizando:

* Desigualdades estrictas (> ó <): el borde no queda adentro del conjunto (como en el ejemplo anterior). Esto lo marcamos usando paréntesis en el gráfico y en el intervalo.

* Desigualdades no estrictas (≥ , ≤ ó =): el borde sí pertenece al conjunto (el ejemplo anterior, pero con 1 y 2 inclusive). Lo marcamos usando corchete ([ó]) en el gráfico y en el intervalo.

Ojo: con +∞ y -∞ siempre se usa paréntesis. ¡Porque nunca los podemos alcanzar!

Hagamos algunos ejemplos:

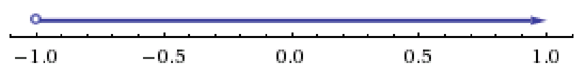
Expresar de las tres maneras los siguientes conjuntos númericos:

1) Todos los números reales mayores que -1
2) Todos los números reales mayores o iguales que -1
3) Todos los números reales que distan de 0 menos que 2
4) $\{x \in R \ / \ 2x - 3 \geq 5\}$
5) $\{x \in R \ / \ x^2 > 4\}$
6) $\{x \in R \ / \ 1 < 2x - 3 < 5\}$

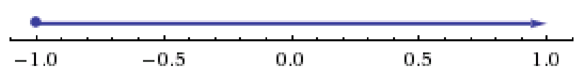
1) Con "todos los números reales" nos referimos a todos los x. Como son mayores que -1, lo escribmos como inecuación así:

$$x > -1 \text{ ó } -1 < x$$

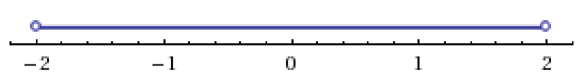
Como intervalo: $(-1 ; +\infty)$
En la recta:



2) Es muy parecido al anterior:
Inecuación: $x \geq -1$ ó $-1 \leq x$
Intervalo: $[-1 ; +\infty)$
Recta:



3) Acá vamos a hablar de **módulo** ó **valor absoluto**. Esta es la distancia de un número al 0, y se escribe así: $| x |$. En este caso, si queremos decir que la distancia al 0 es menos que dos, decimos que $| x | < 2$.
El módulo se puede desarmar, y escribir como una ineacuación. En general, si tenemos que $| x | < a$, es lo mismo que decir que $-a < x < a$. Y si fuera $| x | = a$, tenemos dos posibilidades: o bien $x = a$ ó $x = -a$.
En este caso, la inecuación queda: $-2 < x < 2$.
Como intervalo: $(-2 , 2)$
En la recta:



(podemos ver que todos los números marcados están a menos de 2 unidades del 0)

4) Acá tenemos que despejar la inecuación. Se resuelven igual que las ecuaciones, podemos pasar cosas sumando, restando, multiplicando, dividiendo, potencias y raíces

de la misma manera. Pero con una excepción: si pasamos multiplicando o dividiendo algo negativo, el sentido del signo de la inecuación cambia. Por ejemplo, si tenemos

$$-2x < 4 \Rightarrow x > 4:(-2) \Rightarrow x > -2$$

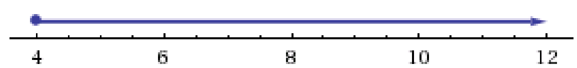
Otra forma de verlo (y te la recomiendo, para evitar confusiones) es pasar sumando el $-2x$ y restando el 4. Así, evitamos tener que cambiar el signo. Veamos:

$$-2x < 4 \Rightarrow -4 < 2x \Rightarrow -4 : 2 < x \Rightarrow -2 < x \Rightarrow x > -2$$

Volviendo al ejercicio, resolvemos para despejar x y obtener la inecuación:

$$2x - 3 \geq 5 \Rightarrow 2x \geq 5 + 3 \Rightarrow x \geq 8 : 2 \Rightarrow x \geq 4$$

Como intervalo: $[4 ; +\infty)$
En la recta:



5) Acá vamos a explicarte algo que vas a usar siempre: si tenés una potencia cuadrada (o cualquier otra potencia PAR), cuando lo pasás al otro lado como raíz, tenés que ponerle módulo a la x, o lo que sea la expresión que está al cuadrado. Esto es porque, como vimos antes, cuando algo está al cuadrado podría tener dos soluciones posibles. Por ejemplo, la solución de $x^2 = 4$ puede ser 2 ó -2.

Con las inecuaciones pasa lo mismo. Veamos:

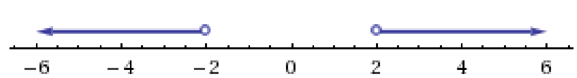
$$x^2 > 4 \Rightarrow |x| > \sqrt{4} \Rightarrow |x| > 2$$

Acá hay que desarmar el módulo. Pero acá tenemos un mayor, no un menor o un igual. O sea, estamos hablando de todos los números que distan del 0 más de 2. Así que ya nos podemos imaginar que nos van a quedar dos pedazos.
Estos módulos se desarman así:

$$|x| > 2 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \text{ó} \\ x < -2 \end{cases}$$

Por un lado, la inecuación que tenemos, sin el módulo, y por el otro, la misma inecuación, con el signo del número cambiado, y el símbolo opuesto

Y ya tenemos la inecuación. Veamos primero la recta:



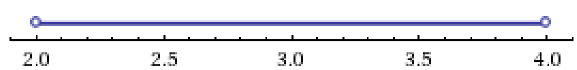
Nos quedaron dos intervalos. A estos se los llama "conjuntos disjuntos", porque no está uno al lado del otro. Lo que vamos a hacer es escribir esto como una **unión de intervalos**. O sea, escribimos cada uno por separado, y los juntamos con una U en el medio, así:

$$(-\infty ; -2) \cup (2 ; +\infty)$$

6) Acá tenemos dos maneras de seguir. Una es separar esta inecuación en 2, y resolverlas por separado, haciendo por un lado $1 < 2x + 3$ y por otro $2x + 3 < 5$.
Pero hay una manera más fácil: podemos despejar todo en la misma inecuación de tres partes, teniendo cuidado con lo siguiente: si pasamos algo sumando, restando, etc., sólo lo podemos hacer desde el centro hacia los extremos, pasándolo a ambos lados. Así:

$$1 < 2x - 3 < 5$$
$$1 + \mathbf{3} < 2x < 5 + \mathbf{3}$$
$$4 : \mathbf{2} < x < 8 : \mathbf{2}$$
$$2 < x < 4$$

Y ya tenemos la inecuación. El intervalo es (2 ; 4), y la recta:



Supremo e ínfimo

Vamos a hablar de algunos conceptos sobre los conjuntos que están adentro de los números reales, o sea, los subconjuntos de R. Si los llamamos A, pordríamos decir que $A \subseteq R$.

* Un número real M se llama **cota superior** de A, si cualquier elemento $a \in A$ cumple que $a \leq M$. (M es más grande que todos los elementos de A)

* Un conjunto A que tenga alguna cota superior se dice **acotado superiormente**.

* Si la cota superior pertenece al conjunto, se llama **máximo** del conjunto. El máximp, en caso de existir, es único (para ese conjunto A)

De la misma manera, en forma simétrica, podríamos definir **cota inferior, conjunto acotado inferiormente y mínimo** de un conjunto.

* Si además el conjunto A no es vacío y está acotado superiormente (o sea, tiene cotas superiores), la menor de esas cotas se llama **supremo** (lo escribimos sup A). O sea, podemos decir que $s \in R$ es el supremos de A (s = sup A).

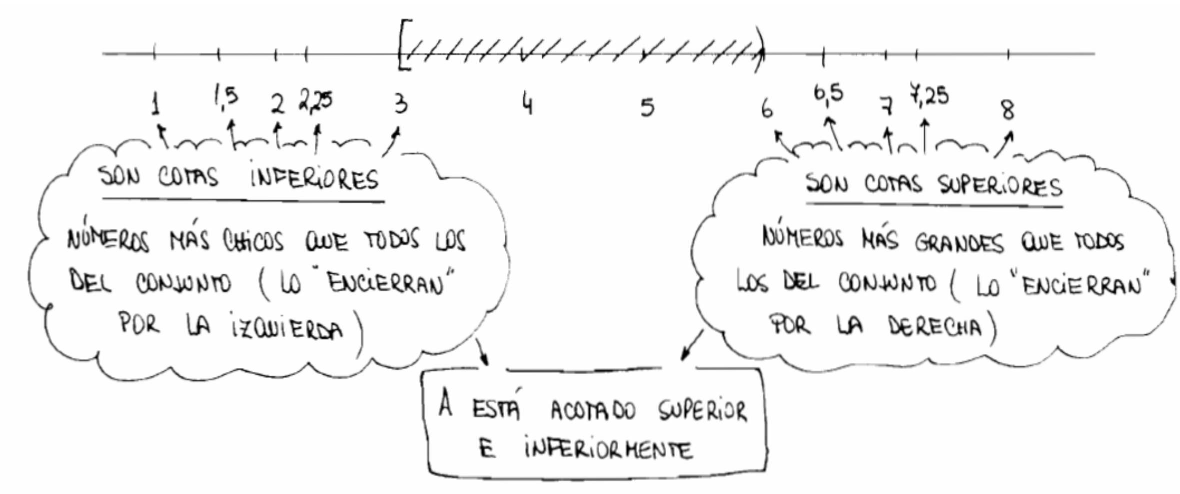
Tiene que cumplir dos cosas:

a) s es cota superior de A
b) para cualquier número t que sea menor que s (t < s), podemos encontrar algún elemento de a, a ϵ A, tal que t < a ≤ s.
Esto quiere decir que cualquier número menor que s ya no es cota superior de A, y entonces s es la menor de todas esas cotas.

Otra vez, el supremo, en caso de existir, es único.

De la misma manera, simétricamente, se define el **ínfimo** de A (ínf A).

Después de tantas palabras, veamos un dibujito de todo eso. Por ejemplo, si tenemos el conjunto A = [3 ; 6):



Además:

* 6 es la más chica de las cotas superiores (cualquier número menor que 6 ya no es cota superior) ➔ sup A = 6
* 3 es la más grande de las cotas inferiores (cualquier número mayor, ya no es cota superior) ➔ ínf A = 3

Entonces:

* 3 ∈ A y es cota inferior ➔ es el mínimo de A ➔ mín A = 3
* 6 ∉ A y es la menor de las cotas superiores ➔ el conjunto no tiene máximo (porque si no es la menor de las cotas superiores, otro no puede ser)

Hagamos algunos ejercicios para repasar esto.

Encontrar, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de cada uno de los siguientes conjuntos:

$A = \{ 1/n, n \in N\}$
$B = N$
$C = \{5; 5,9; 5,99; 5,999; \dots \}$

A) Veamos cómo vienen los términos de este conjunto. $n \in N$ significa que n es un número natural, y le vamos dando valores, fijate:

$$n = 1 \rightarrow 1/1 = 1$$
$$n = 2 \rightarrow 1/2 = 0,5$$
$$n = 3 \rightarrow 1/3 = 0,3333....$$
$$n = 4 \rightarrow 1/4 = 0,25$$
$$n = 5 \rightarrow 1/5 = 0,2$$

¿Ves por dónde va la cosa? Los números cada vez se hacen más chicos, y se van acercando a 0. Por ejemplo:

$$n = 1\,000 \rightarrow 0,001$$
$$n = 10\,000 \rightarrow 0,0001$$

Pero aunque se acercan infinitamente, nunca lo alcanzan. En el próximo capítulo vamos a ver que esto significa que convergen a 0.
Entonces, veamos qué pasa con lo que nos piden.

¿Hay supremo? Sí, es el 1 que es mayor O IGUAL a todos los elementos del conjunto
¿Está en el conjunto? Sí, porque es el primer término. Entonces, máx A = 1
¿Hay ínfimo? Sí, es el 0, porque es menor a todos los elementos del conjunto, y no hay otro más chico.
¿Está en el conjunto? No, porque el 0 nunca se alcanza. ¿y si no me hubiera dado cuenta de que nunca llegaba a 0? Fácil, resolvemos la ecuación, para encontrar, si existe, un valor de n que nos mande al 0:

$$1/n = 0 \Rightarrow 1 = 0 \,.\, n \Rightarrow 1 = 0 \text{ absurdo!}$$

Como llegamos a una contradicción, podemos decir que esa ecuación no se puede resolver nunca. Entonces, no hay un valor de n tal que 1/n sea igual a 0.

Por lo tanto, 0 es el ínfimo, pero no es el mínimo.

B) Acá estamos hablando de los números naturales. Como dijimos al principio, este conjunto serían los números 1, 2, 3, 4....

¿Hay supremo? No, porque el conjunto continúa hasta el infinito. NUNCA podemos considerar a $+\infty$ ó a $-\infty$ como cotas, mucho menos como supremos, ínfimos, máximos o mínimos. ¿Por qué? Porque no son números.
Entonces, no va a haber máximo, porque el único candidato posible es el supremo, que no existe en este caso.
¿Hay ínfimo? Sí, el 1.
¿Pertence al conjunto? Sí, porque es un número natural. Entonces, 1 es el máximo del conjunto B.

C) Este caso es como una mezcla de los dos anteriores.

¿Hay supremo? Sí, es el 6, porque los elementos del conjunto se acercan infinitamente a este número.
¿Es el máximo? No, porque no pertenece al conjunto C
¿Hay ínfimo? Sí, es el 5.
¿Es el mínimo? Si, porque pertenece al conjunto.

Ahora, vamos a hacer un ejercicio teórico:

Sean A y B dos conjuntos de números reales no vacíos y acotados de modo que $A \subset B$. rdenar de menor a mayor los siguientes números:

sup A, sup B, ínf A, ínf B

Escribir un ejemplo donde sup A = sup B y otro donde la desigualdad sea estricta.

Si $A \subset B$, B puede tener elementos que sea mayores que los de A. Entonces, su supremo también deberá ser mayor que el de A:

$$\sup A \leq \sup B$$

Del mismo modo, puede haber en B elementos más chicos que los de A, entonces, va a pasar que:

$$\text{ínf } B \leq \inf A$$

Además, como el ínfimo es siempre más chico o igual al supremo (porque uno es cota inferior y el otro es cota superior) podemos decir que:

$$\text{ínf } A \leq \sup A$$

Entonces, podemos encadenar todas las desigualdad, y finalmente nos queda:

$$\text{ínf } B \leq \text{ínf } A \leq \sup A \leq \sup B$$

Vamos con los ejemplos:

Si sup A = sup B:

$$A = (3 ; 7) \quad y \qquad B = (-2 ; 7)$$

$A \subset B$ y sup A = sup B = 7.

Si sup A < sup B:

$$A = (3 ; 7) \quad y \qquad B = (-2 ; 10)$$

$A \subset B$ y sup A = 7 < 10 = sup B.

De la misma manera podríamos encontrar ejemplos donde ínf A = ínf B y otros donde ínf B < ínf A.

Pregunta: ¿Habrá casos donde sup A = ínf A?
Pensemos en este detalle, que comparten el supremo y el ínfimo: son mayor (o menor, respectivamente) que los elementos del conjunto. Así que la única manera de encadenarlos, es que todos los elementos sean iguales. Por ejemplo, el conjunto D = {4, 4, 4,...}. Tiene supremo, tiene ínfimo (en ambos casos es 4), y son iguales.
Respuesta: Entonces sí, esto puede pasar.

Última observación

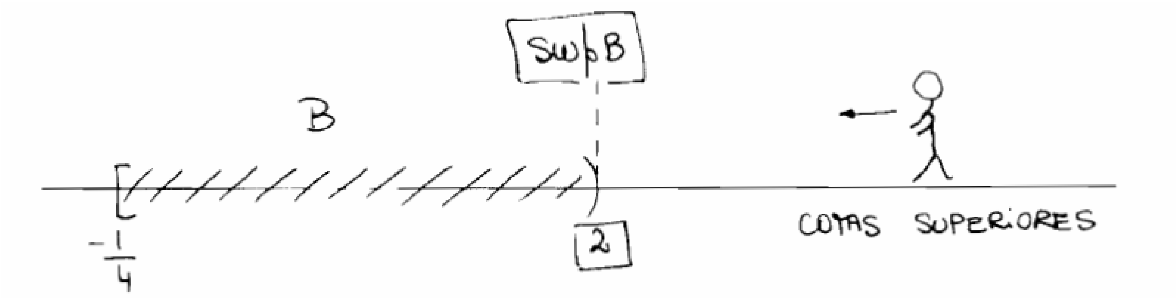
Habrás visto que, según los ejercicios resueltos, las combinaciones sobre existencia de supremo, ínfimo, máximo y mínimo son variadas.
Pero cada vez que un conjunto estaba acotado, le encontramos supremo y/o ínfimo (según los tipos de cota que tuviera).
Esto no es casualidad. Es una propiedad muy importante de los números reales, con los que trabajamos.
En otros conjuntos, como en Q, no funciona igual.
Entonces, la propiedad es así:

Axioma de Completitud: cualquier subconjunto no vacío de los números reales acotado superiormente tiene supremo.
(lo mismo vale para "acotado inferiormente" e "ínfimo")

Si lo miramos geométricamente, esto se asocia con que la recta (relacionada con el conjunto R, como vimos al principio) no tiene agujeros, está completa (de ahí el nombre del axioma).

Por ejemplo, si tomamos el conjunto E = [-1/4 ; 2), E cumple con las condiciones del axioma:

$E \subseteq R \quad E \neq \emptyset \quad$ E es acotado superiormente



Voy a encontrar supremo porque me "deslizo" sobre la recta (completa, sin agüjeros) por las c otas superiores de B, hasta encontrar la menor de todas (el supremo).
Lo mismo va a pasar con el ínfimo, si vengo desde el otro lado.

<u>**Ejercicios**</u>

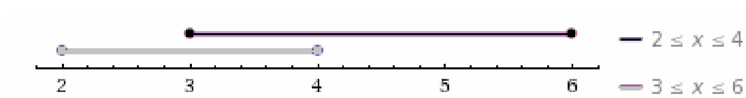
Vamos a hacer algunos ejercicios más, para practicar lo que vimos en esta unidad.

1) Representar en la recta los siguientes conjuntos:

a) [2 , 4] $\cap$ [3 , 6]
b) [2 , 4] $\cup$ [3 , 6]
c) (-∞ , 3) $\cap$ (1, +∞)
d) (-1 , 3) $\cap$ [3, +∞)
e) (-1 , 3) $\cup$ [3, +∞)
f) (-1 , 3) $\cup$ (3 , 5)

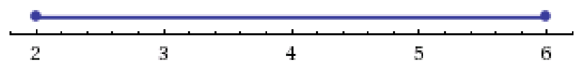
El símbolo $\cap$ significa intersección.
La **intersección de intervalos** es el conjunto de elementos que tienen en común dos intervalos.

a) Acá nos va a resultar más fácil dibujar los dos conjuntos en una misma recta, y ver dónde se cruzan:

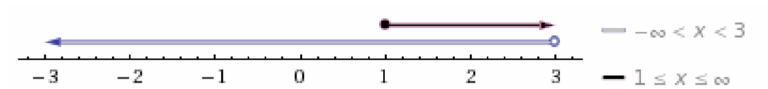


Como podemos ver, se "encuentran" en [3 , 4]. Usamos corchetes porque los extremos están incluidos, porque tanto 3 como 4 perteneces a los dos conjuntos.
Entonces la recta queda:

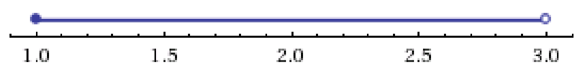
b) Acá tenemos el mismo intervalo, pero ahora en vez de buscar el conjunto que contenga a los elementos en común (intersección), vamos a buscar al que contiene a todos los elementos de ambos conjuntos (unión). O sea, un conjunto que englobe a los dos. En este caso, va a ser el [2 , 6]. En la recta:



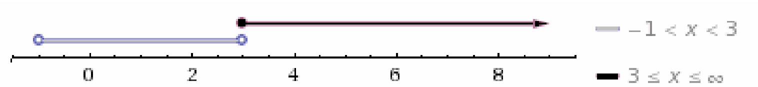
c) Grafiquemos los dos conjuntos para ver mejor dónde se cruzan:



Como podemos ver, se cruzan en [1 ,3). Entonces la recta queda:



d) Lo mismo que antes:



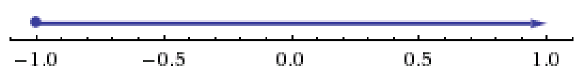
Ah, entonces se cruzan sólo en el 3, ¿no? Ojo acá: para que un elemento esté en la intersección, tiene que pertenecer a los dos conjuntos. 3 pertenece a [3, +∞), es cierto, pero no pertenece a (-1 , 3). O sea, es el supremo, pero no el máximo.
Así que hay que tener mucho cuidado al mirar los dibujos, no es lo mismo cuando está abierto que cuando está cerrado. Si en vez de (-1 , 3), fuera (-1 , 3], ahí si, la intersección sería {3}.
Entonces, el conjunto que nos piden es vacío.

e) Que no haya intersección, ¿significa que no va a haber unión? No, para nada. De hecho, dos conjuntos pueden no compartir ningún elemento, pero siempre vamos a poder encontrar un conjunto que los englobe a ambos.
Por ejemplo, saliendo un poco de los números, supongamos que a vos te gustan las remeras de los colores rojo, blanco y azul. Y a tu amigo, el celeste y el verde. No hay

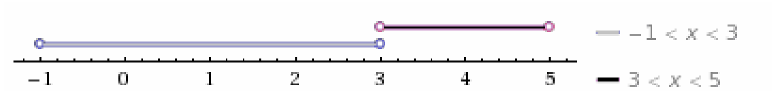
ninguno en común. Pero si en un negocio venden remeras rojas, blancas, azules, celestes y verdes, ambos van a encontrar algo que les guste.

De eso se tratan los conjuntos. Otro ejemplo: ¿cómo hace Facebook para saber qué amigos en común tenés con otra persona? Fácil: si tomamos el conjunto de tus amigos como A, y el conjunto de los amigos de la otra persona como B, con hacer la intersección de conjuntos alcanza para encontrar al nuevo conjunto "amigos en común entre A y B".
La unión sería armar una lista con todos tus amigos y los de la persona B. ¿Puede pasar que no tengan ninguno en común? ¡Por supuesto!

Volviendo al ejercicio, mirando el dibujo, vemos que la unión es (-1 , +∞). La recta:

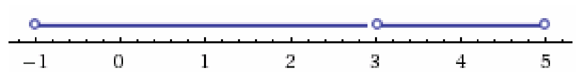


f) Hacemos un dibujo de los dos conjuntos:



¿La unión es (-1 ; 5)? Mirá bien lo que pasa en el 3: ¡no pertence a ninguno de los dos conjuntos! Entonces, no puede estar en la unión. (Si no es amigo tuyo ni de la persona B, !¿cómo puede aparecer en la lista de amigos de ambos?!)

Entonces, el conjunto que nos piden termina siendo el mismo: (-1 , 3) ∪ (3 , 5)



---

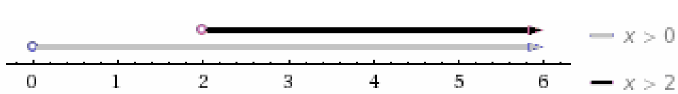
2) Representar en la recta real y escribir como intervalo el conjunto dado por: {x ∊ R / x.(2x - 4) > 0}

Como queremos que un producto (multiplicación) igualada a 0 sea positivo, por la regla de los signos, nos quedan dos casos para x y para 2x - 4:

1) + y + (+ por + es +)

$x > 0$ y $2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2$

En la recta:

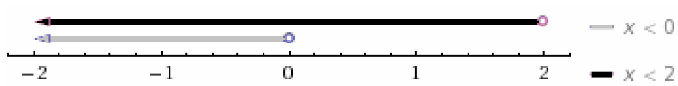


Las dos condiciones se tienen que cumplir al mismo tiempo. Y eso pasa en el intervalo (2 ; +∞).

2) - y - (- por - es -)

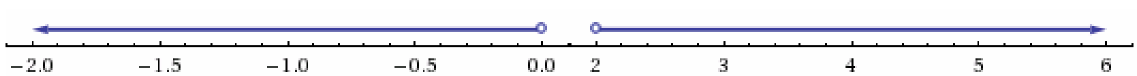
$$x < 0 \quad y \qquad 2x - 4 < 0 \rightarrow x < 2$$

En la recta:



Las dos condiciones se tienen que cumplir al mismo tiempo. Y eso pasa en el intervalo (-∞ , 0).

O sea, en cada caso, lo que nos sirve son las intersecciones. Y el conjunto que buscamos es la unión de esas intersecciones. Entonces, juntando todo, la unión de intervalos nos queda: (-∞ , 0) U (2 ; +∞) (siempre lo escribimos de "izquierda a derecha"). Y la recta sería:



---

3) (sacado de un final!) **Sea** $A = \left\{ \frac{3n-2}{n+5} ; n \in \mathbb{N} \right\}$ **Entonces**

- □ **inf(A) = $-^2/_5$ y sup(A) = 1** □ **inf(A) = -1 y sup(A) = 3**
- • $\boxed{\textbf{inf(A) = } {}^1/_6 \textbf{ y sup(A) = 3}}$ □ **inf(A) = $^3/_5$ y sup(A) = 1**

Como tenemos una sucesión de números Naturales, para hallar el valor máximo y el mínimo de este conjunto, hay que reemplazar la "n" por el menor valor de los números Naturales y por mayor, respectivamente.

El menor valor de N es 1: $A = \frac{3n-2}{n+5} \Rightarrow \inf A = \frac{3.1-2}{1+5} \Rightarrow \inf A = \frac{1}{6}$

El mayor valor de N es +∞ (como vimos antes, el conjunto N está acotado inferiormente pero no superiormente). Así que reemplazamos por valores cada vez más grandes:

$$n = 10 \Rightarrow A = \frac{28}{15} \approx 1{,}86 \;;\; n = 100 \Rightarrow A = \frac{288}{105} \approx 2{,}74 \;;\; n = 1000 \Rightarrow A = \frac{2888}{1005} \approx 2{,}87$$

$$\rightarrow A = \frac{3n-2}{n+5} \Rightarrow \sup A = 3$$

(en la unidad de sucesiones vamos a ver mejor por qué esto vale 3. Por ahora, podemos decir que reemplazando con valores muy grandes, los números se van acercando a 3)

Entonces, el ínfimo y el supremo existen, y valen $\boxed{\textbf{inf A = } {}^1/_6 \textbf{ y sup A = 3}}$, y esa es la respuesta.
