UNIDAD 1: FUNCIONES

Esta es la primera práctica. Tal vez este tema no sea algo nuevo para vos, porque se suele enseñar en el colegio.
No va a ser lo más difícil, pero ojo: todo lo que vamos a decir acá ya se da por sabido en el CBC. Ah, ¿ni siquiera lo dan en clase? En general lo dan en clase, pero en muy pocas. Así que en 3 o 4 clases te van a dar un pantallazo de cosas que viste durante años.

Entonces, prestá atención a esto porque lo vas a necesitar mucho para toda la materia. Y toda la carrera, porque te metiste en Exactas o en Ingeniería, así que vas a ver funciones por todos lados. ¡Así que aprendete bien todo esto antes de seguir!

Si te hablaron de funciones, seguro se te vienen a la cabeza las lineales, cuadráticas, polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc., etc. OK. ¿Y las funciones qué son?

Son una **relación**. ¿Y eso qué es? Una aplicación que asigna elementos de un conjunto a elementos de otro conjunto.

Entonces, ¿cualquier relación entre conjuntos es una función? No. Pero todas las funciones son relaciones, que se definen así:

Función: es una relación en la que **a cada elemento** del **conjunto de partida** le corresponde **uno, y sólo uno**, del **elemento de llegada**. La función es la ley de asignación que determina cómo se relacionan estos conjuntos.

Ahora tenemos que diferenciar el conjunto de partida del conjunto de llegada. El de partida, es en el que "empieza" la función. Durante la materia, lo vamos a llamar **dominio**. El conjunto de llegada, también conocido como **codominio**, es el conjunto al que "van a parar" los elementos del dominio.

Entonces, ¿todos los elementos del dominio van a parar al codominio? No necesariamente. Pensemos un ejemplo:

Se mide la temperatura de una habitación con un termómetro que puede medir entre 0° y 30° durante un día entero, a cada hora. El experimento da como resultado temperaturas que están entre los 20° y los 27°.

Si este experimento fuera una función, ¿cuál sería el dominio? Cada una de las horas de ese día. ¿Y el codominio serían las temperaturas entre los 20 y los 27°? No, serían todas las temperaturas posibles, o sea, entre 0° y 30°. ¿Y qué pasa entre 0 y 27? Ahí tenemos un subconjunto (un conjunto adentro de otro), que se llama **imagen**.

Moraleja: a veces, codominio e imagen no son la misma cosa.
Podemos decir que el codominio son todos los posibles elementos a los que va a parar la función. Y la imagen, los elementos a los que efectivamente va la función.

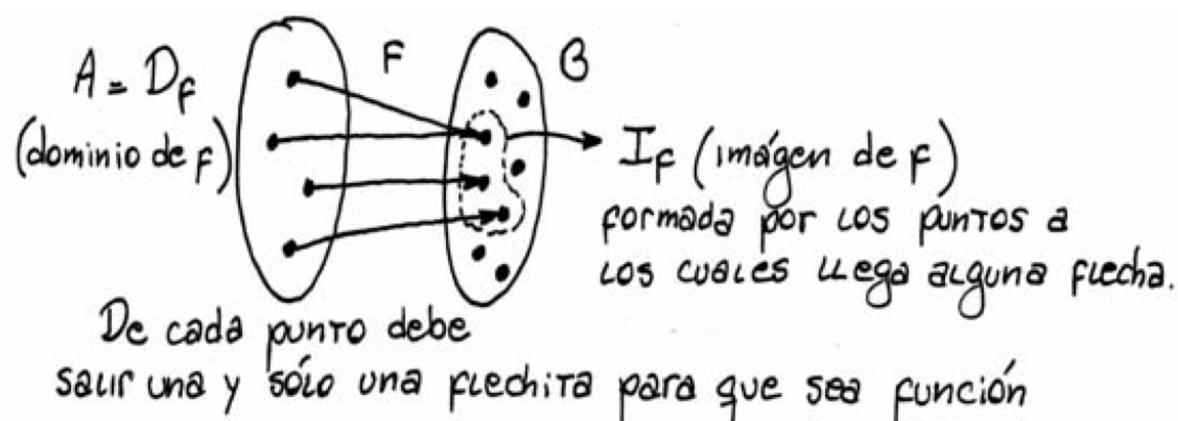
Sigamos con el ejemplo:
* ¿hubiera sido posible que en un determinado horario hubiera más de una temperatura? No. Es imposible! (*)
* ¿hubiera sido posible que no hubiera temperatura en un cierto horario? No. A lo sumo, el termómetro hubiera marcado el máximo o el mínimo, pero siempre hay alguna temperatura, sea muy alta o muy baja. (**)
* ¿hubiera sido posible que en dos o más horarios distintos la temperatura fuera la misma? No! Porque... Un momento. ¿Por qué no? Claro que sí! Eso siempre puede pasar. (***)

(*) Esto se conoce como **unicidad**. A cada elemento del dominio le puede corresponder un elemento, y sólo uno, del codiminio.

(**) Esto se llama **existencia**. Para que haya función, cada elemento del dominio debe tener una imagen.

(***) Esto no va contra la unicidad ni contra la existencia, porque dos elementos del dominio pueden tener la misma imagen.

Hagamos un dibujito:



Nota: las funciones, en general las llamamos "f(x)", que significa f en función de x, o "la imagen de x a través de f". Si trabajamos con más de una función, podríamos tener f(x), g(x), h(x), etc.

Entonces, el par de números (x , f(x)) siempre va a pertenecer a la función. ¿Por qué? x sería el número que elegimos, que puede ser cualquiera del dominio. Y f(x), el resultado de aplicarle la función a esa x.

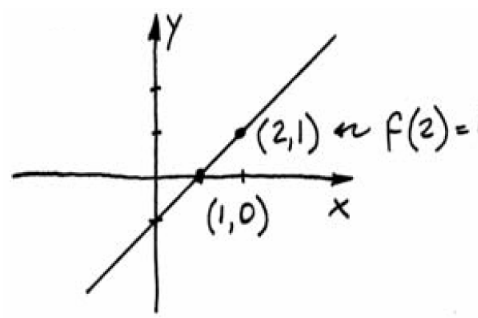
Representación gráfica

Las funciones f: A → B (donde A y B son R, el conjunto de los números reales, o están incluidos en R. Por ejemplo, si nuestro dominio fueran sólo los reales positivos) pueden representarse gráficamente en el plano, o sea, un par de ejes cartesianos.

El gráfico estará dado por los puntos (x ; y) para los cuales y = f(x).

Ejemplo: f : R → R tal que para cada x ϵ R su imagen es: f(x) = x - 1

Así, la imagen de x = 1 será f(1) = 1 - 1 = 0. Su gráfico es:



Como se ve en el gráfico, a cada x le corresponde un y distinto.
Además, tanto el dominio como la imagen son R.

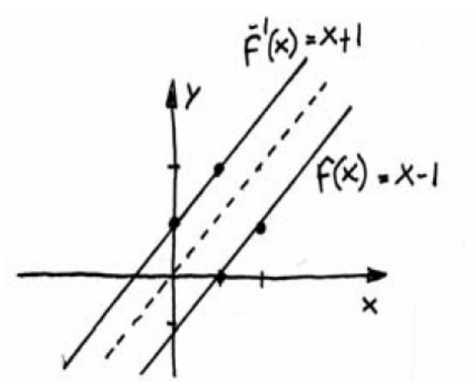
Nota: también se puede calcular la función inversa, que sale de invertir las variables. O sea, en vez de tener y en función de x, pasamos a tener x en función de y.
Esto solo se puede hacer para funciones biyectivas. Es decir, que son inyectivas (cuando nunca hay dos flechas que salen de A llegando a un mismo elemento de B) y sobreyectivas (cuando no hay elementos de B a los que no llegue una flechita).
A esta función la llamamos $f^{-1}(x)$.

En este caso:

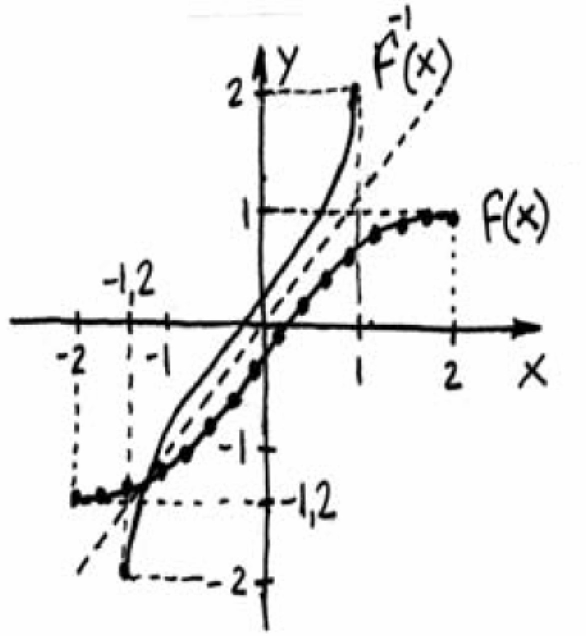
$$x = y + 1 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 1$$

(cambiando x por e y por x, y despejando)

Gráficamente:



Otro ejemplo:



Acá el dominio no es todo R, sino que es [-2 ; 2]. No hay función fuera de esos valores.

La imagen no es R, porque la función, en el eje y, sólo llega a los vales [-1,2 ; 1], que no coincide con todo R.

Entonces, $f^{-1}(x)$ no sería función, porque no cumpliría con la existencia. Pero esto se puede arreglar, cambiando su dominio, para que sea igual a la imagen de f. Entonces, para que sea funciión, tendría que quedar así:

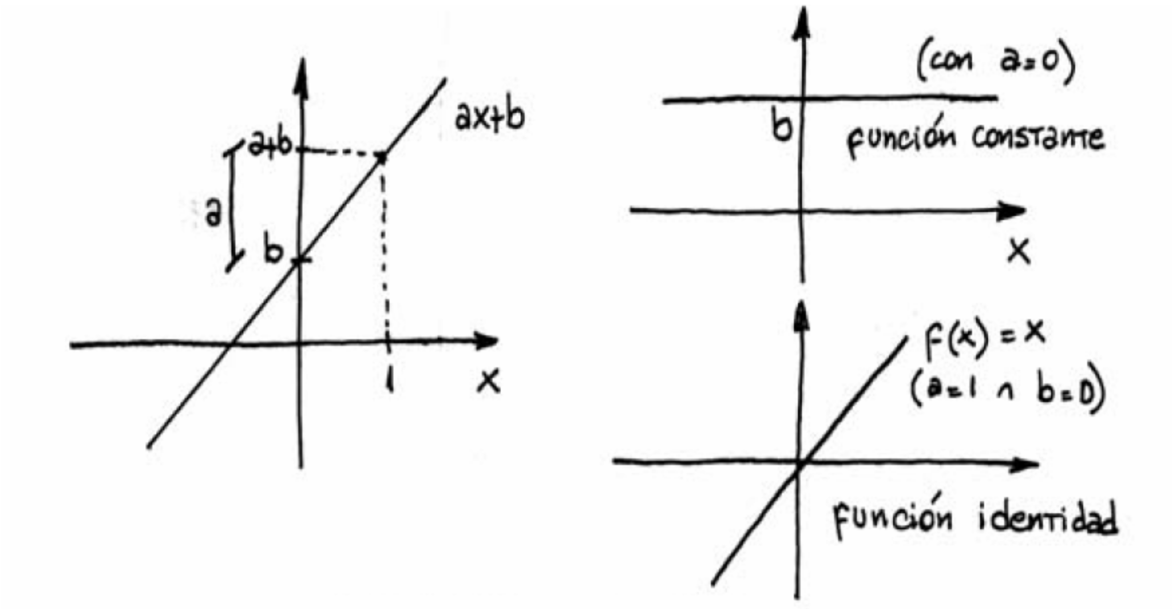
$$f^{-1} : [-1,2 ; 1] \rightarrow [-2 ; 2]$$

Fijate que siempre las funciones y sus inversas son simétricas respecto al eje x (la diagonal punteada). Esto siempre es así.

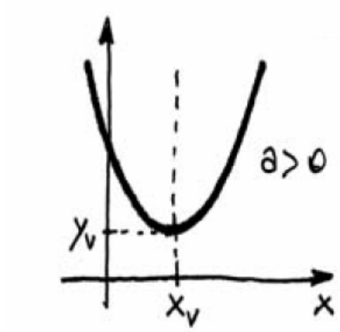
<u>Funciones especiales</u>

Vamos a ver algunas funciones que aparecen con mucha frecuencia en matemática, física, ingeniería, etc.

LINEALES: La forma general es **f(x) = ax + b**, y su gráfico

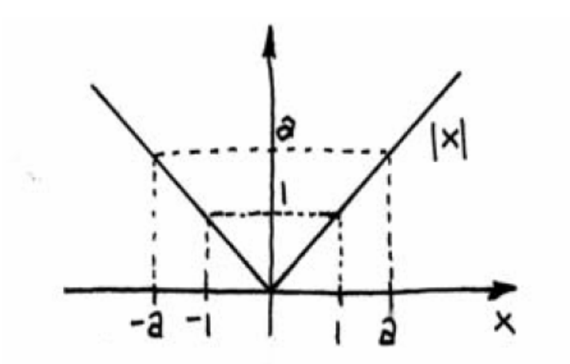


CUADRÁTICAS: **f(x) = ax^2 + bx + c** ó f(x) = **a(x - x_1)(x - x_2)**



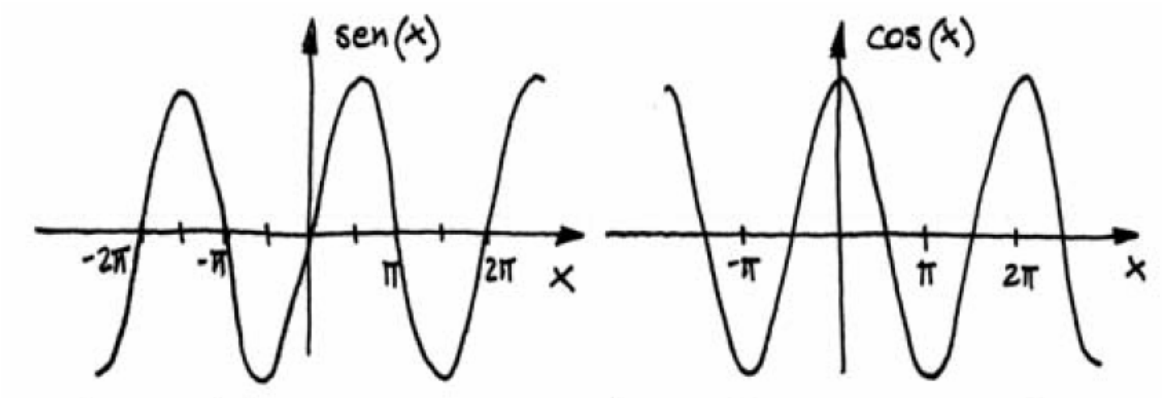
Con $x_v = -b/2a = \frac{x_1 - x_2}{2}$ e $y_v = f(x_v)$. Si a < 0, el gráfico es hacia abajo: 

VALOR ABSOLUTO (o módulo): **f(x) = | x |**

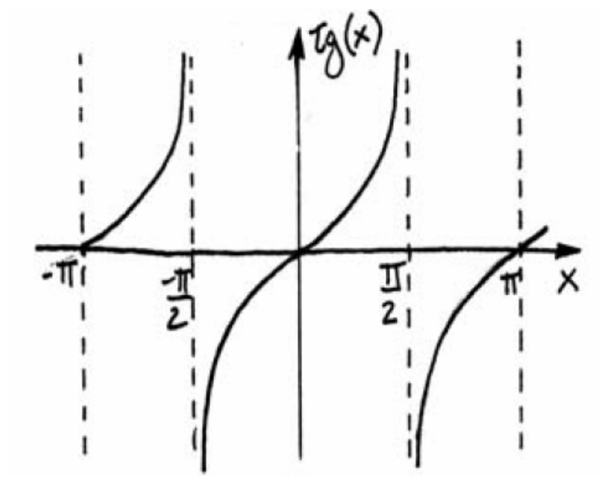


¿Te acordás que el valor absoluto de un número siempre es positivo? Por eso, el conjunto imagen es [0 ; + ∞).
Esta función es simétrica, el valor absoluto de "a" o de "-a" es siempre a.

TRIGONOMÉTRICAS: **sen (x) ; cos (x) ; tg (x)** ; etc.



Los gráficos son exactamente iguales, pero desplazados en π/2. En ambos casos, el dominio son todos los reales y la imagen es sólo el intervalo [-1 ; 1]



No te olvides que $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$.

En este caso, se excluyen del dominio los valores de x para los cuales el denominador es nulo (por eso de que no se puede dividir por cero, ¿te acordás?).

El dominio quedaría así: $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n ϵ N (o sea, todos los números que no sean múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$)

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, si la imagen de g está incluida o es igual al dominio de f, se puede obtener la función compuesta (la llamamos h(x)), así:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

se lee f compuesta con g. Se reemplaza x por g(x) en la expresión de f(x).

Es decir, primero sacás la imagen de x por g y a ese resultado le aplicás f. Para poder aplicar f a g(x), para cualquier x que pertenezca al dominio de g, es necesario que g(x) está dentro del dominio de f.

Si la imagen de g no está incluida en el dominio de f, habrá un conjunto de valores de x para los cuales g(x) no tiene imagen por f. Entonces, como hicimos antes, habrá que restringir el dominio.

Ejemplo: tenemos f y g tales que:

$$\begin{cases} f : R \to R / f(x) = 3x \\ g : [0;+\infty) \to [0;+\infty) / g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

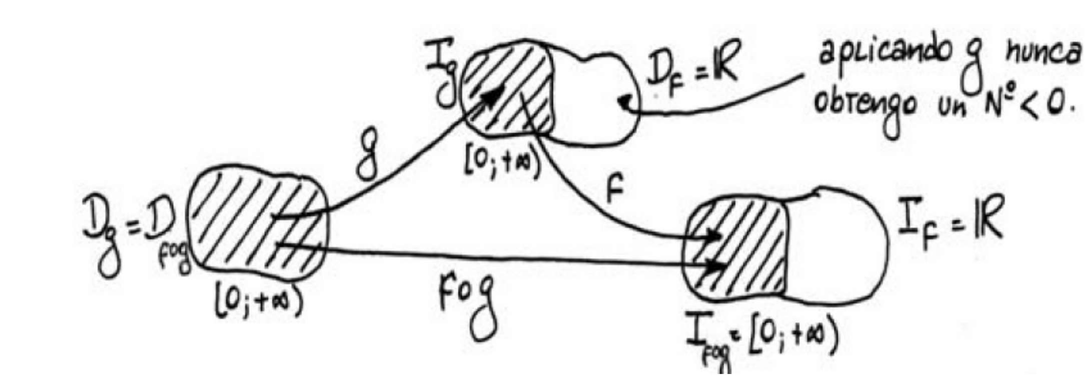
El dominio de g no es R porque no existe la raíz cuadrada de números negativos (al menos, no para los números reales).

Calculamos $(f \circ g)(x)$: $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3. \sqrt{x}$ (donde decía x ponemos g(x)).

En este caso:

$$\text{Im } g = [0 ; +\infty) ; \text{Dom } f = R \Rightarrow \text{Im } g \subseteq \text{Dom } f \text{ se cumple}$$

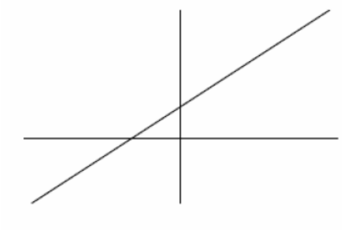
Si graficamos los conjuntos:

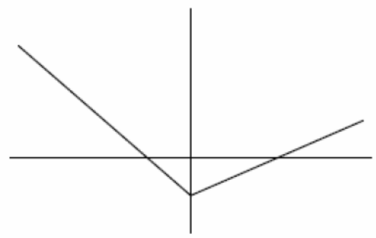


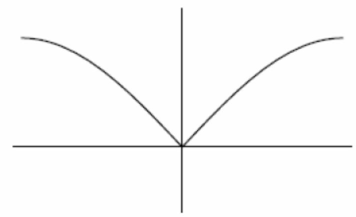
Ahora vamos a resolver algunos ejercicios. Algunos para repasar la parte teórica, y también para que veas cómo son los de la práctica.

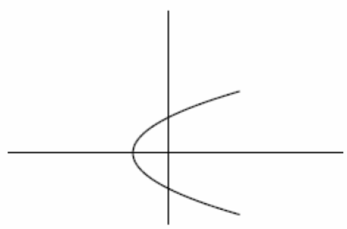
Ejercicios

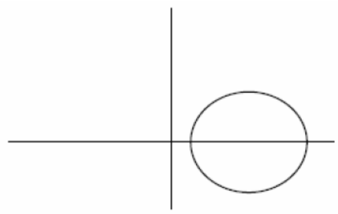
1) **Determinar si los siguientes gráficos corresponden a funciones o no:**

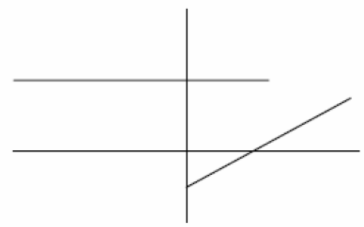

(a)


(b)


(c)


(d)

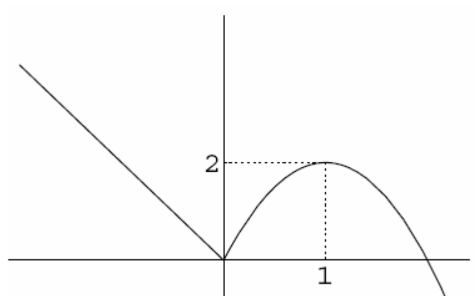

(e)


(f)

Los primeros 3 gráficos son funciones, cumplen con la unicidad y la existencia.
De los últimos 3, el (d) tiene sectores en que no cumple con la existencia. Y en el medio no verifica la unicidad.
Lo mismo pasa con el (e).
El (f) verifica siempre la exitencia, pero hay un tramo donde no se cumple la unicidad. Eso alcanza para decir que no es función.

---

2) Dado el siguiente gráfico, determinar intervalos de crecimiento, de decrecimiento, y puntos máximos y mínimos.



Revisemos un poco las definiciones de todo esto que nos piden.
Decimos que una función f(x) es **creciente** en un intervalo y si para dos valores de ese intervalo $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) < f(x_2)$.
Del mismo modo, decimos que es **decreciente** en ese intervalo si es $f(x_1) > f(x_2)$.
La definición es medio engorrosa porque está en lenguaje de análisis matemático (andá acostumbrándote), pero en un gráfico es muy simple.
La función alcanza un **máximo local** en un punto x_0 cuando $f(x_0)$ es mayor que en

los puntos a su alrededor. Y si es el valor más alto que alcanza la función en todo el dominio, decimos que es un **máximo absoluto**. No necesariamente tienen que haber máximos, por ejemplo una función puede ser creciente en todo el dominio. Del mismo modo se definen los **mínimos locales** y **absolutos**. Veamos los gráficos.

Esta función es **decreciente** en $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.
Y es **creciente** en el intervalo (0,1).
Como crece y decrece indefinidamente, no alcanza extremos (máximo o mínimos) absolutos, pero sí locales. En x = 0 hay un **mínimo local**: f(0) = 0, y en x = 1 un **máximo local**: f(1) = 2.

---

3) a) Encontrar la función lineal que satisfaga f(1) = 5 y f(-3) = 2.
b) Calcular f(0) y f(2).
c) Calcular el valor de x que satisfaga f(x) = 0
d) Graficar

Las funciones lineales son aquellas que cuando las graficamos resultan una recta, y son las más simples. La forma general es $y = A \cdot x + B$.
Al último número, "B", se lo llama "ordenada al origen". Esto es porque es el valor que toma la ordenada (o sea, la "y") cuando x vale cero (o sea, en el origen)
Y al otro número, "A" se lo llama pendiente de la recta; porque nos dice "cuán rápido" crece la función: es la relación entre el aumento de "y" y de "x" entre dos puntos, ya los vamos a ver mejor con algún ejemplo.
Y conociendo esos dos valores ("A" y "B") ya tenemos definida la recta. Y para calcular dos incógnitas hacen falta dos ecuaciones, o sea que nos alcanza con conocer dos puntos por los que pasa la recta. Veamos:

Tenemos dos ecuaciones para calcular "A" y "B":

$$f(1) = A + B = 5 \text{ y } f(-3) = -3 \cdot A + B = 2$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hay muchas formas de resolverlo. Por ejemplo, podemos restar ambas ecuaciones y tenemos:

$$\left[A + B\right]-\left[-3.A + B\right] = 5-2 \Rightarrow 4 \cdot A = 3 \Rightarrow A = 3/4$$

Una vez que calculamos A despejamos B de alguna de las ecuaciones (cualquiera) y obtenemos B = 17/4 ⇒ La función lineal es **$f(x) = 3/4 \cdot x + 17/4$**

Otra forma, más fácil, pero que sólo sirve para las funciones lineales, es calcular primero la pendiente A y después usarla para encontrar la ordenada al origen B. La pendiente se calcula con esta formulita:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

O sea, calculamos la diferencia entre las coordenadas en y de los dos puntos, y las dividimos por la diferencia en x.
Los puntos (x , y) serían, en este caso, (1 , 5) y (-3 , 2). Entonces:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{5-2}{1-(-3)} = \frac{3}{4}$$

Ya podríamos decir, aunque de forma incompleta, cómo sería la fórmula: $y = \frac{3}{4}x + b$.

Elegimos cualquiera de los dos puntos, por ejemplo, el (1 , 5), y reemplazamos en la fórmula:

$$y = \frac{3}{4}x + b \Rightarrow 5 = \frac{3}{4}.1 + b \Rightarrow 5 - \frac{3}{4} = b \Rightarrow b = \frac{17}{4}$$

Y llegamos a lo mismo que antes.

b) Usando la fórmula, para calcular f(0) y f(2), sólo tenemos que reemplazar esos valores en x:

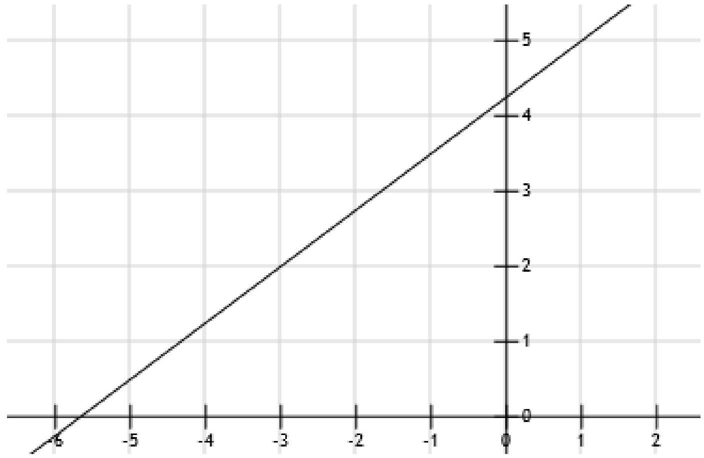
$$f(0) = 3/4 \,.\, 0 + 17/4 = 17/4$$
$$f(2) = 3/4 \,.\, 2 + 17/4 = 6/4 + 17/4 = 23/4$$

c) Este punto es similar al anterior, sólo que acá reemplazamos en y, porque queremos encontrar qué valor de x hace que la función valga 0. Así que hay que resolver la ecuación:

$$0 = 3/4 \,.\, x + 17/4 \Rightarrow -17/4 = (3/4) \,.\, x \Rightarrow -(17/4) : (3/4) = x \Rightarrow x = 17/3$$

IMPORTANTE: al valor, o valores, si hay más de uno, que satisface que f(x) = 0, se lo llama <u>**raíz**</u> de la función. Ojo: hay funciones que no tiene raíz, como por ejemplo $x^2 + 1$. Y algunas pueden tener infinitas, como las trigonométricas que vimos antes.

d) Para el gráfico de una función lineal, alcanza con marcar dos puntos en el plano, y trazar una recta que los una:



---

4) a) Trazar el gráfico y determinar la imagen de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 3$
b) Determinar intervalos de positividad, negatividad, crecimiento, decrecimiento, en qué puntos se anula, y dónde alcanza su extremo.

a) Hasta ahora vimos las funciones lineales, que son las más simples de todas y cuyo gráfico es una recta. Un poco más complicadas (no mucho) son las funciones cuadráticas, y su gráfico es siempre una parábola. Lo que las distingue es que la x aparece elevada al cuadrado, o sea algo del estilo:

$$f(x) = a \, . \, x^2 + b \, . \, x + c \; ; \text{ donde } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ con } a \neq 0$$

Esa es la forma general de una función cuadrática. Pedimos que $a \neq 0$, porque sino sería una función lineal como las que vimos antes. "b" y "c" en principio pueden valer cualquier cosa. O sea que desde ahora vemos que para conocer exactamente una parábola hay que saber tres números (a,b,c).

Para graficar una función cuadrática, necesitamos saber sí o sí cuál es el vértice de la parábola, o sea, el máximo o mínimo. Si $a > 0$, tenemos un mínimo, si $a < 0$, tenemos un máximo en ese vértice.
Como vimos antes, la x del vértice se calcula usando cualquiera de las dos formulitas, y la y, reemplazando en la expresión de la función. Ojo: no siempre vamos a poder calcular máximos y/o mínimos de cualquier función con alguna formulita. Cuando avancemos en la materia, vamos a ver que para eso se usan derivadas.

Una vez que tenemos el vértice, tal vez te hayan enseñado que necesitamos las raíces de la cuadrática, que se pueden calcular con la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Pero, ¿y si $b^2 - 4.a.c$ es negativo? No tenemos raíces reales. ¿Y si vale 0? Tenemos una sola raíz real, que (y no es casualidad!) es justamente el vértice. Eso pasa porque se nos "cancela" todo el término con la raíz, y termina quedando solamente -b/2a.

Entonces, en estos dos casos, no nos sirve la fórmula para poder graficar. Lo que hacemos es calcular puntos que estén a derecha y a izquierda del x_v. Por ejemplo, si $x_v = 2$, calculamos f(1) y f(3). y ya tenemos el gráfico.

Dicho esto, vamos con el vértice. Como a = 1 y b = 0 (eso pasa cuando nos falta un término), nos queda así:

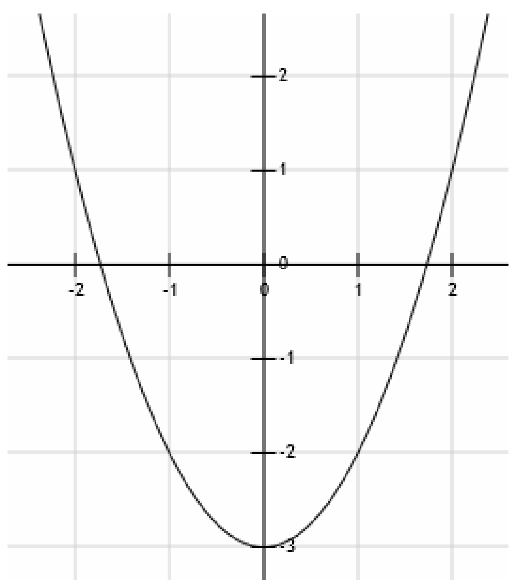
$$x_v = -b/2.a \Rightarrow x_v = -0/2.1 \Rightarrow x_v = 0$$

Esta cuadrática, $\mathbf{f(x) = x^2 - 3}$, es incompleta, porque b = 0. Entonces, no necesitamos usar la resolvente, podemos resolver la ecuación f(x) = 0:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow |\, x \,| = \sqrt{3}$$

Como tenemos un módulo, nos quedan dos soluciones para la ecuación: $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$.

Con esto, graficamos:



La imagen sería [-3 ; +∞). Fijate que como la función "toca" a y = -3, lo incluimos en la imagen, y por eso el corchete. A infinito siempre le ponemos paréntesis, porque no se lo alcanza nunca!

b) La positividad (C^+) es el intervalo de valores de x donde la función, en el eje y toma valores positivos.
La negatividad (C^-) es lo contrario, los valores de x donde la función se hace negativa.

Ojo: ni en las raíces, ni en los puntos donde no hay función (que están fuera de dominio), hay positividad o negatividad. En las raíces, se dice que la función se anula, y a este conjunto se lo puede llamar C^0.
De la misma manera, no hay crecimiento ni decrecimiento en los extremos (máximos o mínimos) ni en los valores fuera de dominio.
Entonces, mirando el gráfico:

$$C^+ = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$
$$C^- = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$
$$C^0 = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

(las llaves significan que la función se anula en esos dos puntos solamente. Los paréntesis, que se anulan ENTRE esos dos puntos. En este caso no es así, porque sino, ¡habría una recta sobre el eje x!)

Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 0)$
Intervalo de decrecimiento: $(0, +\infty)$
Extremo: mínimo en $(0, 3)$

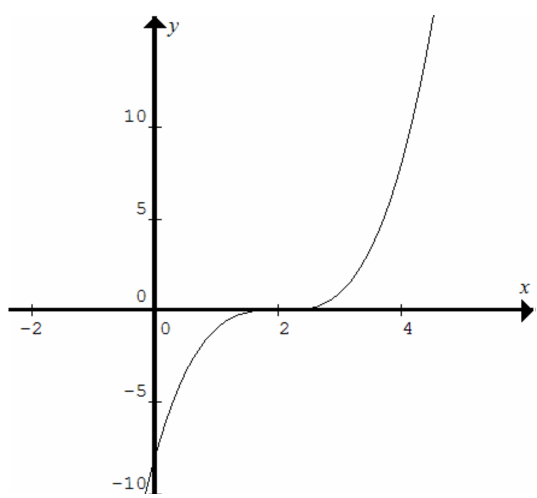
---

5) Graficar y analizar la monotonía (si es creciente o decreciente) de la función $f(x) = (x - 2)^3$

Ahora vemos una función de orden superior. Esta es una función cúbica.

Acordate siempre de ayudarte de una tablita de valores para armar el gráfico. Fijate que es una función **monótona creciente**. Eso quiere decir que es creciente en todo el dominio (que como no nos dicen nada suponemos que es R. Esto se cumple para todos los polinomios, es decir, funciones de la pinta $ax^5 + bx^4 + \ldots$, donde los exponentes son números naturales. a, b y los demás coeficientes pueden ser cualquier número real.).
En este caso tiene una sola raíz (x = 2), pero puede tener hasta tres, aunque no hay una fórmula para calcularlas.

Entonces queda así:



6) a) Indicar dominio y graficar la función f(x) = $\frac{3x+2}{x+1}$

b) Indicar intervalo de crecimiento e intervalo de decrecimiento.

a) Ahora vamos a ver un nuevo tipo de funciones, donde la x aparece dividiendo. Entonces surge un problema, el dominio ya no es todo R porque, como no se puede dividir por cero, siempre hay un valor de x que no es válido. Veamos el dominio.

Como x + 1 no puede ser 0, decimos que x + 1 tiene que ser ≠ 0. Resolvemos la inecuación:

$$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

Como x no puede ser -1, decimos que Dom f = R - {-1}. O sea, todos los reales menos el -1. También lo podrías escribir así: Dom f = (-∞,-1) U (-1 , +∞).

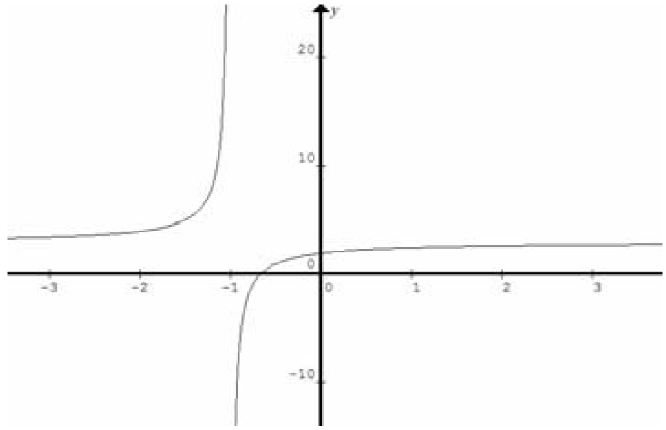
El dominio nos queda partido en dos zonas, (-∞,-1) y (-1 , +∞). Calculamos la raíz, igualando la función a 0:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x+2}{x+1} = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0.(x+1) \Rightarrow 3x = 0 - 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Una pequeña observación: para poder pasar algo dividiendo, tenemos que asegurarnos de que esa cosa no esté fuera del dominio. Si no hubiéramos buscado el dominio antes, no hubiera sido válido el pasaje de (x + 1) al otro lado.
¿Por qué? Imaginate que la ecuación nos daba -1. Cuando quisiéramos reemplazar, en vez de darnos 0, nos hubiera dado error (probá en la calculadora! Más adelante, cuando veamos límite, vas a ver cómo se trabajan estas indeterminaciones). Y eso hubiera sido contradictorio, o sea, absurdo.
En esta materia, vas a ir aprendiendo, más allá de los temas, qué cosas son válidas en matemática y cuáles no, y en qué momentos se puede usar cada cosa. Eso, precisamente, es Análisis Matemático.

Entonces, el punto (-2/3 ; 0) nos cayó en la zona de la izquierda del dominio. Calculemos algún valor de la derecha, por ejemplo, f(1):

$$f(1) = \frac{3.1+2}{1+1} = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$



b) Esta función crece en todo el dominio, así que el intervalo de crecimiento es (-∞,-1) U (-1 , +∞).
No decrece nunca, así que el intervalo de decrecimiento se lo puede expresar con el símbolo de vacío: ∅.

---

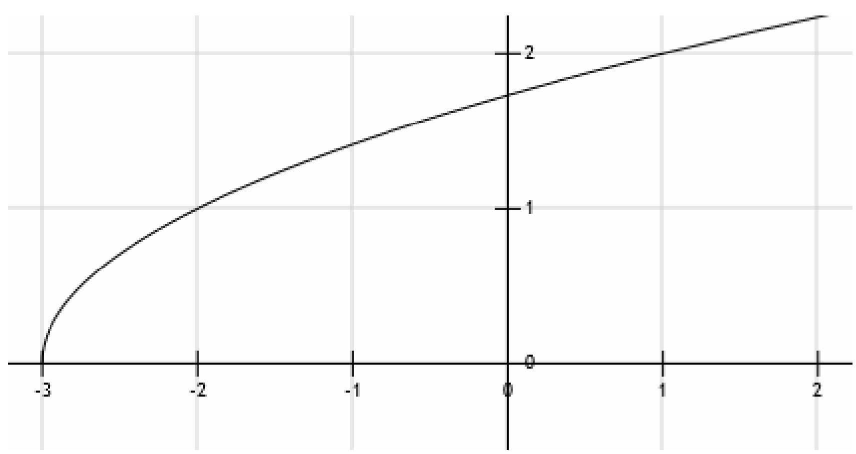
7) Indicar dominio, graficar y analizar la monotonía de la función f(x) = $\sqrt{x+3}$

Otra función muy común es la raíz cuadrada. Antes que nada, tenés que acordarte que, por definición, es una operación que solo se puede realizar sobre números positivos (también el cero, es √0 = 0). Entonces, en la mayoría de los casos hay restricciones sobre el dominio. Además, también por definición, el resultado siempre es positivo (o cero).

En este caso, como tiene que cumplirse que $\sqrt{x+3}$ > 0, resolvemos la inecuación:

$$\sqrt{x+3} > 0 \Rightarrow x+3 > 0^2 \Rightarrow x > 0-3 \Rightarrow x > -3$$

Entonces, Dom f = (-3 , +∞). Fijate que cuando dibujamos f(x), nos queda una parábola acostada. Eso no es casualidad; justamente √x es el número que elevado al cuadrado resulta x, y lo mismo pasa con -√x. Entonces:



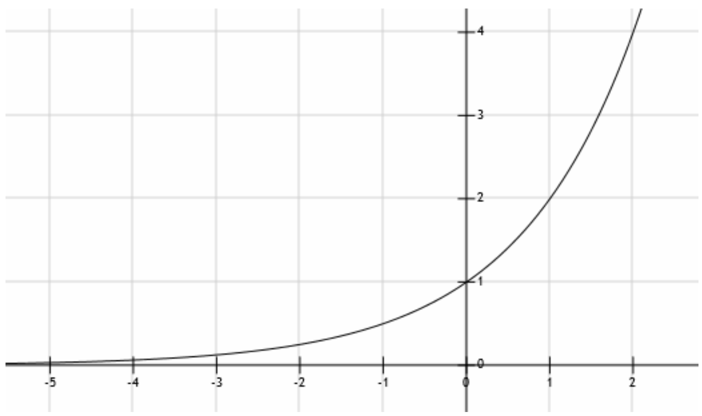
Esta función también es creciente en todo el dominio, y no decrece nunca.

8) Determinar dominio, gráfico, imagen y monotonía de la función $f(x) = 2^x$.

Esta es una función exponencial, donde la variable está en el exponente. Así que se puede calcular siempre. Probá en la calculadora (el exponente se hace con la tecla ^), y vas a ver que no tiene problemas de dominio, es todo R.
Veamos qué pasa a medida que le damos valores a x:

x	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
f(x)	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

Fijate que a medida que los valores se hacen más grandes, la función se va hacia el infinito. Y a medida que se hacen más chicos, se acerca a 0. El gráfico queda así:



Mirando el gráfico, vemos que la imagen va desde 0 hasta el infinito, porque el eje y toma esos valores. Entonces Im f = $(0 , +\infty)$. Acá no incluimos al 0, porque la función no lo "toca" nunca.
Esta función es creciente en todo el dominio.

---

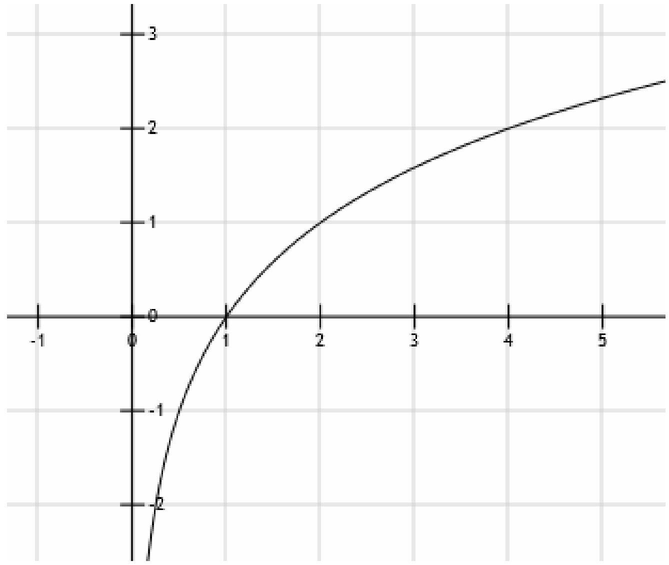
9) **Determinar dominio, gráfico, imagen y monotonía de la función $f(x) = \log_2(x)$.**

Recordemos la definición de logaritmo: $a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$

El logaritmo es la función inversa de la exponencial. Entonces, hay varias cosas que podemos afirmar antes de ver los gráficos. Sabemos que el dominio y la imagen de $f^{-1}(x)$ coinciden con la imagen y el dominio de f(x). En pocas palabras, están dados vuelta; y tenemos:
Dominio (log) = $(0 , +\infty)$; Imagen (log) = R
Esto vale para cualquier base. Como es la función inversa, podríamos usar la tablita anterior, pero al revés, cambiando x por f(x), así:

x	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125
f(x)	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

Entonces, el gráfico queda así:



¿Y la monotonía? Si hablamos en general, las funciones logarítimicas las podemos escribir así: $f(x) = \log_r(x)$. Entonces:

• $r < 1 \Rightarrow$ el logaritmo es **decreciente** (igual que la exponencial)
• $r > 1 \Rightarrow$ el logaritmo es **creciente** (igual que la exponencial)
• No existe el caso r = 1. Eso es porque $1^x = 1$ para cualquier valor de x; entonces, esa exponencial en particular no tiene función inversa.

---

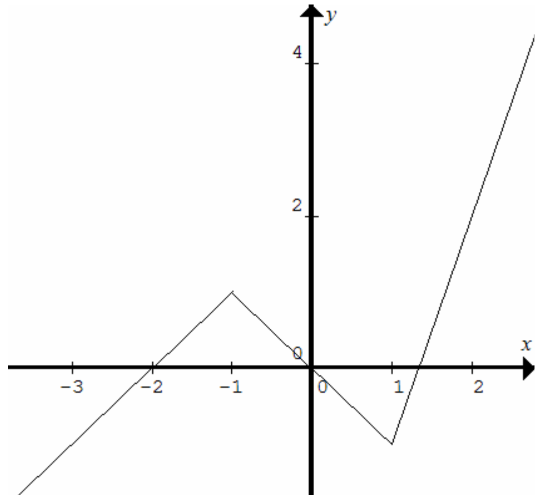
10) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ 3x-4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ **calcular f(-3), f (1) y f(4).**

Determinar para qué valores de y la ecuación f(x) = y tiene solución. ¿Cuándo es única?

Tenemos una función partida en ramas. En realidad, este tipo de funciones no tienen mucho misterio, sólo hay que fijarse bien qué rama corresponde.

$$f(-3) \Rightarrow \text{primera rama} \Rightarrow f(-3) = -3 + 2 = -1$$
$$f(1) \Rightarrow \text{segunda rama} \Rightarrow f(1) = -1$$
$$f(4) \Rightarrow \text{tercera rama} \Rightarrow f(4) = 3 \cdot 4 - 4 = 8$$

También nos preguntan para qué valores de "y" la ecuación f(x) = y tiene solución. O sea, nos piden averiguar el conjunto imagen de la función. En el gráfico vemos que es Im (f) = R, porque las rectas siguen indefinidamente.
Y la solución es única en el conjunto (-∞ , -1] U [1 , +∞). En el intervalo (-1,1), hay más de un valor de "x" para el mismo de "y".



11) El impuesto a la riqueza es igual al $0,50 por cada mil pesos por encima de $100 mil y de $1 por cada mil pesos encima de $200 mil. Escriba el monto impuesto en función de la riqueza. ¿Cuál es la riqueza de alguien que paga $530 de impuesto?

El impuesto a la riqueza sólo se cobra a los ricos (se supone); entonces, sólo es distinto de cero a partir de un cierto nivel mínimo, en este caso dicen que se empieza a cobrar a partir de las 100 mil pesos. A partir de ahí, por cada mil pesos se cobran $ 0,5. Y a partir de los 200 mil, sube a $ 1 por cada mil. Entonces, tenemos una función partida en tres ramas, y es algo así:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 100 \\ 0{,}5.(x-100) & \text{si} \quad 100 < x \leq 200 \\ -150 + x & \text{si} \quad x > 200 \end{cases}$$

Donde "x" es la riqueza (en miles de $) y f(x) nos da el impuesto que hay que pagas (en $)

- ¿Cómo pudiste averiguar las ecuaciones de ambas rectas?
- Rta: Porque en ambos casos conozco la pendiente (0,5 al principio, y 1 luego). Además, conozco un punto de cada recta : f(100) = 0 (no paga impuesto excepto que cobre más de 100 mil) y f(200) = 50 (supongo que no hay ningún salto, entonces ambas rectas deben tener ese punto en común).

Conociendo la pendiente y un punto, es como el ejercicio 10.
Sabemos que una persona paga $ 530 de impuesto y queremos conocer su riqueza. O sea, queremos resolver la ecuación f(x) = 530. Pero para eso necesitamos saber a qué rama pertenece "x". Bueno, en el gráfico vemos que la segunda rama solo toma

valores entre $ 0 y $ 50. Entonces, necesariamente estamos trabajando en la tercera rama, y la ecuación a resolver es:

$$f(x) = -150 + x = 530 \Rightarrow x = 680 \Rightarrow \text{Tiene una riqueza de \$ 680 mil}$$

El gráfico quedaría así: