# Superior

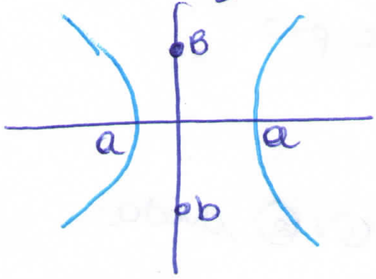
## Extremos (si no son explícitos)

- Calculo la derivada $f''$ (o $f^{IV}$) y $f'''$ (o $f^{V}$)
- $f'''=0$ o $f^{V}=0$
- Todas las raíces que de debo asegurarme que estén en el intervalo $[a,b]$ y que realmente sea max ∴

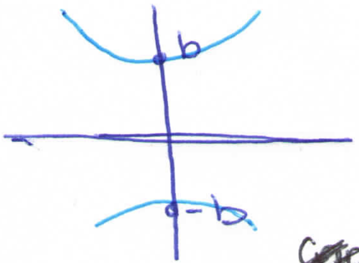
Evaluo $f'''(a) = \dots$, $f'''(b) = \dots$ y $f(p)$ → Tiene que ser el mayor de los 3

## Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

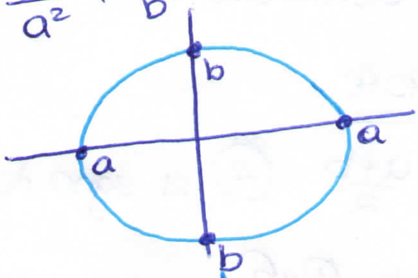



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$




## Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$




## ★ Método bisección o bolzano ★

Si $f$ es una función continua en $[a,b]$ y $sig(f(a)) \neq sig\, f(b) \Rightarrow \exists_c\, c \in [a,b] \,/\, f(c)=0$

Existe siempre un nro impar de raíces, pero debemos tratar de separar para tener intervalos de 1 raíz ahí adentro. Puedo usarlo para achicar el intervalo y aplicar otro método

~~Cant. de iteraciones a hacer. Medan $\varepsilon$ y $[a,b]$ $\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon$ $n \ge 26{,}666$ (ejemplo) con 27 iteraciones garantizamos la precisión deseada~~

## Método

a) Encontrar un intervalo $[a,b]$ que contenga una raíz, tal que los extremos cumplan que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (imágenes de signos $\neq$)

b) $n \leftarrow 1$

c) Si cumple el criterio de paro establecido parar

d) Se deben ir generando puntos de la sucesión $\{x_n\}$ de acuerdo a la sig regla $x_n = \frac{a+b}{}$

c) Si $sg\, f(x_n) = sig(f(a)) \Rightarrow a = x_n$ sino $b = x_n$

d) $n{+}{+}$

e) vuelvo a c)

No CONVERGE MAS rapido para ninguna

$R = \frac{1}{2}$ (independiente de la Funcion)

$p = 1$ (orden de convergencia lineal)

Cantidad de iteraciones: $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow n$ suficiente, no necesaria

n = garantiza que con esa cantidad de iteraciones obtengo la precision deseada. Pero esta es una cota por lo que no hay que olvidar que puede ocurrir que con menos llegue tambien.

Metodo profe

① $p = \frac{a+b}{2}$ ② si signo de $f(a) = f(p) \Rightarrow p = b$ sino $p = a$.

③ repetir ① y ②

④ $I_0 = [a,b]$ aplico 2 y queda $I_1 = [a; p_1]$ vuelva a ① y ②, queda $I_2\, [p_2; p_1]$

NO SIRVE CON RAIZ MULTIPLE

Cortes sino dan $\varepsilon$ es: $10^{-4}, 10^{-5}$

corto: * $|p_{i+1} - p_i| < \varepsilon$ * $|f(p_i)| < \varepsilon$ si $(f'(p_i)) > 1$

* $p / f(p) = 0$ * $\frac{|p_{i+1} - p_i|}{p_{i+1}} < \varepsilon$

ventajas

✓ Sencillo, solo promedio y comparo

✓ siempre converge a la raiz (salvo que no sea continua)

Desventajas

lento, muchas iteraciones y calculos

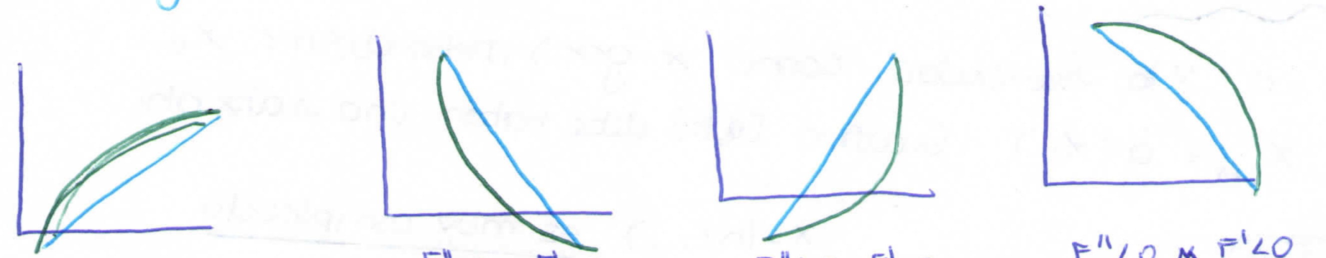
$p_{i+1}$ no siempre es mejor que $p_i$

convergencia lenta y no hay forma de acelerar

Error maximo que se ~~esta~~ puede estar cometiendo se va reduciendo a la mitad.

Solo se aplica con T. de Bolzano

# Regula Falsi



$F' > 0 \wedge F'' < 0$ $\quad F'' > 0 \wedge F' < 0$ $\quad F'' > 0 \wedge F' > 0$ $\quad F'' < 0 \wedge F' < 0$

Fijo (A) $\qquad$ Fijo (B)

Metodo:

* Fijo un extremo
* Calculo

$E_F$ es cualquiera, a o b.

$$X_{n+1} = E_F - \frac{E_F - F(x_n)}{F(E_F) - F(x_n)} \cdot f(E_F)$$

*Me fijo si corto

* vuelvo al anterior

Si $E_F = b \Rightarrow x_0 = a$

$E_F = a \Rightarrow x_0 = b$

**VENTAJAS**

- Siempre converge a la raiz (siempre que se elija bien el extremo)
- la sig iteracion es mejor que la anterior
- Mas rapido que biseccion ~~[illegible]~~.

**DESVENTAJAS**

- Mucho analisis previo, calculo $f'$ y $f''$
- no sirve con puntos de inflexion, max y mins

* Si hubiera cambio de signo se aplica metodo de biseccion y achico intervalo

# PUNTO FIJO

A veces si se toma un intervalo muy grande no converge. Por lo que debería achicarlo

$f(x) = 0$ y la reescribo como $x = g(x)$. Debo definir $x_0$

uso $x_{i+1} = g(x_i)$ Si defino [a,b] debe haber una raiz ahí

$x = \ln(\dots)$ es muy complicada

DESVENTAJA

- No siempre converge
- No siempre es muy rápido

Si cuesta despejar, puedo:

- Multiplicar miembros por x
- Sumar en miembros x

VENTAJA

- sencillo • Si converge es + rápido que Bisección

## Cond. de existencia

Si $g(x) = x$ continua en [a,b] talque $g(x) \in [a,b]$ y $|g'(x)| \leq K$ con $K < 1$ $\forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ g tiene un unico punto fijo en [a,b]

Si $g(a) = a$ ~~o~~ $g(b) = b$ $\Rightarrow$ queda probado pf

1) $g(x)$ continua en [a,b]
2) $\forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b]$
3) $\forall x \in [a,b]$ $|g'(x)| < 1$

La profe puso: ① $g(x_i) \in [a,b]$ y $|g'(x_i)| \leq 1$ → Pruebo esto y converge

① puntos a elegir es el punto medio o extremos, sino achico intervalo

Funciona si raices positivas y lejos de cero.

## Formas convergencia

a) $0 < g'(x) < 1$ (g creciente) $\Rightarrow$ converge escalonada

b) $-1 < g'(x) < 0$ (g decreciente) $\Rightarrow$ converge espiralada

c) $g'(x) > 1$ (g creciente) $\Rightarrow$ diverge escalonada

d) $g'(x) < -1$ (g decreciente) $\Rightarrow$ diverge espiraladamente

Si oscila entre 2 valores no converge a la raiz

cuando $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ detengo proceso

# Newton Raphson

Si uso raiz doble se convierte en convergencia lineal en lugar de cuadratica, por eso es mas lento.

raices simples
convergencia cuadratica ($p=2$)

+ Eficiente

Metodo consiste en: hallar una sucesion $\{x_n\}$ que converga a la raiz $\alpha$, siendo los $x_n$ las intersecciones con el eje x de sucesivas rectas tangentes

En forma iterativa: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

Condiciones necesarias y suficientes

- $sig(f(a)) \neq sig(f(b))$
- continua en $[a,b]$
- Derivada continua en $[a,b)$

Si alguna no se cumple igual puedo aplicarlo y posiblemente sea convergente, aunque ello no se pueda asegurar.

+ Muy eficiente
- No siempre converge
- Necesito sacar derivadas

Criterio de convergencia

$f(x)$ cumple bolzano
$p$ raiz ($f(p)=0$)
si $f'(p)=0 \Rightarrow$ NO CONVERGE

El valor intermedio puede ser cualquiera, Recomendado: $p=\frac{a+b}{2}$

Variante con von Mises:

Es mas lento que Newton Raphson
mas agil en calculos
No hay que calcular la derivada en todos, solo en el 1° paso

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Estrictamente dominante diagonalmente

$$|a_{ii}| < \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad i=1..n \quad i \neq j$$ (cumplir todas las filas)

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} F_1: 7 > 2+3 \\ F_2: 2 = 1+1 \\ F_3: 5 > 2+1 \end{cases}$$

NO ES ESTRICTA por la igualdad de la segunda fila

dominante diagonalmente

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad i=1..n \quad i \neq j$$ (cumplir todas las filas)

*Matriz diagonal = $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ *mat triangular superior = $a_{ij} = 0$ $i > j$

*mat triangular inf = $a_{ij} = 0$, $i < j$

Si A es EDE $\Longrightarrow$ es regular o inversible

A simetrica es pos si x no nula cumple $\Rightarrow x^T A x \geq 0$

" " " si todos sus autovalores son positivos

Autovalores: $|A - \lambda I| = 0$

Dos formas de calcular el determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ 1 + 2 + 3

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ -1 -2 -3

Matriz singular = su determinante es igual a cero

GS es mas preciso porque va utilizando valores recientemente calculados en el mismo paso, que claro que usa los del anterior

Jacobi

Paro cuando $\dfrac{\|x^{n+1} - x^n\|_\infty}{\|x_{n+1}\|_\infty}$

Pologeneral salgo de $(0,0,...,0)$

Separo x = ...
y = ...
z = ...

pero con Jacobi para averiguar x que esta en funcion de todas o algunas de las otras variables pero con los valores de su $x^{n-1}$ anterior

requiere la mitad de iteraciones que Jacobi

Con Gauss-Seidel los valores que voy usando es:

me dice partir de (a, b, c)

averiguo una de las incognitas (ejemplo x, que me da d)

ahora para averiguar y no uso mas a ... uso d, ~~b~~ y c

dandome que y = e

ahora para z uso d y e, dando z = f

averiguo x con e y f .... asi sigo...

Ambos Convergen con una matriz estrict. diagonalmente dominante. Ambos convergen con cualquier valor inicial

$$\int_{-a}^{a} \text{Impar}(x) = 0$$

Concavidad 

queda por debajo de la curva

Concavidad 

queda arriba de la curva

Si es de grado 3 ⇒ da exacto

y error = 0

$$e_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

$$A_S = \frac{h}{3}(E + 4I + 2P) \qquad e_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{IV}(\xi)$$

$E = X_0$ y $X_n$

Entre $X_1$ y $X_{n-1}$ se dividen pares e impares

Si pol grado 3 ⇒ $f^{IV}(\,) = 0$, error $\neq 0$. h = tamaño de paso, incremento

1° dif progresiva: $f'(x_i) \cong \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$

1° dif regresiva: $f'(x_i) \cong \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$

1° dif central: $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$ (Mayor precision)

2da dif progresiva: $f''(x_i) = \dfrac{f(x_i+2) - 2f(x_i+1) + f(x_i)}{h^2}$

2dif regresiva: $f''(x_i) = \dfrac{f'(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$

2 formula central: $f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) + 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$ (Mas exacta)

para aplicar $A_T$, $A_S$

Tengo $N = \dfrac{b-a}{h}$ N numero nat

pero si es $A_S$ N debe ser par

Me dan un intervalo $[a,b]$ y h para armar la tabla de valores:

a+h

(a+h)+h

(a+h+h)+h

⋮

hasta que sea igual a b

Si tengo que buscar un h que cumpla con el error

interpolar vs aprox min cuadrados

Se halla una funcion que pasa exactamente por los mismos puntos en cambio al aproximar se busca la mejor de las funciones de un tipo prefijado que ajuste los datos, que minimice la suma de dist al cuadrado.

Pocos datos y puntos exactos usar interpolación, pero si esto no pasa y se quiere demostrar una rel ~~entre~~ determinado tipo entre las variables uso la otra

Puedo aplicar metodos iterativos ya que la matriz es diag. estrict dominante

## Minimos Cuadrados

Se puede hallar cualquier polinomio de minimos cuadrados mientras que el grado de P(x) sea menor que la cantidad de puntos

Funcion Lineal
$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

$\bar{y} = ax + b$

Con esas 2 averiguo valor de a y valor de b.

Funcion Exponencial
$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + B\sum x_i = \sum x_i \ln(y_i) \\ a\sum x_i + Bn = \sum \ln(y_i) \end{cases}$$

$B = e^b$ fun: $\bar{y} = a.e^b$

Funcion potencial
$$\begin{cases} a\sum \ln^2(x_i) + B\sum \ln(x_i) = \sum \ln(x_i)\ln(y_i) \\ a\sum \ln(x_i) + Bn = \sum \ln(y_i) \end{cases}$$

$b = e^B$

## MATRICIAL

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} 14 \\ 8 \\ 16 \\ 12 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 16 & 12 & 5 & 17 \end{array} \end{array}$$

MAX

$\|A\|_1 = 17$

MAX

Filas

$\|A\|_\infty = 16$

~~$\|A\|_2$~~

Elige tenga el 2º mas grande

Radio Aspectral

$\rho(A) \in \mathbb{R}^+$

$\rho(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$

$\lambda_i$ autovalores

## VECTORIAL

$\|\vec{X}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p \ldots}$ $p=2$ (norma euclidea) $\|(2,1,-3)\|_\infty = 3$

## RAICES

Multiples Newton Rapson $\Rightarrow$ $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\, f'(x_i)}{(f'(x_i))^2 - f(x_i) \cdot f''(x_i)}$$

## Comparo Metodos

orden convergencia (p) $p \in \mathbb{R} \,/ p \geq 1$

Radio convergencia (R) $R \in \mathbb{R} \,/ R \neq 0$

| BISEC | PF | NR | RF |
|---|---|---|---|
| $p=1$ | $p=1$ | $p=2$ | $p=1$ |
| $1/2 = R$ | $R = g'(\alpha)$ | $R = \left\|\frac{f'(\xi)}{2f''(\xi)}\right\|$ | $(a-\alpha)\frac{f'(\xi)}{2f''(\xi)}$ |

Diagonalmente dominante

Existe un polinomio unico de grado menor o igual a n que interpola f.

Error relativo: $\dfrac{\|x^B - S\|}{\|S\|}$ $\quad (S_x, S_y)$ Elijo el Mayor!

ultima iteracion $(x, y) - (S_x, S_y) \Rightarrow$ Sol exacta

$(x - S_x, y - S_y)$

Elijo el mayor

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ con autovalores, $\lambda^2 + 10 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \wedge \lambda_2 = 5$

$\|A\|_2 = 5$ (El autovalor mas grande)

## Convergencia de Gauss - Seidel y JACOBI:

Si A es una matriz diagonalmente dominante para cualquier $X_0$, Ambos convergen a una solucion $AX = B$. Puedo intercambiar fila para asegurarlo

# Interpolación

⇒ T. de existencia y unicidad: Dado $x_0, x_1 \dots x_n$

Un conjunto de n+1 puntos en [a;b] y sus imágenes $f(x_0) \dots f(x_n)$
Existe un único polinomio de grado menor o igual a n que interpola a f en [a, b]

2 Métodos → Lagrange
→ Newton-Gregory

## Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot f(x_i)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$L_0(x)$ siendo uso para arriba todos menos 0 que es la que le corresponde a x para i cero

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1 | 1 | 2 |
| i | 0 | 1 | 2 |

y luego lo evalúo en ese x el denominador

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}$$

y $P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x_1) \cdot f(x_1) + L_2 f(x_2)$ con n valores tengo $L_{n-1}$

Dif progresiva: $\Delta^{n+1} f_i = \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i$

Dif regresiva: $\nabla^{n+1} f_i = \nabla^n f_i - \nabla^n f_{i-1}$

con n puntos, n-1 dif. de orden 1, n-2 diferencias de orden 2.

## Newton Gregory

Equiespaciados: Fórmula Progresiva

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

para que sea interpolante debe cumplir: $P(x_i) = f(x_i) \; \forall i = 0, \dots n$

$a_i = \frac{\Delta^i f_0}{i! h^i}$ utiliza diferencias progresivas. Conviene utilizarla si el punto a interpolar está cerca del principio del intervalo

| $x_i$ | $f_i$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | |
| 2 | 2 | 3 | | |
| 3 | 5 | | | |

Esos son los a, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2! \, 1^1}$ $(h=1) = \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{3! \, 1^1} = \frac{1}{6}$

$$P(x) = 1 + 0 \cdot (x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-1) + \frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$1-1=0$, $2-1=1$ y $5-2=3$

Formula regresiva: Conviene si el punto a interpolar esta cerca del final del intervalo.

$$b_i = \frac{\nabla^i f_n}{i!\,h^i} \qquad P(x) = b_0 + b_1(x-x_n) + b_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + b_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)$$

Solo lo uso para el polimomio

★ con n puntos
⟹ pasan ~~...~~ infinitos polimomios de grado n o mas
⟹ y pasa un UNICO polimomio de grado menor o igual a $n-1$

NO EQUIESPACIADOS:

Progresivo y REGRESIVO

| x | y | ord 1 | ord 2 | ord 3 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| 3 | 3 | | 3 | |
| | | 10 | | 1 |
| 4 | 13 | | 7 | |
| | | 24 | | 1 |
| 5 | 37 | | 11 | |
| | | 57 | | |
| 7 | 151 | | | |

USO ESOS PROGRESIVO

USO ESOS REGRESIVO

$$P: a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$$R: b_0 + b_1(x-x_n) + b_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots b_n(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_1)$$

Si realizamos por pol progresivo, el regresivo da igual

Si tengo que aproximar un $x_0$ como 2 uso 1, 3 y 4. o 1 y 3

Tienen que ser los mas cercanos y lo contengan

Cuando NO DICE COMO y haya que interpolar un valor uso una RECTA osea 2 puntos.

Si piden 1,17 con grado pol 2. ~~...~~

1,10 puedo elegir cualquiera de los 2
1,15
1,20 • Si pasa un pol de grado 3 ⟹ no pasa uno de grado 5, 2.
1,25 por mas de los puntos sean 6. De gr 6 pasan infinitos

• Si tengo 40 puntos $(x_1, y_1)$ y se sabe que por 30 pasa uno de 6 puedo Asegurar que uno de gr 20 no pase por T. de Lagrange: Por un conjunto de n puntos a lo sumo pasa un pol de gr menor o igual a $n-1$

Por eso si pasa uno 6 con 30 puntos. no pasan menores a 6 ni de 7 a 29 (ver eso de TL)

Por los 10 restantes podria pasar el pol de 6. Sino conozco los puntos lo unico que ase guro es que uno de 20 no pasa

# Integración Numerica

ante $I = \int_a^b f(x)\,dx$ ocurre:

- No se conoce expresión de f(x), solo de una tabla de valores
- se conoce f(x) pero no es una primitiva
- se conoce f(x), es primitiva pero muy largo y complicado

Acá recurro a la Integración numerica

## Trapecios

para calcular $I = \int_a^b f(x)\,dx$ se divide ~~en~~ intervalos [a,b] en n subintervalos iguales y en cada uno se aproxima la funcion por un segmento de recta. Numero de Intervalos Enteros $h = x_{i+1} - x_i$

$$\boxed{A = \sum A_i = \frac{1}{2} h \left( y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)}$$

$\sum_{i=1}^{n-1} y_i \Rightarrow$ Los valores comprendidos entre el primero y el ultimo ($y_i$)

$$\boxed{E = \frac{(a-b)}{12} \cdot h^2 f''(\phi)} \qquad \phi \in [a,b]$$

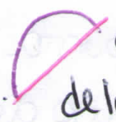
El $f''(\phi)$ si la $f''$ es una constante uso ese numero / busco $|y(x)|$ en [a,b].
calculo $f'''$, igualo $f''' = 0$ y consigo raices.. uso las raices y a y b evaluandolas en $f''$. El que de mayor en modulo es el $f(x)$ que estoy buscando

Cantidad de subintervalos

$$\boxed{N = \frac{b-a}{h}}$$ N ENTERO

Si quiero un error menor a $10^{-2} \Rightarrow \frac{1}{12} h^2 \cdot 2 < 10^{-2}$, $h < 0{,}2449$
y quiero conocer el h.

Este h debe cumplir ($h < 0{,}2449$) y de un N entero.

 queda abajo de la curva

 queda arriba de la curva

Si $F''(x) = 0 \Rightarrow$ TRAPECIO DA EXACTO!

# Simpson

subdivide al intervalo [a,b] en n intervalos pares y cada dos de ellos aproxima por una parabola

Area bajo parabola

$$\boxed{A = \frac{h}{3}\left[ E + 4I + 2P \right]}$$

$E = y_0 + y_n$

$I = y_1 \dots + y_{n-1}$ (SUMA IMPAR)

$P = y_2 \dots + y_{n-2}$ (SUMA PAR)

$$\boxed{E = \frac{a-b}{180} h^4 f^{IV}(\phi)} \text{ con } \phi \; [a,b]$$

$N = \frac{b-a}{h}$ N par y entero

- Si pide val exacto, es hacer la integral y evaluarla
- $[\underset{1}{a}, \underset{2}{b}]$ y un $h = 0{,}5 \rightarrow 1, 1{,}5$ y $2$ Esos serian mis x, $i = 0, 1$ y $2$.
- Para polinomios de gr = 2 o 3 conviene usar simpson cuando tengo $h < 0{,}2$, el n que obtenga de mi eleccion arbitraria de h mientras sea menor a 0,2
- Para un pol grado 3, la derivada $f^{IV} = 0$ y el error es 0. DA EXACTA
- Si me dan una elipse o cualquier otra mi [a,b] son los puntos que toca x
- Menor H en trapecios, menor error

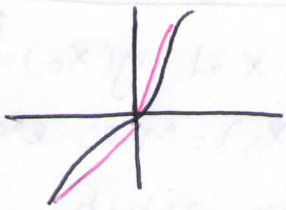
TRAPECIO:

Si $f'' > 0$ es concava hacia arriba y el segmento de trapecios queda por encima de la grafica de f(x). El valor de A es mayor, error por exceso (queda neg)

Si $f'' < 0$ es concava hacia abajo y el segmento de T. queda por debajo de la grafica de f(x). El valor de A es Menor, error por falta $f'' = 0$ valor exacto

Simpson siempre da exacto

f impar y h/a $\Rightarrow E_t = 0$ se compensan



Error es proporcional al cuadrado de h.

# Ecuaciones Diferenciales

Problema de valor inicial: $y' = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$

Condición de Lipschitz: sea $f(t,y)$ se verifica que ~~[illegible]~~

$\exists L > 0 / |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \, |y_1 - y_2|$

$|f'_y(t,y)| = |\ldots| = L$ da igual.

$\hookrightarrow \left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right|$ Puedo usar $\lim_{y \to 0} f(t,y)$ si es $\infty$ NO ESTA ACOTADA NO EXISTE

cuando lo uso queda algun t, uso del $[a,b]$ el que de el val max

Entonces dividimos a $[a,b]$ en subintervalos: $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$

$h = \frac{b-a}{n}$ $\wedge$ $h = t_{i+1} - t_i$ (en equiespaciados)

Calculan de forma aproximada las imagenes de los $t_i$, que llamo $w_i$ ya que no van a coincidir con las exactas $y_i$

cada punto hay un error $|y_i - w_i|$ $\qquad N = \frac{b-a}{h}$

## 2 Grupos

★ De un paso o paso simple

El valor de $y_{i+1}$ se calcula a partir de la ecuación dada y de un forma con unicamente de $t_i$. Ejemplos: Euler, Taylor, Heun y Runge-Kutta

★ De paso multiple o multipaso

Uso varios puntos para hallar $y_i$ (no solo del ANTERIOR)

Ejemplos: Adams Bashforth, Adams Moulton, Milne Simpson

## Metodo de Euler

De paso simple, aproximan la f por serie de taylor pero solo tomamos hasta orden 1. Se desplaza sobre una recta tg. de un pto a otro y describe poligonal

$$\boxed{w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)}$$ con $w_0 = y_0$ $\qquad E.T.L = \frac{h^2}{2} y''(\phi)$

uso como x el $y(x_0) = B$ que me dan de dato y ese $x_0$ es mi a.

y el $y(x_b) = M$ es ese $x_b$ mi b. Armo la tabla con i de 0 a n

y de $a, a+h, a+h+h \ldots b$ A c/u le corresponde un $w_i$

Lo bueno es que es muy sencillo, lo malo no tiene buena precisión

¿Como aumento la precisión?

Si disminuyo h (subintervalos osea tomo de menor long c/u). Esto mejora la precisión por que si se reduce a la mitad h, el error ~~de~~ tmb se reduce a la mitad

Pero hay mas errores operativos. Por lo tanto tampoco conviene tomar h ~~pequeños~~ demasiado pequeños

## Metodo de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot y'(t_i) + \frac{h^2 \cdot y''(t_i)}{2!} + \frac{h^3 \cdot y'''(t_i)}{3!} + \dots + \frac{h^n \cdot f^n(t_i)}{n!}$$

Se puede tomar hasta el orden que se desee

La desventaja: dificultad en calculo de derivadas, precio a pagar por una mayor precisión

## Metodo Runge-Kutta

Algoritmos de paso simple que solo incluye calculo de derivadas de primer orden, pero que a su vez producen resultados equivalentes en exactitud a la formula de taylor de orden superior

→ SEGUNDO ORDEN (CASO 1 HEUN) = Euler modificado

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + h.f(t_i, w_i))\right]$$

O de otra forma: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1}^*)\right]$

$$w_{i+1}^* = w_i + h f(t_i, w_i)$$

En esencia consiste en aplicar Euler 2 veces

El algoritmo de Euler se podria interpretar como predictivo y luego Heun corrige dicho valor

Comprobado que la precisión de Heun es similar a la de taylor ord. 3

$$w_{i+1} = w_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$$ Metodo R-K 2do ord

## RK de 4TO ORDEN

Se pretende obtener la precisión de taylor de ord 4 pero solo utilizando la derivada primera

## FORMULAS

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$K_1 = h\,f(t_i, w_i)$

$K_2 = h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{K_1}{2}\right)$

$K_3 = h\,f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{K_2}{2}\right)$

$K_4 = h\,f(t_i + h, w_i + K_3)$

→ RESULTADO RK 4TO orden : R

→ Resultado exacto : E

Error relativo

$$\frac{E-R}{E} \cdot 100\%$$

ERROR ABSOLUTO

$$E - R$$

**Comparacion de Errores** al reducir h.

→ EULER: si h se reduce a la mitad, el error final global tambien

→ HEUN: si h se reduce a la mitad, el error final se reduce a la octava parte (Es de ord 3)

→ RK 4TO ord si se reduce a la mitad, el error final se reduce a $\frac{1}{16}$ parte

Mayor orden del Metodo, necesito menos iteraciones para lograr la misma precisión

## Metodos de paso Multiple

Utilizan varios valores anteriores para calcular el nuevo valor.

$b_m = 0$ Formula Explicita

$b_m \neq 0$ Formula implicita

- Adams - Bashforth 2 pasos
- Adams - Bashforth 3 pasos
- Adams - Bashforth 4 pasos

Explicitas

- Adams - Moulton 2,3 y pasos (Implicitos)

**Metodos implicitos**

se usan para mejorar las aproximaciones obtenidas mediante los metodos explicitos. Es decir nunca se usan solos

A la combinacion metodo implicito explicito se le denomina Metodo predictor-corrector

**Adams-Bashforth-Moulton (4 pasos)**

AB 4 pasos como predictora, AM de 3 pasos como correctora.

Los 1° cuatro valores que se necesitan para reemplazar en AB. se calculan con RK de orden 4TO

1) armo $f(t, y)$ 2) $t_0$ es dato, calculo por RK 4TO orden $w_1, w_2, w_3$

3) Ahora uso AB para sacar $w_4^*$ (de 4 pasos) y lo mejoro con la forma correctora para obtener $w_4$ 4) Sigo hasta que se llegue $t_n$ a b

## EULER - HEUN

Tambien sirve como metodo predictor - corrector

E : $w_{i+1}^{*} = w_i + h(f(t_i, w_i))$

H : $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1}^{*}))$

se usa cuando el intervalo es pequeño pues evita errores de redondeo. Si el intervalo es muy grande o se requieren gran cant de pasos (+100) lo mejor es usar AB/AM. Si el intervalo es mediano se usa RK ord 2 o 4.

Es implicita por que figura dentro $w_{i+1}$

Es 2 pasos por que figura $w_i$, $w_{i-1}$

Explicita - solo utilizan info del punto inmediatamente anterior (?) y no hacen referencia a si mismas

Matriz positiva => si todos sus autovalores son numeros positivos y para que sean reales debe ser simetrica

Fase minima => todos los ceros en semiplano izquierdo

halle K para que sea oscilatoria amortiguada con valor estable 3

aplico T. del Valor final $\lim_{t \to \infty} g(t) = \lim_{s \to 0} s . F(s)$

Si la respuesta es oscilatoria amortiguada con valor medio $V_M$

uso TVF: $\lim_{s \to 0} s.(G(s).X(s)) = V_M$ si $X(s) = 1$ porque es $\delta(t)$

uso solo $G(s)$

AMORTIGUADA: con exponenciales negativas

puede ser oscilatoria independiente de amortiguada o no pq quedan senos y cosenos

La suma de 2 f. armonicas simples f y g(t) de ≠ frecuencia no da otra función armonica simple $f(t) + g(t)$

si dice f(3,10,23,45) => uso 1,31 con redondeo simetrico

## TRAPECIOS

si es IMPAR y tiene [-a, a] → el error es cero

1) Ver si es PAR o IMPAR

2) tener en cuenta si el intervalo es simetrico

Por ejem: [-a ; a]

producto

par • par = par

impar • par = impar

impar • impar = par

par + impar

No es ni par ni impar

Justificar Lipschitz

$L = \max |F'y| = \max (y')$ en R como $a < t < b$

como el maximo en $t = a/b \Rightarrow L = X$, Fin

Si es impar en un intervalo simetrico $[-a, a]$ al subdividirlo en una cant. par de subintervalos lo que Simpson calcula de $[-a, 0]$ se compensa con lo que calcula $[0, a]$

Las cubicas Simpson las calcula de forma exacta

→ No Hay error con cualquier H (tal que n sea par)

## Legendre

conjunto de polinomios. Conjunto de polinomios ortogonales en $[-1, 1]$. Si tenemos una funcion definida en $[a,b]$ se la debe trasladar a $[-1, 1]$ para poder usarlo.

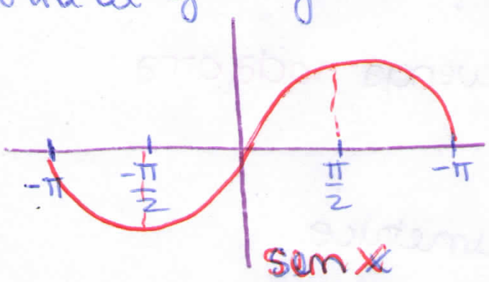
Estos polinomios son ortogonales

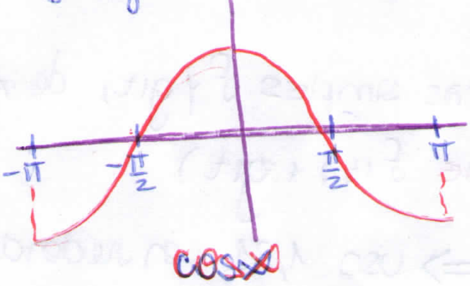
Y por su ortogonalidad no hay que resolver sistemas de ecuaciones en un intervalo dado, no se necesita aproximar la f. por un pol de gr n

resolver ningun sistema de ecuaciones

Si no usa $w_{i+1}$ puede usarse como etapa predictora (Explicita)

con NR puede NO converger. Si esta cerca de un e relativo, la recta tg corta al eje x lejos del intervalo y luego converge a otra raiz




Si no tienen igual frecuencia no es sinosoidal

$f(t) = A \cdot \cos(\ldots)$

$g(t) = A \cos(\ldots)$

La amplitud de $f+g$ es mayor que A ya que el angulo entre f y g es menor a 120°