UTN.BA

UTN.BA
SECRETARÍA ACADÉMICA Y DE PLANEAMIENTO

GRAFOS, DÍGRAFOS Y ÁRBOLES

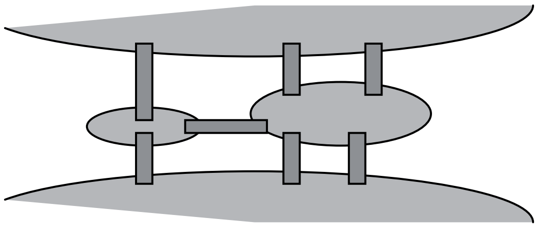
Unidad 7

GRAFOS, DÍGRAFOS Y ÁRBOLES

A modo de introducción al tema central de esta unidad, vamos a remontarnos al origen de la teoría de Grafos:

A lo largo de los siglos, el problema de los Puentes de KÖNIGSBERG ha despertado el interés de muchos, en especial de los matemáticos.

En el siglo XVIII, la ciudad de KÖNIGSBERG, situada a orillas del río Pregel, y las dos islas sobre el río que también eran parte de la ciudad, estaban conectadas a través de siete puentes, como observamos en el siguiente esquema:

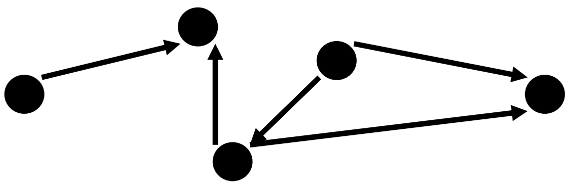


Un problema que intrigaba a sus habitantes era si existía un camino para poder cruzar todos los puentes pasando una sola vez por cada uno. Si bien esto era solamente un entretenimiento dominical para muchos, en 1736 el matemático Leonhard Euler descubrió y desarrolló la teoría de Grafos, con la cual pudo responder este interrogante. Esta teoría significó además un gran avance para la matemática.

La teoría de Grafos actualmente se utiliza en diversos campos y tiene muchas aplicaciones, tanto en Ciencias Sociales, Lingüística, Física, Química, Arquitectura y, tal vez lo que más nos interesa a nosotros, en Comunicaciones, Ingeniería e Informática.

Los grafos son muy utilizados para modelar problemas pertenecientes a distintas disciplinas.
En ellos, como en todo modelo, se representan las características relevantes del problema o la aplicación del mundo real y se ignoran los detalles irrelevantes.

Para comenzar con una idea de lo que es un grafo, pensemos que es un conjunto de puntos o vértices unidos por aristas, que pueden tener sentido o no.



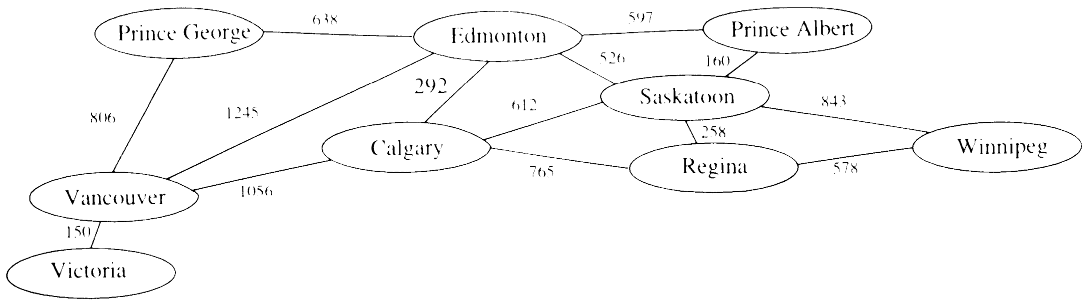
Otro ejemplo de la utilización de grafos lo encontramos en los mapas de carreteras.

e Ejemplo

Supongamos que nos interesa encontrar la distancia mínima entre dos ciudades dadas.
Las ciudades serán los vértices del grafo y las carreteras que la comunican se representarán como aristas.

Tenemos que encontrar el camino mínimo entre dos vértices. Para ello existen algoritmos que nos permiten hacerlo.

A modo de ejemplo, tomamos el grafo de las autopistas principales del oeste de Canadá:



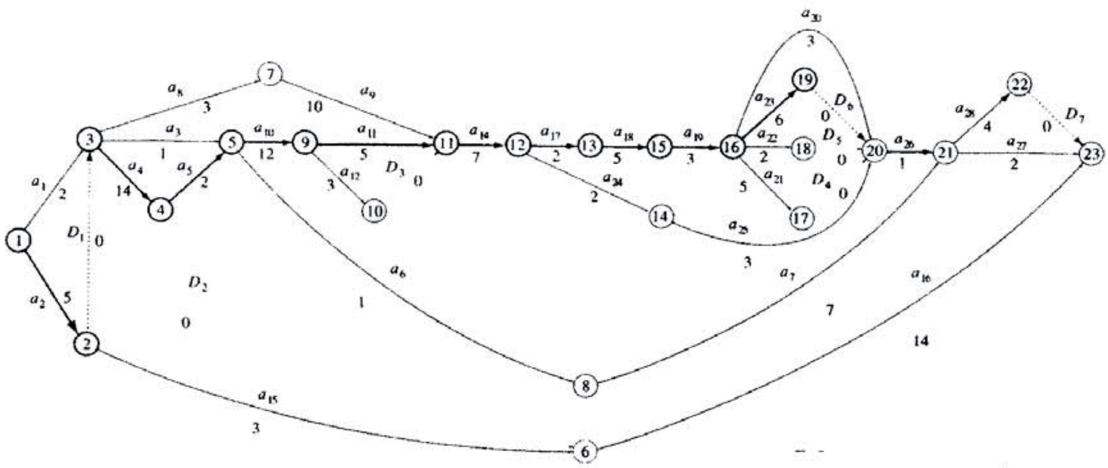
De mismo modo, para los diseños urbanísticos y de transportes también se utilizan grafos que a través de la simulación por computadora de sistemas de tránsito (desde redes nacionales, calles en una ciudad e incluso circulación de puentes o cruce de carreteras) tienen por objetivo detectar puntos negros para sugerir cambios o nuevos sistemas.

También podemos pensar que en un pueblo, la ubicación del cuartel de bomberos debe hacerse de forma tal de minimizar las distancias o recorridos hacia el resto del pueblo. Y esto se logra mediante el análisis de un grafo que modeliza tal situación.

Una de las primeras aplicaciones por computadora de los grafos se orientó a la planificación de proyectos para describir, representar y analizar situaciones muy complejas que constan de muchas actividades relacionadas entre sí.

e Ejemplo

Consideremos una compañía constructora de casas prefabricadas que se trasladan y se asientan sobre cimientos de hormigón en las parcelas adquiridas al efecto.
El proyecto comienza por la selección y adquisición de un terreno edificable y por la selección del tipo de casa que se desee (con la preparación de planos).
Luego se van encadenando las actividades, algunas de las cuales es necesario completar antes de comenzar la siguiente tarea.
El grafo de tareas resultante es el siguiente:



Con este grafo, se pueden identificar las tareas críticas, es decir aquellas cuya demora en su inicio afecta la duración del proyecto total, y obtener con ellas un camino crítico.

e

Veamos otro ejemplo:

Antes de comenzar con las definiciones formales, construyamos un grafo que represente el funcionamiento de una máquina muy simple de caramelos, con las siguientes reglas:

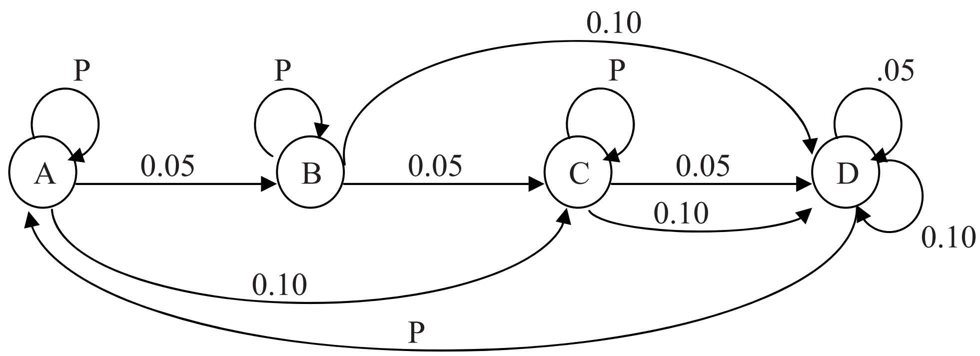
a) cada caramelo cuesta $ 0.15
b) la máquina acepta sólo monedas de $ 0.10 y de $ 0.05
c) la máquina NO da vuelto

Para construir el grafo, debemos considerar distintos "estados de dinero ingresado", y como se va pasando de uno a otro.

Por ejemplo, si en un momento tenemos ingresados 5 centavos, y agregamos 5 centavos más, pasamos a otro estado, que es el mismo que si hubiésemos ingresado 10 centavos al principio.

Llamemos A, B, C y D a los estados que representan 0, 5, 10 y 15 centavos ingresados respectivamente.
Las transiciones de un estado a otro se harán por ingreso de 5 o 10 centavos, o al presionar el botón para obtener los caramelos (P).

Podemos representar la situación con el siguiente grafo dirigido:



También hay un tipo especial de grafos que se llaman árboles y tienen muchas aplicaciones. Por ejemplo, con ellos se puede representar el organigrama de una empresa, los niveles sintácticos de una frase, utilizar árboles como estructuras de datos en informática, y muchas aplicaciones más.

Ahora que hemos visto algunas aplicaciones de grafos y nos planteamos ciertas cuestiones como la de los puentes de Konigsberg o cómo hallar un camino mínimo, veamos las definiciones y propiedades principales de los grafos, dígrafos y árboles.

Un grafo es una estructura formada por vértices unidos a través de aristas y se utiliza para representar determinadas situaciones. Formalmente se define como una estructura algebraica de la siguiente forma:

Un grafo es una terna $G = (V ; A ; \varphi)$ siendo:

V: el conjunto de vértices $V \neq \varnothing$
A: el conjunto de aristas A
φ: la función de incidencia $\varphi: A \to V^{(2)}$

$V^{(2)}$ es el conjunto formado por subconjuntos de 1 o 2 elementos de V.

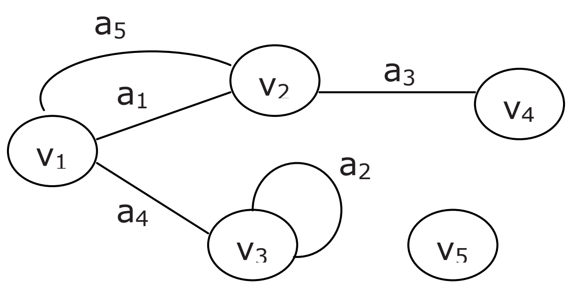
e

Ejemplo:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $\qquad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$\varphi (a_1)=\{v_1,v_2\}$, $\varphi (a_2) =\{v_3\}$, $\varphi (a_3)=\{v_4,v_2\}$, $\varphi (a_4)=\{v_1,v_3\}$, $\varphi (a_5)=\{ v_1,v_2\}$

Se puede diagramar de la siguiente forma:



A partir de aquí presentamos una serie de definiciones relativas a vértices y aristas**:**

VÉRTICES ADYACENTES: v_i es adyacente a $v_j \Leftrightarrow \exists\, a_k \in A$ tal que $\varphi (a_k) = \{v_i, v_j\}$
Es decir son aquellos vértices unidos por alguna arista.

En el ejemplo, v_2 es adyacente a v_1 y a v_4 pero no a v_3

VÉRTICE AISLADO: el que no es adyacente a ningún otro.

En el ejemplo: v_5 es aislado.

ARISTAS PARALELAS: a_i es paralela a $a_j \Leftrightarrow \varphi (a_i) = \varphi (a_j)$ siendo $a_i \neq a_j$

Es decir son aquellas comprendidas entre los mismos vértices.

En el ejemplo, a_1 y a_5 son paralelas, están comprendidas entre los mismos vértices.

ARISTAS ADYACENTES: las que tienen un único vértice en común siendo distintas y no paralelas.

En el ejemplo, a_1 es adyacente a a_3

BUCLES o LAZOS: las aristas comprendidas en un mismo vértice.

En el ejemplo, a_2 es un bucle.

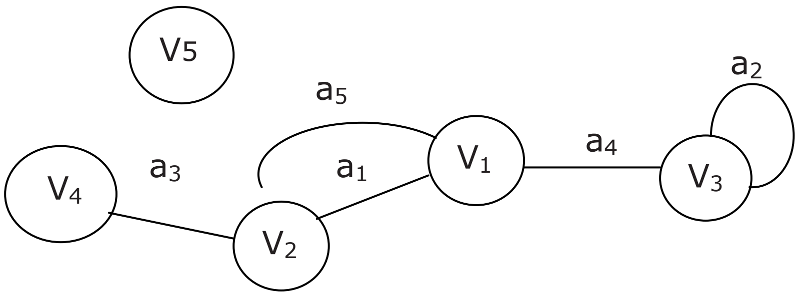
ARISTAS INCIDENTES EN UN VÉRTICE: las que tienen a dicho vértice por extremo.

En el ejemplo, las aristas a_1, a_3 y a_5 son incidentes en el vértice v_2

GRAFO SIMPLE: el que no tiene aristas paralelas ni bucles.

Es importante observar que en la definición de grafo no se especifica la longitud o forma de las aristas ni su posición, como así tampoco el orden o ubicación de los vértices.
Por ello, NO EXISTE un ÚNICO DIAGRAMA que represente un grafo.

El mismo grafo del ejemplo anterior puede representarse por este otro diagrama…



…y de muchas formas más, pero siempre respetando las incidencias entre aristas y vértices.

Cuando se quieren programar algoritmos que utilizan grafos se necesita una representación no gráfica que pueda utilizarse en la computadora, por ello a continuación veremos la forma matricial de los grafos. Ellos pueden representarse a través de dos matrices: la de adyacencia y la de incidencia.

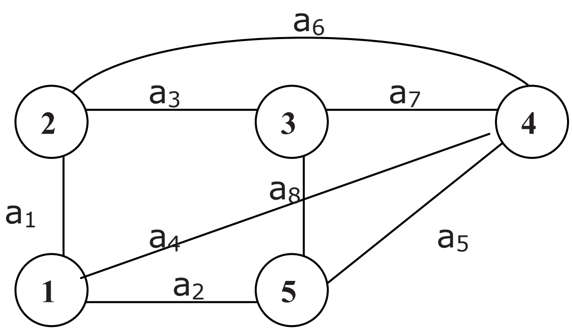
MATRIZ DE ADYACENCIA:

Sea un grafo $G = (V ; A ; \varphi)$ con $V = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ y $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$

Se define la matriz de adyacencia de **G** a una matriz booleana de **nxn**:

$$M_a(G) = ((m_{ij})) \quad \text{tal que } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } v_j \end{cases}$$

Ejemplo:



$$M_a(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA:

Sea un grafo $G = (V ; A ; \varphi)$ con $V = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ y $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$

Se define la matriz de incidencia de **G** a una matriz booleana de **nxm**:

$$M_i(G) = ((m_{ij})) \quad \text{tal que } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente a } a_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente a } a_j \end{cases}$$

Ejemplo:

Para el mismo grafo anterior: $M_i(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

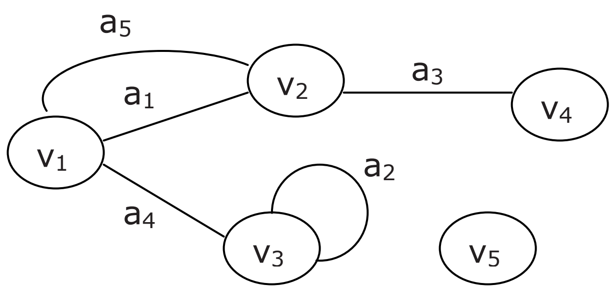
Otro concepto muy importante y útil en relación con los grafos es la cantidad de aristas incidentes en un vértice. Por ejemplo, si los vértices son computadoras unidas en red, queremos conocer con cuántas se conecta cada una. Ello se define como grado o valencia de cada vértice. Veamos la definición:

> Sea un grafo $G = (V ; A ; \varphi)$
> La función grado: $g: V \to N_0$ tal que $g(v_i)$ = cantidad de aristas incidentes en v_i

Nota: los bucles se cuentan doblemente.

<u>En el ejemplo anterior:</u>

$g(v_1) = 3$
$g(v_2) = 3$
$g(v_3) = 3$
$g(v_4) = 1$
$g(v_5) = 0$



Observemos que en un grafo simple un vértice es aislado si y sólo si su grado es cero:
v es aislado $\Leftrightarrow g(v) = 0$

En un grafo simple se denomina vértice colgante o pendiente al que tiene grado igual a uno.

Como cada arista hace incrementar en uno el grado de cada vértice de sus extremos (si son distintos) o en 2 si se trata de un bucle, al sumar todos los grados de los vértices, estamos considerando cada arista dos veces, o sea que podemos enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad:

En todo grafo se cumple que la suma de los grados de los vértices es igual al doble de la cantidad de aristas.

En símbolos: $\Sigma\, g(v_i)= 2\, |A\,|$

Esta propiedad podes demostrarla usando inducción matemática. Si tienes dificultades consulta con el tutor o busca información en la bibliografía, en el capítulo 17.

Ejemplo:

¿Cuál es la cantidad total de vértices de un grafo que tiene 2 vértices de grado 4, 1 de grado 3, 5 de grado 2 y el resto colgantes (de grado 1) sabiendo que en total hay 12 aristas?

Solución:

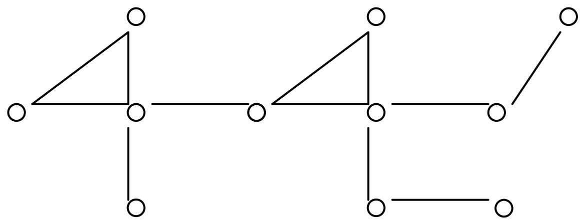
Usando la propiedad anterior: $2 \bullet 4 + 1 \bullet 3 + 5 \bullet 2 + x \bullet 1 = 2 \bullet 12$

Resolviendo: $21 + x = 24 \Rightarrow x = 3$ (cantidad de vértices colgantes)

Por lo tanto la cantidad total de vértices es: $| V | = 11$

UNA forma posible de dibujar este grafo sería:

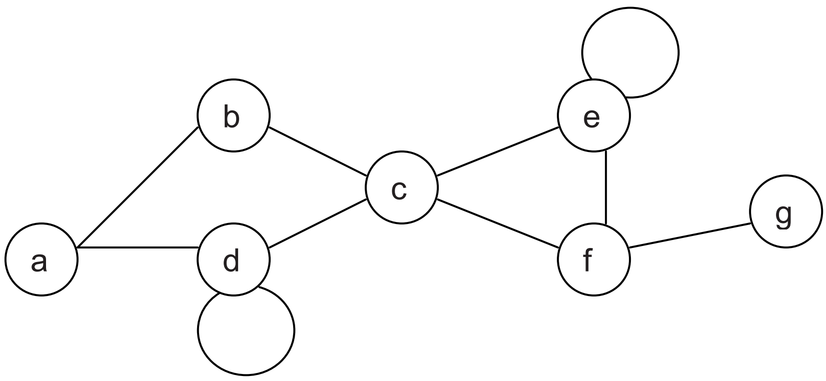
¿Te animas a dibujar otras posibilidades?



Supongamos que tenemos un grafo cuyos vértices representan distintas ciudades y las aristas son las carreteras que las unen. Puede interesarnos encontrar un camino entre dos ciudades dadas, aunque entre ellas no exista una carretera que las una, pero sí pasando en forma intermedia por otras ciudades. Ello nos lleva al concepto de caminos en un grafo.

CAMINO: sucesión de aristas adyacentes distintas.
CICLO o circuito: camino cerrado. El vértice inicial coincide con el final.
LONGITUD del camino: cantidad de aristas que lo componen.
CAMINO SIMPLE: si todos los vértices son distintos.
CAMINO ELEMENTAL: si todas las aristas son distintas

Ejemplo:



Si queremos señalar:

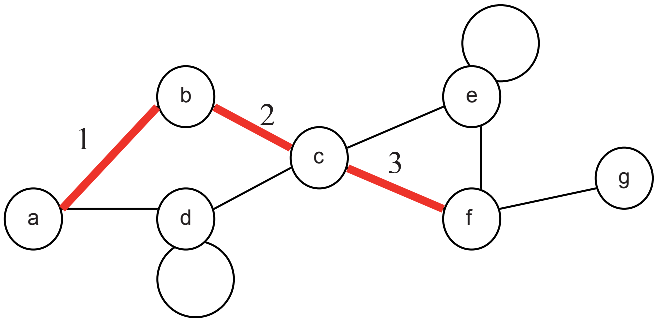
a) Grado de cada vértice
b) 3 caminos de "a" hacia "f"
c) Ciclos de longitud 3, 4, 5 y 7

Tenemos que:

a) g(a) = 2 ; g(b) = 2 ; g(c) = 4 ; g(d) = 4 ; g(e) = 4 ; g(f) = 3 ; g(g) =1

b) Un posible camino es: C_1= (a; b; c; f)

Long(C_1) = 3 porque usamos 3 aristas



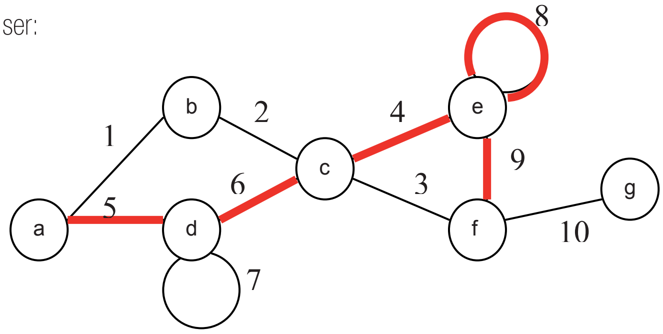
Muchas veces resulta útil nombrar los vértices y las aristas. En el ejemplo anterior quedaría:

C_1= (a; 1; b; 2; c; 3; f)

Otro camino entre los mismos vértices puede ser:

C_2= (a; 5; d; 6; c; 4; e; 8; e; 9; f)

Long(C_2) = 5

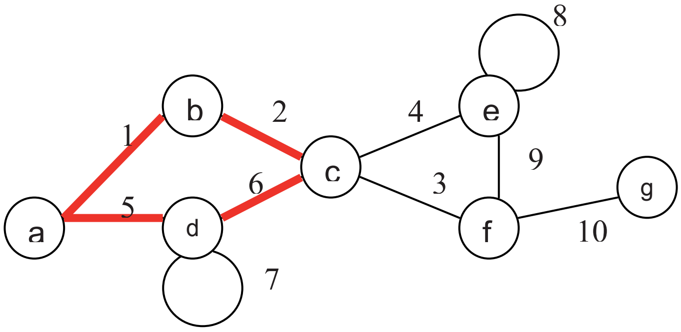


¿Te animas a indicar otro?

c) Indiquemos algunos ciclos:

C_1=(a; 1; b; 2; c; 6; d; 5; a)

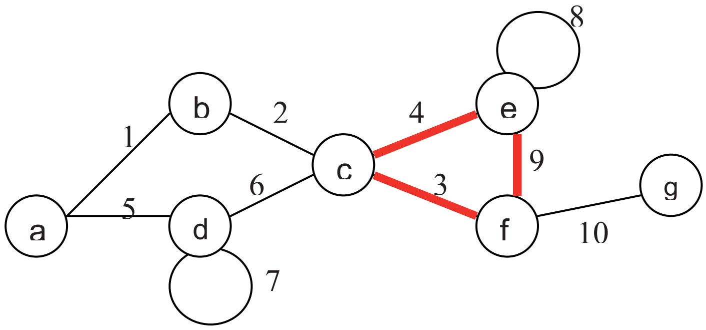
Long(C_1) = 4



e

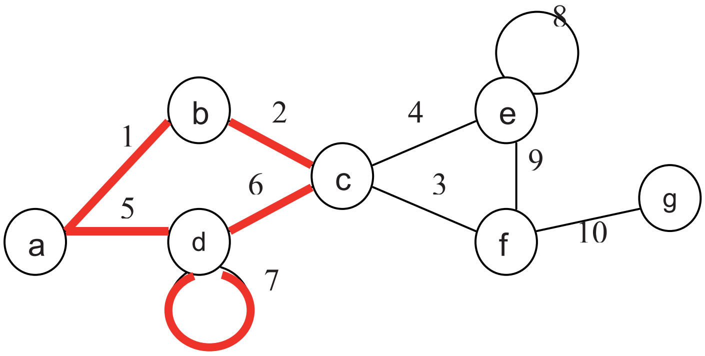
C_2=(c; 4; e; 9; f; 3 c)

Long(C_2) = 3



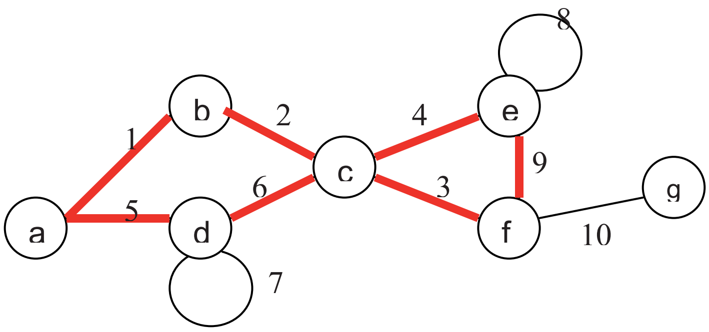
C_3=(a; 1; b; 2; c; 6; d; 7; d; 5; a)

Long(C_3) = 5



C_4=(a; 1; b; 2; c; 4; e; 9; f; 3; c; 6; d; 5; a)

Long(C_4) = 7



Sintetizando:

- Un grafo es una estructura formada por un conjunto de vértices, un conjunto de aristas y una función de incidencia.
- Los vértices que están unidos por alguna arista se dicen adyacentes, las aristas que tienen un vértice en común son adyacentes.
- En un grafo puede haber aristas paralelas, bucles, vértices aislados, etc.
- Los grafos se pueden representar en forma gráfica a través de diagramas, y en forma matricial a través de las matrices de adyacencia y de incidencia
- El grado de un vértice es la cantidad de aristas que inciden en él. La suma de todos los grados de los vértices de un grafo es igual al doble de la cantidad de aristas.
- Un camino entre dos vértices de un grafo es una secuencia de aristas adyacentes entre dichos vértices. La longitud de un camino es la cantidad de aristas que lo forman.
- Los ciclos son caminos cerrados, es decir que comienzan y terminan en el mismo vértice

A continuación, veremos algunos tipos de grafos especiales: los grafos regulares, los completos y los bipartitos:

GRAFO K-REGULAR:

Sea un grafo $G = (V; A; \varphi)$ y $k \in N_0$

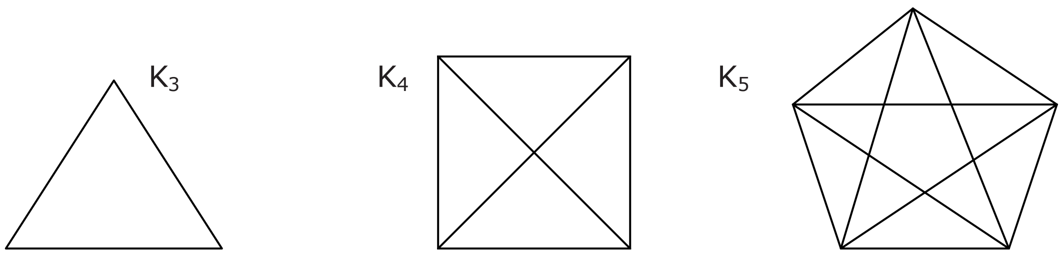
Se dice que G es k-regular $\Leftrightarrow \forall\, v \in V: g(v) = k$

Veamos las condiciones que debe cumplir para ser completo

GRAFOS COMPLETOS: los indicamos $\mathbf{K_n}$

Sea $n \in N$: $K_n = (V; A; \varphi)$ tal que $\forall\, v, w \in V$: $v \neq w \Leftrightarrow \exists\, a \in A : \varphi(a) = \{v, w\}$

O sea, los K_n son grafos simples de $\mathbf{n}$ vértices en los cuales cada vértice es adyacente a todos los demás.



Ejercicio:

En una fiesta hay 8 personas que en un determinado momento llenan sus copas de sidra y brindan entre ellos, todos con todos. ¿Cuántos choques de copas hay en total?

Solución:

Podemos considerar en K_8, donde los vértices son las personas y las aristas representan los choques de copas, ya que cada persona choca su copa con todos los demás excepto con sí mismo.

Utilizando la propiedad: $\Sigma\, g(v_i) = 2\,|A\,|$

Como todos los vértices tienen grado 7, nos queda:

$8 \bullet 7 = 2 \bullet |A| \quad \Rightarrow \quad |A| = 28$

En total hay 28 choques de copas.

Para pensar:

1) ¿Los K_n son grafos k-regulares? ¿Con qué valor de k?
2) ¿Qué particularidad tienen las matrices de adyacencia de los grafos K_n?

Intenta responder y si tienes dudas consulta a tu tutor.

GRAFOS BIPARTITOS:

Sea un grafo simple $G = (V; A; \varphi)$ con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Se dice que G es BIPARTITO $\Leftrightarrow V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq \varnothing \wedge V_2 \neq \varnothing \wedge V_1 \cap V_2 = \varnothing$

$\wedge \ \forall a_i \in A : \varphi(a_i) = \{v_j, v_k\}$ con $v_j \in V_1 \wedge v_k \in V_2$ o $v_k \in V_1 \wedge v_j \in V_2$

Es decir, los grafos BIPARTITOS son grafos cuyo conjunto de vértices está particionado en dos subconjuntos no vacíos y disjuntos: V_1 y V_2 tales que los vértices de V_1 pueden ser adyacentes a los vértices de V_2 pero los de un mismo subconjunto no son adyacentes entre sí.

e

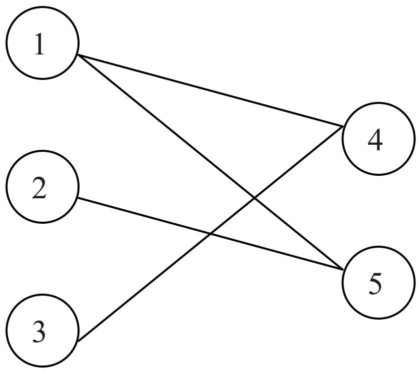
Ejemplo:

En el siguiente grafo: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$V_1 = \{1, 2, 3\} \qquad V_2 = \{4, 5\}$

Vemos que todas las aristas que hay, tienen un extremo en V_1 y el otro en V_2.

Por lo tanto es BIPARTITO.



Tengamos en cuenta que la definición no exige que deba haber arista entre todo par de vértices (uno de V_1 y el otro de V_2) sino que pide que las aristas que existan deben estar comprendidas entre un vértice de cada subconjunto. En este ejemplo, no hay arista entre 2 y 4, lo cual estaba permitido.

GRAFOS BIPARTITOS COMPLETOS que indicamos $\mathbf{K_{n,m}}$.

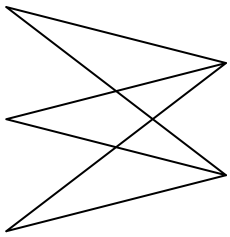
Como su nombre lo indica deben ser bipartitos y además completos. Es decir, el conjunto de vértices debe estar particionado en dos subconjuntos, cada arista debe tener un vértice de cada subconjunto y por ser completos cada vértice debe formar una arista con todos los demás. Pero atención, con todos los demás del subconjunto al que él no pertenece.

Por lo tanto son grafos bipartitos de $n+m$ vértices con TODAS las aristas posibles.

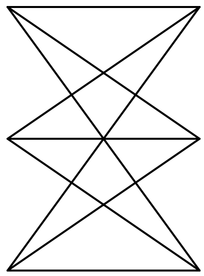
e

Ejemplos:

$K_{3,2}$



$K_{3,3}$



La definición siguiente es necesaria para luego poder comprender otros conceptos.

SUBGRAFOS:

Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$, se denomina subgrafo al grafo $G' = (V'; A' ; \varphi/_{A'})$ tal que $V' \subseteq V \wedge A' \subseteq A \wedge \varphi/_{A'}$ es la función φ restringida a A'.

Para obtener subgrafos de un grafo dado se puede:

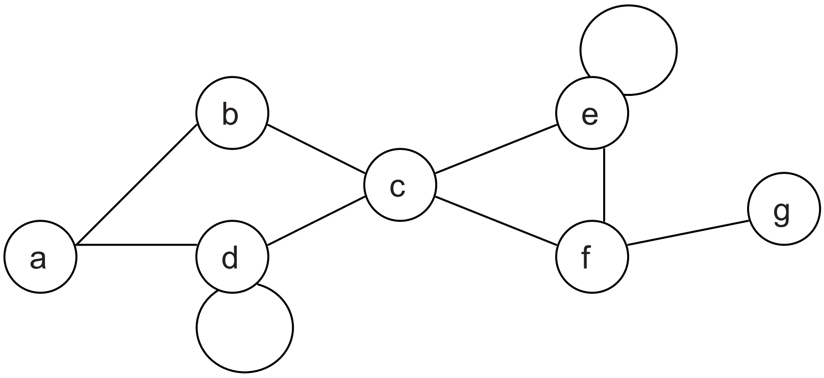
- suprimir uno o varios vértices y las aristas incidentes en ellos
- suprimir solamente una o varias aristas.

Si se suprime un vértice v, el subgrafo restante es $\widetilde{G}\ v$

Si se suprime una arista $\mathbf{a}$, el subgrafo restante es $\widetilde{G}\ \mathbf{a}$

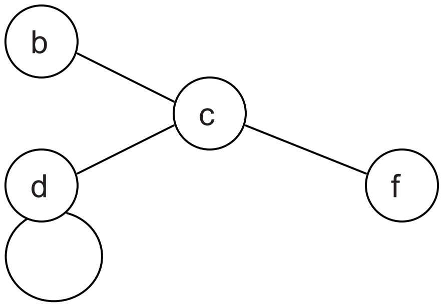
Veamos algunos y tengamos en cuenta que un sugrafo es " parte de un grafo"

Ejemplos: Dado el grafo: $G = (V; A; \varphi)$



Algunos subgrafos son:

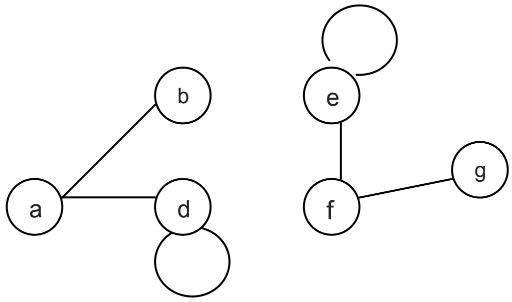
G_1:



Este se obtuvo de suprimir los vértices a, e y g.

$G_1 = \tilde{G}_B$ siendo $B = \{ a, e, g \}$

G_2:



Este se obtuvo de suprimir únicamente el vértice **c**.

$G_2 = \tilde{G}_c$

Muchas veces, especialmente en el diseño de redes de comunicación, es importante conocer si dos nodos (vértices) de la red están conectados, es decir si existe algún camino entre ambos. Asimismo, en el diseño de dichas redes se trata de evitar los puntos de corte, es decir aquellos nodos que si tienen algún problema de funcionamiento interrumpen la comunicación entre los otros (como el vértice "c" del ejemplo anterior). Estos son conceptos de grafos que veremos a continuación:

RELACION DE CONEXIÓN:

Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$, en el conjunto de vértices se define la siguiente relación:

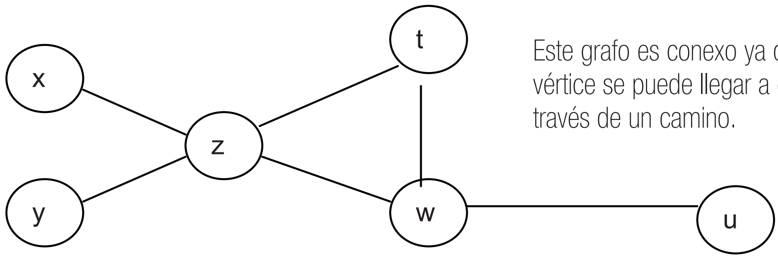
$v_i \; R \; v_j \Leftrightarrow \exists$ camino de v_i a $v_j \;\vee\; v_i = v_j$

Esta relación es de equivalencia y por lo tanto pueden hallarse las clases de equivalencia, a las que se denomina COMPONENTES CONEXAS.

GRAFOS CONEXOS:

Un grafo es conexo si y sólo si tiene una única componente conexa.
Es decir, un grafo es conexo si y sólo si existe algún camino entre todo par de vértices.

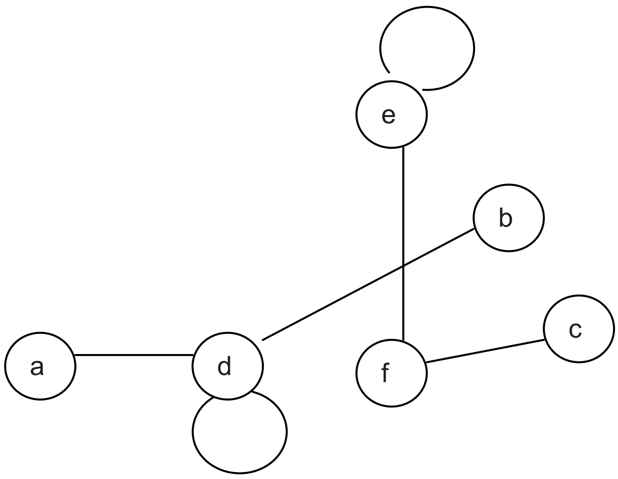
Ejemplo 1:



Este grafo es conexo ya que de cualquier vértice se puede llegar a cualquier otro a través de un camino.

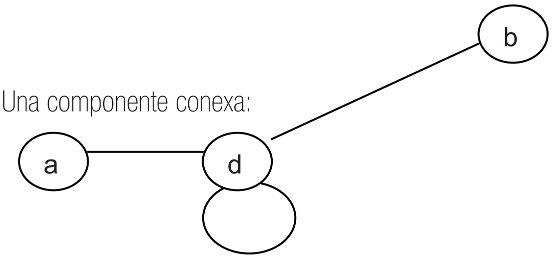
Ejemplo 2:

Este grafo NO es conexo pues no existe ningún camino entre los vértices a y c.

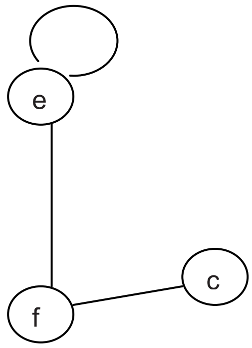


Sin embargo, está formado por dos subgrafos que cada uno de ellos sí es conexo. Se llaman COMPONENTES CONEXAS:

Una componente conexa:



La otra:



Continuemos con definiciones que nos permiten reconocer características en los grafos.

ISTMO O PUNTO DE CORTE

Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$ conexo, $v \in V$ es istmo $\Leftrightarrow$ $\widetilde{G}\ v$ es no conexo

Es decir, un istmo es un vértice tal que su supresión desconecta al grafo.

PUENTE

Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$ conexo, $a \in A$ es puente $\Leftrightarrow$ $\widetilde{G}\ a$ es no conexo

Es decir, un puente es una arista tal que su supresión desconecta al grafo.

CONJUNTO DESCONECTANTE

Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$ conexo, $B \subseteq A$ es desconectante $\Leftrightarrow \widetilde{G}_B$ es no conexo

Es decir, un conjunto de aristas es desconectante si y sólo si su supresión desconecta al grafo.

CONJUNTO DE CORTE

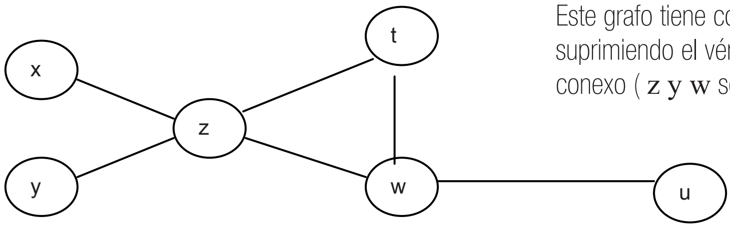
Un conjunto B desconectante es también de corte $\Leftrightarrow \forall\ C \subset B$, C no es desconectante.

O sea, para ser conjunto de corte debe estar formado por el mínimo número de aristas, o bien solamente por las necesarias para desconectar al grafo.

CONECTIVIDAD

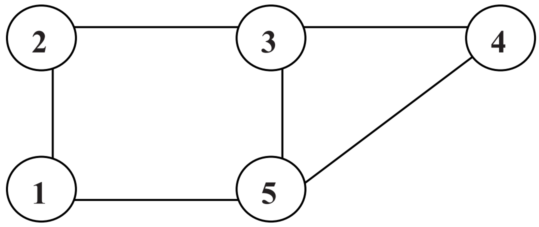
Es el menor número de vértices cuya supresión desconecta al grafo.

Ejemplos:



Este grafo tiene conectividad = 1 ya que suprimiendo el vértice **z** o el **w** queda no conexo (**z y w** son istmos).

Este grafo tiene conectividad = 2 pues es necesario suprimir dos vértices para que el subgrafo restante sea no conexo, por ejemplo suprimiendo los vértices 3 y 5.



En los grafos conexos, tienen especial importancia algunos caminos que se denominan Eulerianos y otros Hamiltonianos. Con ellos se pueden resolver problemas como el de los puentes de Konigsberg que citamos al principio de esta unidad. Los veremos a continuación:

GRAFOS EULERIANOS:

Se denomina **camino euleriano** al camino que pasa por **todas** las aristas **una sola vez**; y ciclo **euleriano** al ciclo que pasa por **todas** las aristas **una sola vez**.

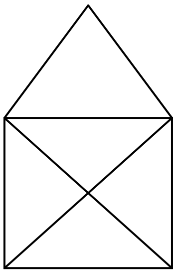
La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista camino euleriano es:

- El grafo debe ser conexo, y
- todos los vértices deben tener grado par, o a lo sumo dos grado impar.

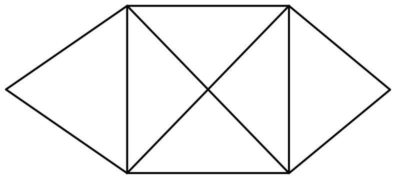
La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista ciclo euleriano es:

- El grafo debe ser conexo, y
- todos los vértices deben tener grado par.

Ejemplos:



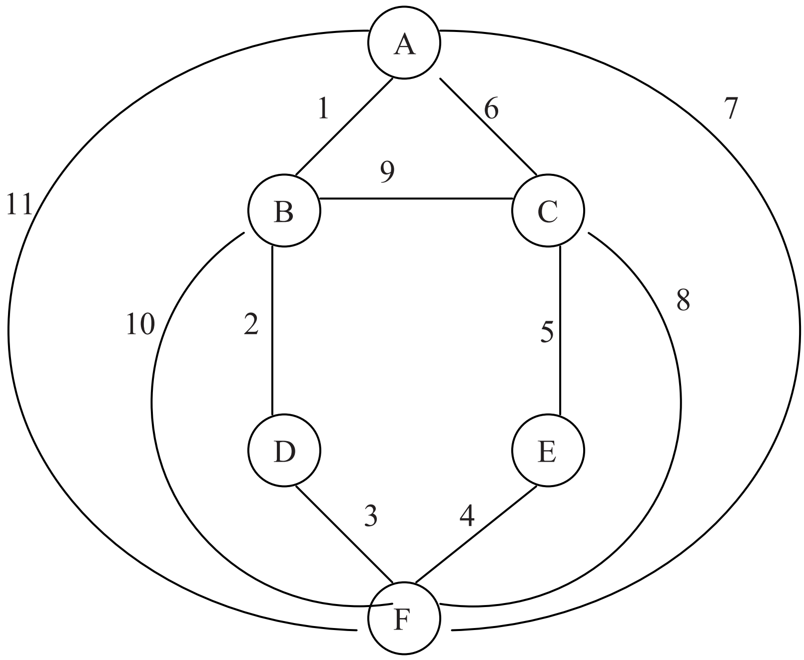
Este grafo no tiene ciclo euleriano pues hay dos vértices de grado 3. Tiene solo camino euleriano.



Este grafo tiene ciclo euleriano pues todos sus vértices tienen grado par.

Ejemplo

Pensemos que queremos indicar un ciclo de Euler en el siguiente grafo.



Un posible ciclo de Euler es:

C_1 = (A; 1; B; 2; D; 3; F; 4; E; 5; C; 6; A; 7; F; 8; C; 9; B; 10; F; 11; A)

¿Es el único?

No, por ejemplo otro es:

C_2 =(A; 11; F; 3; D; 2; B; 10; F; 4; E; 5; C; 8; F; 7; A; 6; C; 9; B; 1; A)

CAMINOS Y CICLOS HAMILTONIANOS:

Se denomina **camino hamiltoniano** al camino que **pasa una sola vez por cada vértice.**

Importante: no necesariamente va a pasar por todas las aristas, pues en muchos casos repetiría vértices y no sería hamiltoniano.

Ejemplo:

En el mismo grafo anterior, marquemos algún ciclo hamiltoniano.

Un posible ciclo hamiltoniano es: (A ; 1 ; B ; 2 ; D ; 3 ; F ; 4 ; E ; 5 ; C ; 6 ; A)

Te proponemos que dibujes un grafo conexo que:

1. Tenga camino de Euler y camino de Hamilton
2. Tenga camino de Euler y no tenga camino de Hamilton
3. No tenga camino de Euler y tampoco camino de Hamilton
4. No tenga camino de Euler y si tenga camino de Hamilton

Recuerda que si tienes dificultades puedes consultar con el tutor.

Así como en Grupos y en Algebras de Boole estudiamos los isomorfismos, también es importante poder saber si dos grafos son o no isomorfos. A continuación daremos la definición, condiciones y un ejemplo.

ISOMORFISMOS DE GRAFOS:

Dados dos grafos: $G_1 = (V_1; A_1; \varphi_1)$ y $G_2 = (V_2 ; A_2 ; \varphi_2)$

Se dice que son **isomorfos** si y solo si existen dos funciones biyectivas

$$f: V_1 \to V_2 \quad \text{y} \quad g : A_1 \to A_2$$

tales que: $\forall\, a \in A_1 : \varphi_2(\, g(a)\,) = f(\varphi_1(a))$

Si no hay aristas paralelas, entonces es suficiente:

$$\forall\, u, v \in V_1 : \{u, v\} \in A_1 \Rightarrow \{\, f(u), f(v)\, \} \in A_2$$

Esto significa que si en el primer grafo hay una arista entre dos vértices, los correspondientes a estos vértices en el segundo grafo también deben estar unidos por una arista.

En pocas palabras, dos grafos son isomorfos cuando tienen la misma estructura, es decir sus vértices están relacionados de igual forma aunque estén dibujados de manera distinta.

Condiciones necesarias para que dos grafos sean isomorfos:

- Deben tener la misma cantidad de vértices.
- Deben tener la misma cantidad de aristas.
- Deben tener los mismos grados de los vértices.
- Deben tener cadenas de las mismas longitudes.
- Si uno tiene ciclos, el otro también debe tenerlos.
- Etc.

Observación: las condiciones mencionadas son necesarias (es decir que sí o sí se deben cumplir para que los grafos sean isomorfos) pero no son suficientes (o sea que aunque se cumplan puede ser que los grafos no sean isomorfos)

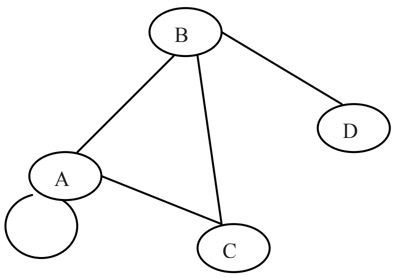
Para estar seguros que dos grafos son isomorfos, una condición suficiente es que tengan la misma matriz de adyacencia.

e

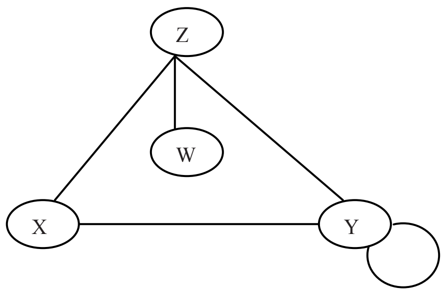
Por ejemplo:

Sean los grafos:

G_1:



y G_2:



Vamos a analizar si son isomorfos:

Ambos tienen 4 vértices y 5 aristas.

Definamos la función biyectiva, haciendo corresponder los vértices con iguales grados:

$f(A) = Y$; $f(B) = Z$; $f(C) = X$; $f(D) = W$

La definición dice que si entre dos vértices del primer grafo hay una arista, también debe haber una arista entre los vértices correspondientes en el segundo grafo.

Por ejemplo entre A y B hay una arista en G_1, y también hay una arista entre f(A) y f(B) en G_2.

Lo mismo habría que comprobar para cada arista. Podemos comprobarlo para todas las aristas juntas con la matriz ORDENANDO CONVENIENTEMENTE los vértices, de acuerdo a la función biyectiva definida entre los vértices

	A	B	C	D
A	1	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	0	1	0	0

	Y	Z	X	W
Y	1	1	1	0
Z	1	0	1	1
X	1	1	0	0
W	0	1	0	0

Como las matrices son iguales podemos asegurar que G_1 es isomorfo a G_2.

Importante: Si dadas dos matrices de adyacencia correspondientes a dos grafos, ellas no son iguales, no significa que los grafos no sean isomorfos, pues tal vez reordenando una de ellas se pueda lograr que sean iguales. Para poder afirmar que dos grafos no son isomorfos hay que mostrar alguna propiedad estructural no compartida o bien probar que todos los ordenamientos posibles de las matrices no coinciden. Esto último no es práctico pues como sabemos la cantidad de ordenamientos posibles de n elementos es igual al factorial de n, lo cual es una cantidad bastante elevada.

Sintetizando:

- Los grafos regulares, los grafos completos K_n y los grafos bipartitos y los grafos bipartitos completos $K_{n,m}$ son tipos especiales de grafos.
- Un subgrafo es una parte de un grafo dado, se puede obtener suprimiendo vértices o aristas.
- Los grafos conexos son aquellos en los que existe algún camino entre todo par de vértices. Si un grafo no es conexo tiene componentes conexas.
- Un istmo es un vértice cuya supresión desconecta a un grafo conexo.
- Un puente es una arista cuya supresión desconecta a un grafo conexo.
- Un conjunto desconectante es un conjunto de aristas cuya supresión desconecta a un grafo conexo. Si contiene solamente las necesarias para desconectar al grafo, se denomina conjunto de corte.
- Un camino o ciclo se dice Euleriano si pasa por todas las aristas una sola vez. Puede repetir vértices. La condición necesaria y suficiente para que exista ciclo de Euler es que el g sea conexo y todos los vértices tengan grado. Para camino de Euler puede haber dos vértices de grado impar.
- Un camino o ciclo se dice Hamiltoniano si pasa por todos los vértices una sola vez. En este caso no hace falta recorrer todas las aristas.
- Dos grafos son isomorfos si estructuralmente son el mismo grafo con distinto nombre. Formalmente debe existir una función biyectiva entre ambos que conserve la estructura.

Antes de continuar con el próximo tema, te proponemos que realices los ejercicios correspondientes a esta primera parte de la unidad.

Hasta ahora hemos analizado los grafos no dirigidos, pero para muchas aplicaciones es necesario indicar el sentido de las aristas.
Pensemos que las aristas representan calles de un pueblo y los vértices son las esquinas. Para poder obtener el camino más corto entre dos esquinas dadas sin transitar en contramano, necesitamos conocer el sentido de las calles.
Por ello vamos a definir los dígrafos o grafos dirigidos:

DÍGRAFOS

Un dígrafo es una terna $G = (V ; A ; \delta)$

siendo: V el conjunto de vértices $V \neq \varnothing$

A el conjunto de aristas o arcos

y δ la función de incidencia: $\delta : A \to VXV$

En este caso la función de incidencia se dice dirigida.

Observaciones:

- La función de incidencia δ le hace corresponder a cada arista un PAR ORDENADO de vértices, al primero se lo llama EXTREMO INICIAL de la arista, y el segundo es el VERTICE FINAL.
- Los caminos y los ciclos se definen de la misma forma que para los grafos no dirigidos, pero hay que respetar el sentido de las aristas.

Si todos los vértices son distintos se trata de un camino simple.

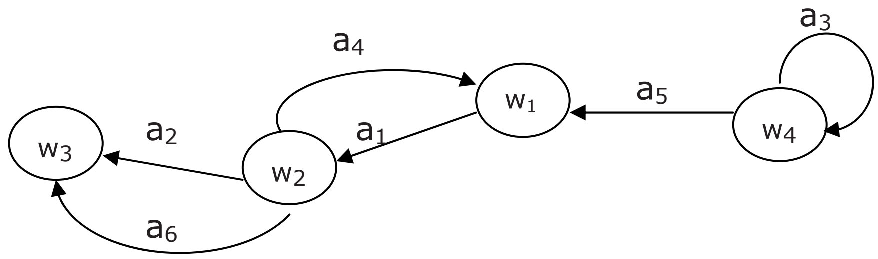
Si todas las aristas son distintas, se trata de un camino elemental.

Ejemplo:

$V = \{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ $\qquad$ $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$

$\delta(a_1)=(w_1 ; w_2)$ $\qquad$ $\delta(a_2)=(w_2 ; w_3)$ $\qquad$ $\delta(a_3)=(w_4 ; w_4)$
$\delta(a_4)=(w_2 ; w_1)$ $\qquad$ $\delta(a_5)=(w_4; w_1)$ $\qquad$ $\delta(a_6)= (w_2 ; w_3)$

Se puede diagramar de la siguiente forma:



Extremo inicial de a_5: w_4 Extremo final de a_5: w_1

ARISTAS PARALELAS: a_2 y a_6 BUCLE: a_3

ARISTAS ANTIPARALELAS: a_1 y a_4

CAMINO: $C = (w_4;\ a_5;\ w_1;\ a_1;\ w_2;\ a_2; w_3)$ CICLO: $C = (w_1; a_1;\ w_2;\ a_4;\ w_1)$

FUNCIÓN GRADO EN UN DÍGRAFO:

Comencemos por enunciar algunas definiciones relativas al grado de un vértice.

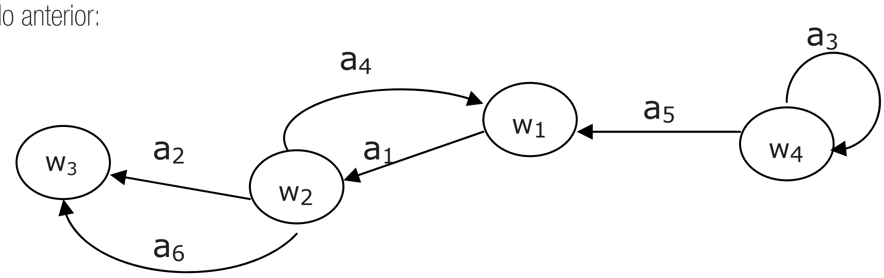
GRADO POSITIVO: cantidad de aristas que inciden positivamente en el vértice (son las que "entran" al vértice). Se denota $g^+(v)$

GRADO NEGATIVO: cantidad de aristas que inciden negativamente en el vértice (son las que "salen" del vértice). Se denota $g^-(v)$

GRADO TOTAL: es la suma de los grados positivo y negativo. Se denota $g(v)$

GRADO NETO: es la diferencia entre el grado positivo y el negativo. Se denota $g_N(v)$

En el ejemplo anterior:



$g^+(w_1) = 2$; $g^+(w_2) = 1$; $g^+(w_3) = 2$; $g^+(w_4) = 1$

$g^-(w_1) = 1$; $g^-(w_2) = 3$; $g^-(w_3) = 0$; $g^-(w_4) = 2$

$g(w_1) = 3$; $g(w_2) = 4$; $g(w_3) = 2$; $g(w_4) = 3$

$g_N(w_1) = 1$; $g_N (w_2) = -2$; $g_N (w_3) = 2$; $g_N (w_4) = -1$

Propiedades:

1) $\Sigma\, g^{+}(v_i) = |A|$
2) $\Sigma\, g^{-}(v_i) = |A|$
3) $\Sigma\, g(v_i) = 2\,|A|$
4) $\Sigma\, g_N(v_i) = 0$

Todas estas propiedades se pueden demostrar. Te proponemos que lo intentes y si tienes dificultades puedes recurrir al tutor.

En los dígrafos puede haber vértices especiales de los que no "sale" ninguna arista y se denominan pozos. Otros, a los que no les "llega" ninguna arista, se denominan fuentes.

Veamos las **definiciones** formalmente:

POZO: es un vértice v tal que $g^{-}(v) = 0$
O sea, v no es extremo inicial de ninguna arista.
FUENTE: es un vértice v tal que $g^{+}(v) = 0$

O sea, v no es extremo final de ninguna arista.

Los pozos y las fuentes son importantes en muchos casos. Por ejemplo si un camino conduce a un pozo, ya no se puede salir de allí. Cuando estudiemos las máquinas de estado finito en la última unidad, veremos que los pozos son los sumideros a los que se va cuando la palabra ingresada no es aceptada por la máquina.

REPRESENTACION MATRICIAL DE DÍGRAFOS

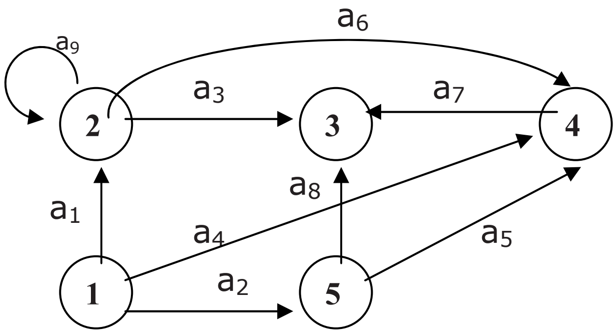
MATRIZ DE ADYACENCIA

Sea un dígrafo $G = (V; A; \delta)$ con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Se define la matriz de adyacencia de G a una matriz booleana de nxn:

$$M_a(G) = ((\, m_{ij}\,)) \quad \text{tal que } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists a \in A : \delta(a) = (v_i\,; v_j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo:



$$M_a(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA:

Sea un dígrafo $G = (V ; A ; \delta)$ con $V = \{ v_1, v_2, \dots , v_n \}$ y $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_m \}$

Si no tiene bucles ni aristas paralelas, se define la matriz de incidencia de G a una matriz de nxm:

$$Mi(G) = ((m_{ij})) \quad \text{tal que } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es vértice inicial de } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es vértice final de } a_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } a_j \end{cases}$$

Ejemplo:

Para el mismo dígrafo anterior pero sin el bucle:

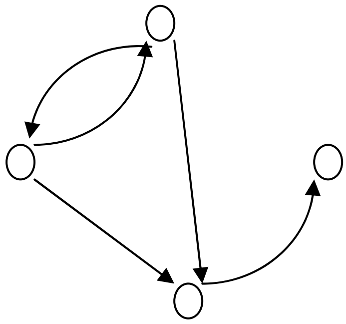
$$M_i(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

GRAFO ASOCIADO A UN DÍGRAFO

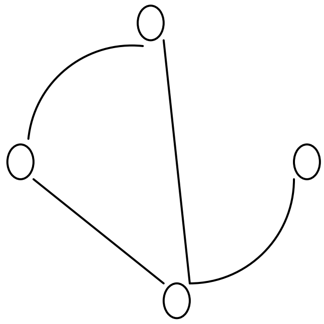
Dado un dígrafo, si se cambian las aristas dirigidas por aristas no dirigidas, se obtiene el grafo asociado. Es decir hay que ignorar el sentido de las aristas.
Si en el dígrafo original hay aristas paralelas o antiparalelas, en el grafo asociado sólo se representa una de ellas.

Ejemplo:

Dígrafo:



Grafo asociado:



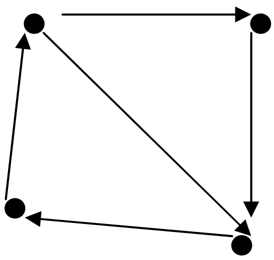
CONEXIDAD EN DÍGRAFOS

Todo dígrafo cuyo grafo asociado sea conexo, se denomina DÍGRAFO CONEXO.

Todo dígrafo en el que exista algún camino entre todo par de vértices se denomina DÍGRAFO FUERTEMENTE CONEXO

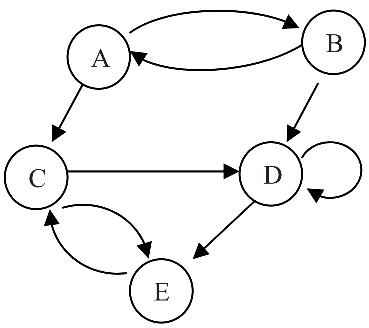
Veamos los ejemplos:

Ejemplo 1:

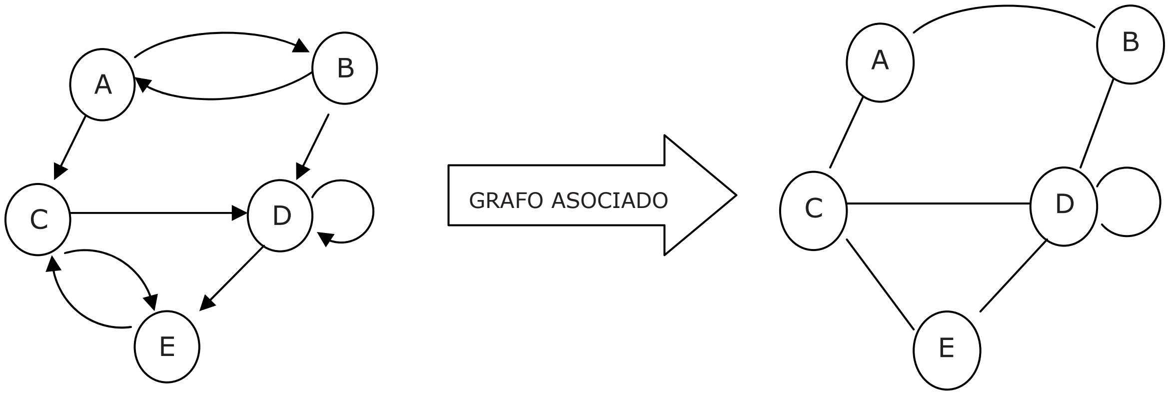


Este dígrafo es conexo y además es fuertemente conexo.

Ejemplo 2:

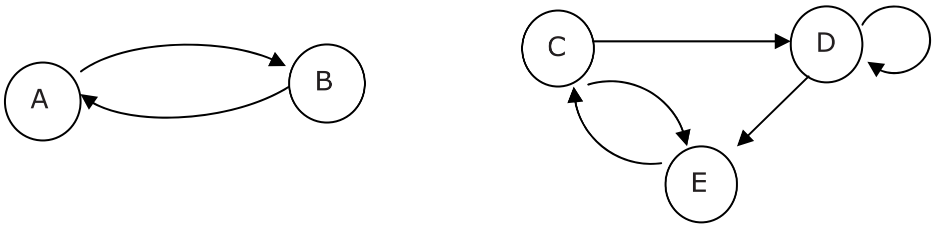


Este dígrafo es conexo pues su grafo asociado lo es:



Pero el dígrafo NO es FUERTEMENTE CONEXO, ya que, por ejemplo, no existe camino alguno que salga del vértice **C** y llegue al vértice **B.**

Lo que sí hay son dos COMPONENTES FUERTEMENTE CONEXAS:



CAMINOS DE EULER Y HAMILTON EN DÍGRAFOS

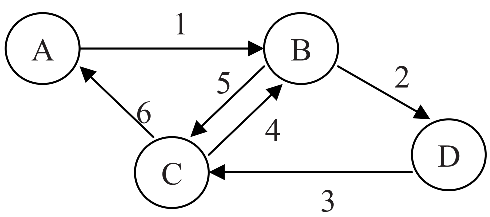
Se definen de forma similar que para grafos no dirigidos, pero hay que respetar el sentido de las aristas.
Condición necesaria y suficiente para que exista ciclo de Euler en un dígrafo:
$\forall\ v \in V : g^{+}(v) = g^{-}(v)$

e

Ejemplo:

En este dígrafo existe ciclo de Euler:

C = (A;1;B;2;D;3;C;4;B;5;C;6:A)



y un posible ciclo de Hamilton:

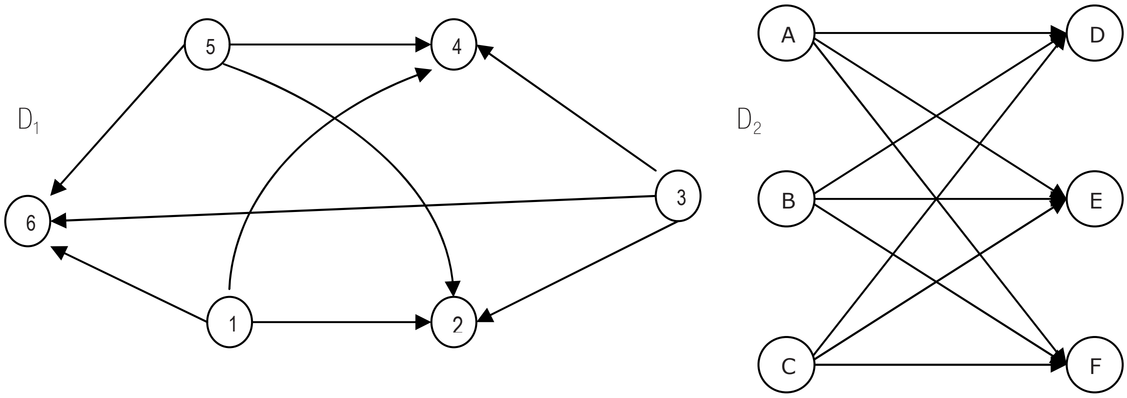
C = (A;1;B;2;D;3;C;6;A)

ISOMORFISMO DE DÍGRAFOS

El concepto de isomorfismo de dígrafos es igual que para grafos, pero hay que tener en cuenta la dirección de las aristas, es decir el grado positivo y negativo de cada vértice y, por lo tanto eso debe respetarse para la asignación, es decir la correspondencia debe establecerse entre los vértices del mismo grado positivo o negativo.

e

Ejemplo:



¿Son estos dígrafos isomorfos?...

Si definimos la función: $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que

$f(1) = A$; $f(2) = D$; $f(3) = B$; $f(4) = E$; $f(5) = C$; $f(6) = F$

y construimos las matrices de adyacencia, veremos que resultan ser IGUALES:

Matriz de D_1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Matriz de D_2

	A	D	B	E	C	F
A	0	1	0	1	0	1
D	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	1	0	1
E	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	0	0	0

Como las matrices son iguales, entonces los dígrafos son isomorfos.

Sinteticemos lo que desarrollamos sobre dígrafos:

- Un dígrafo es un grafo dirigido $D = (V ; A ; \delta)$
- Hay conceptos nuevos que no existen en los grafos, por ejemplo el de aristas antiparalelas, pozos y fuentes
- El grado positivo de un vértice es el entrante, el grado negativo es el saliente, el grado total es la suma de ambos y el grado neto es la diferencia
- Se pueden definir caminos y ciclos respetando el sentido de las aristas. Pueden ser de Euler o de Hamilton al igual que en los grafos
- Un dígrafo se puede representar por las matrices de adyacencia y de incidencia. La matriz de adyacencia no necesariamente es simétrica. La de incidencia tiene elementos que pueden ser 0, 1 y -1 para poder representar el sentido de las aristas.
- El grafo asociado a un dígrafo es el formado por los mismos vértices y considerando las aristas sin sentido.
- Un dígrafo es conexo si su grafo asociado lo es. Un dígrafo es fuertemente conexo si existe camino entre todo par de vértices.
- Al igual que en los grafos, puede establecerse o no isomorfismo entre dos dígrafos dados. Ello será posible solamente cuando se trate de la misma estructura

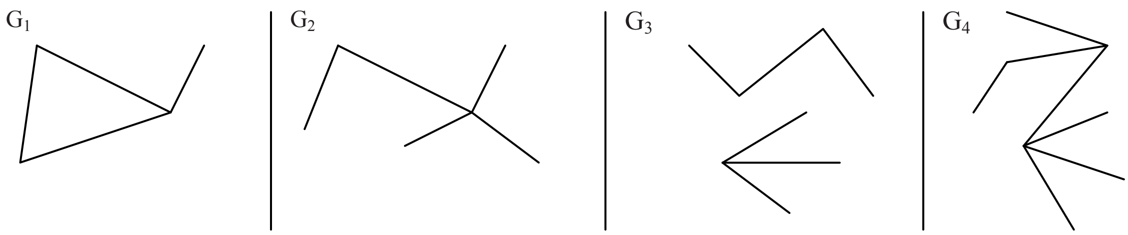
A continuación, estudiaremos un tipo especial de grafos que se utilizan mucho en computación, específicamente en Estructuras y Bases de Datos. Son los denominados "árboles".

Llamaremos árbol a todo grafo conexo y sin ciclos.

e

Ejemplos:

De los siguientes grafos son árboles únicamente G_2 y G_4 pues G_1 tiene un ciclo y G_3 no es conexo.



La siguiente es una propiedad muy importante porque caracteriza a los árboles:

Condición necesaria y suficiente:
Un árbol es un grafo en el cual entre todo par de vértices existe un único camino simple.

Propiedades básicas de los árboles:

- Si a un árbol se le agrega una arista entre dos de sus vértices, deja de ser árbol.
- Todas las aristas de un árbol son puentes.
- En todo árbol se cumple que: $|V| = |A| + 1$

Intenta una justificación de cada una de las propiedades anteriores, y si te animas puedes intentar una demostración formal. Puedes recurrir al tutor o consultar el libro de la cátedra en el capítulo 17, si se presentan dificultades.

Se denomina BOSQUE al grafo no conexo en el cual cada una de las componentes es un árbol.

Propiedad: En un bosque de k componentes se cumple que $|V| = |A| + k$

e

Ejemplo:

G_3 del ejemplo anterior es un bosque y tiene $k = 2$ componentes.

ÁRBOLES DIRIGIDOS

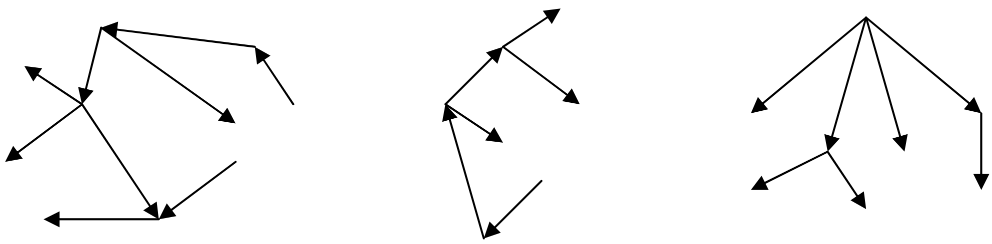
Un dígrafo se denomina **árbol dirigido** cuando su grafo asociado es un árbol.

De los árboles dirigidos nos interesa estudiar los árboles con raíz.

El árbol con raíz es un árbol dirigido en el cual el grado entrante (positivo) de cada vértice es igual a 1, salvo un único vértice con grado positivo igual a cero, llamado raíz.

e

Ejemplo: De los siguientes árboles dirigidos tienen raíz los dos últimos.



Un vértice v de un árbol se dice que es HOJA cuando $g(v) = 1$
Los **VÉRTICES INTERNOS** son todos aquellos que no son la raíz ni las hojas.
Se llama **RAMA** a todo camino que va desde la raíz a alguna hoja.

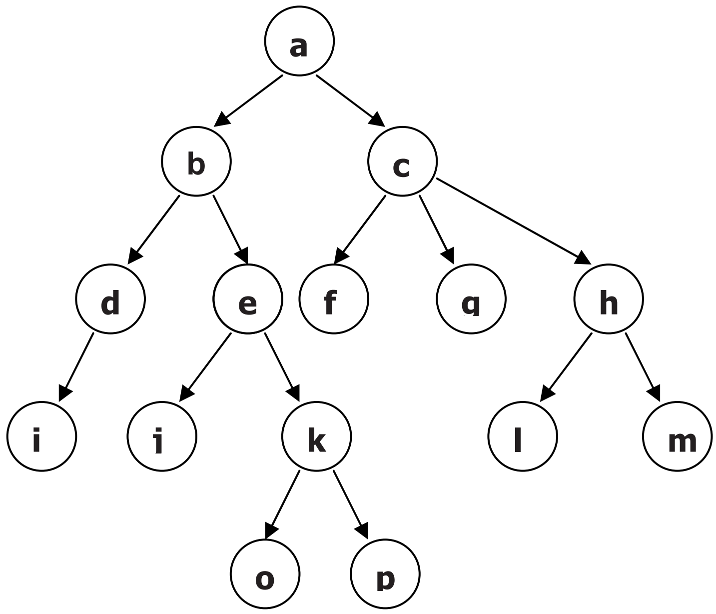
Otras definiciones que se deben tener en cuenta son las siguientes:

Antecesor: v es antecesor de $w \Leftrightarrow$ existe un único camino simple de v a w.
Sucesor: w es sucesor de v en el caso anterior
Padre: v es padre de $w \Leftrightarrow$ existe una arista de v a w.
Hijo: w es hijo de v en el caso anterior.
Hermanos: v y w son hermanos si tienen el mismo padre.

Podríamos decir que se reconocen como en el árbol genealógico.

e

Ejemplo:



En este árbol, la raíz es: a

Las hojas son: i, j, o, p, f, g, l, m

El padre de k es e.

Los hijos de c son f, g, h

Todos los antecesores de j son e, b, a

Veremos ahora otras definiciones que nos resultarán útiles para trabajar árboles

El NIVEL DE UN VÉRTICE se define en forma recursiva:

1) El nivel de la raíz es cero: $n(r) = 0$

2) Cada vértice tiene un nivel más que su padre:

$$\text{si } p \text{ es padre de } v \rightarrow n(v) = n(p) + 1$$

ALTURA de un árbol: es el mayor NIVEL alcanzado por las HOJAS.
Se dice que un árbol está BALANCEADO cuando todas las hojas están en el nivel MAYOR o en UNO MENOS.
En el ejemplo anterior, la altura del árbol es: $h = 4$ ¿Es balanceado? No, pues las hojas f y g están en el nivel 2.

ARBOLES N-ARIOS

Un árbol con raíz es **n-ario** $\Leftrightarrow \forall\, v \in V: g^{-}(v) \leq n$
Es decir, cada vértice puede tener a lo sumo n hijos.

CLASIFICACIÓN DE LOS N-ARIOS

- Si $n=2$ entonces se dice árbol BINARIO.
- Si $n=3$ entonces se dice árbol TERNARIO.
- Un árbol se dice n-ario regular cuando todos los vértices tienen la misma cantidad de hijos, salvo las hojas que no tienen hijos.
- Un árbol se dice n-ario regular pleno o completo cuando además de ser n-ario regular, todas las hojas se hallan en el mismo nivel.

Antes de continuar te proponemos que realices el siguiente ejercicio para aplicar los conceptos que acabamos de presentar.

1. Dibuja un árbol ternario regular de altura 2 que no sea pleno.
2. Dibuja un árbol binario regular pleno de altura 3
Recuerda que puedes consultar a tu tutor si tienes dudas.

Como en el caso de los grafos, dirigidos o no donde era posible obtener subgrafos, ahora podemos encontrar subárboles, es decir un árbol contenido en el dado, veamos la definición formal

Sea $G = (V ; A ; \delta)$ un árbol con raíz r. Sea $v \in V$, se llama subárbol con raíz v, y se indica $T(v)$, al árbol que consta de v, todos sus descendientes y las aristas entre ellos.

RECORRIDOS DE ÁRBOLES

Recorrer un árbol significa nombrar todos los vértices del árbol siguiendo un determinado orden.
Ello es muy importante si consideramos una base de datos de forma arborescente. Cada vértice del árbol es un nodo de información, o sea un registro de la base. Por ejemplo, si tenemos una base de datos de clientes, cada nodo representa a un cliente, tiene su número de cliente, apellido, nombre, dirección, etc. Para poder tener un listado de todos los clientes, debemos poder recorrer el árbol, nombrando a cada cliente una vez.
Como veremos hay varias formas de hacerlo.
Las siguientes son las definiciones recursivas de los recorridos de árboles:

ORDEN PREVIO O PRE-ORDEN

1. Nombra la raiz
2. Recorre el subarbol izquierdo en este mismo orden
3. Recorre los subarboles derechos en este mismo orden

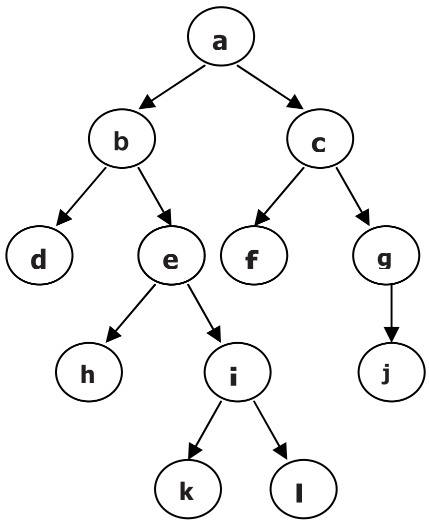
ORDEN SIMETRICO O IN-ORDEN

1. Recorre el subarbol izquierdo en este mismo orden
2. Nombra la raiz
3. Recorre los subarboles derechos en este mismo orden

ORDEN POSTERIOR O POST-ORDEN

1. Recorre el subarbol izquierdo en este mismo orden
2. Recorre los subarboles derechos en este mismo orden
3. Nombra la raiz

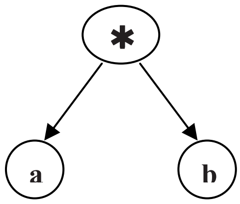
e Ejemplo:



Recorrido en orden previo: **a b d e h i k l c f g j**
Recorrido en orden simétrico: **d b h e k i l a f c j g**
Recorrido en orden posterior: **d h k l i e b f j g c a**

Representación de expresiones algebraicas mediante árboles

Si ∗ es una operación binaria, el resultado de operar **a** con **b** se representa de la siguiente forma:



El operador es la raíz y los operandos son los hijos o subárboles.

Si leemos este árbol en orden simétrico, obtenemos la expresión usual: $a \ast b$

Cuando representamos expresiones algebraicas, son comunes los siguientes nombres:

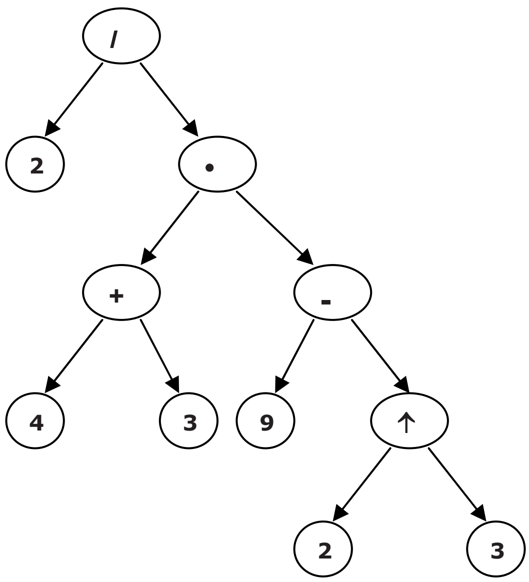
Notación Polaca: es el orden PREVIO
Notación usual o infija: es el orden SIMÉTRICO
Notación polaca inversa: es el orden POSTERIOR

¿Para qué se usa la notación polaca inversa?

Por ejemplo, algunas calculadoras, utilizan notación polaca inversa para resolver las operaciones. Disponen de un stack o pila, en la que van almacenando los operandos, y a medida que se ingresa un operador, calculan el resultado de los dos últimos elementos de la pila, dejando el resultado en su lugar. Una pila es una lista de elementos, en la cual se van agregando nuevos elementos por un extremo y se sacan por el mismo extremo. Se las llama LIFO (Last In First Out)

¿Cómo se resuelve una operación?

Por ejemplo, si tienes que resolver $2/[(4+3) \bullet (9-2^3)]$ con una de esas calculadoras, lo debes hacer en notación polaca inversa, o sea orden posterior:
Construyamos el árbol:



Lo leemos en notación polaca inversa: 2 4 3 + 9 2 3 ↑ - • /

Y así lo vamos ingresando en la calculadora.

1) Al ingresar el **2**, como es un operando lo guarda en la pila:

2

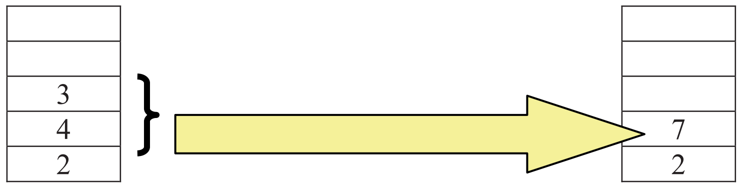
2) Luego viene el **4** y lo guarda también:

4
2

3) Lo mismo ocurre al ingresar el **3**:

3
4
2

4) Pero al ingresar el + , como es un operador, extrae los dos últimos elementos de la pila, en este caso, entre el **4** y el **3**, los opera y dicho resultado lo coloca en la pila:



5) Al ingresar el **9** lo coloca en la pila, como así también al **2** y al **3**:

		3
	2	2
9	9	9
7	7	7
2	2	2

6) Cuando ingresamos el ↑ , extrae los dos últimos elementos de la pila, en este caso el 2 y el 3, realiza la operación (2 al cubo) y la coloca en la pila:

8
9
7
2

7) Con el - hace lo mismo, toma el 9 y el 8, los resta y el resultado lo pone en la pila:

1
7
2

8) Al ingresar el signo • , opera los dos últimos que hay ahora, el 7 y el 1, el resultado lo coloca en la pila:

7
2

9) Por último, con el signo / hace lo mismo, operando el 2 y el 7, y quedando el resultado final en la base de la pila:

0.2857

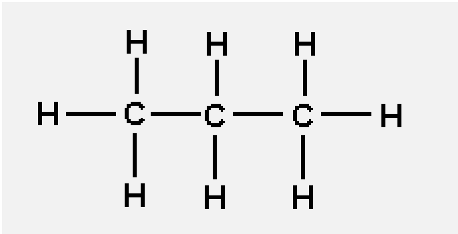
Sea la expresión: **5 3 - 2 ↑ 6 * 2 8 * 8 + /** dada en notación polaca inversa.

a) Halla y dibuja el árbol
b) Indica raíz y hojas
c) Indica la altura del árbol
d) ¿Es balanceado?
e) Recórrelo en preorden.
f) Calcula el resultado de la expresión.

Otras aplicaciones de árboles

- Los árboles son muy útiles en las ciencias de la computación, ya que sirven para representar estructuras de datos jerárquicas, de forma de optimizar el tiempo de acceso a los registros.

- En química orgánica, por ejemplo, las moléculas de los alcanos son árboles. El concepto de isometría tiene que ver con el isomorfismo.



- También los árboles tienen múltiples usos, ya que con ellos se pueden representar datos de una manera organizada. Por ejemplo, los organigramas de las organizaciones son árboles dirigidos con raíz, y el hecho de que el grado positivo (entrante) de cada nodo o vértice sea 1 significa la unidad de mando.

Sinteticemos lo que estudiamos sobre árboles:

- Un árbol es un grafo conexo y sin ciclos.
- Un árbol es un grafo en el cual existe camino único entre todo par de vértices.
- En todo árbol la cantidad de vértices es uno más que la cantidad de aristas.
- Un bosque es un grafo no conexo acíclico, o sea es un conjunto de árboles.
- Los árboles dirigidos son dígrafos cuyos grafos asociados son árboles.
- La raíz de un árbol dirigido es un vértice con grado positivo cero.
- En un árbol dirigido con raíz se puede identificar las hojas, los vértices internos, los antecesores y sucesores de un vértice, padres e hijos.
- El nivel de un vértice es uno más que el de su padre siendo el nivel de la raíz cero.
- Los árboles dirigidos pueden ser n-arios, n-arios regulares o n-arios regulares plenos.
- Recorrer un árbol significa nombrar todos los vértices del árbol siguiendo un determinado orden. Vimos pre-orden, inorden y post-orden.
- A través de árboles se pueden representar expresiones algebraicas, en esos casos los recorridos se denominan notación polaca, infija y polaca inversa respectivamente.

Si no tienes dudas sobre los temas que abarca esta Unidad, te invitamos a iniciar el estudio de la última unidad del Programa.