Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires
Departamento de ciencias básicas

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Apunte de la materia V.12 (FINAL)

Pose, Fernando
Fep.utn@gmail.com

APUNTE NO OFICIAL

Para realizar sugerencias, críticas o preguntas sobre el material: fep.utn@gmail.com
Gracias

(Actualizada al 19-12-13)

APARTADO A
¿QUÉ TENGO QUE CONOCER?

En el primer apartado se desarrollan de forma abreviada los temas que el estudiante de análisis matemático, de nivel dos, deberá conocer para entender los temas comprendidos en el programa de la asignatura.

Temario a estudiar.

- Recta en el espacio. Ecuaciones.
- Plano. Ecuaciones.
- Cónicas.
- Cuádricas.
- Sistema de ecuaciones.

..::RECTA EN EL ESPACIO::..

Ecuación de la recta en el espacio:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \tau(a_x, a_y, a_z)}$$

En esta ecuación debemos tener en cuenta:

(1) $\overline{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto perteneciente a la recta
(2) t es un escalar.
(3) $\overline{A} = (a_x, a_y, a_z)$ es el vector director de la recta.

Ecuación paramétrica de la recta en el espacio:

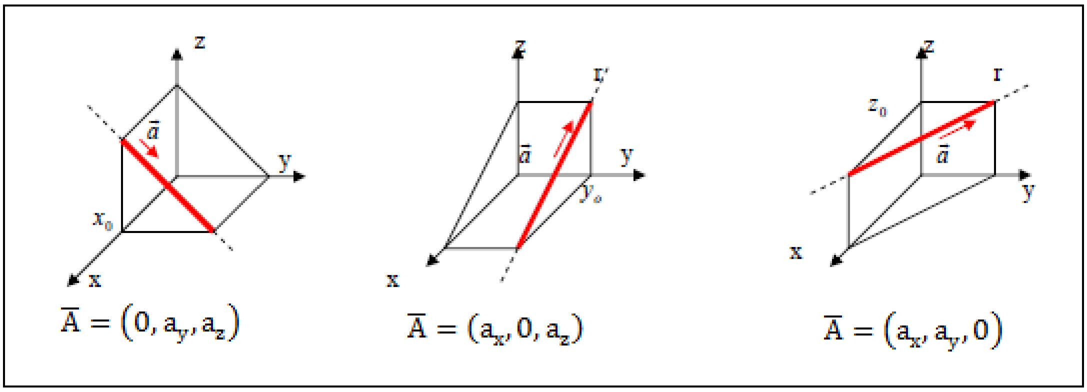
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \tau * a_x \\ y = y_0 + \tau * a_y \\ z = z_0 + \tau * a_z \end{cases}}$$

- *Nuevamente* t *es un escalar*.

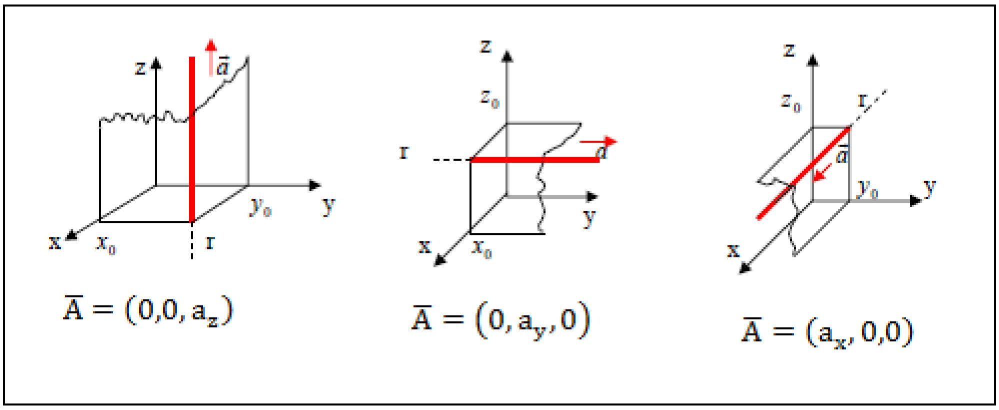
Ecuación segmentaria de la recta en el espacio:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}}$$

Interpretación geométrica de las rectas las cuales una de sus componentes es nula. (1)



Interpretación geométrica de las rectas las cuales dos de sus componentes son nulas. (2)



(1)(2) Apuntes álgebra y geometría analítica - Prof: Leonor Carvajal.

..::PLANO::..

Ecuación general o implícita del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

En esta ecuación debemos tener en cuenta:

$$(1) \mathrm{A, B, C\ no\ simultaneamente\ nulas}$$
$$(2) \bar{n} = \left(n_x, n_y, n_z\right) = (A, B, C)$$

Ecuación paramétrica del plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau \, . \, a_x + \alpha \, . \, b_x \\ y = y_0 + \tau \, . \, a_y + \alpha \, . \, b_y \\ z = z_0 + \tau \, . \, a_z + \alpha \, . \, b_z \end{cases}$$

En esta ecuación debemos tener en cuenta:

$$(1)"\tau" \ y \ "\alpha" \ son \ dos \ escalares$$

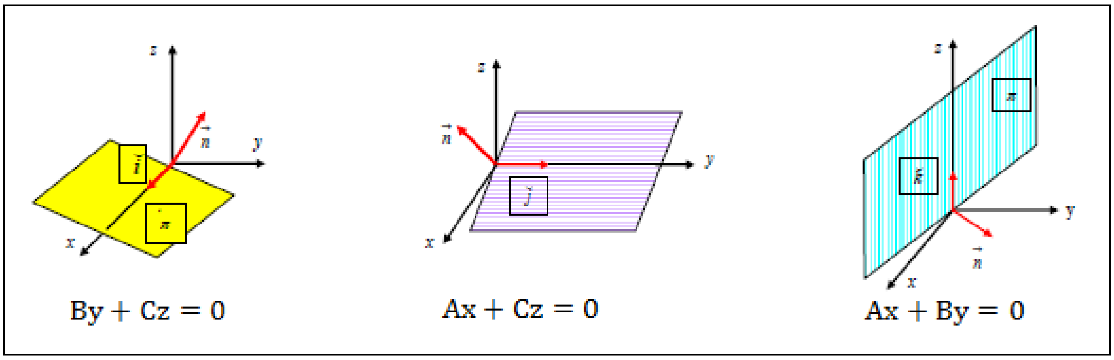
Ecuación segmentaria de plano:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

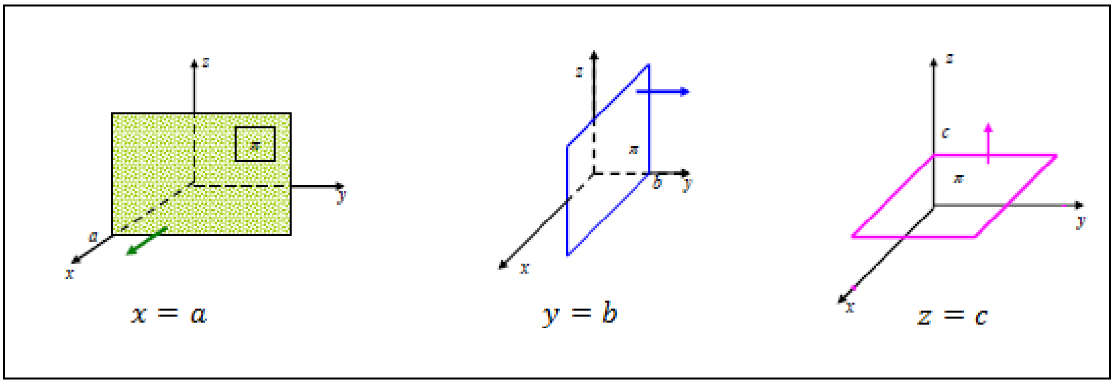
En esta ecuación debemos tener en cuenta:

$(1) A, B, C$ *se denominan abscisa al origen, ordenada al origen, cota al origen*
(2) *Las rectas interseccion de un plano con los planos coordenados se denominan trazas*

Interpretación geométrica del plano con una componente nula (3)



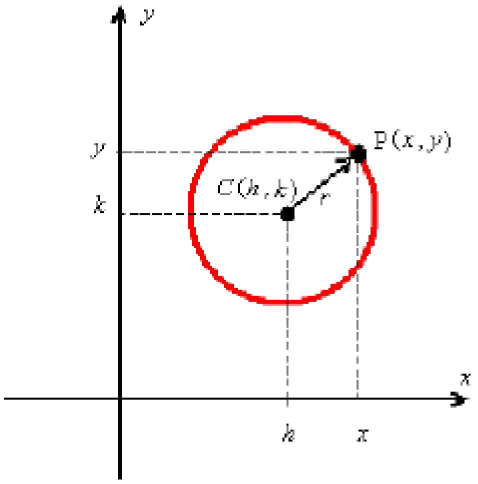
Interpretación geométrica del plano con dos componentes nulas. (4)



(3)(4) Apuntes álgebra y geometría analítica - Prof: Leonor Carvajal.

..::CÓNICAS::..

Circunferencia (5)



Sea $(\alpha\ y\ \beta)$ un punto del plano y sea $r \in R^{+}$. El conjunto de puntos (x,y) del plano cuya distancia al punto $(\alpha\ y\ \beta)$ es r, se llama circunferencia de centro $(\alpha\ y\ \beta)$ y radio r. Tiene por ecuación canónica:

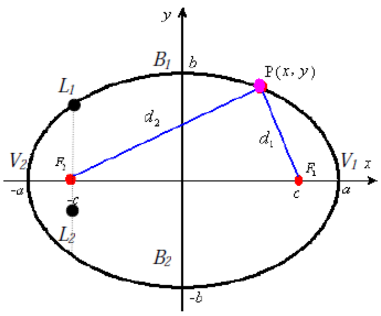
$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = h + r\cos(\theta) \\ y = k + r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \text{para } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Elipse (6)

los



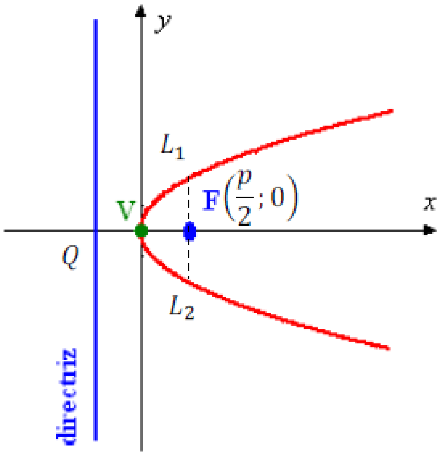
Dados en un plano dos puntos fijos llamados focos, se llama elipse al lugar geométrico de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los focos es constante. Esta constante se suele denotar 2a.

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = h + a\cos(\theta) \\ y = k + b\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \text{para } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Parábola. (7)



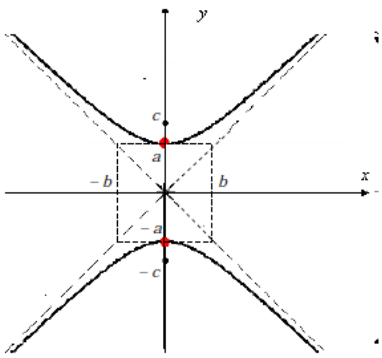
Dada una recta d (directriz) y un punto F (foco), que no pertenece a d, se llama parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de d y de F

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \text{para } \forall t$$

Hipérbolas. (8)



Dados dos puntos fijos de un plano, llamados focos, se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos F1 y F2 es constante. Esta constante se suele llamar 2a y la distancia entre los focos 2c.

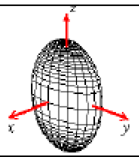
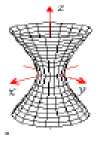
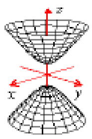
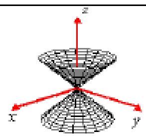
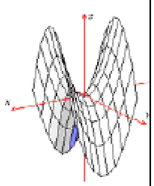
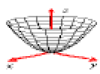
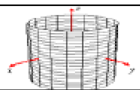
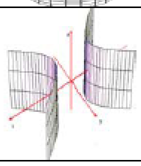
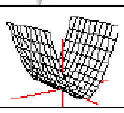
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = h + a\sec(\theta) \\ y = k + b\,\mathrm{tg}(\theta) \end{cases} \text{para } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$$

(5)(6)(7)(8)Nociones de geometría analítica y algebra lineal. Ana María Kozak.

..::CUÁDRICAS::..

Superficie	Ecuación	Gráfica	Trazas con planos coordenados E: elipse; P: parábola; H: hipérbola
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		xy : E ; xz : E; yz : E a ; b y c son las longitudes de los semiejes.
Hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		xy : E; xz : H; yz : H En ecuaciones análogas, el eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Hiperboloide de dos hojas	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		En ecuaciones análogas, el xy : $\notin\cap$; xz : H; yz : H En ecuaciones análogas, el eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es no negativo.
Cono elíptico recto	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		xy : Punto; xz : y yz :Rectas que se cortan en un punto. En ecuaciones análogas, el eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide Hiperbólico	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$		xy : Dos rectas; xz : P; yz : P En ecuaciones análogas, el eje del paraboloide corresponde a la variable que no aparece elevada al cuadrado.
Paraboloide elíptico.	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$		xy : Punto; xz : P; yz : P En ecuaciones análogas, el eje del paraboloide corresponde a la variable que no aparece elevada al cuadrado. Si c es negativo abre hacia el semiespacio negativo del eje.
Cilindro elíptico recto	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		xy : E; xz : y yz : Rectas paralelas.
Cilindro hiperbólico recto	$1=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$		xy : H xz : 2 rectas; yz : $\notin\cap$
Cilindro parabólico recto	$z=ax^2$		xy : 1 recta; xz : P; yz : 1 recta

(9) Nociones de geometría analítica y algebra lineal. Ana María Kozak.

..::SISTEMA DE ECUACIONES::..

Introducción:

A veces uno tiene que resolver un sistema de varias ecuaciones para encontrar la solución a un problema, los sistemas de ecuaciones en esas ocasiones nos permiten encontrar la solución.
Para resolver sistemas de ecuaciones lineales tenemos diferentes herramientas matemáticas.

Sistema de ecuaciones lineales:

Definimos a un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas a un conjunto de m ecuaciones lineales en las variables $\{x_1; x_2; \ldots\ldots; x_n\}$ y se define según la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_3 \end{aligned}$$

Las variables a y b con subíndices son constantes y $\{x_1; x_2; \ldots\ldots; x_n\}$ son las incógnitas. Se dice que el sistema es lineal porque las incógnitas están elevadas a la 1.
Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Este es un tipo de sistemas el cual se resuelve mediante el método de Gauss, Gauss-Jordan o la regla de Cramer.

En la materia “a estudiar” generalmente nos encontraremos con sistemas de ecuaciones los cuales generalmente podremos resolver mediante los siguientes métodos: Sustitución, igualación y reducción.

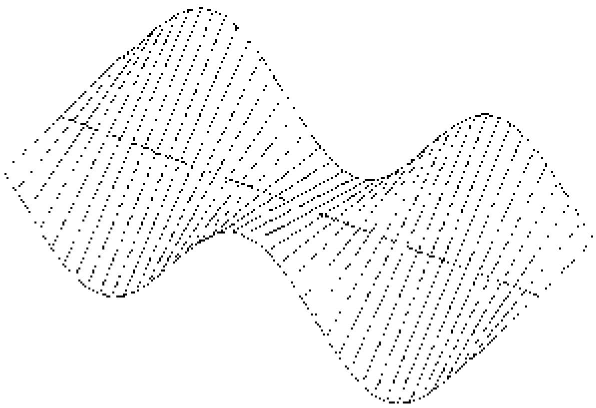
Ejercicio:

A continuación se propondrán tres formas de resolución dejando a elección del lector elegir la más agradable.

Método de sustitución	Método de igualación	Método de reducción
Ejercicio: $\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$	Ejercicio: $\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$	Ejercicio: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$
Resolución: De la primera ecuación: $y = 22 - 3x$ Reemplazando en la segunda: $4x - 66 + 9x = -1$ $13x = 65$ $x = 5$ Por lo tanto: $y = 7$	Resolución: $\begin{cases} y = 22 - 3x \\ y = \dfrac{-1 - 4x}{-3} \end{cases}$ Igualando ambas ecuaciones: $22 - 3x = \dfrac{-1 - 4x}{-3}$ $-66 + 9x = -1 - 4x$ $x = \dfrac{65}{13} => x = 5$ Por lo tanto: $y = 7$	Resolución: Multiplico por (-2) ec. 1 $\begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$ Sumo ambas ecuaciones. $-4x - 6y + 5x + 6y = -6$ $-4x + 5x = -6$ $x = -6$ Por lo tanto: $y = \dfrac{17}{3}$

Primer parcial

Teórico / Práctico



Realizado por: Pose, Fernando
Con la colaboración: Segio

UNIDAD 0
ECUACIONES DIFERENCIALES "PRIMERA PARTE"

La primera unidad vista en la materia desarrolla la primera parte de las ecuaciones diferenciables.

Temario a estudiar.

- Ecuaciones diferenciables ordinarias. Definiciones.
- Ecuaciones diferenciables en variables separables.
- Ecuaciones diferenciables de orden superior a 1.
- Trayectorias ortogonales.
- Ecuaciones diferenciables lineales de primer orden.

..::ECUACIONES DIFERENCIABLES ORDINARIAS.

DEFINICIONES::..

Tipos de soluciones: Las soluciones de las ecuaciones diferenciales no son números (no se resuelven ecuaciones algebraicas) sino funciones y para hallarlas será necesario pasar por uno o más pasos de integración.

Expresión diferencial: Es aquella que contiene variables y sus derivadas o sus diferenciales.

Ej: $y' + 2y - 1$

Ecuación diferencial: Es toda ecuación que contiene expresiones diferenciables.

Ej: $(y'')^2 = 12y'$

Ecuación diferencial ordinaria: Es aquella donde existe una única variable independiente.

Ecuación diferencial en derivadas parciales: Es aquella donde existen dos o más variables independientes (No se tratan este tipo de ecuaciones diferenciables)

Orden de una ecuación diferencial ordinaria: Es el de la derivada de mayor orden que aparece en la misma.

Ej: $y''' = 0$ es de orden 3.

Grado de una ecuación diferencial ordinaria: en aquellos casos que la ecuación puede expresarse como un polinomio respecto de las derivadas de la variable dependiente, el grado es el exponente de la derivada de mayor orden.

<u>Soluciones de una ecuación diferencial:</u>

Solución general (S.G)	Solución particular (S.P)	Solución singular (S.S)
Es una relación entre las variables que satisface a la ecuación y contiene n constantes arbitrarias esenciales.	Es toda solución que se obtiene de la general dándole a las constantes valores determinados	Es toda solución de la ecuación diferencial que no está incluida en la solución general. (No puede obtenerse de ella dando valores determinados a las constantes.

<u>A saber:</u> La solución general constituye un haz o familia de curvas. Se dice que el orden de infinitud del haz es n por tener n constantes arbitrarias esenciales.

¿Cómo encarar un ejercicio de la primera unidad?

Forma de resolución

Resolviendo - Integrando

Ecuación diferencial → Solución general → Solución Particular

Formando - Derivando

Condiciones Iniciales

..::ECUACIONES DIFERENCIABLES EN VARIABLES SEPARABLES::..

Estamos ante una ecuación de variables separables cuando podemos escribirla de la siguiente forma:

$$\boxed{f_1(x)\, g_1(y)dx + f_2(x)\, g_2(y)dy = 0 \quad \text{donde } \; y = f(x)}$$

Realizando los correspondientes despejes podemos concluir en:

$$\boxed{y' = \frac{f_1(x)\, g_1(y)}{-f_2(x)\, g_2(y)}}$$

Nota: Para conseguir la solución particular de una ecuación diferencial en variables del tipo separables reemplazo en la solución general el punto $P = (x, y)$ buscando la constante denominada en este caso "C" que debe verificar la ecuación de la curva.

A saber:

Si se desea conocer la ecuación diferencial a partir de una solución general acudiremos a derivar la solución general n veces (n número de constantes en la ecuación) y vincular las mismas.

Otra forma de definir a las ecuaciones diferenciables de variables separadas:

$$\boxed{f(x)dx = g(y)\, dy}$$

..::Ec. Diferenciables de orden superior a uno::..

Este tipo de ecuaciones diferenciables se resuelven aplicando un cambio de variables. El método se explicara a través de un ejemplo demostrativo integrando conocimientos de ecuaciones diferenciales ya expuestos.

$$\boxed{xy'' - 2y' = 0.\ \text{Halle la S.P} \ / \ y(1) = 3 = y'(1) = 3}$$

Aplicaremos el cambio: $\mathbf{w} = \mathbf{y}'$

Si: $w = y' \text{entonces } w' = y''$

<u>Resolución:</u>

$$xw' = 2w$$

$$\frac{xdw}{dx} = 2w$$

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{2}{x} dx$$

$$w = kx^2$$

Sabiendo que $w = y'$

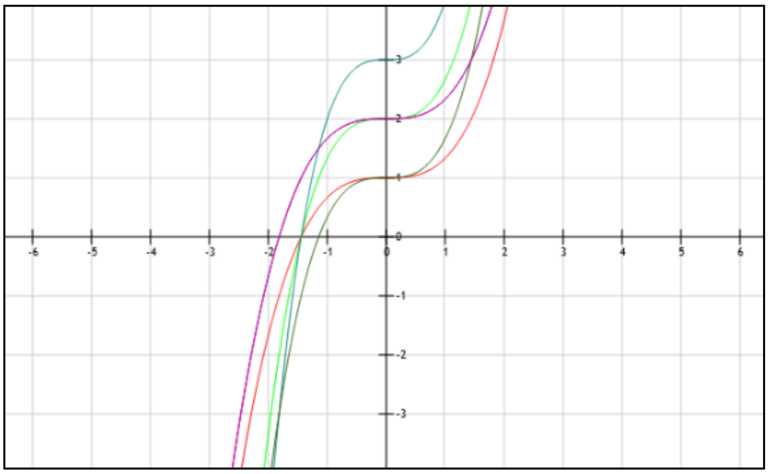
$$y' = kx^2$$

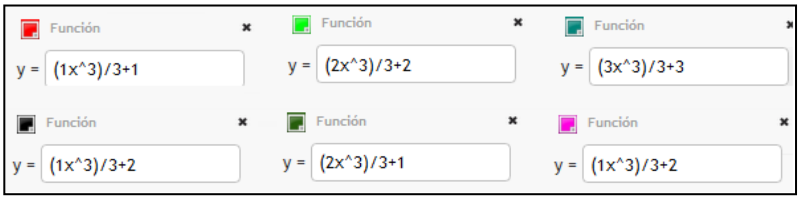
$$\frac{dy}{dx} = kx^2$$

$$\int dy = \int kx^2 dx$$

$$y = \frac{kx^3}{3} + c$$

Familia de curvas:





Para obtener la solución particular sé que: $y(1) = y'(1) = 3$

$$y = \frac{kx^3}{3} + c$$

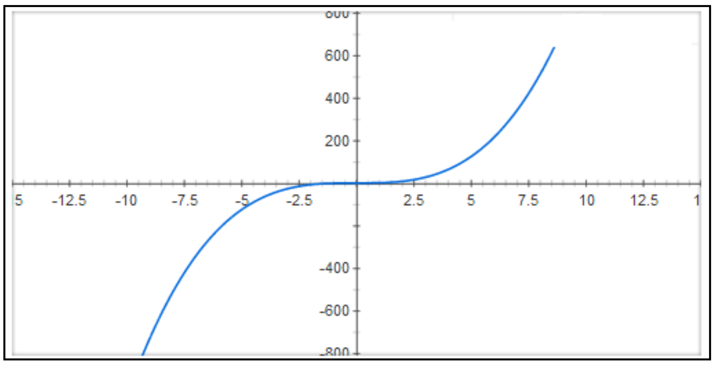
$$3 = \frac{k}{3} + c$$

Sabiendo que $f'(1) = 3 \therefore k = 3$

$$3 = \frac{3}{3} + c \Rightarrow c = 2$$

La solución particular (S.P)

$$y = x^3 + 2$$



..::TRAYECTORIAS ORTOGONALES::..

Dadas dos familias de curvas F_1 y F_2 se dice que son ortogonales cuando por cada punto por el que pasa una curva de F_1 también pasa una curva de F_2 y ambas curvas son ortogonales en dicho punto. (Rectas tangentes perpendiculares entre sí)
En análisis matemático II Estudiamos el caso de curvas planas y familias simplemente infinitas (una sola constante en cada familia).

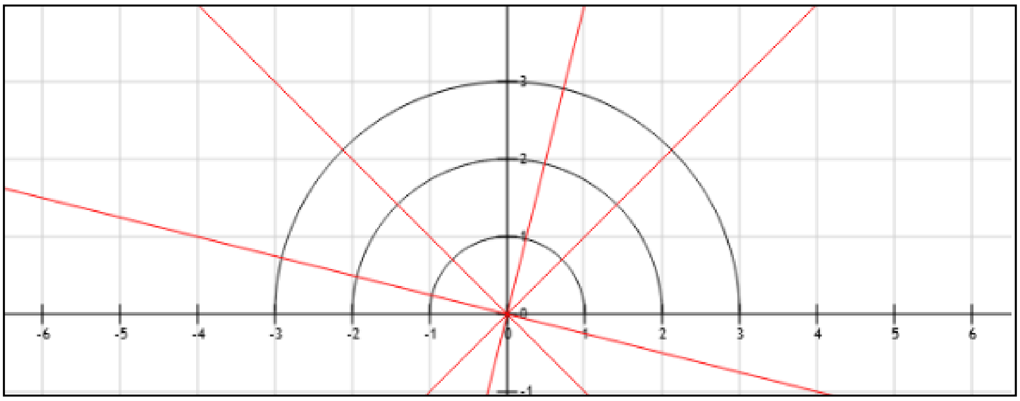
Para obtener las trayectorias ortogonales a una solución general de una ecuación diferencial deberemos:

(1) Obtener la ecuación diferencial
(2) Realizar el cambio: $y' \text{por} -\frac{1}{y'}$
(3) Resolver la ecuación diferencial

Ejemplo:

Dada la solución general: $x^2 + y^2 = r^2$

(1) Obtenemos la ecuación diferencial: $x + yy' = 0$
(2) Realizando el cambio, obtenemos la nueva ecuación diferencial: $x + y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$
(3) Resolviendo la ecuación diferencial dada: $y = ax$ solución general de las trayectorias ortogonales a las curvas dadas.



Donde:

(1) Las curvas de rojo pertenecen a: $y = ax$

(2) Las curvas en negro pertenecen a: $x^2 + y^2 = r^2$

..::Ec. DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN::..

Estamos ante una ecuación diferencial lineal de primer orden cuando podemos escribirla en la forma:

$$\boxed{y' + y\,P(x) = Q(x)}$$

Nota: Si en particular $Q(x) = 0$ la ecuación diferencial es del tipo variables separadas:

$$\boxed{y' + y\,P(x) = 0}$$

Para este tipo de ecuaciones utilizamos un método de resolución el cual consiste en un cambio de variables que se le atribuye a La Grange de la forma: $y = u\,v$

Donde:

(1) $y = y(x)$

(2) $u = u(x)$

(3) $v = v(x)$

(4) $y = u\,v$

(5) $y' = u'v + u\,v'$

Ejemplo:

Sea la E.D (ecuación diferencial) lineal: $x - y - x^3 = 0$ halle la solución general $(x \neq 0)$

$$y' - y\frac{1}{x} = x^2$$

Aplicando: $y = u\,v \;\therefore\; y' = u'v + u\,v' =>$

$$u'v + u\left[v' - \frac{v}{x}\right] = x^2$$

$$[v' - \frac{v}{x}] \;=\; 0 \;=>\; v' - \frac{v}{x} = 0 \quad \text{E. D variables separables.}$$

Resolviendo la ecuación diferencial dada: $v = x$

A esta no le agregamos la constante en la función debido a que lo agregaremos en la resolución de la siguiente ecuación diferencial.
Si se agrega acá la constante y luego se vuelve a agregar una segunda constante (si agregamos dos constantes) el resultado será incorrecto.

Reemplazo v = x en la ecuación: $u'v + u\left[v' - \frac{v}{x}\right] = x^2 =>$

$$u'x = x^2 \text{ E. D variables separadas.}$$

Resolviendo la ecuación diferencial dada:

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

Notar que se incorpora la constante una sola vez a la solución.

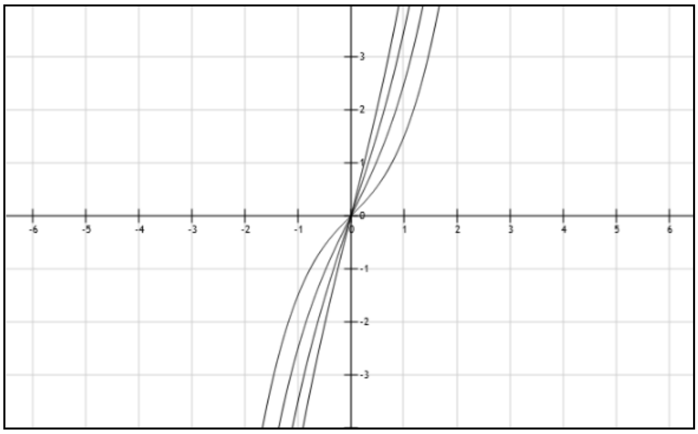
$$y(x) = u(x)v(x)$$

Dado que: $y = u\,v$

Terminamos obteniendo la solución general de la ecuación diferencial:

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)x$$

Familia de curvas:



Ejercicio de parcial/final.

Si $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ halle las trayectorias ortogonales a las líneas o curvas de nivel de f. Indique en especial las ecuaciones de las curvas de la familia que pasen por el (1,2)

Resolución formal:

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2$$
$$x^2 + 4y^2 = f$$
$$2x + 8yy' = 0$$

Para encontrar las curvas ortogonales reemplazo: "y'" por: $-\frac{1}{y'}$ por lo tanto:

$$2x + 8y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$$

$$2x - 8y\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

$$2x = 8y\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

$$2xdy = 8ydx$$

$$\frac{dy}{8y} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = 4\ln|x| + \ln|k|$ siendo ln|k| la constante de integración.

$$\ln|y| = \ln|x^4 k|$$

$$|y| = x^4 k$$

$$y = x^4 H$$

Para obtener la solución particular simplemente debo tener en cuenta del enunciado:

$$f(1) = 2$$

Por lo tanto:

$$2 = 1H$$
$$H = 2$$

Finalmente:

$y = 2x^4$ es sol. Part. de la trayectoria ortogonal de f dada en el enunciado.

UNIDAD I
TOPOLOGÍA

Temario a estudiar.

- Conjuntos de puntos. Espacios. Entornos.

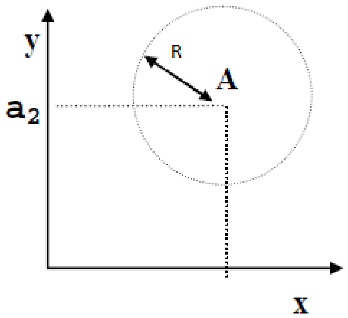
..::CONJUNTOS DE PUNTOS, ESPACIOS Y ENTORNOS::..

Producto cartesiano:

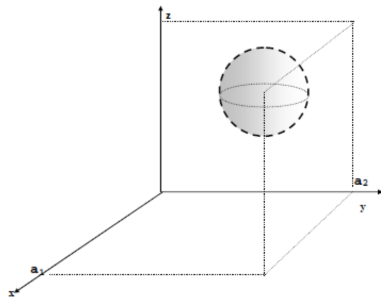
$$AxB = \{(a, b)/a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Esfera abierta con centro en el punto $A \in R^n$ y radio $r > 0$

$$E\ (A, R) \triangleq \{X \in R^N / |\ X - A\ || < R\}$$



EN R^2



EN R^3

Entorno de $A \in R^n$

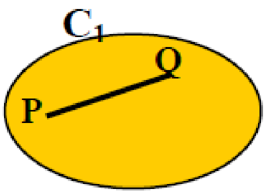
Todo conjunto capas de incluir un $E(a, r)$

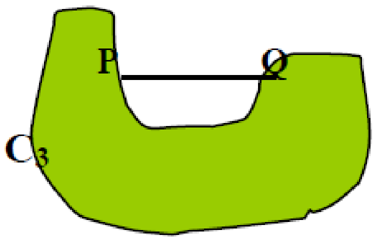
Dado un conjunto $S \subset R^n$ y un punto $A \in R^n$ se pueden dar uno solo de los siguientes casos:

- A interior de S: cuando $\exists E(A) \subset S$
- A exterior de S: cuando $\exists E(A)$ que no tiene punto de S
- A es frontera de S: Cuando $\forall E(a)$ tiene algún punto de S y alguno que no pertenece a S.

- *El interior de S es el conjunto de sus puntos interiores.*
- *El exterior de S es el conjunto de sus puntos exteriores.*
- *La frontera de S es el conjunto de sus puntos fronteras.*

- <u>$S \subset R^n$ es conjunto abierto:</u> Cuando todos sus puntos son exteriores.
- <u>$S \subset R^n$ es conjunto cerrado:</u> Cuando contiene a todos sus puntos de acumulación.
- <u>$S \subset R^n$ Es conjunto acotado:</u> Cuando se lo puede incluir en una esfera abierta con centro en el origen y radio finito.
- <u>$S \subset R^n$ Es compacto:</u> Cuando es cerrado y acotado.
- <u>$S \subset R^n$ Es convexo:</u> Cuando para todo par de puntos $A, B, C \in S$ el segmento $\overline{AB} \subset S$

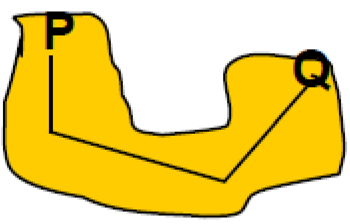




C1: **Es** convexo.
C3: **No son** convexos.

- <u>$S \subset R^n$ Es conexo (arco conexo):</u> Cuando $\forall$ par de puntos $A, B, C \in S$ se puede pasar desde A hasta B desplazándose por S.

Este conjunto es Conexo pero no es Convexo.



UNIDAD II
CAMPOS ESCALARES

$$f: D \underline{c} R^n \rightarrow R / \ n \geq 2$$

Temario a estudiar.

- Dominio de un campo escalar. Representación del dominio en el plano. Expresión del dominio por comprensión.
- Representación geométrica de un campo escalar.
- Conjunto de nivel. Conjunto de nivel de un campo escalar de dos variables. Conjunto de nivel de un campo escalar de tres variables.

..::DOMINIO DE UN CAMPO ESCALAR Y REPRESENTACIONES::..

Dada $f: D \underline{c} R^2 \to R / \ n \geq 2.$

> Ejemplo:
>
> $$f: D \underline{c} R^2 \to R / f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2 - 9}$$

Dominio:

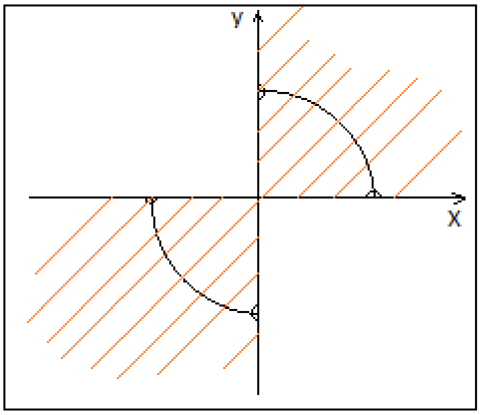
El conjunto D, subconjunto de R^2, es el dominio de f, se puede expresar por comprensión como:

$$\text{Dom } f = \{(x,y) \in R^2 / \exists\ Z \in R \wedge z = f(x,y)$$

En nuestro ejemplo:

$$\text{Dom } f = \{(x,y) \in R^2 / xy \geq 0 \wedge x\hat{\ }2 + y^2 \neq 9\}$$

Gráficamente:



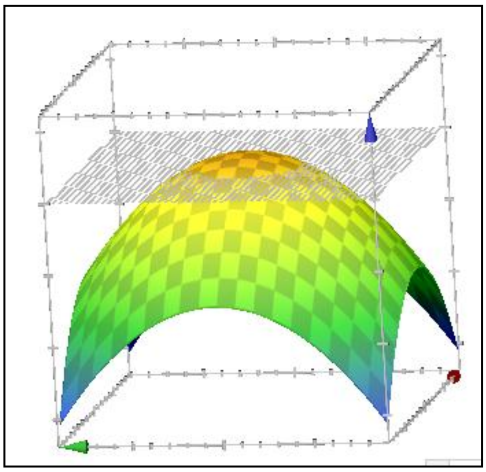
..::REPRESENTACIÓN GEOM. DE UN CAMPO ESCALAR::..

La gráfica de un campo escalar de dos variables representa una superficie en el espacio de ecuación cartesiana: $z = f(x, y)$

Ejemplo:

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

Representa la siguiente superficie:



..::CONJUNTO DE NIVEL DE UN CAMPO ESCALAR::..

Sea $f: D\underline{c}R^2 \to R$, un campo escalar se denomina conjunto de nivel "k" de f al conjunto de todos los $\overline{X} \in D$ tales que $f(\overline{X}) = k$ constante, donde k es un numero que pertenece al conjunto imagen de f.

Si denotamos L(k) al conjunto de nivel de f correspondiente a un número real k resulta:

$$\boxed{L(k) = \{(x, y) \in Df / f(x, y) = K\} \quad \text{con } k \in IF}$$

IMPORTANTE:

$$\boxed{L(k) \subseteq Df}$$

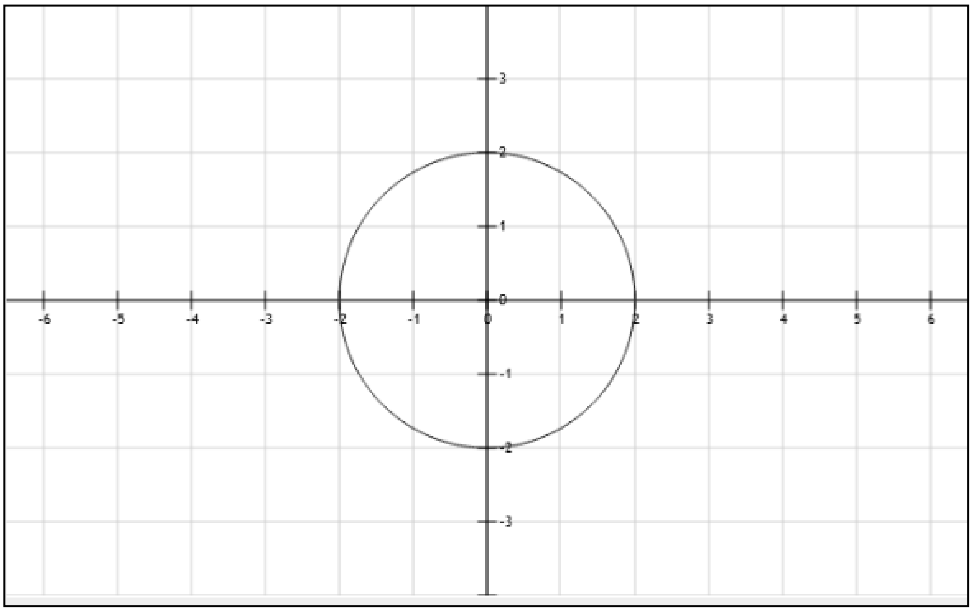
<u>Observación:</u>

Si el campo escalar es de dos variables independientes, cada conjunto de nivel en general es una curva de nivel (INCLUIDA EN EL DOMINIO) Mientras que si el campo escalar es de tres variables independientes, cada conjunto de nivel en general es una superficie de nivel incluida en el dominio del campo.

<u>Ejemplo:</u>

Halle el conj. de nivel "5" para el campo escalar: $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

$$5 = 9 - x^2 - y^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$



UNIDAD III
FUNCIÓN VECTORIAL

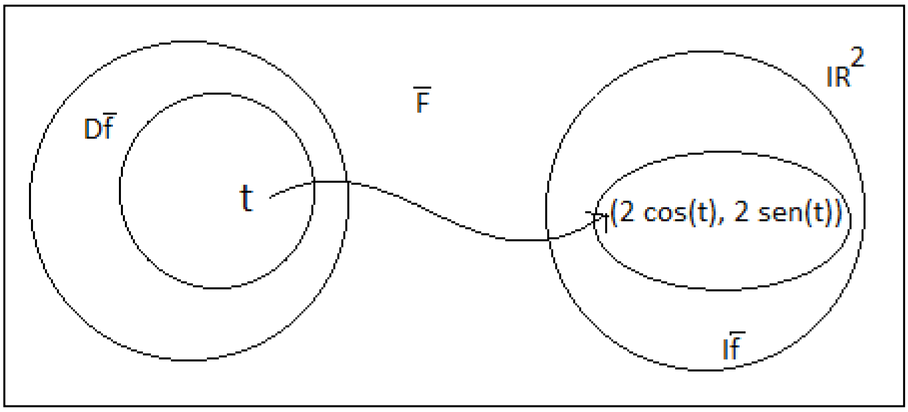
$$\boxed{f: D \subseteq R \rightarrow R^n / \ n \geq 2}$$

Temario a estudiar.

- Dominio de una función vectorial. Representación del dominio en el plano.
- Parametrización de la curva intersección.

..::DOMINIO Y REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN VECTORIAL::..

Sea $\bar{f}: D \underline{c} R \to R^n / n \geq 2$ si en particular $n = 2$:
$\bar{f}: D \underline{c} R \to R^2 / \bar{f}(t) = (2\cos(t), 2\mathrm{sen}(t))$ es un ejemplo de una función vectorial.

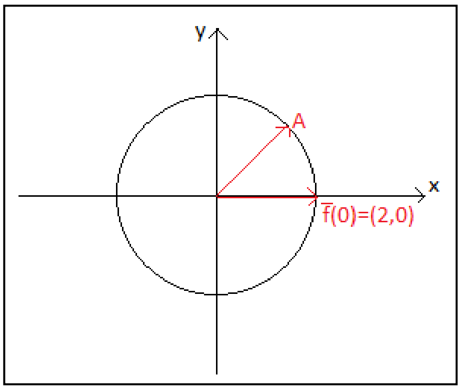


Donde:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$$

Representación de la imagen:

$A: f\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$



..::PARAMETRIZACIÓN DE LA CURVA INTERSECCIÓN::..

El concepto a desarrollar es uno de los más importantes en el trascurso de la materia ya que se trabajara con parametrizaciones hasta el final de la materia por tal motivo para desarrollar este ítem se tomo la elección de realizar ejemplos sobre ejercicios que requieran de parametrizar una curva como intersección de superficies.

Ejemplo 1.

Dada la curva cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 1 + x^2 + y^2 \end{cases}$$

Se pide:

i. Un sistema equivalente que permita parametrizar la curva.
ii. Parametrizar la curva.
iii. Representar la curva.

Antes de parametrizar la curva debemos tener en cuenta que la misma "nace" como intersección de las dos superficies dadas en el enunciado. Como primer objetivo a la hora de buscar una parametrización es obtener un sistema equivalente "cómodo", por lo general en este tipo de ejercicios "cómodo" es sinónimo de superficies cilíndricas intersectadas con planos aunque esto último no siempre es posible.

Obtención del sistema equivalente:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 - z \\ x^2 + y^2 = z - 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$9 - z = z - 1$$
$$z = 5$$

Por lo tanto el nuevo sistema equivalente encontrado se encuentra dado por:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 5 \end{cases}$$

Como se puede apreciar logramos un sistema equivalente "cómodo" formado por una superficie cilíndrica intersectada por un plano (otra superficie)

<u>Parametrización de la curva "C":</u>

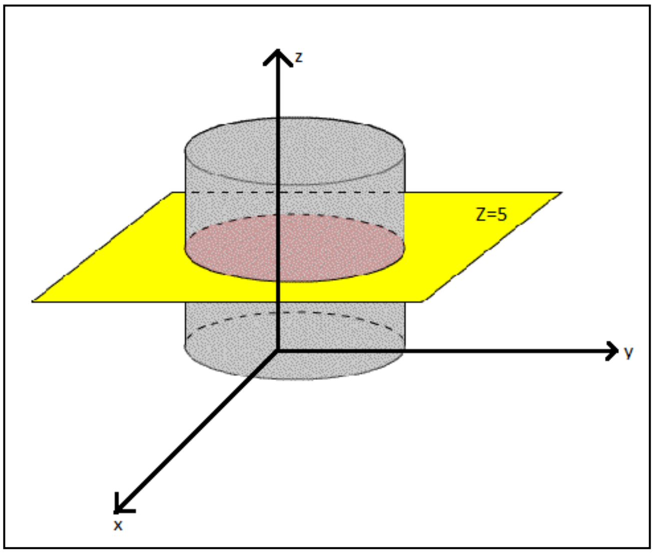
Dado que todos los puntos de C y C* comparten los mismos puntos si parametrizo la C* (curva proyectada sobre el plano xy) parametrizo C*

$$C^* = \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2sen(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$

Finalmente:

$$C = \begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,sen\,(t) \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{con } 0 \le t \le 2\pi$$

Representación de la curva:



Para representar la curva podemos utilizar el sistema equivalente o el sistema inicial dado en el enunciado del ejercicio. Muchas veces nos convendrá representar a la curva mediante un sistema equivalente ya que se puede volver muy "tedioso" si no se tiene la práctica suficiente representar curvas mediante superficies no conocidas.

Para representar la curva elegí el sistema equivalente.

Ejemplo 2.

Dada la curva cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases} \quad \text{Primer octante.}$$

Se pide:

i. Un sistema equivalente que permita parametrizar la curva.
ii. Parametrizar la curva.

En este ejercicio no hace falta buscar un sistema equivalente ya que tenemos una superficie cilíndrica proyectante oculta entre las superficies dadas. Con un repaso de superficies dadas en álgebra podemos observar que la superficie: $x^2 + y^2 = 2y$ es un cilíndro desplazado.

Veamos:

$$x^2 + y^2 = 2y$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Completando cuadrados:

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Claramente observamos un cilindro desplazado en una unidad sobre el eje “y” con centro: (0,1,0)

Armamos el sistema equivalente proyectado sobre el plano xy:

$$C^* = \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Parametrizando la curva proyectante CURVA NO PLANA:

$$\begin{cases} x = \cos\ (t) \\ y = \text{sen}\ (t) + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Pasamos a buscar los valores de variación de t ya que al tratarse de una curva no plana la misma no deberá porque tomar valores del intervalo: $[0,2\pi]$

Elegimos el punto: (0,0,0) ya que si dibujamos la curva como intersección de esfera -cilindro la curva nace en dicho punto.

$$\begin{cases} 0 = \cos(t_0) \\ 0 = \text{sen}(t_0) + 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \therefore t_0 = \frac{-\pi}{2}$$

Luego elegimos el punto: (0,2,0) ya que si dibujamos la intersección de esfera - cilindro la curva finaliza en dicho punto.

$$\begin{cases} 0 = \cos(t_1) \\ 2 = \mathrm{sen}(t_1) + 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \therefore\ t_1 = \frac{\pi}{2}$$

La parametrización va de: $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Para finalizar se debe expresar a z en función de sen(t) y cos(t)

Sabiendo de $S1: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ despejamos z:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Despejando y reemplazando de forma conveniente:

$$z = \sqrt{2 - 2\,\mathrm{sen}(t)}$$

Finalmente expresamos la ecuación paramétrica de la curva como intersección de las dos superficies propuestas en el enunciado:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \mathrm{sen}(t) + 1 \\ z = \sqrt{2 - 2\,\mathrm{sen}(t)} \end{cases} \text{con} -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

UNIDAD IV

LÍMITE Y CONTINUIDAD

En esta unidad se estudian los campos escalares de la forma:

$$\boxed{f: D \subseteq R^n \rightarrow R / \ n \geq 2}$$

Temario a estudiar.

- Definición de límite. Propiedades.
- Teorema. Limites en Funciones Vectoriales.
- Limite por Curvas. Campo escalar de dos variables.
- Limites iterados o sucesivos.
- Funciones continuas. Propiedades.
- Teorema. Continuidad en Funciones Vectoriales.
- Limites radiales. Funciones convenientes de aproximación.

..::LIMITE DEFINICIÓN::..

Dada $f: DcR^N \to R^m$, A punto de acumulación de D. Se dice que f(x) tiende a L cuando x tiende a "A".

$$f(x) \underset{x \to A}{\longrightarrow} L \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to A} f(x) = L$$

Cuando $\forall E(L), \exists E^*(A) / \forall x \in E^*(A) \cap D => f(x) \in E(L)$

Propiedades en una variable:

1) Si el límite existe este es único.
2) $\lim_{x \to A} K = K, K \text{ constante}$
3) $\lim_{x \to A} f(x)g(x) = 0$ si $f(x) \to 0$ y $g(x)$ es acotada.
4) $\lim_{x \to A} K\, f(x) = K \lim_{x \to A} f(x) = K\, L_f$
5) $\lim_{x \to A} [\, f(x) + g(x)] = L_f + L_g$ se cumple para la resta, el cociente y el producto cuando $L_g \neq 0$ en este último caso.

..::TEOREMA: LIMITE EN FUNCIONES VECTORIALES::..

Cuando $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ $\exists \lim_{x \to A} \bar{f}_{(x)} = \bar{L} <=> \exists \lim_{x \to A} \bar{f}_{i(x)} = L_i$ con $i = 1,2, \dots, n$
Siendo $\bar{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$

Ejemplo:

Sea $f(u) = (\frac{sen(u)}{u}, \frac{e^u - 1}{u}, u + 3)$ calcular el límite cuando $u \to 0$

$$\lim_{u \to 0} \left(\frac{sen(u)}{u}, \frac{e^u - 1}{u}, u + 3 \right) = (1,1,3)$$

->1 ->1 ->3

..::LIMITE DOBLE::..

La resolución de límites en dos variables se realiza del mismo modo que en una variable (análisis matemático I) a diferencia que en este caso no salvaremos indeterminaciones.

IMPORTANTE

> Debemos recordar que cuando tratamos con límites de dos variables no se puede aplicar la regla de L'Hopital.

Teniendo en cuenta que:

$$\boxed{f(\overline{x}) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad y \quad f(\overline{x}) = \frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

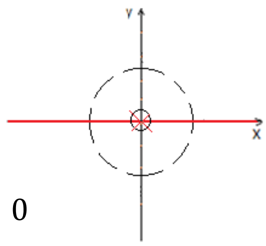
Son funciones acotadas procedemos a ejemplificar la resolución de un límite en R^2

<u>Ejemplo:</u>

Sea $f: D \underline{c} R^2 \to R / f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & si\ y \neq 0 \\ \cos(xy) & si\ y = 0 \end{cases}$ analice si $\exists \lim_{\overline{X}\to\overline{0}} f(x,y)$

Para los pares $(x,y) \in R^2 / y \neq 0 : f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

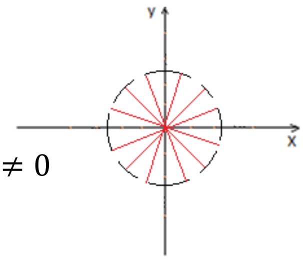
Para los pares $(x,y) \in R^2 / y = 0 : f(x,y) = \cos(xy)$



Parte A:

Nos acercamos al origen de coordenadas (0,0) por $(x,y)/y = 0$

$$\lim_{\overline{X}\to\overline{0}} \cos(xy) = 1$$



Parte B:

Nos acercamos al origen de coordenadas (0,0) por $(x,y)/y \neq 0$

$$\lim_{\overline{X}\to\overline{0}} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

POR LO TANTO:

Como los límites son distintos para distintos caminos por los que me acerco al origen de coordenadas se tiene que:

$$\nexists \lim_{\overline{X \to 0}} f(x,y)$$

..::LIMITES ITERADOS O SUCESIVOS::..

Los límites iterados nos proporcionan información de la NO EXISTENCIA del límite, lo que quiere decir que no se puede demostrar la existencia o hallar el valor del mismo.
Sea un campo escalar: $z = f(x,y)$ cuando(x,y) tiende a $A = (X_0, Y_0)$ se definen a los limites iterados como:

$$(1)\ \lim_{X \to X_0}\left[\lim_{Y \to Y_0} f(x,y)\right] \quad y \quad (2)\ \lim_{Y \to Y_0}\left[\lim_{X \to X_0} f(x,y)\right]$$

Entonces:

- Si tanto para (1) como para (2) el límite existe y da distinto se tiene que NO existe el límite.
- Si tanto para (1) como para (2) el límite existe y da igual los límites iterados NO proporcionan información.

Ejemplo:

$$\lim_{\overline{X \to 0}} = \frac{Y-X}{Y+X} \begin{cases} \lim\limits_{X \to 0}\left[\lim\limits_{Y \to 0} \frac{Y-X}{Y+X}\right] = \lim\limits_{X \to 0}(-1) = -1 \\ \\ \lim\limits_{Y \to 0}\left[\lim\limits_{X \to 0} \frac{Y-X}{Y+X}\right] = \lim\limits_{Y \to 0} 1 = \quad 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{\overline{X \to 0}} f(x,y)$$

..::FUNCIONES CONTINUAS Y PROPIEDADES::..

Definición:

Dada $f: DcR^N \to R^m$ $A \in D$, se dice que f es continua en A cuando:

$$* \ \exists \lim_{\overline{X} \to \overline{A}} f(\overline{X})$$
$$* \ L = f(\overline{A})$$

Propiedades: Suponiendo f(x) y g(x) funciones continuas en "A"

(1) f(x) + g(x) resulta función continua.

(2) f(x) - g(x) resulta función continua.

(3) f(x) g(x) resulta función continua.

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ resulta función continua.

(5) $k\,f(x)$ con $k = \text{constante}$ resulta función continua.

..::CONDICIÓN DE CONTINUIDAD::..

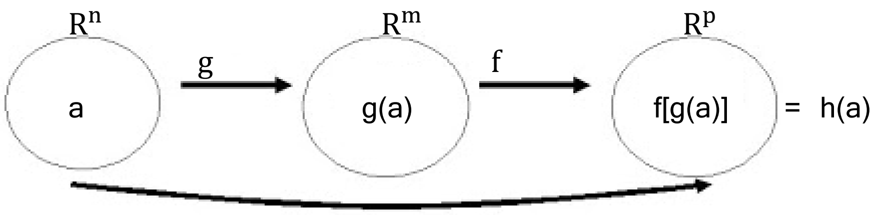
Sea: $f: D\underline{c}R^n \to R$ un campo escalar y $\overline{X_0}$ un punto interior del dominio, f es continuo en $\overline{X_0}$ si se cumple:

1. $\exists f\left(\overline{X_0}\right)$
2. $\exists \lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} f\left(\overline{X_0}\right)$
3. $f\left(\overline{X_0}\right) = \lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} f\left(\overline{X_0}\right)$

..::TEOREMA CONTINUIDAD EN FUNCIONES VECTORIALES::..

Cuando $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\bar{f}$ es continua en A <=> $\bar{f}_n$ es continua en A.
Para $i = 1,2, \dots, n$

Para una composición de funciones:



$$h = f_o g$$

Si g es continua en A y f es continua en g(a)
entonces $h = f_o g$ es continua en A

..::LIMITES RADIALES Y FUNC. CONVENIENTES DE APROX.::..

Esta herramienta matemática es útil para demostrar la no existencia de límites, generalmente al resolver un ejercicio de límites en análisis matemático II nos encontraremos continuamente con casos donde haya que aplicarlos.

FAMILIAS DE CURVAS QUE GENERALMENTE UTILIZAREMOS:

1. $y - y_0 = m(x - x_0)$
2. $y - y_0 = a(x - x_0)^2$
3. $y - y_0 = a(x - x_0)^3$
4. $x - x_0 = a(y - y_0)$
5. $x - x_0 = a(y - y_0)^2$
6. $y = ax^2 + bx$
7. $x = ay^2 + by$

Entre otros...

IMPORTANTE

Al acercarnos por cualquier curva la función deberá tender al mismo valor en caso contrario: $\nexists \lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} f(\overline{X_0})$

<u>Ejemplo:</u>

Analizar si existe el límite del siguiente campo escalar en: $(x, y) = (2,0)$

$$f: D\underline{c}R^2 \to R / f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)y}{(x-2)^2 + y^2} & \text{si } (x-2)y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x-2)y = 0 \end{cases}$$

Parte A:

Nos acercamos al (2,0) por $(x,y)/(x-2)\,y = 0$

$$\lim_{\overline{X} \to (2,0)} 0 = 0$$

Parte B:

Nos acercamos al (2,0) por $(x,y)/(x-2)\,y \neq 0$

$$\lim_{\overline{X} \to (2,0)} \frac{(x-2)y}{(x-2)^2 + y^2} \left(\frac{\to \infty}{\to \infty}\right)$$

En este caso no se puede "salvar" la indeterminación. Motivo por el cual acudimos a la información que nos dan los denominados limites radiales. Con $y = m(x-2)$

$$lr = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)m(x-2)}{(x-2)^2 + m^2(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2 m}{(x-2)^2(1+m^2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{m}{1+m^2}$$

Donde: $\frac{m}{1+m^2}$ es una familia de números distintos entre sí.

Dado que a medida que nos aproximamos al punto por caminos diferentes la función tiende a valores distintos (por principio de unicidad del límite, en el caso de que exista debe ser único) se tiene que:

$$\nexists \lim_{\bar{X} \to (2,0)} f(x,y)$$

Ejercicio de parcial/final.

Sea: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^7}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$, se pide calcular si existe $\lim_{\bar{x} \to \bar{0}} f(x,y)$

Desarrollo formal.

Nos acercamos al origen de coordenadas (0,0) por los (x,y)/x+y=0

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{0}} f(x,y) = 0$$

Nos acercamos al origen de coordenadas (0,0) por los (x,y)/x+y≠0

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{0}} f(x,y) = \frac{x^7}{x+y}$$

Este es un caso especial el cual apareció en un final tomado, dado que la rama de la función no es acotada ni estamos en presencia de infinitésimo por acotado acudimos a los limites radiales, demostraremos que al acercarnos al origen por distintos caminos la función tiende a valores distintos por lo que el limite no existirá.

Para demostrar que el límite no existe se debe buscar una función la cual sirva de curva para aproximar, para este caso buscare la función de la siguiente forma:

$$\frac{x^7}{x+y} = 1$$

$$Ax^7 = x + y$$

$$y = Ax^7 - x$$

Siendo A la constante que me dará una familia de curvas, por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^7}{x - x + ax^7} = \frac{1}{a}$$

Como a medida que me aproximo al origen por distintos valores la función tiende a valores distintos (por principio de unicidad del límite, si existe debe ser único) se tiene que:

$$\nexists \lim_{\bar{x} \to \bar{0}} f(x, y)$$

UNIDAD V

DERIVADAS

Temario a estudiar.

- Definición. Derivada en una variable. Casos excluyentes a la regla práctica.
- Derivadas parciales.
- Operador gradiente.
- Definición de derivadas direccionales. Aplicación.
- Gradiente de un campo escalar en un punto.
- Propiedad de homogeneidad

..::DERIVADA EN UNA VARIABLE::..

Función en una variable:

Dada $f: D \underline{c} R^N$, t_0 interior a D si existe con norma finita el límite que se indica:

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Donde $f'(t_0)$ es la derivada de f en t_0.

Función en dos variables:

Cuando $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\exists \bar{f}'(t_0) <=> \exists f'_i(t_0), i = 1 \ldots n$, siendo $f'_{(t_0)} = (f'_1(t_0), \ldots, f'_n(t_0))$

Demostración:

$$f(t_0 + h) = \left(f_1(t_0 + h), \ldots, f_N(t_0 + h)\right)$$

$$-$$

$$f(t_0) = (f_1(t_0), \ldots, f_N(t_0))$$

$$f(t_0 + h) - f(t_0) = \left(f_1(t_0 + h) - f_1(t_0), \ldots, f_N(t_0 + h) - f_N(t_0)\right)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{f}(t_0 + h) - \bar{f}(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\bar{f}_1(t_0 + h) - \bar{f}_1(t_0)}{h}, \ldots, \frac{\bar{f}_N(t_0 + h) - \bar{f}_N(t_0)}{h} \right)$$

$$\exists f'^{(t_0)} <=> \exists \lim_{h \to 0} \frac{f_i(t_0 + h) - f_i(t_0)}{h} \text{con } i = 1 \ldots n$$

Casos en que no se debe aplicar la forma práctica:

- En punto que no pertenezca al dominio de la función.
- En punto donde la definición de la función este partida.
- En punto donde al evaluar resultado de regla practica se llega a una expresión sin sentido algebraico.

..::DERIVADA DIRECCIONAL DE UN CAMPO ESCALAR::..

Sea f un campo escalar definido en un conjunto abierto $D \subseteq R^n$, $\overline{X_0} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un punto de D y donde $\breve{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ es un versor de R^n, la derivada direccional de f en $\overline{X_0}$ con respecto al versor $\breve{u}$ esta dada por el siguiente límite:

$$\boxed{f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + h\breve{u}) - f(\overline{X}_0)}{h}}$$

Donde:

$\breve{u}$ es un vector unitario (versor)

$\breve{u} = (a, b) \qquad a^2 + b^2 = 1$

..::DERIVADA PARCIALES::..

Sea $f: D \underline{c} R^2 \to R/z = f(x,y)$ y sea $\overline{P}_0 = (x_0, y_0)$ interior a D; las derivadas parciales de f(x,y) en (x_0, y_0)):

$$\boxed{f'x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha; y_0) - f(\overline{X}_0)}{h}}$$

$$\boxed{f'y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + hb) - f(\overline{X}_0)}{h}}$$

..::GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR EN UN PUNTO::..

Muchas veces interesa conocer en qué dirección el campo varia más rápidamente con la posición, y cuál es la intensidad de esa variación. Esta información se obtiene a través del operador gradiente.

Sea $f: D \underline{c} R^2 \to R$ llamamos de esta forma al vector cuyas componentes son las derivadas parciales:

$$\overline{\nabla} f(\overline{X}_0) = \left(f'x(\overline{X}_0); f'y(\overline{X}_0)\right)$$

Si $f: D \underline{c} R^3 \to R$

$$\overline{\nabla} f(\overline{X}_0) = \left(f'x(\overline{X}_0); f'y(\overline{X}_0); f'z(\overline{X}_0)\right)$$

Observaciones:

(1) Si $f: D\underline{c}R^2 \to R$ el gradiente es perpendicular a cada curva de nivel de dicho campo en $\overline{X}_0$.

(2) Si $f: D\underline{c}R^3 \to R$ el gradiente es normal a cada superficie de nivel de dicho campo en $\overline{X}_0$.

..::PROPIEDAD DE HOMOGENEIDAD::..

Si existe la derivada direccional $f'(\overline{X_0}, \breve{v})$ y $k \in R, k \neq 0$ entonces $f'(\overline{X_0}, k\breve{v}) = kf'(\overline{X_0}, \breve{v})$

Demostración:

$$f'(\overline{X_0}, k\breve{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(\overline{X_0} + k\breve{v}) - f(\overline{X_0})}{h}$$

$$f'(\overline{X_0}, k\breve{v}) = k \lim_{h\to 0} \frac{f'(\overline{X_0} + k\breve{v}) - f(\overline{X_0})}{kh}$$

Si $h_2 = kh$ como $h \to 0$ sabemos que $h_2 \to 0$

$$f'(\overline{X_0}, k\breve{v}) = k \lim_{h_2\to 0} \frac{f'(\overline{X_0}, +\breve{v}) - f(\overline{X_0})}{h_2}$$

$$f'(\overline{X_0}, k\breve{v}) = k\, f'(\overline{X_0}, \breve{v})$$

Corolarios:

1. $f'(\overline{X_0}, -\breve{v}) = -f'(\overline{X_0}, \breve{v})$
2. $f'(\overline{X_0}, \breve{v}) = ||v||f'(\overline{X_0}, \breve{v})$ donde $\breve{v} = \dfrac{\vec{v}}{||v||}$

Ejercicio de parcial/final.

Sea: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-3)y}{(x-3)^2+y^2} & \text{si } x \neq 3 \\ \text{sen}(x-3+y) & \text{si } x = 3 \end{cases}$, se pide analizar

derivabilidad del campo escalar en el punto: (3,0) para toda dirección, teniendo en cuenta que el ejercicio finalizara cuando todas las direcciones sean analizadas.

Condiciones del ejercicio:

$$\overline{X_0} = (3,0) \quad \breve{u} = (a,b) \quad a^2 + b^2 = 1$$

Desarrollo formal.

Para resolver este ejercicio acudo a la definición de derivada direccional definida por el siguiente límite: $f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + h\breve{u}) - f(\overline{X}_0)}{h}$

Utilizando como versor el genérico (de esta forma se logra analizar para toda dirección y sentido) y el punto dado como dato.

Además sabemos por enunciado que: $f(\overline{X}_0) = \overline{0}$

Reemplazando datos: $f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f((3,0) + h(a,b))}{h}$

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + ha; hb)}{h}$$

Una vez planteado el limite pasaremos a dividir el ejercicio en dos ramas, por un lado trabajaremos con los pares (x,y)/x=3 y por el otro lado con los pares (x,y)/x≠3.

Parte A: (x,y)/x=3

Para esta parte: $\mathrm{x} = 3 \therefore 3 + \mathrm{ha} = 3 => ha = 0$ finalmente $\mathrm{a} = 0$

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(hb)b}{bh} = b$$

Parte A: (x,y)/x≠3

Para esta parte: $\mathrm{x} \neq 3$

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(3 + ha - 3)(hb)}{(3 + ha - 3)^2 + (hb)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{hahb}{h^2a^2 + h^2b^2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^2ab}{h^2(a^2 + b^2)} = \frac{ab}{h}$$

Finalmente el resultado a la consigna pedido será la unión de ambos resultados:

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \begin{cases} b \quad \mathrm{si}\ a = 0 \\ 0\ \mathrm{si}\ b = 0 \end{cases}$$

UNIDAD VI

DIFERENCIABILIDAD

En esta unidad se estudian los campos escalares de la forma:

$$\boxed{f: D \underline{c} R^n \to R / \ n \geq 2}$$

Temario a estudiar.

- Definición de diferenciabilidad.
- Propiedades de los campos diferenciables.
- Deducción de la ecuación del plano tangente a la grafica de un campo diferenciable.
- Demostración: Un campo escalar si es diferenciable es continuo en un punto interior.
- Demostración: Un campo escalar si es diferenciable es derivable respecto de toda dirección.

..::DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD::..

Decimos que $f: D\underline{c}R^2 \rightarrow R$ es diferenciable en un punto interior $\overline{X_0}$ si se cumple:

$$f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) \cong F'_x\,\overline{(X_0)}h + F'_y\,\overline{(X_0)}k + \epsilon(h,k)\sqrt{h^2 + k^2}$$

Donde $\lim_{(h,k)\rightarrow(0,0)} \epsilon(h,k) = 0$

Lo que es lo mismo:

$$f(\overline{X_0} + \bar{v}) - f(\overline{X_0}) = \overline{\nabla}f(\overline{X_0})\bar{v} + \in(\bar{v})\left||\bar{v}|\right|$$

Donde $\lim_{\bar{v}\rightarrow\bar{0}}(\in(\bar{v})) = 0$

OBSERVACIÓN:

Si tuviéramos una función escalar de una variable independiente diríamos que f es diferenciable en X_0<=> f es derivable en X_0. Mientras que para funciones de más de una variable independiente esto ya no es cierto.
La continuidad de un campo escalar así como la derivabilidad del mismo respecto de toda dirección son condiciones necesarias pero no suficientes para que el campo escalar termine siendo diferenciable en dicho punto.

..::PROPIEDADES DE LOS CAMPOS DIFERENCIABLES::..

(1) Si f es diferenciable en $\overline{X_0}$ => f es continuo en $\overline{X_0}$
(2) Si f es diferenciable en $\overline{X_0}$ => f es derivable en $\overline{X_0}\,\forall\breve{u}$
(3) Si f es discontinua en $\overline{X_0}$ => f no es diferenciable en $\overline{X_0}$
(4) Si $\exists\breve{u}$ respecto del cual $\nexists f'$ => f no es diferenciable en $\overline{X_0}$
(5) Si f es diferenciable en $\overline{X_0}$ => $f'(\overline{X_0}, \breve{u}) = \overline{\nabla}f(\overline{X_0})\breve{u}\forall\bar{u}$
(6) Si no es cierto que para toda dirección: $f'(\overline{X_0}, \breve{u}) = \overline{\nabla}f(\overline{X_0})\breve{u}$ => f no es diferenciable en $\overline{X_0}$

(7) Si f es diferenciable en $\overline{X_0} \Rightarrow f'_{max}\,(\overline{X_0}) = \left||\overline{\nabla} f(\overline{X_0})|\right|$ y la dirección responsable es $\breve{u} = \frac{\overline{\nabla} f(\overline{X_0})}{||\overline{\nabla} f(\overline{X_0})||}$

(8) Si f es diferenciable en $\overline{X_0} \Rightarrow f'_{min}\,(\overline{X_0}) = -\left||\overline{\nabla} f(\overline{X_0})|\right|$ y la dirección responsable es $\breve{u} = -\frac{\overline{\nabla} f(\overline{X_0})}{||\overline{\nabla} f(\overline{X_0})||}$

(9) Si f es diferenciable en $\overline{X_0} \Rightarrow f'(\overline{X_0}, \breve{u}) = 0$ para dos direcciones (siempre que $\overline{\nabla} f(\overline{X_0}) \neq \overline{0}$)

(10)Si existe más de una dirección "$\breve{u}$" respecto de la cual se obtiene derivada direccional máxima => f no es diferencial.

(11)Si existe más de una dirección "$\breve{u}$" que promueve derivada direccional mínima => f no es diferenciable en ese punto.

(12)Si existe más de dos direcciones respecto de las cuales se obtiene derivada direccional nula => f no es diferenciable.

(13)Si $f \in C^1$ en $\overline{X_0}$=> f es diferenciable en $\overline{X_0}$

(14) Si f es campo escalar polinomico $(f \in C^1)$ => f es diferenciable

(15)Si f es diferenciable en $\overline{X_0}$=$(x_0; y_0)$ (interior a Df) => la superficie gráfica de ecuación z = f(x,y) admite plano tangente y recta normal en (x_0, y_0, z_0) cuyas ecuaciones son respectivamente:

plano tangente: $Z = Z_0 + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

recta normal: $\overline{X} = \overline{X_0} + t\overline{v}$ con $t \in R$ y $\overline{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$

(16)La diferenciabilidad es condición necesaria y suficiente para que la grafica de un campo escalar de 2 variables admite plano tangente en (x_0, y_0, z_0) de la forma:

Z=$Z_0 + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ con $z_0 = f(x, y)$

Si f es diferenciable en $\overline{X_0} \Rightarrow \Delta f \cong df$ es decir

$f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) \cong F'_x(x_0, y_0)h + F'_y(x_0, y_0)k$ donde h y $k \in R$

..::Demostración: Si es diferenciable es continuo::..

Si $f: D\underline{c}R^n \to R$ es diferenciable en $\overline{X_0}$ interior al Df => f es continuo en $\overline{X_0}$.

Demostración:

Por ser f diferenciable en $\overline{X_0}$ existe un entorno del punto $\overline{X_0}$ en el cual se verifica:

$$f(\overline{X_0}+\bar{v})-f(\overline{X_0})=\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\bar{v}+\in(\bar{v})\left|\left|\bar{v}\right|\right| \text{ Donde } \lim_{\bar{v}\to\bar{0}}(\in(\bar{v}))=0$$

siendo $\bar{v}$ el vector incremento $\therefore$ $f(\overline{X_0}+\bar{v})=f(\overline{X_0})+\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\bar{v}+\in(\bar{v})\left|\left|\bar{v}\right|\right|$

Pasando al límite cuando $\bar{v}\to\bar{0}$ y teniendo en cuenta que el límite del primer miembro existirá si existe el límite del segundo miembro, pasamos a fundamentar lo siguiente:

(a) Como $\overline{X_0}\in Df$, existe $f(\overline{X_0})$ y el $\lim_{\bar{v}\to\bar{0}}f(\overline{X_0})=f(\overline{X_0})$ dado que es un número real.

(b) Las componentes del $\overline{\nabla}f(\overline{X_0})$ existen dado que f es diferenciable en $\overline{X_0}$ y no dependen de $\bar{v}$, por lo tanto $\lim_{\bar{v}\to\bar{0}}(\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\,\bar{v})=0$

(c) $\lim_{\bar{v}\to\bar{0}}(\in(\bar{v})||\bar{v}||)=0$ dado que por un lado $\in\to 0$ por hipótesis y que el $\lim_{\bar{v}\to\bar{0}}(||\bar{v}||)=0$.

Por todo lo expuesto se tiene que existe $\lim_{\bar{v}\to\bar{0}}f(\overline{X_0}+\bar{v})=f(\overline{X_0})$ =>
f es continua en $\overline{X_0}$

..::DEM.: SI ES DIFERENCIABLE ES DERIVABLE PARA TODA DIRECCIÓN::..

Si $f: D \subseteq R^n \to R$ es diferenciable en $\overline{X_0}$ interior al Df => f es derivable en $\overline{X_0}$ respecto de toda dirección.

Demostración:

Por ser f diferenciable en $\overline{X_0}$ existe un entorno del punto $\overline{X_0}$ en el cual se verifica:

$$f(\overline{X_0}+\bar{v})-f(\overline{X_0})=\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\bar{v}+\in(\bar{v})\left|\left|\bar{v}\right|\right| \text{ Donde } \lim_{\bar{v}\to\bar{0}}(\in(\bar{v}))=0$$

siendo $\bar{v}$ el vector incremento $\therefore$ $f(\overline{X_0}+\bar{v})=f(\overline{X_0})+\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\bar{v}+\in(\bar{v})\left|\left|\bar{v}\right|\right|$

Si de los infinitos puntos del entorno, seleccionamos aquellos para los cuales $\bar{v}=h\breve{u}$ es decir que se consideran los puntos que se hallan en las rectas que pasan por $\overline{X_0}$ y tienen la dirección de cada $\breve{u}$, se tiene:

$$f(\overline{X_0}+h\breve{u})-f(\overline{X_0})=\overline{\nabla}f(\overline{X_0})h\breve{u}+\in(h\breve{u})\left|\left|h\breve{u}\right|\right|$$

Dividiendo por h ambos miembros nos queda:

$$\frac{f(\overline{X_0}+h\breve{u})-f(\overline{X_0})}{h}=\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\breve{u}+\in(h\breve{u})\frac{|h|}{h} \text{ pues } \left|\left|\breve{u}\right|\right|=1$$

Pasando al límite cuando $\bar{h}\to\bar{0}$ y teniendo en cuenta que el límite del primer miembro (que es por definición la derivada direccional de f en X_0) existirá si existe el límite del segundo miembro, pasamos a fundamentar lo siguiente:

Las componentes del $\overline{\nabla}f(\overline{X_0})$ existe dado que f es diferenciable en $\overline{X_0}$ y no dependen de h, por lo tanto $\lim_{h\to 0}\overline{(\nabla f(\overline{X_0})\breve{u}\,)}=k\in R$

Por otra parte $\lim_{h\to 0}\in(h\breve{u})\frac{|h|}{h}=0$ por ser el caso de producto de infinitésimos

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{X_0}+h\breve{u})-f(\overline{X_0})}{h}=\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\breve{u}$$

=> Existe $f'(\overline{X_0}+h\breve{u})/\ \ f(\overline{X_0}+h\breve{u})=\overline{\nabla}f(\overline{X_0})\breve{u}$

..::DEDUCCIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA GRÁFICA::..

Si f es diferenciable en (x_0, y_0)su superficie gráfica tiene la ecuación cartesiana $z = f(x, y)$ o bien $0 = f(x, y) - z$

$f(x, y) - z = 0$ A dicha ecuación la podemos considerar como la ecuación de la superficie de nivel 0" correspondiente a un campo escalar de tres variables de la forma:

$F: D \subseteq R^3 \rightarrow R /\ F(x, y, z) = f(x, y) - z$

El $\overline{\nabla} f(\bar{x}) = (F'x, F'y, F'z) \Rightarrow \overline{\nabla} f(\bar{x}) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\right) = \vec{n}$

$$\alpha: f'_x(x_0, y_0)x + f'_y(x_0, y_0)y - z + D = 0$$

Como (x_0, y_0, z_0) verifican la ecuación del plano:

$$\alpha: f'_x(x_0, y_0)x_0 + f'_y(x_0, y_0)y_0 - z_0 + D = 0$$
$$D = z_0 - f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0$$

Finalmente:

$$\alpha: f'_x(x_0, y_0)x + f'_y(x_0, y_0)y - z + \left\{z_0 - f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0\right\} = 0$$

UNIDAD VII

CAMPOS VECTORIALES

En esta unidad se estudian los campos vectoriales de la forma:

$$\boxed{f: D\underline{c}R^2 \to R^3}$$

Temario a estudiar.

- Representación de los campos vectoriales.
- Plano tangente a la superficie imagen del campo vectorial.
- Punto regular de una curva. Definición.
- Punto regular de una superficie. Definición.
- Matriz Jacoviana asociada a un campo vectorial.

..::REPRESENTACIÓN DE LOS CAMPOS VECTORIALES::..

Sea $\bar{f}: D\underline{c}R^2 \to R^3$ $/\bar{f}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\text{Con: } \begin{cases} 0 \le v \le 2\pi \\ u \ge 0 \end{cases}$$

Todo campo vectorial cuyo dominio está incluido en el espacio de 2 dimensiones, con un conjunto imagen incluido en R^3con componentes continuas en dicho dominio representa una superficie en el espacio entendiendo que dicha superficie es la representación del conjunto imagen de dicho campo.

..::DEFINICIÓN DE PUNTO REGULAR DE UNA CURVA::..

$\overline{T_0} \in S$ es punto simple cuando es imagen, a través de $\bar{f}$, de un único $(u_0, v_0) \in D$

En todo punto $\overline{T_0} \in S$, simple y regular, la superficie admite "plano tangente" y "recta normal"

..::DEFINICIÓN DE PUNTO REGULAR DE UNA SUPERFICIE::..

Sea $\bar{f}: D\underline{c}R^2 \to R^3/$ $\bar{f}$ continua en D dado por $\bar{f}(u,v) = (x(u,v); y(u,v); z(u,v))$

Sea $\overline{p_0} \in S$ / $\overline{p_0} = \bar{f}(u_0; v_0)$

Decimos que $\overline{p_0} \in S$ es punto regular de la superficie según la representación paramétrica dada por $\bar{f}$ en D.

Si $\bar{f}$ es diferenciable en $\bar{A} = (u_0; v_0)$ interior a D y el producto vectorial

$\overline{f'_u}(u_0; v_0)$ x$\overline{f'_v}(u_0; v_0) \neq \bar{0}$

..::MATRIZ JACOBIANA ASOCIADA A UN CAMPO VECTORIAL::..

Recibe este nombre la matriz que tiene por filas el gradiente de cada componente del campo vectorial.

Sea $\bar{g}: D\underline{c}R^n \to R^n / \bar{g}(\bar{X}) = (g_1(\bar{X}); g_2(\bar{X}); \dots.)$

$$D_{\bar{g}} = \begin{pmatrix} g'_{1_x}(\bar{X}) & g'_{1_y}(\bar{X}) & \dots & g'_{1_n}(\bar{X}) \\ g'_{2_x}(\bar{X}) & g'_{2_y}(\bar{X}) & \dots & g'_{2_n}(\bar{X}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g'_{n_x}(\bar{X}) & g'_{n_y}(\bar{X}) & \dots & g'_{n_n}(\bar{X}) \end{pmatrix}$$

UNIDAD VIII

FUNCIONES COMPUESTAS

En esta unidad se estudian los campos escalares de la forma:

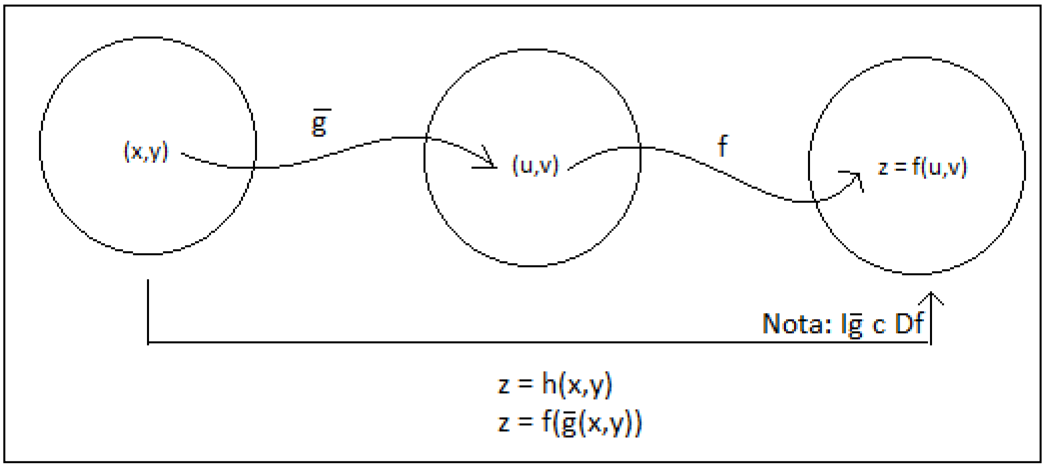
$$\boxed{f: D \subseteq R^n \to R / \ n \geq 2}$$

Temario a estudiar.

- Teorema: "Regla de la cadena"
- Resolución de ejercicios aplicando la regla de la cadena.
- Resolución de ejercicios aplicando la matriz Jacoviana asociada a un campo vectorial.

Componer una función significa "sustituir una función en otra". Dada $z = f(x, y)$ para componer dicha función tendremos que sustituir las dos variables "x" e "y" por dos funciones, digamos g_1 y g_2 que conecten a estas con otras variables, por ejemplo "u" y "v". Así, si consideramos las funciones: $x = g_1(u, v)$, $y = g_2(u, v)$ podemos sustituir a estas en la función f y obtener la función compuesta:

$$h = f(g_1(u, v); g_2(u, v))$$



..::TEOREMA: REGLA DE LA CADENA::..

Dada:

$$\bar{g}: D \underline{c} R^n \rightarrow R^m \quad \bar{g} \text{ diferenciable en } \bar{A} \in D$$
$$f: D \underline{c} R^m \rightarrow R \quad f \text{ diferenciable en } \bar{g}_{(\bar{A})}$$

Entonces: $h = F_O \bar{g}$ es diferenciable en $\bar{A}$ y además:

$$Dh\left(\bar{A}\right) = Df\left(\bar{g}_{(\bar{A})}\right) D\bar{g}_{(\bar{A})}$$

..::RES.DE EJER. APLICANDO LA REGLA DE LA CADENA::..

Sea: $\overline{g}: D \underline{c} R^2 \to R^2 / \overline{g}(x;y) = (u,v)$, $f: D \underline{c} R^2 \to R / f(u,v) = 2u + 3v$

$$\begin{cases} u = x^2 + y^3 \\ v = 3x^2 - y \end{cases}$$

Obtenemos la función compuesta $z = h(x,y)$ en (1,2).

Por enunciado:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} u_0 = 9 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Y además:

(1) $u'x = 2x \ \therefore \ u'x(1,2) = 2$

(2) $u'y = 3y^2 \therefore u'y(1,2) = 12$

(3) $v'x = 6x \ \therefore v'x(1,2) = 6$

(4) $v'y = -1 \ \therefore v'y(1,2) = -1$

(5) $f'u = 2 \ \therefore \ f'u(9,1) = 2$

(6)$f'v = 3 \ \therefore f'v(9,1) = 3$

$$h'x(x,y) = f'u\, u'x + f'v\, v'x$$
$$h'y(x,y) = f'u\, u'y + f'v\, v'y$$

$$h'x(1,2) = f'u(9,1)u'x(1,2) + f'v(9,1)u'x(1,2)$$
$$h'x(1,2) = f'u(9,1)u'y(1,2) + f'v(9,1)v'y(1,2)$$

$$h'x(1,2) = 2(2) + 3(6) = 22$$
$$h'y(1,2) = 2(12) + 3(-1) = 21$$

..::RESOLUCIÓN DE EJERCICIO APLICANDO LA MATRIZ JACOBIANA::..

Sea: $\overline{g}: D\underline{c}R^2 \to R^2 / \overline{g}(x;y) = (u,v)$, $f: D\underline{c}R^2 \to R / f(u,v) = 2u + 3v$

$$\begin{cases} u = x^2 + y^3 \\ v = 3x^2 - y \end{cases}$$

Obtenemos la función compuesta $z = h(x,y)$ en (1,2).

$$Dh\left(\overline{A}\right) = Df\left(\overline{g}_{(\overline{A})}\right)\, D\overline{g}_{(\overline{A})}$$

$$Dh(1,2) = Df\left(\overline{g}_{(1,2)}\right)\, D\overline{g}_{(1,2)}$$

Obtengo el valor de: $\overline{g}(1,2) = (9,1)$

$$Dh(1,2) = Df(9,1)\, D\overline{g}_{(1,2)}$$

Entonces:

$$(h'x \quad h'y) = (f'u \quad f'v)\begin{pmatrix} g'_1x & g'_1y \\ g'_2x & g'_2y \end{pmatrix}$$

$$(h'x \quad h'y) = (2 \quad 3)\begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 6x & -1 \end{pmatrix}_{(1,2)}$$

$$(h'x \quad h'y) = (2 \quad 3)\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(h'x \quad h'y) = (22,21)$$

Unidad IX

Funciones definidas de forma implícita

En esta unidad se estudian los campos escalares de la forma:

$$\boxed{F(x, y, z) = 0}$$

Temario a estudiar.

- Definición. Funciones implícitas
- Teorema de Couchy-Dinni
- Curva plana y superficie definida en forma implícita.

..::FUNCIONES IMPLÍCITAS::..

Dada un campo escalar $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ se dice que la función define en forma implícita a $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in DcR^n$ cuando:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) = 0 \ \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$$

De poderse despejar de la ecuación inicial $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es la forma explícita de expresar "y" como función de las otras variables.

..::TEOREMA DE COUCHY-DINNI::..

Dada $F: D\underline{c}R^3 \to R, F \in C^1$ / $F(\overline{A}) = 0$ y $F'_z(\overline{A}) \neq 0 \Rightarrow$ la funcion de ecuación: $F(x, y, z) = 0$ define de forma implicita a la ecuación $z = f(x, y)$ y además:

$$f'_x = -\frac{F'x(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

$$f'_y = -\frac{F'y(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

<u>Ejemplo:</u>

Sea z = f(x,y) definida implícitamente por la ecuación:

$xy + yz + e^{x-3} - \ln(z) - 17 = 0$. Se pide valor aproximado de $f(3{,}01; 3{,}98)$

Primero:

Establezco el punto que satisface: $F(x, y, z) = 0$

Nota: Este paso se realiza a prueba y error reemplazando en la ecuación implícita el “x” e “y” en este caso conocidos.

$$\overline{P} = (3,4,z_0) \therefore \overline{P} = (3,4,1)$$

Segundo:

Construyo mi campo escalar a partir de mi función implícita ya que a la ecuación la puedo considerar superficie de nivel “0” correspondiente al siguiente campo escalar:

$$F: D \underline{c} R^3 \to R / F(x,y,z) = \mathrm{xy} + \mathrm{yz} + \mathrm{e}^{\mathrm{x}-3} - \ln(\mathrm{z}) - 17$$

Tercero:

Obtengo el gradiente del campo escalar construido:

$$\overline{\nabla} f(3,4,1) = (5,4,3)$$

Cuarto:

Aplico el teorema de Couchy-Dinni:

$$\mathrm{f'}_{\mathrm{x}} = -\frac{\mathrm{F'x}(3,4,1)}{\mathrm{F'z}(3,4,1)} = -\frac{5}{3}$$

$$\mathrm{f'}_{\mathrm{y}} = -\frac{\mathrm{F'y}(3,4,1)}{\mathrm{F'z}(3,4,1)} = -\frac{4}{3}$$

Entonces:

$$\overline{\nabla}\mathrm{f}(3,4) = \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

Para finalizar busco el valor aproximado de $\mathrm{f}(3{,}01; 3{,}98)$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \Delta\mathrm{x}; \mathrm{y}_0 + \Delta\mathrm{y}) \cong \mathrm{F}\left(\overline{\mathrm{X}_0}\right) + \mathrm{f'x}\left(\overline{\mathrm{X}_0}\right)\Delta\mathrm{x} + \mathrm{f'y}\left(\overline{\mathrm{X}_0}\right)\Delta\mathrm{y}$$

$$\mathrm{f}(3{,}01; 3{,}98) \cong 1 - \frac{5}{3}\, 0{,}01 - \frac{4}{3}(-0.02)$$

$$\mathrm{f}(3{,}01; 3{,}98) \cong 1{,}01$$

Ejercicio de parcial/final.

Dada $z = f(x, y)$ def. de forma implícita por: $xz + z^3y + \ln(z + x - 2) - 2 = 0$ se pide calcular aproximadamente: $f(0{,}98; 0{,}03)$

Desarrollo formal.

A la ecuación $xz + z^3y + \ln(z + x - 2) - 2 = 0$ la considero superficie de nivel "0" correspondiente al campo escalar:

$$F: R^3 \rightarrow R / F(x, y, z) = xz + z^3y + \ln(z + x - 2) - 2$$

El ejercicio nos pide una aproximación lineal, para esto recurriremos a:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \cong F\left(\overline{X_0}\right) + f'x\left(\overline{X_0}\right)\Delta x + f'y\left(\overline{X_0}\right)\Delta y$$

Donde:

$$X = 1 - 0{,}02\ ;\ \ Y = 0 + 0{,}03$$
$$\Delta X = -0{,}02\ ;\ \Delta Y = 0{,}03$$

Por lo tanto:

$$f(0{,}98; 0{,}03) \cong F(1{,}0) + f'x(1{,}0)(-0{,}02) + f'y(1{,}0)(0{,}03)$$

Para obtener las derivadas parciales de f (el gradiente de f en un punto) acudiremos a utilizar el teorema de Couchy-Dinni.

$$f'_x = -\frac{F'x(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

$$f'_y = -\frac{F'y(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

Y por tanteo en la ecuación implícita: $z_0 = 2$

Donde: $\overline{\nabla}F(x,y,z) = \left(z + \frac{1}{z+x-2}; z^3; x + 3z^2y + \frac{1}{z+x-2}\right)$

Siendo: $\overline{\nabla}F(1{,}0{,}2) = (3{,}8{,}2)$

$$f'_x = -\frac{F'x(1{,}0{,}2)}{F'z(1{,}0{,}2)} = -\frac{3}{2}$$

$$f'_y = -\frac{F'y(1{,}0{,}2)}{F'z(1{,}0{,}2)} = -4$$

Entonces:

$$\overline{\nabla}f(1{,}0) = \left(-\frac{3}{2}; -4\right)$$

Finalmente:

$$f(0{,}98; 0{,}03) \cong 2 + \left(-\frac{5}{3}\right)(-0{,}02) + (-4)(0{,}03)$$

$$f(0{,}98; 0{,}03) \cong 1{,}91$$

..::CURVA Y SUPERFICIES DEFINIDAS EN FORMA IMPLICITA::..

Curva plana definida en forma implícita (en el plano xy)

Dada la ecuación: $F(x,y) = 0$ y el punto $\overline{A} = (X_0, Y_0)$

Cuando:

1) $f_{(\overline{A})} = 0$
2) $\overline{\nabla}f_{(\overline{A})}$ continua en $E(\overline{A})$
3) $\overline{\nabla}f_{(\overline{A})} \neq \overline{0}$

La ecuación $F(x,y) = 0$ define implícitamente una curva C que pasa por $\overline{A} = (X_0, Y_0)$ y admite recta tangente en $\overline{A}$

Superficie definida en forma implícita

Dada la ecuación: $F(x,y,z) = 0$ y el punto $\overline{A} = (X_0, Y_0, Z_0)$

Donde:

1) $f_{(\overline{A})} = 0$
2) $\overline{\nabla} f_{(\overline{A})}$ continua en $E(\overline{A})$
3) $\overline{\nabla} f_{(\overline{A})} \neq \overline{0}$

La ecuación $F(x,y,z) = 0$ define implícitamente una superficie "S" que pasa por $\overline{A} = (X_0, Y_0, Z_0)$ y admite plano tangente y recta normal en $\overline{A}$

Nota: El gradiente de una función implícita, ya sea que defina una superficie o una curva, siempre es normal a la misma.

UNIDAD X

EXTREMOS

En esta unidad se estudian los campos escalares de la forma:

$$\boxed{f: D \subseteq R^n \to R /\ n \geq 2}$$

Temario a estudiar.

- Definición. Extremos relativos o locales. Extremos absolutos.
- Definición. Extremos condicionados.
- Calculo de extremos locales para campos escalares $(f: D \subseteq R^2 \to R)$
- Existencia de extremos absolutos.

..::DEFINICIÓN EXTREMOS RELATIVOS & ABSOLUTOS::..

Extremos relativos o locales.

Dada $f: D \subseteq R^n \to R, \overline{A} \in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es máximo local de f si $f(\overline{A}) \geq f(\overline{X}) \forall \overline{X} \in E'(\overline{A})$

Dada $f: D \subseteq R^n \to R, \overline{A} \in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es mínimo local de f si $f(\overline{A}) \leq f(\overline{X}) \forall \overline{X} \in E'(\overline{A})$

Extremos absolutos.

Dada $f: D \subseteq R^n \to R, \overline{A} \in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es máximo absoluto de f si $f(\overline{A}) \geq f(\overline{X}) \forall \overline{X} \in D$

Dada $f: D \subseteq R^n \to R, \overline{A} \in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es mínimo absoluto de f si $f(\overline{A}) \leq f(\overline{X}) \forall \overline{X} \in D$

..::DEFINICIÓN EXTREMOS CONDICIONADOS::..

Sean F y G dos campos escalares diferenciables en un entorno de $\overline{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$ con derivadas no nulas simultáneamente. Si $\overline{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto crítico de f en el conjunto $A = \{(x, y, z)/G(x, y, z) = 0\}$ entonces existe un $\lambda_0/(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es punto crítico de $L(x, y, z, \lambda) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$

Clasificación de extremos:

$$\vec{H}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & G''_{x} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & G''_{Y} \\ G''_{x} & G''_{Y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} > 0 \; máximo \\ < 0 \; mínimo \\ = 0 \text{ el criterio no informa} \end{cases}$$

..::CALCULO DE EXTREMOS PARA EL CASO $F: D \subseteq R^2 \rightarrow R$ ::..

Si f es diferenciable en $\overline{X}_0$(interior al Df) con $\overline{\nabla} f(\overline{X}_0) = \overline{0}$ y además:

$$H(\overline{X}_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(\overline{X}_0) & f''_{xy}(\overline{X}_0) \\ f''_{yx}(\overline{X}_0) & f''_{yy}(\overline{X}_0) \end{pmatrix} > 0 => f(x_0, y_0) \text{ es extremo relativo.}$$

Si en particular: $f''_{xx}(\overline{X}_0) > 0 => f(x_0, y_0)$ es mínimo relativo.
Si en particular: $f''_{xx}(\overline{X}_0) < 0 => f(x_0, y_0)$ es máximo relativo.

$$H(\overline{X}_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(\overline{X}_0) & f''_{xy}(\overline{X}_0) \\ f''_{yx}(\overline{X}_0) & f''_{yy}(\overline{X}_0) \end{pmatrix} < 0$$

F no presenta extremos relativos se trata de un punto de ensilladura de coordenadas (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$H(\overline{X}_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(\overline{X}_0) & f''_{xy}(\overline{X}_0) \\ f''_{yx}(\overline{X}_0) & f''_{yy}(\overline{X}_0) \end{pmatrix} = 0$$

El criterio no informa.

..::EXISTENCIA DE EXTREMOS ABSOLUTOS::..

Si f continua en S cerrada y acotada, f produce máximo y minimo absoluto (sentido amplo en S)

UNIDAD XI

POLINOMIO DE TAYLOR

En esta unidad se estudian los campos escalares de la forma:

$$\boxed{f: D \subseteq R^n \rightarrow R}$$

Temario a estudiar.

- Diferenciales sucesivos.
- Taylor para Campos Escalares.
- Expresión del polinomio de Taylor de orden 2.
- Reglas memotécnicas.
- Propiedad de derivadas sucesivas en el polinomio.

..::DIFERENCIALES SUCESIVOS::..

Supongamos un campo escalar $f(x,y)$ diferenciable

$$f(\overline{X}+\overline{H}) = f(\overline{X}) + L(\overline{H}) + \left|\left|\overline{H}\right|\right| \; \mu(\overline{H}) \qquad \begin{matrix} \mu(\overline{H}) \to 0 \\ L:T.L \end{matrix}$$

$df(\overline{X}+\overline{H}) = f'_x(x,y)h + f'_y(x,y)k = \varphi_{(x,y)}$ Suponiendo $\overline{H} = (h,k)\text{constante}$

Si $\varphi_{(x,y)}$ fuera diferenciable:

$$d\varphi_{(x,y)} = d(df) = d^2 f$$

Al igual que para f:

$$d\varphi_{(\overline{X}+\overline{H})} = \varphi'_{x(x,y)}h + \varphi'_{y(x,y)}k$$

$$d^2f(\overline{X}+\overline{H}) = \left[f''_{xx(x,y)}h + f''_{yx(x,y)}k\right]h + \left[f''_{xy(x,y)}h + f''_{yy(x,y)}k\right]k$$

Siendo:

$$\left[f''_{xx(x,y)}h + f''_{yx(x,y)}k\right] = \varphi'_{x(x,y)}$$
$$\left[f''_{xy(x,y)}h + f''_{yy(x,y)}k\right] = \varphi'_{y(x,y)}$$

Suponiendo: $f \in c^2, f''_{xy} = f''_{yx}$, queda:

$d^2f(\overline{X}+\overline{H}) = f''_{xx}(\overline{X})h^2 + 2f''_{xy}(\overline{X})\, h\, k + \; f''_{yy}(\overline{X})k^2$ con $\overline{X} = (x,y)$

Finalmente:

$$d^2f(\overline{X}+\overline{H}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^{(2)}_{f(\overline{X})}$$

En general si f es un campo escalar del tipo: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $\overline{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ cuando $f \in C^K\big(E(\overline{A})\big)$, f es diferenciable hasta el orden K inclusive en el punto $\overline{A}$.

Resultando, para $\overline{H} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$:

$$\boxed{d^i f(\overline{A}+\overline{H}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}h + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right]^{(i)}_{f(\overline{A})} \quad \text{con } i = 1,2,\dots,K}$$

..::TAYLOR PARA CAMPOS ESCALARES::..

Sea $f: D \underline{c} R^n \to R$, si $f \in C^1\left(E(\overline{A})\right)$, para todo $(\overline{A}+\overline{H}) \in E(\overline{A})$ se puede expresar:

$$f(\overline{A}+\overline{H}) = f(\overline{A}) + \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\overline{A},\overline{H})}{i!}\right] + T$$

Siendo T el termino complementario, error o resto.

Aproximar por Taylor de orden K consiste en despreciar el valor de T aceptando que:

$$\boxed{f(\overline{A}+\overline{H}) \cong f(\overline{A}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\overline{A},\overline{H})}{i!}}$$

Para $\overline{A}+\overline{H} = \overline{X} \in E(\overline{A})$

Desde el punto de vista práctico conviene llamar: $\overline{X} = \overline{A}+\overline{H} => \overline{H} = \overline{X}-\overline{A}$
Con lo que nos queda:

$$f(\overline{x}) = f(\overline{A}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\overline{A},\overline{X}-\overline{A})}{i!} \text{ CON } \overline{X} \in E(\overline{A})$$

Siendo:

$$\overline{X}-\overline{A}$$
$$(X_1, X_2, \dots, X_n) - (A_1, A_2, \dots, A_n)$$
$$\overline{X}-\overline{A} = (X_1 - A_1, X_2 - A_2, \dots, X_n - A_n)$$

$$d^i f(\overline{A},\overline{X}-\overline{A}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(X_1 - A_1) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(X_n - A_n)\right]_{f(\overline{A})}^{(i)}$$

Si $f \in C^{k+1}E(\overline{A})$ y quisiéramos obtener el valor del resto del polinomio de Taylor (tema no evaluado en la materia) entonces el mismo se puede expresar como:

$$\boxed{T = \frac{d^{k+1} f(\overline{B},\overline{X}-\overline{A})}{(K+1)!}}$$

..::EXPRESIÓN DEL POL. DE TAYLOR DE ORDEN DOS::..

$$\boxed{f(\overline{A}+\overline{H}) \cong f(\overline{A}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\overline{A},\overline{H})}{i!}}$$

$$f(x,y) = f(\overline{X_0}) + f'x(\overline{X_0})(x - X_0) + f'y(\overline{X_0})(y - y_0) + \frac{1}{2!}\left[f'xx(\overline{X_0})(x - X_0)^2 + 2f'xy(\overline{X_0})(x - X_0)(y - y_0) + f''yy(\overline{X_0})(y - y_0)^2\right] + \frac{1}{3!}\left[f'''xxx(\overline{X_0})(x - X_0)^3 + 3f'''xxy(\overline{X_0})(x - X_0)^3 + 3f'''xxy(\overline{X_0})(x - X_0)^2(y - y_0) + 3f'''xyy(\overline{X_0})(x - X_0)(y - y_0)^2 + f'''yyy(\overline{X_0})(y - y_0)^3\right] + \text{continua.}$$

..::REGLAS MEMOTÉCNICAS::..

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Notar como el polinomio de Taylor respeta el cuadrado perfecto y cubo perfecto.

..::DERIVADAS SUCESIVAS EN EL POLINOMIO DE TAYLOR::..

Sea un campo escalar $f(\overline{X})$ y su polinomio asociado $P_k(\overline{A})$ con $\overline{X} \in E(\overline{A})$

$$f(\overline{A}) = P_k(\overline{A})$$

También en $\overline{A}$ son iguales las derivadas sucesivas de f y de P_k hasta orden k inclusive.

Ejemplo:

Dado el desarrollo:

$$f(x,y) = 1 + 4x - 4 - y + 2 + 7x^2 - 14x + 7 - 4xy + 4y + 8x - 8 + \frac{1}{2}y^2 - 2y + 2$$

$$f(x,y) \cong \underbrace{-2x + y + 7x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4xy,}_{P_2(x,y)} \quad (x,y) \in E(\overline{A})$$

Si se quiere reconstruir el polinomio con : $\overline{A} = (1,2)$

$$f(\overline{A}) = P_2(\overline{A}) = -2 + 2 + 7 + \frac{1}{2}2^2 - 8 = 1$$

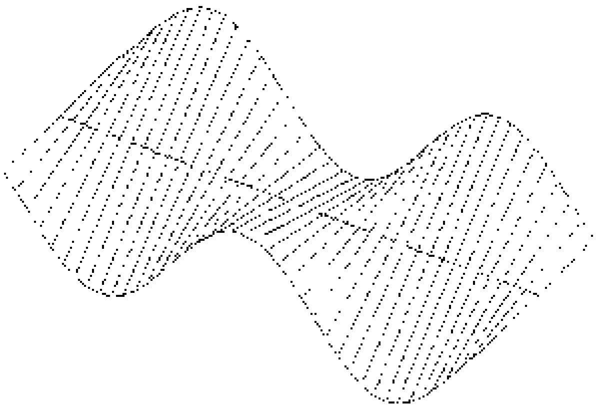
$$f'_x(\overline{A}) = P'_{2_x}(\overline{A}) = [-2 + 14x - 4y] = 4$$

$$f''_{xx}(\overline{A}) = P''_{2_{xx}}(\overline{A}) = 14$$

Obteniendo las derivadas parciales se puede reconstruir nuevamente el polinomio de Taylor.

Segundo parcial

Teórico / Práctico



Realizado por: Pose, Fernando
Con la colaboración: Sergio

UNIDAD XII

CIRCULACIÓN O TRABAJO DE UN CAMPO VECTORIAL

En esta unidad se estudian los campos escalares de la forma:

$$\boxed{f: D \subseteq R^n \rightarrow R^n / n \geq 2}$$

Temario a estudiar.

- Definición.
- Campo de gradientes. Líneas equipotenciales.
- Condición necesaria para existencia de función potencial. Enunciado y demostración.
- Independencia del camino. Enunciado y demostración.
- Teoremas.
- Líneas de campo.

..:DEFINICIÓN::..

$$T = \int_C \bar{f} d\bar{g} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{f}[\bar{g}(t)]\, \bar{g}'(t)dt$$

..:CAMPO DE GRADIENTES. LÍNEAS EQUIPOTENCIALES::..

Sea $\bar{f}(x, y) = (P(x, y); Q(x, y))$ Si $\bar{f}$ es de clase 1 $(f \in c^1)$ en todo punto de un recinto simplemente conexo y $P'y = Q'x => \bar{f}$ es campo de gradientes.

Cuando el campo vectorial $\bar{f}$ es un campo de gradientes la circulación del mismo es independiente del camino que conecta el punto inicial "t_1" y el punto final "t_2"

..:COND. NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE FUNCIÓN POTENCIAL::..

Enunciado:

Sea $\bar{f}: D \underline{c} R^2 \to R^2 / \bar{f}(x, y) = (P(x, y); Q(x, y))$ Un campo vectorial derivable con continuidad en un recinto simplemente conexo. Si $\bar{f}$ admite función potencial

$$=> P'y = Q'x$$

Demostración:

Por hipótesis $\exists U(x,y)/\overline{\nabla}U(x,y) = \bar{f}$

$$=> U'x = P \wedge U'y = Q$$
$$=> P'y = U''xy \wedge Q'x = U''yx$$

Como por hipótesis $P'y$ y $Q'x$ son continuas entonces también son continuas $U''xy \wedge U''yx =>$ Por el teorema de Schwanz podemos asegurar que

$$U''xy = U''yx$$
$$=> P'y = Q'x$$

..:Independencia del camino. Enunciado y demostración::..

Enunciado:

Si $\bar{f}$ es campo de gradientes $=> \int_C \bar{f}\, d\bar{g}$ es independiente del camino que une el punto inicial "A" y el punto final "B" de la curva "C" $=> \int_{\bar{A}}^{\bar{B}} \bar{f}\, d\bar{g} = U(\bar{B}) - U(\bar{A})$ siendo U el campo escalar $/\overline{\nabla}U = \bar{f}$

Si en particular $\oint \bar{f}\, d\bar{g} = 0 \forall C\ \text{cerrada}$

Demostración:

$$\int_C \overline{\nabla}U\, d\bar{g} = \int_a^b \overline{\nabla}U[\bar{g}(t)]\,.\,\bar{g}'(t)dt$$

Si llamamos $h(t) = U[\bar{g}(t)]$ dicha función compuesta tendrá por derivada: $h'(t) = \overline{\nabla}U[\bar{g}(t)].\bar{g}'(t)$ (por regla de la cadena) y teniendo en cuenta que $h(t)$ es continua en [a,b] entonces:

$$\int_C \overline{\nabla} U \, d\overline{g} = \int_a^b \overline{\nabla} U[\overline{g}(t)] \, . \, \overline{g}'_{(t)} dt = \int_a^b h'(t) dt = h(t)|_a^b =$$

$$= h(b) - h(a)$$
$$= U[\overline{g}(b)] - U[\overline{g}(a)]$$
$$= U(\overline{b}) - U(\overline{a})$$

En particular si: $\overline{a} = \overline{b} => \oint_C \overline{\nabla} U \, d\overline{g} = 0$

..:TEOREMAS::..

(1) Si $\exists C$ cerrada / $\oint_C \overline{f} d\overline{g} \neq 0 => \overline{f}$ no es campo de gradiente $=> \nexists$ función potencial.

(2) Si $\overline{f}$ es campo de gradientes con $\overline{f}(x, y) = \big(P(x, y); Q(x, y)\big) => P'y = Q'x$

(3) Si $P'y \neq Q'x => \overline{f}$ no es campo de gradientes.

..:LÍNEAS DE CAMPO::..

Dado un campo vectorial $\overline{f}$ se llaman lineas de campo a las curvas que en cada uno de sus puntos el vector $\overline{f}$ le es tangente.

Si $\overline{X} = \overline{g}(t)$ es la ecuación vectorial de las líneas de campo se tiene $\overline{f}\big(\overline{g}(t)\big) = \overline{g}'(t)$

Para hallar las líneas de campo:

$$\boxed{\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}}$$

Siendo $\overline{f}(x, y) = (P(x, y); Q(x, y))$

<u>Nota:</u>

Si $\bar{f}$ es campo de gradientes(es decir que admite potencial “U”) se tiene que las líneas de campo tienen por trayectorias ortogonales a las líneas equipotenciales.

UNIDAD XIII

INTEGRALES MÚLTIPLES

Temario a estudiar.

- Integral doble. Integral triple.
- Teorema del cambio de variable. Jacoviano de pasaje.
- Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

..:INTEGRAL DOBLE, INTEGRAL TRIPLE::..

Integral doble:

$$\boxed{I = \iint_R f(x, y)dxdy}$$

En particular si $f(x, y) = 1$

$$\boxed{A(R) = \iint_R dxdy}$$

Integral Triple:

$$\boxed{V(k) = \iiint_K dx\, dy\, dz}$$

..:T. DEL CAMBIO DE VARIABLE. JACOBIANO DE PASAJE::..

Sean D y D* dos regiones elementales del plano y una transformación C^1 inyectiva $\vec{T}$:D*→D / $\vec{T}$ (D*)=D definida por $\vec{T}$ (u;v)= (x (u;v);y (u;v))
Entonces para cualquier función integrable F:D→R es integrable en D, resulta:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f\big(x(u,v);y(u,v)\big)|j|dudv$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Donde:

$$j = \begin{vmatrix} x'u & x'v \\ y'u & y'v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'x & u'y \\ v'x & v'y \end{vmatrix}}$$

..::COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS::..

	Coordenadas polares	Coordenadas cilíndricas	Coordenadas esféricas
Cambios de variables	$\begin{cases} x = \rho\cos(\lambda) \\ y = \rho\,\text{sen}(\lambda) \end{cases}$	$\begin{cases} x = \rho\cos(\lambda) \\ y = \rho\,\text{sen}(\lambda) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = \rho\cos(\lambda)\text{sen}(\theta) \\ y = \rho\,\text{sen}(\lambda)\text{sen}(\theta) \\ z = \rho\cos(\theta) \end{cases}$
Valores posibles que toman las variables	$0 \leq \lambda \leq 2\pi$ $0 \leq \rho \leq +\infty$	$0 \leq \lambda \leq 2\pi$ $0 \leq \rho \leq +\infty$	$0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ $0 \leq \rho \leq +\infty$
Jacoviano de pasaje	$\lvert j \rvert = \rho$	$\lvert j \rvert = \rho$	$\lvert j \rvert = \rho^2\text{sen}(\theta)$
Valor de ρ	$x^2 + y^2 = \rho^2$	$x^2 + y^2 = \rho^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

Caso particular: Cambio de coordenadas en elipses:

$$P(x) \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq Q(x)$$

$$\begin{cases} x = x(\rho, \lambda) \\ y = y(\rho, \lambda) \end{cases}$$

$$\lvert j \rvert = ab\rho$$

UNIDAD XIV

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES MÚLTIPLES

Temario a estudiar.

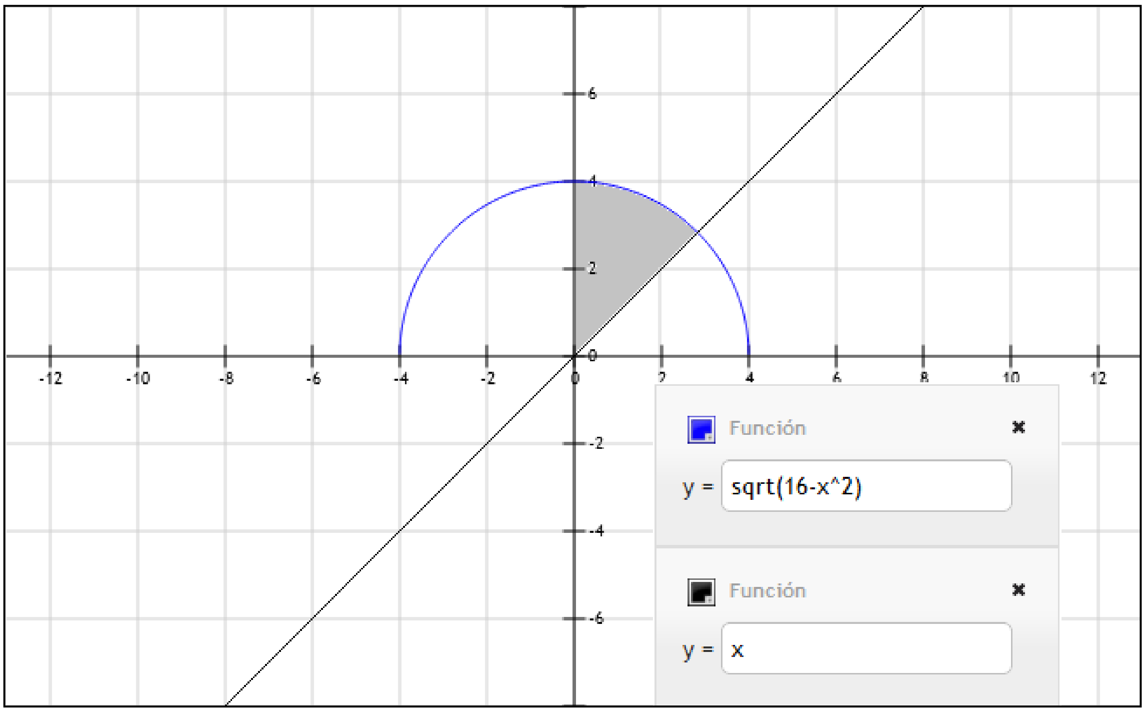
- Calculo de área en el plano.
- Calculo de volumen.
- Calculo de masa.
- Área de superficies en el espacio.
- Cálculo de límites de integración de forma analítica.

..:CALCULO DE ÁREA EN EL PLANO::..

$$A(R) = \iint_R dxdy$$

Ejemplo:

Hallar el área del recinto plano mediante dos órdenes de integración diferentes.



Punto de intersección entre las dos funciones: $P = (\sqrt{8}, \sqrt{8})$

Primer orden de integración:

$$A(R) = \iint dxdy$$

$$\int_0^{\sqrt{8}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} dy = 2\pi$$

Segundo orden de integración:

$$A(R) = \iint dydx + \iint dydx$$

$$\int_0^{\sqrt{8}} dy \int_x^y dx + \int_{\sqrt{8}}^4 dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} dx = 2\pi$$

Notar que el recinto utilizando el segundo orden de integración (vector horizontal) tiene dos limites distintos por lo tanto la integral se subdivide.

..:CALCULO DE VOLUMEN::..

$$\boxed{V(k) = \iiint_K dx\,dy\,dz}$$

Ejemplo:

Mediante integral triple y utilizando coordenadas cilíndricas expresamos el volumen del siguiente sólido en el espacio:

$$k = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 + 1 \leq z \leq 9\}$$

Cambio a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\lambda) \\ y = \rho\mathrm{sen}(\lambda) \\ z = z \end{cases}$$

$$V(k) = \iiint_K \rho\, d\lambda\, d\rho\, dz$$

Variación de lambda: $0 \leq \lambda \leq 2\pi$

Variación de ρ: $0 \leq \rho \leq \sqrt{8}$

Variación de z: $1 + \rho^2 \leq z \leq 9$

$$V(k) = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\sqrt{8}} \rho \, d\rho \int_{1+\rho^2}^{9} dz = 32\pi$$

..:CALCULO DE MASA::..

$$\delta = \frac{m}{v} \therefore m = \delta \, v$$

Si la masa es proporcional al eje z: $k|z|$

Para el ejemplo anterior dado el resultado de la masa quedaría expresada como:

$$V(k) = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\sqrt{8}} \rho \, d\rho \int_{1+\rho^2}^{9} KZ \, dz = 32\pi$$

..:ÁREA DE SUPERFICIE EN EL ESPACIO (ALABEADAS)::..

Sea “S” de ecuación implícita F(x,y,z)=0. El área de la superficie “S” es obtenida por:

$$\boxed{A(s) = \iint_R \frac{||\overline{\nabla} f||}{|F'z|} dxdy}$$

Donde R es el recinto proyección en el plano.

Ejemplo:

Calcular el área de la superficie: $z = x^2 + y^2$ con $z \geq 2$ y $x^2 + y^2 \leq 6$

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$

$\overline{\nabla}F = (2x, 2y, -1)$

$\left\| \overline{\nabla}F \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$

En coordenadas cilíndricas:

$\left\| \overline{\nabla}F \right\| = \sqrt{4\rho^2 + 1}$

$$\mathrm{A(s)} = \iint_{\mathrm{R}} \frac{\|\overline{\nabla}\mathrm{f}\|}{|\mathrm{F'z}|} \mathrm{dxdy} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d\lambda} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}\, d\rho$$

UNIDAD XV

TEOREMAS

Temario a estudiar.

- Teorema de Green.
- Cálculo de área con teorema de green.
- Flujo de un campo vectorial por definición.
- Teorema de Gauss o de la divergencia. Enunciado. Aplicación.
- Determinante simbólico para hallar el vector llamado motor de un campo vectorial.
- Teorema de Stokes o del rotor. Enunciado. Aplicación.
- Otros tipos de campos vectoriales.

..:TEOREMA DE GREEN::..

Sea $\bar{f}: D\underline{c}R^2 \to R^2/\bar{f}(x,y) = \big(P(x,y); Q(x,y)\big)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en un conjunto abierto $D\underline{c}R^2$, entonces:

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{g} = \iint_R (Q'x - P'y)dxdy}$$

Donde R es una región del plano limitado por la curva "C" cerrada y orientada en sentido positivo, de modo tal que R y C están incluidas en D, siendo $\bar{g}$ la función vectorial que parametriza a la curva "C".

..:CALCULO DE ÁREA CON TEOREMA DE GREEN::..

Para realizar esta demostración elijo:

$$\bar{f}(x,y) = (-y,x)$$

Demostración:

$$\oint_C \bar{f}d\bar{g} = \iint_R (Q'x - P'y)dxdy$$

$$\oint_C \bar{f}d\bar{g} = \iint (1 - (-1)\,dxdy$$

$$\oint_C \bar{f}d\bar{g} = 2\left\{\iint_R dxdy\right\}$$

$$\frac{1}{2}\oint_C \bar{f}d\bar{g} = A(R)$$

..:FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL POR DEFINICIÓN::..

Se define flujo de un campo vectorial $\bar{f}$ a través de una superficie al número real dado por:

$$\boxed{\phi = \int_S \bar{f}\,\breve{n}\,ds}$$

Donde: $\breve{n} = \frac{\bar{\nabla} f}{\|\bar{\nabla} f\|}$ siendo $ds = \frac{\|\bar{\nabla} f\|}{|F'z|} dxdy$

$$\boxed{\phi = \iint_R \bar{f}\breve{n}ds = \iint_R \bar{f}\frac{\bar{\nabla} f}{\|\bar{\nabla} f\|}\frac{\|\bar{\nabla} f\|}{|F'z|}dxdy}$$

..::TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA::..

Sea $\bar{f}: D \underline{c} R^3 \to R^3 / \bar{f}(x,y,z) = (P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z))$ un campo vectorial cuyas componentes admiten derivadas parciales continuas en un sólido V limitado por una superficie cerrada “S” orientable, si esta superficie está compuesta por un numero finito de partes en cada una de las cuales existe y varia con continuidad el versor normal $\breve{n}$ dirigido hacia el exterior del solido V entonces la divergencia de $\bar{f}$ a en el sólido V es igual al flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie S cerrada.

$$\boxed{\iiint_V div\bar{f}\, dv = \int_S \bar{f}\ \breve{n}\ \ ds}$$

..::DETERMINANTE PARA HALLAR EL VECTOR MOTOR DEL CAMPO::..

Sea: $\bar{f}(x,y,z) = \big(P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\big)$ un campo vectorial.

$$\operatorname{rot}\bar{f} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ \dfrac{\vartheta}{\vartheta x} & \dfrac{\vartheta}{\vartheta y} & \dfrac{\vartheta}{\vartheta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\bar{f} = \breve{\imath}(R'y - Q'z) - \breve{\jmath}(R'x - P'z) + \breve{k}(Q'x - P'y)$$

Definimos con el nombre de rotor de un campo vectorial $\bar{f} = (P, Q, R)$ o rotacional de un campo vectorial $\bar{f}$ al vector:

$$\boxed{\operatorname{rot}\bar{f} = (R'y - Q'z; P'z - R'x; Q'x - P'y)}$$

..:TEOREMA DE STOKES::..

Sea un campo vectorial $\bar{f}: D \underline{c} R^3 \to R^3$ con derivadas parciales continuas, sea S una superficie abierta orientable imagen de un campo vectorial $\vec{\varphi}: B \to A$ con derivadas continuas y no simultáneamente nulas limitadas por una curva regular C. Tenemos que la circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada es igual al flujo del rotor del campo a través de cualquier superficie limitada por la curva si la orientación de la curva coincide con la de la superficie.

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{g} = \int_S rot\ \bar{f}\, \breve{n}\, ds}$$

..:OTROS TIPOS DE CAMPOS VECTORIALES:..

<u>Campo solenoidal:</u> Sea $\mathrm{F}: \mathrm{DcR^n} \to \mathrm{R^n}$ con $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1$ lo denominamos campo solenoidal, si su divergencia es nula.

$$\mathrm{div(f)} = 0$$

<u>Campo armónico:</u> $\mathrm{F}: \mathrm{DcR^n} \to \mathrm{R^n}$ con $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1$ lo denominamos campo armónico si la divergencia del gradiente de f es nulo.

$$\mathrm{div}(\nabla \mathrm{f}) = 0$$

<u>Campo irrotacional:</u> Sea $\mathrm{F}: \mathrm{DcR^n} \to \mathrm{R^n}$ con $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1$ lo denominamos campo irrotacional si su rotor es nulo.

$$\mathrm{rot(f)} = 0$$

..:CÁLCULO DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN DE FORMA ANALÍTICA:..

Se explica el método a través de un cálculo de volumen definido mediante las siguientes superficies: $y \geq x^2$, $y \leq 6 - x - z$

Del enunciado se puede deducir que: $x^2 \leq y \leq 6 - x - z$ desigualdad que se cumple si y solo si $x^2 \leq 6 - x - z$ (por transitividad) de donde se obtiene despejando: $0 \leq z \leq -x^2 - x + 6$

Nuevamente aplicando transitividad se deduce que esto se cumple si y solo si: $0 \leq -x^2 - x + 6$ de donde $x = -3 \; o \; x = 2$ finalmente $0 \leq x \leq 2$, finalmente el cálculo de volumen queda definido por los siguientes límites de integración:

$$\boxed{V = \iiint_S dV = \int_0^2 \int_o^{-x^2-x+6} \int_{x^2}^{6-x-z} dydzdx = \frac{248}{15}}$$

UNIDAD XVI

ECUACIONES DIFERENCIALES SEGUNDA PARTE

Temario a estudiar.

- Ecuaciones diferenciales de orden dos a coeficientes constantes con segundo miembro nulo (Homogéneas de orden dos)
- Ecuaciones diferenciales de segundo orden a coeficientes constantes con segundo miembro no nulo (No homogéneas)

..::E. DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN DOS::..

Estamos ante una ecuación diferencial homogénea de orden dos cuando podemos escribirla en la forma:

$$A_0y'' + A_1y' + A_2y = 0$$

Donde:

$$(1)A_0 \in R - \{0\}$$
$$(2)\ A_1 \in R$$
$$(3)\ A_2 \in R$$

La solución de este tipo de ecuaciones diferenciables se construya a expensas de las raíces de la ecuación carteristica asociada:

$$A_0r^2 + A_1r + A_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

Ecuación característica asociada a la ecuación diferencial.

Para resolverla existen tres tipos de soluciones para cada uno de los casos los cuales se describen a continuación:

(1) Si $r_1 \in R, r_2 \in R$ y además $r_1 \neq r_2$ la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

(2) Si $r_1 = r_2 = r \in R$ la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$$

(3) $r_1 = \alpha + i\beta$ la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \mathrm{sen}(\beta x)]$$

..::Ec. DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN DOS::..

Estamos ante una ecuación diferencial no homogénea de orden dos cuando podemos escribirla en la forma:

$$\boxed{A_0y'' + A_1y' + A_2y = f(x) \quad / \; f(x) \neq 0}$$

La solución general se construye usando la solución de la homogénea y la particular.

$$\boxed{Y_{General} = Y_{Homogenea} + Y_{Particular}}$$

Propuestas de soluciones particulares:

Polinomios	$y_p = Ax + b$
Exponenciales	$y_p = Ae^{bx} \quad \text{b conocido}$
$\cos(mx)$ o $\operatorname{sen}(mx)$ o ambas	$y_p = A\cos(mx) + B\operatorname{sen}(mx)$

Ejemplo para ecuaciones diferenciales cuya solución particular puede proponerse como polinómica:

$$y'' - y' - 2y = 3x + 4$$
$$r' - r - 2 = 0$$
$$r = 2 \;\veebar\; r = -1$$

Construyo la parte de la solución homogénea.

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$$

Para construir la parte de la solución correspondiente a la particular "pruebo" con

$$y_p = Ax + b$$
$$Y'_p = A$$
$$Y''_p = 0$$

Reemplazo en la ecuación dada $(y'' - y' - 2y = 3x + 4)$

$$0 - \mathrm{A} - 2\mathrm{Ax} + 2\mathrm{B} = 3\mathrm{x} + 4$$
$$-2\mathrm{Ax} - \mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 3\mathrm{x} + 4$$

Resuelvo el sistema:

$$\begin{cases} -2\mathrm{A} = 3 => A = -\dfrac{3}{2} \\ -\mathrm{A} - 2\mathrm{b} = 4 => B = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Construyo la $\mathrm{y_p}$

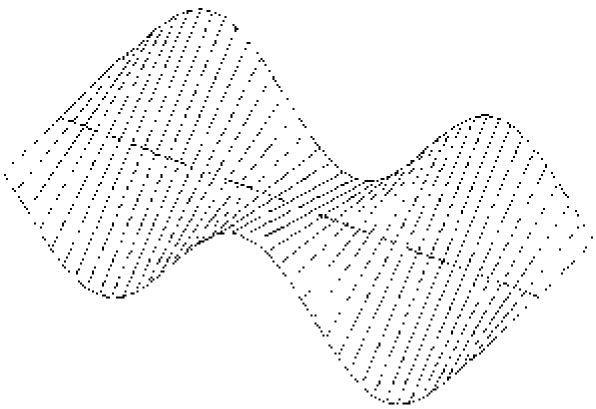
$$\mathrm{y_p} = -\frac{3}{2}\mathrm{x} - \frac{5}{4}$$

Finalmente la solución general (S.G)

$$\mathrm{y_g} = \mathrm{C_1 e^{2x}} + \mathrm{C_2 e^{-x}} - \frac{3}{2}\mathrm{x} - \frac{5}{4}$$

Ejercicios Integradores

Práctico



Realizado por: Pose, Fernando
Con la colaboración: Sergio

Ejercicio 1.

Sea: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^7}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$, se pide calcular si existe $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y)$

Desarrollo formal.

Nos acercamos al origen de coordenadas (0,0) por los (x,y)/x+y=0

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y) = 0$$

Nos acercamos al origen de coordenadas (0,0) por los (x,y)/x+y≠0

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y) = \frac{x^7}{x+y}$$

Este es un caso especial el cual apareció en un final tomado, dado que la rama de la función no es acotada ni estamos en presencia de infinitésimo por acotado acudimos a los limites radiales, demostraremos que al acercarnos al origen por distintos caminos la función tiende a valores distintos por lo que el limite no existirá.

Para demostrar que el límite no existe se debe buscar una función la cual sirva de curva para aproximar, para este caso buscare la función de la siguiente forma:

$$\frac{x^7}{x+y} = 1$$

$$Ax^7 = x+y$$

$$y = Ax^7 - x$$

Siendo A la constante que me dará una familia de curvas, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^7}{x-x+ax^7}=\frac{1}{a}$$

Como a medida que me aproximo al origen por distintos valores la función tiende a valores distintos (por principio de unicidad del límite, si existe debe ser único) se tiene que:

$$\nexists \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y)$$

Ejercicio 2.

Sea: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-3)y}{(x-3)^2+y^2} & \text{si } x\neq 3\\ \operatorname{sen}(x-3+y) & \text{si } x=3\end{cases}$, se pide analizar derivabilidad del campo escalar en el punto: (3,0) para toda dirección, teniendo en cuenta que el ejercicio finalizara cuando todas las direcciones sean analizadas.

Condiciones del ejercicio:

$$\overline{X_0}=(3,0)\quad \breve{u}=(a,b)\quad a^2+b^2=1$$

Desarrollo formal.

Para resolver este ejercicio acudo a la definición de derivada direccional definida por el siguiente límite:

$$f'(\overline{X}_0,\breve{u})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{X}_0+h\breve{u})-f(\overline{X}_0)}{h}$$

Utilizando como versor el genérico (de esta forma se logra analizar para toda dirección y sentido) y el punto dado como dato.

Además sabemos por enunciado que: $f(\overline{X}_0)=\bar{0}$

Reemplazando datos: $f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((3,0)+h(a,b))}{h}$

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3ha; hb)}{h}$$

Una vez planteado el limite pasaremos a dividir el ejercicio en dos ramas, por un lado trabajaremos con los pares (x,y)/x=3 y por el otro lado con los pares (x,y)/x≠3.

Parte A: (x,y)/x=3

Para esta parte: $x = 3 \therefore 3ha = 3 => ha = 0$ finalmente $a = 0$

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen(hb)b}{bh} = b$$

Parte A: (x,y)/x≠3

Para esta parte: $x \neq 3$

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(3+ha-3)(hb)}{(3+ha-3)^2+(hb)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{hahb}{h^2a^2+h^2b^2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h^2ab}{h^2(a^2+b^2)} = ab$$

Finalmente el resultado a la consigna pedido será la unión de ambos resultados:

$$f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \begin{cases} b & si\ a = 0 \\ ab & si\ a \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

Sea: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3y}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$, se pide analizar

continuidad en el origen.

Desarrollo formal.

Primero que nada se debe recordar las condiciones para que el campo escalar sea continua en un punto:

1. $\exists f(\overline{X_0})$
2. $\exists \lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} f(\overline{X_0})$
3. $f(\overline{X_0})=\lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} f(\overline{X_0})$

Teniendo en cuenta la condición de continuidad del campo escalar entonces:

$$f(0,0)=2$$

Busco que exista el límite:

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{0}}\frac{2x^3y}{x^4+y^4}=$$

Dado que no puedo "salvar" la indeterminación del tipo $\left(\frac{\to 0}{\to 0}\right)$ acudo a la información que me otorgan los límites radiales aproximándome con: $y=mx$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3mx}{x^4+m^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3mx}{x^4(m^4+1)}=\frac{2m}{m^4+1}$$

Dado que a medida que me aproximo al origen por distintos caminos la función tiende a valores distintos (por principio de unicidad del límite, en el caso de que exista debe ser único) se tiene que:

$$\nexists \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y)$$

Dado que no se cumple la segunda condición el campo escalar no resulta continuo en el origen de coordenadas.

Ejercicio 4.

Dada $z = f(x,y)$ definida de forma implícita por: $xz + z^3 y + \ln(z + x - 2) - 2 = 0$

se pide calcular aproximadamente: $f(0{,}98; 0{,}03)$

Desarrollo formal.

A la ecuación $xz + z^3 y + \ln(z + x - 2) - 2 = 0$ la considero superficie de nivel "0" correspondiente al campo escalar:

$$F: R^3 \to R / F(x,y,z) = xz + z^3 y + \ln(z + x - 2) - 2$$

El ejercicio nos pide una aproximación lineal, para esto recurriremos a:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \cong F(\overline{X_0}) + f'x(\overline{X_0})\Delta x + f'y(\overline{X_0})\Delta y$$

Donde:

$$X = 1 - 0{,}02\ ;\ \ Y = 0 + 0{,}03$$
$$\Delta X = -0{,}02\ ;\ \Delta Y = 0{,}03$$

Por lo tanto:

$$f(0{,}98; 0{,}03) \cong F(1{,}0) + f'x(1{,}0)(-0{,}02) + f'y(1{,}0)(0{,}03)$$

Para obtener las derivadas parciales de f (el gradiente de f en un punto) acudiremos a utilizar el teorema de Couchy-Dinni.

$$f'_x = -\frac{F'x(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

$$f'_y = -\frac{F'y(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

Y por tanteo en la ecuación implícita: $z_0 = 2$

Donde: $\overline{\nabla}F(x, y, z) = \left(z + \frac{1}{z+x-2}; z^3; x + 3z^2y + \frac{1}{z+x-2}\right)$

Siendo: $\overline{\nabla}F(1,0,2) = (3,8,2)$

$$f'_x = -\frac{F'x(1,0,2)}{F'z(1,0,2)} = -\frac{3}{2}$$

$$f'_y = -\frac{F'y(1,0,2)}{F'z(1,0,2)} = -4$$

Entonces:

$$\overline{\nabla}f(1,0) = \left(-\frac{3}{2}; -4\right)$$

Finalmente:

$$f(0{,}98; 0{,}03) \cong 2 + \left(-\frac{5}{3}\right)(-0{,}02) + (-4)(0{,}03)$$

$$f(0{,}98; 0{,}03) \cong 1{,}91$$

Ejercicio 5.

Si $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ halle las trayectorias ortogonales a las líneas o curvas de nivel de f. Indique en especial las ecuaciones de las curvas de la familia que pasen por el (2,1)

Resolución formal:

Este ejercicio nuevamente fue obtenido de un final tomado en alguna mesa de examen pasada, en los finales suelen aparecer ejercicios de esta forma acompañado de definiciones de solución particular, general o singular.

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$
$$x^2 + 4y^2 = f$$
$$2x + 8yy' = 0$$

Para encontrar las curvas ortogonales reemplazo: "y'" por: $-\frac{1}{y'}$ por lo tanto:

$$2x + 8y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$$

$$2x - 8y\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0$$

$$2x = 8y\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

$$2xdy = 8ydx$$

$$\frac{dy}{8y} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = 4\ln|x| + \ln|k|$ siendo $\ln|k|$ la constante de integración.

$$\ln|y| = \ln|x^4k|$$

$$|y| = x^4k$$

$$y = x^4H$$

Para obtener la solución particular simplemente debo tener en cuenta del enunciado:

$$f(2) = 1$$

Por lo tanto:

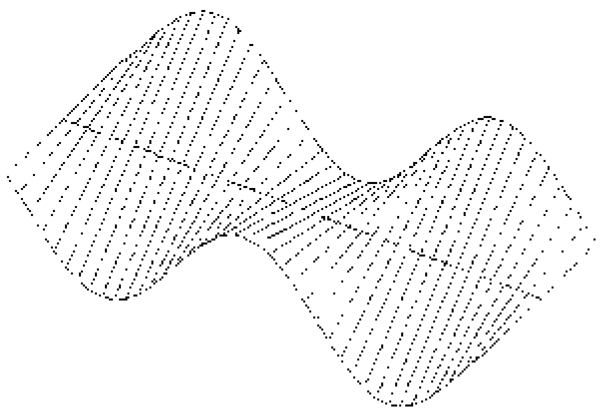
$$1 = 1H$$
$$H = 1$$

Finalmente:

$y = x^4$ es la solución particular de la trayectoria ortogonal de f dada en el enunciado.

Finales Resueltos

Práctico



Realizado por: Pose, Fernando
Con la colaboración: Sergio

Análisis Matemático II (95-0703) – Final del 03/12/2013

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **uno** de "T1) o T2)" y **dos** de "E1), E2), E3) o E4)".

T1) **Enuncie** el teorema de Green. Dado $\bar{f}(x,y) = (2y + y\varphi(xy),\ 5x + x\varphi(xy))$, suponiendo que se cumplen las hipótesis del teorema, **calcule** $\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{s}$ siendo C la curva frontera del rectángulo $[1,3]\times[4,7]\subset\mathbb{R}^2$.

T2) Dado el campo f diferenciable en el punto $\bar{A}$, **demuestre** que f es continuo en dicho punto.

E1) Sea $\bar{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \,/\, \bar{f}(x,y) = (6xy\,,\ 3x^2+3y^2-3)$ cuya función potencial es ϕ. Sabiendo que $\phi(0,0)=4$, **halle** máximos y mínimos locales del potencial e **indique** en qué puntos se producen.

E2) **Calcule** la integral de línea de $\bar{f}(x,y,z) = (3x,\ 2z,\ y)$ desde $\bar{A}=(0,y_0,z_0)$ hasta $\bar{B}=(-1,y_1,z_1)$, a lo largo de la recta definida por la intersección de los planos de ecuaciones: $z=5x+y$, $y-x+z=2$.

E3) **Calcule** el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (2x,\ z-5y,\ x-y+z)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por: $x\le y\le 2x$, $x+y+z\le 6$, 1° octante. En función del resultado obtenido, **indique** si el flujo resultante es entrante o saliente del cuerpo.

E4) Dado $\bar{f}(x,y) = (y,-x)$, **calcule** la longitud de la línea de campo que pasa por el punto $(3,4)$.

Ejercicio E1

Del enunciado nos dice explícitamente que f admite función potencial, por lo tanto se cumple entonces:

$$\nabla\phi(x,y) = f(x,y)$$

$$\frac{d\phi(x,y)}{dx} = 6xy \to \phi(x,y) = 3x^2y + T(y)$$
$$\frac{d\phi(x,y)}{dy} = 3x^2 + 3y^2 - 3 \to \phi(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3y + T(x)$$
$$\frac{d\phi(x,y)}{dx} = 6xy \to \phi(x,y) = 3x^2y + T(y)$$
$$\frac{d\phi(x,y)}{dy} = 3x^2 + 3y^2 - 3 \to \phi(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3y + T(x)$$

La función obtenida por lo tanto:

$$\boxed{\phi(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3y + K}$$

La función evaluada en el origen:

$$\boxed{\boxed{\phi(x,y) = 3x^2 + y^3 - 3y + 4}}$$

Para evaluar los puntos críticos acudo a la definición:

$$\nabla\phi = (0,0)$$

Luego el sistema asociado es el correspondiente:

$$\begin{aligned} &6xy = 0 \\ &3x^2 + 3y^2 = 3 \end{aligned}$$

Realizando cuentas:

$$\boxed{A = (0,1) \quad B = (1,0) \quad C = (0,-1) \quad D = (-1,0)}$$

El Hessiano correspondiente:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{pmatrix}$$

Finalmente al resolver el mismo se obtienen los siguientes puntos:

$$\boxed{\text{minimo relativo} : (0,1,2) \quad \text{punto silla} : (1,0,4), (-1,0,4) \quad \text{max relativo} : (0,-1,6)}$$

Ejercicio E2

La recta de forma vectorial se la puede escribir de la siguiente forma:

$$g : R \to R^3 / g(x) = (x, 1-2x, 3x+1) \quad 0 < x < -1$$

Acudiendo a la definición:

$$\omega = \int f ds = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Finalmente reemplazando y resolviendo la circulación obtenida es:

$$\boxed{\omega = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = -\int_{-1}^{0} -15x - 1dx = -\frac{13}{2}}$$

Ejercicio E3

Se cumplen las condiciones del teorema de la divergencia, por lo tanto:

$$div\, f = -2$$

Luego se procede a buscar los limites utilizando en este caso transitividad:

$$0 < z < 6 - x - y \quad x < y < 2x$$

Por transitividad: $y < 6 - x$

Existen dos limites superiores en y, lo que induce a que la integral se divide en 2

$$\min = \{x, 6 - x\} \rightarrow x < 6 - x \rightarrow x < 3$$
$$\min = \{2x, 6 - x\} \rightarrow 2x < 6 - x \rightarrow x < 2$$

Otra forma es con un dibujo sobre la proyección sobre el plano xy donde se obtienen los puntos donde se divide la integral, luego:

$$\varphi = -2 \iint_{P_{xy}} \left(\int_0^{6-x-y} dz \right) dydx = -2 \iint_{P_{xy}} 6 - x - ydxdy$$

de donde:

$$-2 \left(\iint_{P_{xy}} 6 - x - ydxdy \right) = -2 \left(\int_0^2 \int_x^{2x} 6 - (x + y)dydx + \int_2^3 \int_x^{6-x} 6 - (x + y)dydx \right)$$

para ahorrar en cuentas , podemos hacer un cambio de variable, en la primera integral

$u = x$

$v = \frac{y}{x}$ Donde el Jacobiano del cambio de variable $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = u$

En la segunda

$u = x$
$v = y + x$

Entonces las integrales se transforman en

$$-2\int_0^2\int_1^2 (6-(u+uv))u\,dv\,du - 2\int_2^3\int_{2u}^6 6 - v\,dv\,du = -12$$

por lo tanto: $\boxed{\boxed{\varphi = -12}}$ físicamente el campo propuesto frena el flujo.

Ejercicio E4

Por definición de línea de campo, dado un campo f=(P,Q) para obtener la línea de campo correspondiente, se cumple $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ entonces:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \rightarrow -\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + K$$

La línea de campo pasa por el (3,4) entonces es la siguiente:
$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{25}{2}$

de donde se obtiene: $\boxed{x^2 + y^2 = 25}$

Escrita de forma vectorial, una parametrización conveniente puede ser:

$$g: R \rightarrow R^2 / g(t) = (5\cos t, 5\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

por definición:

$$\boxed{\boxed{L = \int_a^b ||g'(t)||dt = \int_0^{2\pi} 5dt = 10\pi}}$$

Análisis Matemático II (95-0703) – Final del 17/12/2013

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **uno** de "T1) o T2)" y **dos** de "E1), E2), E3) o E4)".

T1) **Defina** solución general (SG) y solución particular (SP) de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Dada la ecuación diferencial $y'' + k\,y' = 4 + 8x$ con k constante, sabiendo que $y = 2x^2$ es una SP **determine** el valor de k y **halle** la solución general.

T2) Condición necesaria para la existencia de función potencial: **enunciado y demostración.**

E1) **Calcule** la longitud de la curva C definida por la intersección del plano de ecuación $4z - 3x = 0$ con la superficie cilíndrica de ecuación $x^2/16 + y^2/25 = 1$, en el 1° octante.

E2) Sea π_0 en el 1° octante, el trozo de plano tangente a la superficie Σ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 4, z_0)$. **Calcule** el área de π_0 sabiendo que Σ admite ecuación $z = f(x, y)$ con f definida implícitamente por $xz + \text{Exp}(z + xy - 6) - 3 = 0$ en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 4)$.

E3) Dado $\bar{f}(x, y, z) = (3x,\ 2y,\ y + z)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta de ecuación $y = x^2$ con $0 \le z \le 9 - y$. **Indique** gráficamente cómo decidió orientar la superficie.

E4) **Calcule** la masa del cuerpo definido por: $z \ge \sqrt{2x^2 + y^2}$, $x^2 + 2y^2 + z^2 \le 12$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

Ejercicio E1:

La curva escrita de forma vectorial se puede expresar de la siguiente forma:

$$g : R \to R^3 / g(t) = (4\cos t, 5\sin t, 3\cos t) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

por definición: $L = \int_a^b ||g'(t)||dt$ luego

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5dt$$

finalmente se obtiene:

$$\boxed{L = \frac{5}{2}\pi}$$

Ejercicio E2:

Reemplazando el punto dado como dato en la ecuación implícita, por prueba y error obtenemos el valor de $z_0 = 2$ por lo que el punto sobre el cual se trabajara en la resolución del ejercicio es: $P = (1, 4, 2)$

En este caso se puede utilizar el teorema de Couchy Dinni para funciones implícitas, pero en este caso se muestra otra forma de resolución expresando el siguiente campo escalar:

$$f(x,y,z) = xz + e^{z+xy-6} - 3$$

Calculando el gradiente de la misma, y evaluando en el punto dado:

$$\nabla f(1,4,2) = (6,1,2)$$

Se obtiene así el normal a plano tangente, realizando pasos algebraicos y conociendo la "pinta" de un plano se puede obtener el plano pedido:

$$\boxed{\pi : 6x + y + 2z - 14 = 0}$$

Para realizar el cálculo de $A = \iint_R ||g'_u \times g'_v||dudv$ área se utilizara la siguiente definición en este caso (la cual es equivalente a la explicada en este apunte):
Expresando a la función de forma vectorial:

$$g : R^2 \to R^3 / g(x,z) = (x, 14 - 6x - 2z, z)$$

La norma del producto vectorial de los elementales es $\sqrt{41}$

Por lo tanto: $A = \sqrt{41}\iint_R dzdx$

Para encontrar los limites de integración por comodidad se los obtiene a partir del método de transitividad.

$$x > 0 \quad 14 - 6x - 2z > 0 \quad z > 0$$

De la segunda se despeja z y obteniendo $z < 7 - 3x$ luego por transitividad $x < \dfrac{7}{3}$

Finalmente:

$$\boxed{A = \int_0^{\frac{7}{3}} \int_0^{7-3x} dzdx = \frac{49}{6}\sqrt{41}}$$

Ejercicio E3:

Dado que la superficie es abierta , no se puede realizar una aplicación directa del teorema de la divergencia, puede decidirse por “tapar” la superficie y luego restar el flujo que no se requiere o calcular el flujo utilizando la definición.
Nos quedamos con la segunda opción y utilizamos la definición de flujo:

$$\varphi = \iint_R fndA$$

Reemplazando y realizando las cuentas correspondientes obtenemos la siguiente expresión:

$$\varphi = \iint (3x, 2x^2x^2 + z)(2x, -1, 0)dA = \iint_R 4x^2dA$$

Luego los limites de integración aplicando transitividad son los siguientes:

$$0 \le z \le 9 - y \to 0 \le z \le 9 - x^2$$

por transitividad $0 \le 9 - x^2 \to |x| \le 3$ finalmente

$$\boxed{\varphi = \int_{-3}^{3} \int_0^{9-x^2} 4.x^2dzdx = \frac{1296}{5}}$$

Ejercicio E4:

Por definición la masa del cuerpo:

$$m = \iiint_V \delta(x,y,z)dV$$

pero

$\delta(x,y,z) = k|z|$

Es sencillo observar que nos piden el volumen cuando z>0, por lo que nos

$$m = \iint_{P_{xy}} \left(\int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{12-x^2-2y^2}} kzdz \right) dxdy$$

conviene calcular dicho volumen por una integral doble

Realizadas las cuentas se obtiene:

$$m = \frac{3}{2}k \iint_{P_{xy}} 4 - (x^2+y^2)dxdy$$

La proyección sobre el plano xy corresponde a la región:

$$R = \left\{ (x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

finalmente no hay restricciones angulares, tomando polares obtenemos el siguiente resultado:

$$\boxed{m = \frac{3}{2}k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)rdrd\theta = 12k\pi}$$

Análisis Matemático II (95-0703) – Final del 26/09/2013

Condición mínima para aprobar: <u>3 (tres) ítems bien</u>, <u>uno</u> de "T1) o T2)" y <u>dos</u> de "E1), E2), E3) o E4)".

T1) **Enuncie** el teorema de derivación de la composición de funciones en forma matricial (regla de la cadena). Dada $h(x,y) = f(\bar{g}(x,y))$ con $\nabla f(u,v) = (2uv,\, u^2 + 3v^2)$, **calcule** $\nabla h(a,b)$ sabiendo que $\bar{g}(a,b) = (2,1)$, $\bar{g}'_x(a,b) = (3,5)$, $\bar{g}'_y(a,b) = (1,4)$.

T2) **Defina** familias de curvas ortogonales (trayectorias ortogonales). Dada la familia de curvas de ecuación $xy = C$, **halle** la curva de la familia ortogonal que pasa por el punto $(1,2)$.

E1) Dado $\bar{f} \in C^1$ en $\mathbb{R}^3$, tal que $\bar{f}(x,y,z) = (x + yz,\, y + 2xz,\, h(x,y,z))$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la circunferencia de radio $R = 3$ incluida en el plano de ecuación $z = 4$ con centro en $(0,0,4)$; **indique** gráficamente cómo ha decidido orientar la curva.

E2) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $y + z \le 9$, $y \ge x^2$, 1° octante.

E3) **Calcule** la longitud del arco de curva C definido por la intersección de la superficie de ecuación $z = 1 - x^2$ con el plano de ecuación $y = 2x$, cuyos puntos tienen coordenada $z \ge 0$.

E4) **Calcule** el área de la superficie de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ con $y \ge \sqrt{3}\,x$, $z \ge 3$, 1° octante.

Ejercicio E1:

La curva dada es de la forma:

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 4 \end{cases}$$

Aplicando definición:

$$w = \int f\,ds = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

Parametrizando la curva y expresándola de forma de función vectorial se obtiene:

$$g : R \to R^3 / g(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4)$$

Dado que no existen restricciones angulares se toma entre 0 y 2π, realizando las cuentas se obtiene finalmente:

$$\boxed{w = \int_0^{2\pi} 72\cos^2 t - 36\sin^2 t dt = 36\pi}$$

Ejercicio E2:

Despejando se obtiene los limites de "y"

$$x^2 \leq y \leq 9 - z$$

Luego aplicando transitividad se obtienen los límites de "x" y "z"
Finalmente aplicando la triple integral se obtiene el volumen pedido:

$$\boxed{V = \int_0^3 \int_0^{9-x^2} \int_{x^2}^{9-z} dydzdx = \frac{324}{5}}$$

Ejercicio E3:

La curva dada es de la forma: $g : R \rightarrow R^3 / g(x) = (x, 2x, 1 - x^2)$

por definición: $L = \int_a^b ||g'(t)||dt$

Para obtener los límites de integración: $z \geq 0 \rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \rightarrow |x| \leq 1$

finalmente:

$$\boxed{L = \int_{-1}^1 \sqrt{5 + 4x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{5 + 4x^2}dx \approx 5.01}$$

Ejercicio E4:

Parametrizando la superficie y expresándola como un campo vectorial se obtiene:

$$g: R^2 \to R^3 / g(r,t) = (r\cos t, r\sin t, 4 - r^2)$$

Una definición equivalente de cálculo de área es la siguiente:

$$A = \iint_S ||g'_r \times g'_t|| dr dt$$

Luego trabajando con el argumento se obtiene:

$$||g'_r \times g'_t|| = r\sqrt{4r^2+1}$$

Para los límites de integración:

$$z \geq 3 \to 4 - r^2 \geq 3 \to 0 < r \leq 1$$
$$y \geq \sqrt{3}x \to r\sin t \geq \sqrt{3} r\cos t \to \tan t \geq \sqrt{3} \to t \geq \frac{\pi}{3}$$

Del enunciado tenemos una restricción angular al primer octante por lo tanto:

$$\boxed{A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\sqrt{4r^2+1} dr dt = \frac{\pi}{72}(5\sqrt{5} - 1)}$$

Análisis Matemático II (95-0703) – Final del 06/08/2013

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **uno** de "T1) o T2)" y **dos** de "E1), E2), E3) o E4)".

T1) Dado $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, **defina** máximo y mínimo local (o relativo) de los valores de f. Para el caso particular de $f(x,y) = x^4 + y^6 + 3$ definido en $\mathbb{R}^2$, **analice** si f produce extremo local en algún punto; en caso afirmativo **clasifíquelo** y **calcule** su valor.

T2) **Enuncie** el teorema de la divergencia (Gauss). En la condiciones del teorema, siendo $\bar{f} = \mathrm{rot}(\bar{g})$ con $\bar{g} = (P, Q, R)$, **verifique** –incluyendo el desarrollo que corresponde– que $\oiint_{\Sigma} \bar{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma = 0$.

E1) Sea π_o el plano tangente en $(2,1,z_o)$ a la superficie definida implícitamente por: $xz^2 + \ln(2y + z - 2) - 2 = 0$. Siendo $\bar{f}(x,y,z) = (2y - 13,\ 2 - x\ ,\ z)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través del trozo de π_o cuyos puntos pertenecen al 1° octante; **indique** gráficamente cómo orientó al plano y **determine** si el flujo se produce en ese sentido o en el opuesto.

E2) **Calcule** la masa de la chapa plana D definida por: $2 \le x^2 + y^2 \le 2x$, si su densidad superficial en cada punto es inversamente proporcional a la distancia desde el punto al origen de coordenadas.

E3) Sabiendo que $\bar{f} \in C^1$ en $\mathbb{R}^3$ está definido por: $\bar{f}(x,y,z) = (y + y\,g(x),\ g'(x),\ z)$ con $f(0,1,0) = (3,1,0)$, **halle** la expresión de g de manera que $\bar{f}$ admita función potencial.

E4) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $x + z \le 4$, $y \ge x$, $y \le 6$, 1° octante.

Ejercicio E1:

Evaluando el punto dado en la superficie definida implícitamente se obtiene que $z_0 = 1 \quad A = (2,1,1)$

Luego se calcula el gradiente de $F(x,y,z) = xz^2 + \ln(2y + z - 2) - 2$

$$\nabla F = \left(z^2, \frac{2}{2y + z - 2}, 2xz + \frac{1}{2y + z - 2} \right)$$

de donde $\nabla F(2,1,1) = (1,2,5)$ luego el plano tangente será de la forma $\pi : (x-2, y-1, z-1)(1,2,5) = 0 \to \boxed{\pi : x + 2y + 5z - 9 = 0}$

El flujo por definición viene dado por:

$$\varphi = \iint_R f n ds$$

Tomando como función vectorial:

$$g : R^2 \to R^3 / g(y,z) = (9 - 2y - 5z, y, z)$$

Luego trabajando sobre el argumento se obtiene:

$$\varphi = \iint_R fnds = \iint_{P_{yz}} 3xdydz = \iint_{P_{yz}} 3(9-2y-5z)dydz$$

Los límites están en función de g, además de estar en el primer octante, por lo tanto:

$$9-2y-5z>0 \quad \boxed{0<z<\frac{9}{5}-\frac{2}{5}y}$$

por transitividad : $0<\frac{9}{5}-\frac{2}{5}y \rightarrow \boxed{0<y<\frac{9}{2}}$

finalmente se obtiene:

$$\boxed{\boxed{\varphi = \iint_{P_{yz}} 3(9-2y-5z)dzdy = -\frac{729}{20}}}$$

Ejercicio E2:

Por definición la masa de un cuerpo viene dada por:

$$M = \iint_R k\delta(x,y)dA$$

Siendo la densidad planteada por el enunciado:

$$\delta(x,y) = \frac{1}{d(P,0)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

luego: $$M = \iint_R k\delta(x,y)dA = k\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$$

Tomando polares sobre R obtenemos R' con lo que : $\boxed{\sqrt{2}<r<2\cos\theta}$

de donde: $\boxed{-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}}$

finalmente:

$$\boxed{M = k\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA = k\iint_{R'} dr d\theta = \frac{k\sqrt{2}}{2}(4-\pi)}$$

Ejercicio E3:

De los datos del enunciado obtenemos:

$f(0,1,0) = (1+g(0), g'(0), 0) = (3,1,0)$

obteniendo las condiciones iniciales: $g(0) = 2 \quad g'(0) = 1$

Para que el campo f admita función potencial la matriz Jacobiana de f debe ser simétrica, hechas las cuentas se debe resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$g''(x) - g(x) = 1$$

cuya solución es la siguiente: $\boxed{g(x) = Ae^{x} + Be^{-x} - 1}$

Ejercicio E4:

Si calculamos el volumen por una integral doble se obtiene:

$$V = \iint_{P_{xz}} \left(\int_x^6 dy \right) dxdz = \iint_{P_{xz}} 6 - xdxdz$$

los límites son $\boxed{0 < z < 4 - x}$

Luego aplicando el método de transitividad utilizado en esta sección del apunte:

$$0 < 4 - x \to \boxed{0 < x < 4}$$

finalmente

$$\boxed{\boxed{V = \iint_{P_{xz}} 6 - xdzdx = \frac{112}{3}}}$$

Análisis Matemático II (95-0703) – Final del 21/05/2013

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **uno** de "T1) o T2)" y **dos** de "E1), E2), E3) o E4)".

T1) **Defina** conjunto de nivel de un campo escalar. Dado $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, si $x^2 y^3 = 9x - 1$ es la ecuación de L_4 (conjunto de nivel 4 de f), **halle** las direcciones de derivada direccional nula de f en $\overline{A} = (1, y_0) \in L_4$.

T2) **Enuncie** el teorema de la Divergencia (Gauss). Suponiendo que $\bar{f} \in C^2$ **verifique**, justificando lo que afirma, que $\oiint_\Sigma \operatorname{rot}(\bar{f}) \cdot \breve{n}\, d\sigma = 0$ para toda superficie Σ que cumple con las hipótesis del teorema.

E1) Dada $w = x u^2$ con $u = f(x, y)$ definida implícitamente por $xu + \ln(2u - y) - 2 = 0$ en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (1, 3)$, resulta $w = h(x, y)$; **calcule** aproximadamente $h(0.98, 3.01)$.

E2) Siendo $\bar{f}(x, y, z) = (x + y,\ y,\ 9 - z)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ desde $\overline{A} = (0, 0, 9)$ hasta $\overline{B} = (2, 0, 9)$ a lo largo de la curva C definida por la intersección de las superficies de ecuaciones: $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 9 - y^2$, en 1° octante.

E3) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $z + x^2 + y^2 \geq 2$.

E4) Sabiendo que $\bar{f} \in C^1$ con $\bar{f}(x, y) = (2y\,g(x),\ x\,g(x))$, **halle** la expresión de g de manera que $\bar{f}$ admita función potencial y resulte $\bar{f}(1, 2) = (8, 2)$.

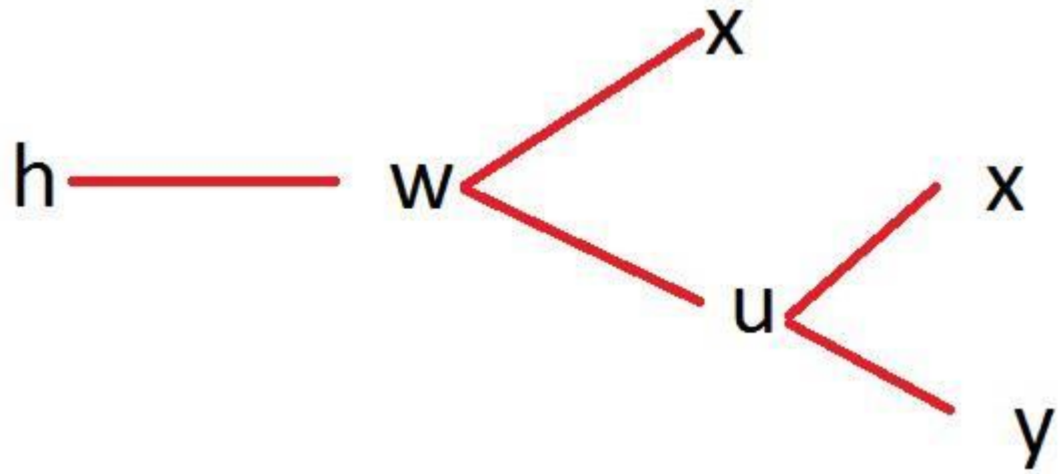
Ejercicio E1:

Con los valores de x e y dados se puede calcular el valor de u, evaluando dichos puntos en la ecuación implícita dada, de la cual obtenemos que $u = 2$

Luego aplicando el teorema de Couchy Dini o asociando a esa función el gradiente de la misma, realizando las cuentas obtenemos:

$$u(x, y) = f(x, y) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$$

Sabiendo: $h(x, y) = w = xu^2 \to h(1, 3) = 4$, para calcular las derivadas de h, se define el árbol que le corresponde como:



$$\frac{dh}{dx} = \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{du}\frac{du}{dx} = u^2 - 2u\frac{2}{3}_{u=2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{dh}{dy} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dy} = 2ux\frac{1}{3}_{u=2,x=1} = \frac{4}{3}$$

Luego:

$$h(x,y) \approx 4 + \frac{4}{3}(x-1) + \frac{4}{3}(y-3)$$

finalmente

$$\boxed{h(0,98;3,01) \approx 3.9866}$$

Ejercicio E2:

Utilizando la definición directamente, para ello necesitamos parametrizar la curva dada, sin tomar como centro del cilindro el (1,0) una posible parametrización será:

$$g : R \to R^3 / g(t) = (2\cos^2 t, \sin(2t), 9 - \sin^2(2t)) \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

luego: $g'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t), -2\sin(4t))$

por definición de circulación: $$\omega = \int_C f ds = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Hechas las cuentas y reemplazos correspondientes, dando vuelta los limites de integración se obtiene:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\cos^2 t\sin(2t) - 2\sin^2(2t) + 2\sin(2t)\cos(2t) - \sin^2(2t)\sin(4t)dt = \boxed{2+\frac{\pi}{2}}$$

Una segunda parametrización posible, sería tomando como centro del cilindro el (1,0) es la siguiente:

$$g : R \to R^3 / g(t) = (\cos t + 1, \sin t, 9 - \sin^2(t)) \quad t \in [0, \pi]$$

Ejercicio E3:

De las condiciones de enunciado se deduce: $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2-(x^2+y^2)$

Tomando cilíndricas: $r \leq z \leq 2 - r^2 \to r \in [0,1] \quad \theta \in [0, 2\pi]$

luego por definición:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{2-r^2} r dz dr d\theta = \boxed{\frac{5}{6}\pi}$$

Ejercicio E4:

Dado un campo vectorial: $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ para que f admita función potencial, la condición necesaria:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \rightarrow 2g(x) = g(x) + xg'(x)$$

si se realiza el siguiente cambio: $g(x) = y \rightarrow 2y = y + xy'$

resolviendo la ecuación diferencial se obtiene: $y = g(x) = Mx$

De datos del enunciado sabemos:

$$f(1,2) = (4(g(1), g(1)) = (8,2) \rightarrow g(1) = 2$$

Luego $g(1) = M = 2$ por lo que finalmente: $\boxed{g(x) = 2x}$

INDICE DEL APUNTE