Teorico

Materia: Análisis Matemático I

Titulo: Teórico Práctico 2º Parte

Edicion 2001

Autor: Anibal Kasero

ARIAT2

UNIDAD V
INTEGRAL INDEFINIDA

Como ya veremos en el siguiente capítulo, la operación de integración de una función $f(\tau)$ entre a y b, representa, gráficamente, el área bajo la curva $f(\tau)$ entre a y b.
La notación es:

$$\int_a^b f(\tau)\,d\tau \rightsquigarrow \text{integral de } f(\tau) \text{ entre a y b.}$$

Integral indefinida:

Suponemos que f es una función tal que su integral entre "a" y "b" existe para todo "a" y "b" pertenecientes al intervalo $[c, d]$. Si tomamos a esta integral como función de "b", llamándole a ésta "X" (para indicar que ahora es variable) obtenemos:

$$\boxed{A(x) = \int_a^x f(\tau)\,d\tau} \qquad x \in [c, d]$$

$A(x)$ es una integral indefinida de $f(\tau)$.
Para cada valor de "a" va a haber una integral

indefinida distinta. La diferencia entre una integral indefinida de $f(t)$ y otra será un <u>valor constante</u>.

<u>Primer teorema fundamental del cálculo</u>:

Sea f una función cuya integral entre "a" y "x" existe para todo "a" y "x" $\in [c,d]$ y sea $A(x)$ su integral indefinida entre "a" y "x", entonces, la derivada de $A(x)$ en cualquier $x \in (c,d)$ donde f sea continua será igual a $f(x)$.

O sea:

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt \implies A'(x) = f(x)$$

$(c \leq x \leq d)$ — si $c \leq x \leq d$ y f es continua en x.

<u>Continuidad de la integral indefinida</u>

Sea f una función cuya integral entre "a" y "x" existe para todo "a" y "x" $\in [c,d]$, y sea $A(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Entonces $A(x)$ será continua para todo $x \in [c,d]$.

Es decir, si la integral indefinida $A(x)$ existe, será continua.

Función primitiva: Veamos primero la definición.
Si f es una función con dominio D, la función F, definida con el mismo dominio es una primitiva de f si y sólo si F es derivable en D y su derivada es f. Es decir:

$$\boxed{F \text{ es primitiva de } f \text{ en } D \iff \forall x \in D : F'(x) = f(x)}$$

Nota: si f tiene una primitiva, tiene infinitas.

Ejemplo: Tomamos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 4x^3$

Ahora fijate: esa f es, justamente, la derivada de x^4. Por lo tanto, $F(x) = x^4$ es una primitiva de f (porque $F'(x) = f(x)$).

Además, fijate que cualquier F del tipo:

$\boxed{F(x) = x^4 + C}$ (donde C es cualquier constante)

tiene como derivada a $f(x)$.

Como ves, hay infinitas primitivas, una para cada posible valor de C.

Relación con la integral indefinida

Como dice la definición de primitiva, F es primitiva de f si derivada da f.

Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que $A(x)$ (integral indefinida de x), al derivarse da $f(x)$. Por lo tanto $A(x)$ es una primitiva de f. Como, además, para cada valor de a en $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tenés una $A(x)$ distinta, llegamos a que hay infinitas primitivas.

<u>Notación de Leibniz</u>: El símbolo:

$\boxed{\int f(x)\,dx}$ designa una primitiva general de f.

O sea que abarca todas las posibles primitivas de f. Estas primitivas se diferencian por una constante aditiva, así que:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$$

c, cualquier constante

donde $F(x)$ es una de las primitivas.

Entonces, por ejemplo:

$$\int \cos x \, dx = \underbrace{\operatorname{sen} x + c}_{\text{si derivás esto, te da } \cos x}$$

Ahora vamos a ver distintos métodos para obtener primitivas (a la obtención de primitivas se le llama integración)

Pero antes vamos a ver dos propiedades que vas a necesitar:

1) $$\underbrace{\int [f(x)+g(x)]\,dx}_{\text{Primitiva de } f+g} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{Primit. de } f} + \underbrace{\int g(x)\,dx}_{\text{Primit. de } g}$$

2) $$\underbrace{\int c\, f(x)\,dx}_{\text{Primit. de } c.f} = \underbrace{c \int f(x)\,dx}_{c \cdot \text{Primit. de } f.}$$

<u>Integración inmediata</u>: Si sabemos que:

$F'(x) = f(x)$ y nos piden obtener las primitivas de $f(x)$ la solución es "$F(x)+c$"

<u>Ejemplo</u>: Sabemos que $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, por lo tanto:

$$\boxed{\int n\,x^{n-1}\,dx = x^n + c}$$

Y, usando la propiedad 2) con $c = 1/n$ y $f(x) = n\,x^{n-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\int x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}x^n + c} \;(*) \quad \text{si } n \neq 0$$

<u>Otro ejemplo</u>: Buscamos $\int [3x^{-2} + x^{-1}]\,dx$.

Usando el ej. anterior y que $(\ln x)' = 1/x$:

$$\int [3x^{-2} + x^{-1}]\,dx \overset{\text{prop 1}}{=} \int 3x^{-2}\,dx + \int 1/x\,dx$$

$$\overset{\text{prop 2}}{=} 3\int x^{-2}\,dx + \ln x + c$$

con $n=-1$ en (*)

$$= 3\frac{1}{(-1)}x^{-1} + \ln x + c = \boxed{-3/x + \ln x + c}$$

Integración por sustitución:

Se usa la regla de la cadena. Como sabemos:

$$Q(x) = F(g(x)) \implies Q'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

con $f(x) = F'(x)$

O sea que:

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C} \quad \text{con } F'(x) = f(x)$$

F es primitiva de f

Vamos a ver algunos ejemplos:

1) $$\int \underbrace{\cos}_{f(x)} [\underbrace{\ln x}_{g(x)}] \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx = \boxed{\operatorname{sen}[\ln x] + C}$$

$F(x) = \operatorname{sen}(x)$

2) $$\int \Big[\underbrace{\operatorname{sen}}_{f(x)}(\underbrace{x^5}_{g(x)}) \cdot x^4\Big]\, dx = \frac{1}{5} \int \Big[\operatorname{sen}(x^5) \cdot 5x^4\, dx$$

$F(x) = -\cos(x)$

esto no es $g'(x)$, falta la constante

agregamos el 5 arriba y abajo

Ahora sí, $5x^4$ es $g'(x)$ y podemos integrar:

$$= \frac{1}{5}\Big[-\cos(x^5)\Big] + C = \boxed{-\frac{1}{5}\cos(x^5) + C}$$

Podés verificar el resultado derivándolo (por la regla de la cadena) y viendo que da $\operatorname{sen}(x^5) \cdot x^4$.

Para usar integración por sustitución la condición es que el integrando sea del tipo "$f(g(x)) \cdot g'(x)$", o sea, el producto de dos funciones, una debe ser una función compuesta y la otra, la derivada de la función interior.

Preguntarás porqué se llama "por sustitución" este método... Bueno, porque hay una forma práctica de implementarlo que es haciendo un cambio de variable, sustituyendo $g(x)$ por τ y $\boxed{g'(x) \cdot dx}$ por $\boxed{d\tau}$. Lo vemos en el ejemplo anterior:

$$\int \operatorname{sen}(x^5) \cdot x^4 \, dx = \int \operatorname{sen}(\tau) \frac{d\tau}{5}$$

$$\tau = x^5 \Rightarrow d\tau = 5 \underbrace{x^4 \, dx}_{\substack{\text{Tengo esto} \\ \text{en el integrando,} \\ \text{lo despejo}}} \Longrightarrow \frac{d\tau}{5} = x^4 \, dx$$

O sea, reemplazás $\operatorname{sen}(x^5)$ por $\operatorname{sen}(\tau)$ y $x^4 dx$ por $\frac{d\tau}{5}$. Después integrás:

$$\int \operatorname{sen}(\tau) \frac{d\tau}{5} = \frac{1}{5}\left[-\cos(\tau)\right] + C = \boxed{\frac{-1}{5} \cos(x^5) + C}$$

Volviendo a x ($\tau = x^5$)

<u>Otro ejemplo:</u>

3) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x}{x^5 + 5x^2} \, dx$ → Usamos $\tau = x^5 + 5x^2$

$d\tau = (5x^4 + 10x) \, dx$

lo que tenemos en el integrando es $(x^4+2x)\,dx$.
Trato de obtener eso en el miembro derecho de $d\tau$.

$$d\tau = 5(x^4+2x)\,dx \implies \frac{d\tau}{5} = (x^4+2x)\,dx$$

Listo, cambiando de variable en la integral:

$$\int \frac{1}{\tau}\cdot\frac{d\tau}{5} = \frac{1}{5}\ln\tau + C = \boxed{\frac{1}{5}\ln(x^5+5x^2)+C}$$

$\tau = x^5+5x^2$

Integración por partes:

En este caso el integrando también debe ser producto de dos funciones, pero ahora del tipo: $f'(x)\cdot g(x)$.
Para integrar eso se va a usar la regla de derivación del producto: $(fg)' = f'g + fg' \implies f'g = (fg)' - fg'$

$$\implies \int f'(x)g(x)\,dx = \int \big(f(x)g(x)\big)'\,dx - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\implies \boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx + C}$$

Agregando la constante e integrando el 1º sumando

La condición, entonces, es que uno de los factores $(f'(x))$ tenga primitiva. Es decir, que se pueda encontrar $f(x)$. El otro factor sólo deberá derivarse.
Vamos a ver ejemplos:

1) $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx + C$

$f'(x) = x \quad g(x) = \ln x$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

Elegimos como f' a "x" porque se puede integrar. Si tomábamos a $\ln x$ como f' no íbamos a poder encontrar f fácilmente

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx + C = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

2) $\int e^x \cdot x \, dx$

En este caso, tanto e^x como x tienen integrales directas. Sin embargo, en casos como este conviene elegir como f' al factor que al integrarse se "complica" menos. Como e^x al integrarse queda igual, pero x sube su exponente, elegimos:

$f'(x) = e^x \implies f(x) = e^x$

$g(x) = x \implies g'(x) = 1$

$$\int e^x x \, dx = x e^x - \int e^x dx + C = \boxed{x e^x - e^x + C}$$

Integración por fracciones simples

Este método sirve únicamente cuando el integrando es cociente de polinomios, o sea, una "función racional".

El integrando será del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$, con f y g polinomios.

- Si el grado de f es mayor que el de g, se debe efectuar la división de los polinomios:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

resto

resulta, al dividir, que el grado de r es menor q' el de g.

q, cociente, será un polinomio, se integra de forma inmediata (suma de términos x^n)

Ejemplo: (para que recuerdes cómo se divide).

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx \implies \text{divido:}$$

$$\begin{array}{lrl}
 & x^2+0x+0 & \underline{|\,x+1} \\
① \; x\cdot(x+1) \rightsquigarrow & -\;\underline{x^2+x} & x-1 \\
\text{resta} \rightsquigarrow & -x & ①\;② \\
② \; (-1)\cdot(x+1) \rightsquigarrow & -\;\underline{-x-1} & q(x)=x-1 \\
 & 1 & r(x)=1
\end{array}$$

De la división resulta:

$$\frac{x^2}{x+1} = \underbrace{x-1}_{q(x)} + \frac{1}{x+1} \leftarrow r(x)$$

Integrar esto es fácil:

$$\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int x\,dx - \int dx + \int \frac{1}{\tau}\,d\tau$$

para este término hago sustitución: $\tau = x+1$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C}$$

- Entonces, el término q(x) se integra de inmediato, pero $\frac{r(x)}{g(x)}$ no (salvo en casos como el de recién). porque queda otra función racional.

Vamos a ver, entonces, que podemos descomponer $r(x)/g(x)$ en suma de términos que tendrán las siguientes formas: $\frac{1}{(x+a)^n}$; $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$; $\frac{x}{(x^2+a^2)^n}$ y cuyas primitivas son:

a) $\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln(\lvert x+a \rvert)$	b) $\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx = \frac{-1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}$
c) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$	
d) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \cdot \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx$	
e) $\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$	f) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{-1/2}{(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$

<u>Notas</u>: A todas les falta la constante aditiva C.
La d) se obtiene de las tablas de integrales. Esta fórmula se aplica reiteradas veces hasta que la integral del segundo término se reduce al caso c).

Sólo falta saber cómo descomponer $r(x)/g(x)$ en sumas de términos como esos. Se plantean 4 casos distintos segun las raices de $g(x)$.

1] $g(x)$ tiene raices <u>reales</u> y <u>simples</u> (no hay dos raices iguales). En este caso $g(x)$ se puede escribir:

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 = a_m (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son las raices de $g(x)$. Y podemos escribir: $\boxed{\dfrac{r(x)}{g(x)} = \dfrac{A_1}{x-x_1} + \dfrac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \dfrac{A_m}{x-x_m}}$

Para obtener A_1, A_2, A_m se eliminan los denominadores en esa ecuación y se evaluan ambos miembros en las raices de $g(x)$, de ahí se despejan las A_i.

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-2x}\,dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)}\,dx$ No hace falta dividir, el grado de arriba es menor al grado de abajo.

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} \Rightarrow x+1 = A_1(x-2) + A_2 x$$

[multiplicando ambos miembros por $x(x-2)$ para eliminar el denominador]

Evaluando en las x_ℓ:

$x = 0 \Rightarrow 1 = A_1(-2) \Rightarrow \boxed{A_1 = -1/2}$

$x = 2 \Rightarrow 2+1 = A_2 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{A_2 = 3/2}$

Entonces:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x}\,dx = \int \left[\frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x-2}\right] dx = \boxed{-\frac{1}{2}\ln x + \frac{3}{2}\ln(x-2) + C}$$

Usando la fórmula a) de integración

O sea, halladas las A_i, se integra cada término por separado, quedando una suma de logaritmos en este caso.

2] $g(x)$ tiene raices <u>reales</u>, algunas <u>múltiples</u>. (dos o más raices iguales).

Supongamos que x_1 es raiz de grado m de $g(x)$

(m raices iguales a x_1). En ese caso, en la descomposición en raices simples deben ponerse los siguientes términos: $\boxed{\dfrac{A_1}{(x-x_1)^m} + \dfrac{A_2}{(x-x_1)^{m-1}} + \cdots + \dfrac{A_m}{(x-x_1)}}$

Para obtener las A_i en este caso se hace como antes, pero no alcanza con evaluar en las raices, hay que evaluar en algunos otros valores de x hasta tener tantas ecuaciones como incógnitas.

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$ ($x_1=1$, raíz de grado 2)

ponemos $g(x)$ ya factoreado.

$$\Rightarrow \left[\frac{x^2-x+4}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2}\right] \cdot (x-1)^2(x-2)$$

multip. por $g(x)$

$$\Rightarrow x^2-x+4 = A_1(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)^2$$

$x=1 \Rightarrow 1^2-1+4 = A_1(-1) \Rightarrow \boxed{A_1=-4}$

$x=2 \Rightarrow 2^2-2+4 = A_3(2-1)^2 \Rightarrow \boxed{A_3=6}$

$x=0 \Rightarrow 4 = -2A_1+2A_2+A_3 \Rightarrow A_2 = \dfrac{4+2A_1-A_3}{2}$

Otro x cualquiera (con 0 es fácil)

$\boxed{A_2=-5}$

Entonces:

$$\int\left[\frac{-4}{(x-1)^2} + \frac{-5}{x-1} + \frac{6}{x-2}\right]dx = \boxed{4\,\frac{1}{(x-1)} - 5\ln(x-1) + 6\ln(x-2) + C}$$

fórmulas a) y b).

3] $g(x)$ tiene raices <u>complejas</u> y <u>simples</u>.

Habrá, entonces, en $g(x)$, algún factor del tipo: x^2+bx+c. Por cada uno de esos factores, en

si tiene raices complejas, no se puede reducir más

La descomposición se pondrá el término: $\boxed{\dfrac{A_1 x + B_1}{x^2+bx+c}}$

Para integrar ese tipo de términos se hace lo siguiente: se completan cuadrados en el denominador y se usan las fórmulas c) y e).

$$\underbrace{x^2+bx+c}_{\text{completando cuadrados.}} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4}\right) = u^2+a^2 \qquad \boxed{\begin{array}{l} a = c - \frac{b^2}{4} \\ u = x+\frac{b}{2} \end{array}}$$

Poniendo todo en función de u

$$\int \frac{A_1\overbrace{(u-b/2)}^{x}+B_1}{u^2+a^2}\,du = A_1 \underbrace{\int \frac{u}{u^2+a^2}\,du}_{\text{fórmula e)}} + \left(-\frac{b}{2}A_1+B_1\right)\underbrace{\int\frac{1}{u^2+a^2}\,du}_{\text{fórmula c)}}$$

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$

Se descompone en: $\dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2x+B_2}{x^2+x+1} = \dfrac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$\Longrightarrow A_1(x^2+x+1)+(A_2x+B_2)(x-1) = x+2$

$x=1 \Longrightarrow A_1(1^2+1+1) = 3 \Longrightarrow \boxed{A_1 = 1}$

$x=0 \Longrightarrow A_1 - B_2 = 2 \Longrightarrow \boxed{B_2 = -1}$

$x=-1 \Longrightarrow A_1 + 2A_2 - 2B_2 = 1 \Longrightarrow \boxed{A_2 = -1}$

dos valores cualesquiera

$$\int\left[\frac{1}{x-1} + \frac{-x-1}{x^2+x+1}\right]dx = \ln(x-1) + (-1)\int \frac{\overbrace{x+\frac{1}{2}}^{u}+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Longrightarrow u = x+\frac{1}{2},\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \ln(x-1) - \left[\int\frac{u}{u^2+a^2}\,du + \int\frac{1/2}{u^2+a^2}\,du\right]$$

$$= \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln\Big(\underbrace{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2}_{u^2} + \underbrace{\tfrac{3}{4}}_{a^2}\Big) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C$$

Bueno, sí, se complica, pero con la práctica te vas a acostumbrar.

4] $g(x)$ tiene raices complejas y múltiples.
O sea que habrá términos del tipo: $(x^2+bx+c)^m$
Por cada uno de ellos en la descomposición se pondrán los términos:

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1}{(x^2+bx+c)^m} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_mx+B_m}{x^2+bx+c}}$$

En este caso el procedimiento es similar al del caso 3], sólo que acá tenés que usar también las fórmulas d) y f).

Tabla de integrales:
Existen tablas donde hay un montón de integrales ya resueltas en función de los parámetros de la función. Por ejemplo, la fórmula d) fue sacada de una tabla de integrales.
Simplemente, dada una función que no podés resolver por ninguno de los casos anteriores, la buscás en la tabla, reemplazás los valores de los parámetros y listo.

EJERCICIOS _ UNIDAD V

1 Demuestre que:

a) $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$

Como vimos en la parte teórica: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y, por lo tanto: debe cumplirse: $F'(x) = f(x)$

Entonces ya está; mirá:

usando esto

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = F'(x) = f(x)$$

constante

$$\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) \quad y \quad \frac{d}{dx}c = 0$$

b) $\int df(x) = f(x) + c$

$df(x)$ es el diferencial de la función $f(x)$ y es, simplemente: $\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}$

Entonces: $\int df(x) = \int f'(x)\,dx$ = una primitiva de $f'(x) + c$

La primitiva $F(x)$ de $f'(x)$ debe cumplir:

$F'(x) = f'(x)$

Por lo tanto, tomando $F(x) = f(x)$ tenemos una primitiva de $f'(x)$. Otras primitivas podrían ser $f(x)+1$; $f(x)-2,3$; etc. Todas esas, derivadas, dan $f'(x)$.

Así que ya demostramos que: $\int df(x) = f(x)+c$

c) Si $\int f(x)\,dx = F(x)+c \implies \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$ con $a \neq 0$

La hipótesis es que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, o sea: $F'(x) = f(x)$.

Tenemos que demostrar que $\frac{1}{a}F(ax+b)$ es una primitiva de $f(ax+b)$. Fácil, la derivamos y vemos:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot F'(ax+b) = \frac{1}{a}(ax+b)'\cdot f(ax+b)$$

Por regla de la cadena

$$= \frac{1}{a}\,a\cdot f(ax+b) = f(ax+b) \rightsquigarrow \text{Listo!}$$

Nota: La condición $a \neq 0$ es necesaria porque si a fuera $0 \implies f(ax+b) = f(b)$ sería una constante.

En ese caso: $\int f(b)\,dx = f(b)\cdot\underbrace{\int dx}_{\text{una primitiva de "1" es } x} = f(b)\cdot x + c$

y la fórmula del enunciado con a dividiendo deja de servir.

$\boxed{2}$ Simplifique las siguientes expresiones usando propiedades de la integral indefinida, suponiendo que $f(x)$

es "suficientemente derivable" en cada caso.

a) $\displaystyle\int 2.\frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right)dx$

Como sabemos de la teoría, el 2 lo podemos sacar de la integral: $\displaystyle 2\int \frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right)dx$

Llamando $g(x) = x^2 f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right) = \frac{d}{dx} g(x) = g'(x)$

y, entonces:

$$\int 2\frac{d}{dx}\left(x^2 f(x)\right)dx = 2\int \underbrace{g'(x)\,dx = 2.g(x)}_{\text{como en el ej } \boxed{1} b)} + C$$

$$= \boxed{2.x^2 f(x) + C}$$

b) $\displaystyle\int\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(x f(x)\right) + x f'(x) + f(x)\right]dx$

Como vimos, esta integral la podemos convertir en suma de tres integrales (ver teoría):

$$\int \frac{d^2}{dx^2}\left(x f(x)\right)dx + \int x f'(x)\,dx + \int f(x)\,dx$$

Resolvemos de a una:

- $\displaystyle\int \frac{d^2}{dx^2}\left(x f(x)\right)dx = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(x f(x)\right)}_{\substack{\text{La primitiva, como siempre, es una función} \\ \text{tal que, derivada, da } \frac{d^2}{dx^2}\left(x f(x)\right)}} + C$

$$= f(x) + x f'(x) + C$$

derivando el producto

- $\int x f'(x)\,dx = x f(x) - \int f(x)\,dx + C$

integrando por partes con: $g(x) = x$ (ver teoría)
$g'(x) = 1$

Juntando todo; sumando los 3 términos y uniendo las constantes en una sola:

$$\underbrace{f(x) + x f'(x)}_{1^{\circ}\text{ integ.}} + \underbrace{x f(x) - \int f(x)\,dx}_{2^{\circ}\text{ integ.}} + \int f(x)\,dx + C'$$

$$= \boxed{f(x) + x f'(x) + x f(x) + C}$$

---

3 Hallar $h(x)$ para que se verifique la siguiente igualdad.

$$\int \cos(x)\, h(x)\,.\,dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x)) + C$$

Es fácil, la derivada de $\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x))$ debe ser igual a $\cos(x).h(x)$, de ahí despejamos $h(x)$:

$$\left(\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x))\right)' = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen}(x))^2} \cdot \cos(x) = h(x) \cdot \cos(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{h(x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen}(x))^2}}$$ para q' se cumpla la igualdad.

$\boxed{4}$ Encuentre las primitivas de las siguientes $f(x)$:

a) $f(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt[3]{2+4x-x^2}}$

Esta la podemos solucionar por sustitución, tomando $\tau = 2+4x-x^2$. Entonces: $d\tau = (4-2x)\cdot dx$

$\Rightarrow d\tau = 2(2-x)\,dx \Rightarrow \dfrac{d\tau}{2} = (2-x)\,dx$

$$\int \frac{2-x}{\sqrt[3]{2+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\tau}}\,\frac{d\tau}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\tau^{1/3}}\,d\tau$$

Reemplazando $\tau = 2+4x-x^2$ y $\dfrac{d\tau}{2} = (2-x)\,dx$

Usando $\displaystyle\int \tau^m\,d\tau = \frac{\tau^{m+1}}{m+1} + c$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\tau^{1/3}}\,d\tau = \frac{1}{2}\int \tau^{-1/3}\,d\tau = \frac{1}{2}\,\frac{\tau^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{4}\,\tau^{2/3} + c$$

$m = -\frac{1}{3}$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\left(2+4x-x^2\right)^{2/3} + c}$$

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

Aca no podemos usar sustitución, así que probamos "por partes".

El $\ln$ no lo sabemos integrar, así que lo tomamos igual $g(x)$ y a $f'(x)$ igual al resto. O sea:

$$g(x) = \ln(x+1) \implies g'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \implies f(x) = \frac{-1}{x+1}$$

Entonces:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,dx = \frac{-\ln(x+1)}{x+1} - \int \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{-1}{x+1}\right)dx + c$$

$$= \frac{-\ln(x+1)}{x+1} + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + c$$

$$= \boxed{\frac{-\ln(x+1)}{x+1} - \frac{1}{(x+1)} + c}$$

c) $f(x) = \dfrac{4e^{4x}}{e^{4x} - e^{2x} - 2}$

Acá tenemos que usar dos métodos seguidos. Primero sustitución y después fracciones simples.

Para la sustitución usamos $\tau = e^{2x} \implies d\tau = 2e^{2x}dx$

(ya vas a ver porqué)

Entonces:

$$\int \frac{4e^{4x}}{e^{4x} - e^{2x} - 2}\,dx = \int \frac{2\cdot e^{2x}}{e^{4x} - e^{2x} - 2}\,\overbrace{2e^{2x}\,dx}^{d\tau}$$

$$= \int \frac{2\tau}{\tau^2 - \tau - 2}\,d\tau$$

Ahora tiene la forma adecuada para usar fracciones simples, ves? Por eso elegimos $\tau = e^{2x}$, para que quede así.

Entonces factoreamos el denominador:

$$\tau^2-\tau-2=(\tau+1)(\tau-2)$$

y buscamos la descomposición en fracciones simples

$$\left[\frac{2\tau}{\tau^2-\tau-2}=\frac{A}{\tau+1}+\frac{B}{\tau-2}\right]\cdot(\tau+1)(\tau-2)$$

$$2\tau=A(\tau-2)+B(\tau+1)$$

$$\begin{cases}\tau=2 \implies 4=B\cdot 3 \implies \boxed{B=4/3}\\ \tau=-1 \implies -2=A(-3) \implies \boxed{A=2/3}\end{cases}$$

Llegamos así a:

$$\int\frac{2\tau}{\tau^2-\tau-2}\,d\tau=\int\frac{2/3}{\tau+1}\,d\tau+\int\frac{4/3}{\tau-2}\,d\tau$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{1}{\tau+1}\,d\tau+\frac{4}{3}\int\frac{1}{\tau-2}\,d\tau$$

$$=\boxed{\frac{2}{3}\ln(|\tau+1|)+\frac{4}{3}\ln(|\tau-2|)+c}$$

Ahora hay que volver a la variable original; usando $\tau=e^{2x}$:

$$\int\frac{4e^{4x}}{e^{4x}-e^{2x}-2}\,dx=\boxed{\frac{2}{3}\ln(|e^{2x}+1|)+\frac{4}{3}\ln(|e^{2x}-2|)+c}$$

d) $f(x)=\ln(1+x^2)$

Esta parece inofensiva ... pero se las trae ...

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx + C$$

Usamos partes con: $f'(x)=1 \Longrightarrow F(x)=x$

$g(x)=\ln(1+x^2) \Longrightarrow g'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

Para integrar $\frac{2x^2}{1+x^2}$ primero hay que hacer la división:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2+1 \\ \hline -(2x^2+2) & 2 \\ \hline -2 & \end{array} \Longrightarrow \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{\underset{\text{resto}}{-2}}{x^2+1} + \underset{\text{cociente}}{2}$$

Entonces: $$\int\left[\frac{-2}{x^2+1}+2\right]dx = -2\int\frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\int dx$$

$$= -2\,\text{arctg}(x) + 2x + C$$

Usando la tablita que está en la parte teórica.

En definitiva:

$$\boxed{\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) + 2\,\text{arctg}(x) - 2x + C}$$

e) $f(x)=\text{sen}^2(3x)\,\cos^3(3x)\,dx$

Este hay que resolverlo por sustitución, con un truquito más. Tomamos $t=\text{sen}(3x)$

$\Longrightarrow dt = 3\cos(3x)\,dx$

Ahora, fijate que f(x) tiene el cos(3x) al cubo, y en dt no está al cubo. Entonces:

$$\int \underbrace{\operatorname{sen}^2(3x)}_{t^2}\ \underbrace{\cos^2(3x)}_{1-t^2}\ \underbrace{\cos(3x)\,dx}_{\frac{dt}{3}} =$$

Esto sale de que $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 = 1 - \operatorname{sen}^2$

$$\int t^2(1-t^2)\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int (t^2 - t^4)\,dt = \frac{1}{3}\int t^2\,dt - \frac{1}{3}\int t^4\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{t^5}{5} + c$$

$$= \boxed{\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3(3x) - \frac{1}{15}\operatorname{sen}^5(3x) + c}$$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Para esta usamos una sustitución medio rara, pero bastante usada. Tomamos: $\boxed{x = \operatorname{sen} t}$

(No $t = \operatorname{sen} x$ como otras veces, sino al revés).

$\Rightarrow\ dx = \cos t\ dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cancel{\cos t}}\,\cancel{\cos t}\,dt = -\cos t + c$$

$\left(1 - x^2 = 1 - (\operatorname{sen} t)^2 = \cos^2 t \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \cos t\right)$

$$= \boxed{-\cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) + c}$$

donde la última igualdad sale de despejar τ de $x = \operatorname{sen}\tau \implies \tau = \arcsen x$.

<u>Nota</u>: Todos los resultados de este punto los podés verificar de dos formas: fijándote en la tabla de integrales o derivando el resultado y viendo que coincida con la $f(x)$ que estás integrando.

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$

Tomamos $\tau = \sqrt[6]{x+1}$ de manera que $f(x)$ quede sin raíces; ya que: $\sqrt[3]{x+1} = \tau^2$

$$\sqrt{x+1} = \tau^3$$

Por otra parte: $d\tau = \frac{1}{6}(x+1)^{-5/6}\,dx = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(\sqrt[6]{x+1})^5}dx$

$$d\tau = \frac{1}{6}\,\frac{1}{\tau^5}\,dx \implies dx = 6\tau^5 d\tau$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{1}{\tau^2 - \tau^3}\,6\tau^5\,d\tau = 6\int \frac{\tau^5}{\tau^2 - \tau^3}\,d\tau$$

$$= 6\int \frac{\tau^5}{\tau^2(1-\tau)}\,d\tau = 6\int \frac{\tau^3}{1-\tau}\,d\tau$$

Dividiendo: $\dfrac{\tau^3}{1-\tau} = \dfrac{1}{1-\tau} - \tau^2 - \tau - 1$

Integrando: $\displaystyle\int \frac{\tau^3}{1-\tau}\,d\tau = \ln(|1-\tau|) - \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^2}{2} - \tau + C$

Finalmente:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}\, dx = \boxed{\ln\left(\left|1-\sqrt[6]{x+1}\right|\right) - \frac{\sqrt{x+1}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} - \sqrt[6]{x+1} + C}$$

5 Determinar la función $f(x)$ sabiendo que:

a) $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ y $f(8) = 3$

Conocemos la derivada de $f(x)$, integrando obtenemos la forma general de cualquier función que tenga esa derivada.

$$\int f'(x)\, dx = \int \frac{1}{3\; x^{2/3}}\, dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \boxed{\sqrt[3]{x} + C}$$

La función $f(x)$ debe tener esa forma.
El valor de C se determina con la segunda condición:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + C \quad \text{con} \quad f(8) = \sqrt[3]{8} + C = 3$$

$$\Rightarrow f(8) = 2 + C = 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C = 1}$$

Finalmente, llegamos a que: $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x} + 1}$

b) $f'': \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f''(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ y que los puntos

$(1,2)$ y $(4,6)$ pertenecen a la gráfica de f.

En este caso tenemos la derivada segunda de f, así que para obtener $f(x)$ tenemos que integrar dos veces.

$$\int f''(x)\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\,dx = \int \frac{1}{2}\,x^{-3/2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + c = \frac{-1}{\sqrt{x}} + c \longrightarrow \text{forma de } f'(x)$$

$$\int f'(x)\,dx = \int \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} + c\right) dx = \int \left(-x^{-1/2} + c\right) dx$$

$$= -\frac{x^{1/2}}{1/2} + c.x + d$$

una nueva constante, distinta de c.

$$= -2\sqrt{x} + cx + d$$

esta es la forma de $f(x)$

Ahora hay que obtener los valores de las constantes usando las otra dos condiciones: $f(1) = 2$, $f(4) = 6$

$$f(x) = -2\sqrt{x} + cx + d$$

$$\begin{cases} f(1) = -2 + c + d = 2 & (1) \\ f(4) = -2.2 + c.4 + d = 6 & (2) \end{cases}$$

Restando (1) y (2) $\Longrightarrow$ $2 - 3c = -4 \Longrightarrow \boxed{c = 2}$

Reemplazando $c = 2$ en (1) $\Longrightarrow -2 + 2 + d = 2 \Longrightarrow \boxed{d = 2}$

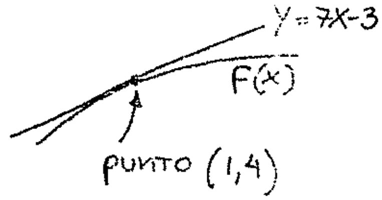
Finalmente la $f(x)$ que cumple las condiciones del enunciado es:

$$\boxed{f(x) = -2\sqrt{x} + 2x + 2}$$

c) La ecuación de la recta tangente a la función, en el punto $x = 1$ es $(y = 7x - 3)$ y
$f'': \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f''(x) = 12x$

Sabemos que la recta tangente a una curva en un punto debe tener la misma pendiente que la curva y pasar por ese punto. Por lo tanto, de ese dato sacamos que:

- el punto $(1, 4)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$ (porque la recta tangente en $x = 1$ vale 4)
- la pendiente de $f(x)$ en $x = 1$ es igual a 7 (igual que la de la recta tangente), por lo tanto sabemos que $f'(1) = 7$.



Listo, ahora integramos f'' dos veces, obteniendo:

$$f'(x) = 6x^2 + C \quad ; \quad f(x) = 2x^3 + Cx + d$$

Imponiendo las dos condiciones que obtuvimos recién:

$$f(1) = 4 \implies 2 + C + d = 4.$$
$$f'(1) = 7 \implies 6 + C = 7 \implies \boxed{C = 1} \implies \boxed{d = 1}$$

Entonces: $\boxed{f(x) = 2x^3 + x + 1}$

6 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' - y \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

Resolver una ecuación diferencial implica encontrar la función $y = f(x)$ general que satisfaga esa ecuación. Hay muchos trucos para resolver este tipo de ecuaciones, en este ejercicio vamos a presentar algunos.

Veamos este caso: $y' = y \cdot \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}$ ⇝ Teniendo en un miembro $\frac{y'}{y}$ pasamos a integrar, considerando que $y = f(x)$.

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

Ahora viene el truco. Fijate que buscamos la primitiva de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ y que $\ln f(x)$, derivada, da justamente eso. Es decir:

$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$ $\Longrightarrow$ Entonces, $\ln(f(x))$ es una primitiva de $\frac{f'(x)}{f(x)}$

por regla de la cadena

Listo, ahora volvemos a la ecuación e integramos el otro miembro. (ponemos las constantes de integración juntas, en el miembro derecho)

$$\ln(f(x)) = -\frac{1}{x} + c$$

Despejando $f(x)$: $e^{\ln(f(x))} = e^{\left[-\frac{1}{x}+c\right]}$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-1/x} \underbrace{e^{c}}_{\text{otra constante}} \Longrightarrow \boxed{f(x) = k\, e^{-1/x}}$$

Conclusión: Todas las funciones de esa forma ($y = k\, e^{-1/x}$) cumplen $y' - y\frac{1}{x^2} = 0$. Esto lo podés verificar derivando $f(x)$, obteniendo $y' = f'(x)$ y reemplazando en esa ecuación.

b) $y' + ay = 0$

Este tipo de ec. dif. es muy típico. El método para resolverlo es el mismo que el que usamos recién:

$$y' = -ay \Rightarrow \frac{y'}{y} = -a \Longrightarrow \int \frac{y'}{y}\,dx = \int -a\,dx$$

$$\Longrightarrow \ln y = -ax + c \Longrightarrow y = e^{-ax} e^{c}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = k\, e^{-ax}}$$

c) $y' + ay = b$

Esta es una generalización de la anterior. La solución, en este caso, está compuesta por dos términos: uno es el de recién ($k\,e^{-ax}$) y el otro uno constante; de manera que se verifique la ecuación. Entonces:

$$y = k\,e^{-ax} + A$$

Reemplazamos eso en la ecuación para buscar el valor de A que verifique:

$$(k\,e^{-ax} + A)' + a(k\,e^{-ax} + A) = b$$

$$\cancel{-ak\,e^{-ax}} + \cancel{ak\,e^{-ax}} + aA = b \implies A = \frac{b}{a}$$

Finalmente:

$$\boxed{y = k\,e^{-ax} + \frac{b}{a}}$$

---

7 Hallar la solución particular de la sig. ec. dif. para que satisfaga la condición inicial: $y(0) = 1$

$$y' = \sqrt{2x}\, y$$

La solución general a esa ecuación es:

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{2x} \implies \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \sqrt{2x}\,dx \implies \ln y = \sqrt{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + c$$

$$\implies \ln y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\implies \boxed{y = k\,e^{2\sqrt{2}/3\,\sqrt{x^3}}}$$

Con la condición inicial $y(0)=1$ se define la constante K:

$y(0)=K=1 \Longrightarrow$ Finalmente la función y que cumple la ecuación dif. y la condición inicial es:

$$\boxed{y = e^{2\sqrt{2}/3\,\sqrt{x^3}}}$$

8 Calcular la siguiente integral: $\int x\, f'(x^2)\,dx$

Hay que resolverla por sustitución, tomando $t = x^2$

$\Longrightarrow dt = 2x\,dx \Longrightarrow \frac{dt}{2} = x\,dx$

$$\Longrightarrow \int x\, f'(x^2)\,dx = \int f'(t)\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot f(t) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\, f(x^2) + C}$$

9 Hallar $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f^2(x)\, f'(x) - x^2 = 0$ y $f(1) = 2$

Primero despejamos:

$f^2(x)\, f'(x) = x^2 \Longrightarrow$ integramos: $\int f^2(x)\, f'(x)\,dx = \int x^2\,dx$

Usamos una sustitución: $t = f(x) \Longrightarrow dt = f'(x)\,dx$

$$\Longrightarrow \int t^2\,dt = \frac{x^3}{3} + C \Longrightarrow \frac{t^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\underset{t=f(x)}{\Longrightarrow} f^3(x) = x^3 + \overbrace{3C}^{\text{otra constante}} \Longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^3 + C'}$$

Con la condición $f(1)=2$ sacamos C':

$f(1)=\sqrt[3]{1^3+C'}=2 \implies 1+C'=8 \implies \boxed{C'=7}$

Por lo tanto: $\boxed{f(x)=\sqrt[3]{x^3+7}}$

$\boxed{10}$ Obtener las funciones "y" que cumplan la sig. ec. diferencial:

$$y'=\operatorname{sen}(x)\,y^2$$

Este es otro tipo de ec. dif. La resolvemos de la sig. manera; usando $y'=\frac{dy}{dx}$:

$\frac{dy}{dx}=\operatorname{sen}(x)\,y^2$

Pasando el dx a la derecha y el y^2 a la izquierda, queda:

$$\frac{dy}{y^2}=\operatorname{sen}(x)\,dx \xrightarrow{\text{integrando}} \underbrace{\int\frac{dy}{y^2}}_{\text{de este lado la variable es } y}=\underbrace{\int\operatorname{sen}(x)\,dx}_{\text{de este lado, } x} \implies$$

$$\frac{y^{-1}}{-1}=-\cos(x)+C \implies \frac{1}{y}=\cos(x)-C$$

$$\implies \boxed{y=\frac{1}{\cos(x)-C}}$$

Nota: Las ec. del ej $\boxed{6}$, a) y b) también las podías resolver con este método (probá hacerlo, dale).

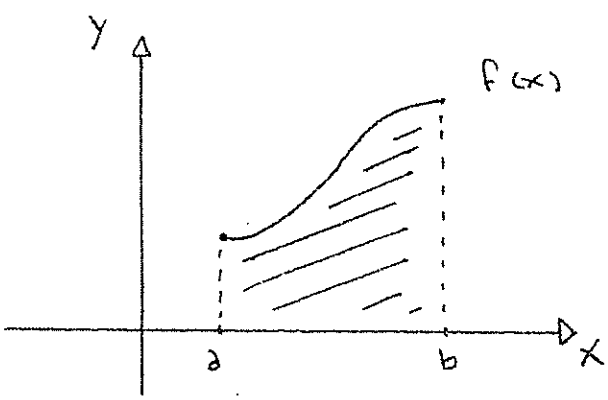
FIN EJEMPLOS UNIDAD 5.

UNIDAD SEIS

Calculo Integral

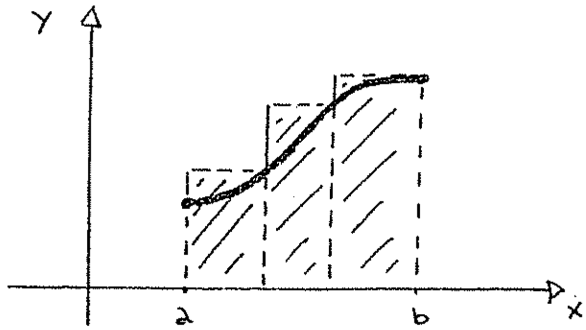
La idea de "integral" es mucho mas vieja que la de derivada. La noción de integral llega hasta los antiguos griegos tratando de resolver problemas de áreas y volumenes. En epocas mas recientes Képler tiene que resolver volumenes de sólidos de revolución y en general la integral definida es la herramienta q' uno usa cuando tiene que calcular Areas, Volumenes velocidad, espacio, etc. Pero como historicamente el problema surgió con áreas nosotros también lo haremos con áreas.

El problema que nos interesa es calcular el área de la región atrapada entre la gráfica de una función supongamos positiva en el intervalo [a,b] y el eje de las x:

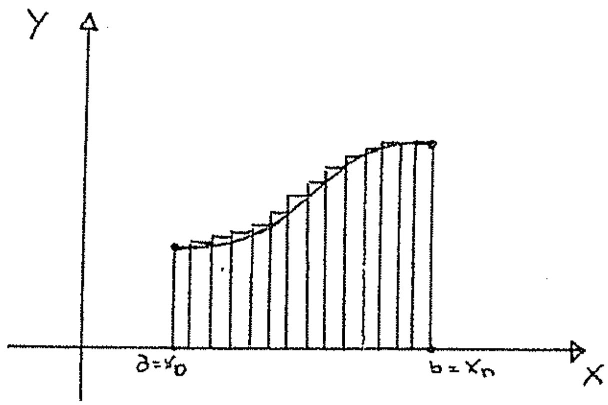


.área bajo la gráfica de f(x).

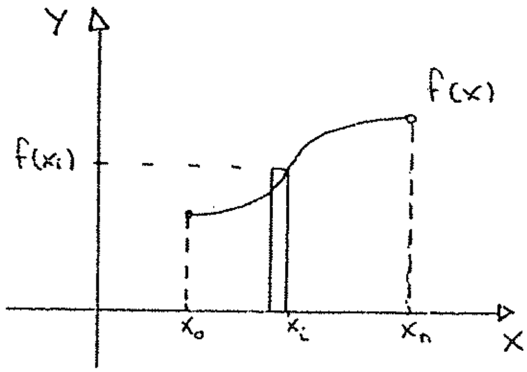
Supongamos que no conocemos una fórmula para calcular el área A de la figura, entonces podemos calcular "aproximadamente" el área usando algunos rectangulos:



Para aproximarnos mejor podemos usar muchos mas rectangulos:



Para esta última figura hemos dividido el intervalo [a,b] en n segmentos iguales, la longitud de cada intervalo es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Ya tenemos la base de cada rectangulo, Las alturas de los rectangulos no son iguales, por ejemplo la altura del último es $h = f(x_n)$ y en general la altura del i-esimo rectangulo es $h_i = f(x_i)$.



Como conocemos la base y la altura de cada rectangulo el área total es la suma de cada una de las áreas de los rectangulos: esta área es aproximadamente igual al área bajo la curva de $f(x)$:

$$A = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_i)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

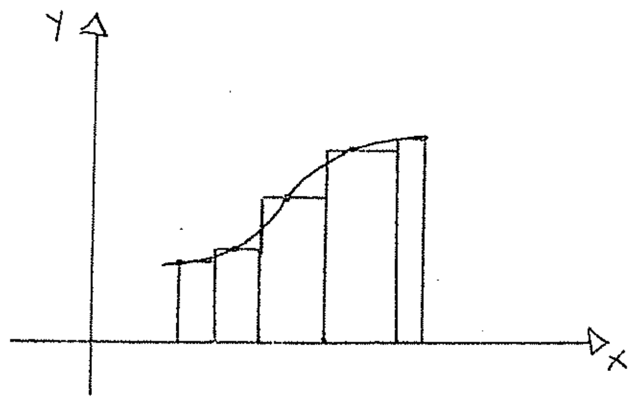
$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Cuando nosotros subdividimos el intervalo $[a,b]$ hicimos lo que se llama una partición del intervalo $[a,b]$. Nosotros hicimos una partición en n intervalos iguales pero la verdad es que no se necesita que sean todos iguales. Por ejemplo el primer subintervalo

$x_1 - x_0 = \Delta x_1$ y el segundo $x_2 - x_1 = \Delta x_2$ y no tienen porque ser iguales: $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$ y en general el intervalo i-esimo mide Δx_i. Entonces el área bajo la curva de $y = f(x)$ la podemos aproximar por

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Ademas tampoco es necesario que para hallar la altura de cada intervalo usemos su extremo derecho. Podemos elejir cualquier valor x_i^* dentro del intervalo Δx_i y calcular su altura como $f(x_i^*)$

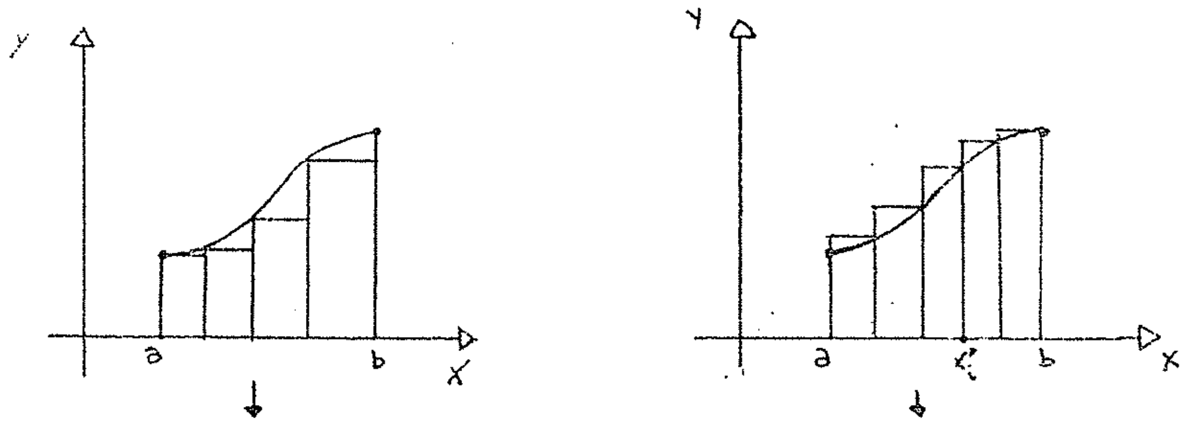


Aca vemos una partición que no divide en segmentos iguales y que las alturas estan tomadas en cualquier $x_i^* \in \Delta x_i$.

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

Estas sumas se llaman "Sumas de Riemann".

Para cada x_i^* que elijamos tenemos una suma de Riemann distinta. Habra una que sea la mas grande de de todas y otra la menor.



Suma inferior: s.
Los x_i^* son los del extremo izquierdo de cada intervalo.

Suma superior: S.
los x_i^* son los del extremo derecho de cada intervalo.

El área A bajo la curva debe estar entre estos 2 valores:

$$s \leq A \leq S$$

Nos damos cuenta que cuanto mas numerosos sean los intervalos la suma inferior coincidira con la superior. Los intervalos tendrán que ser mas chiquitos.

Si los intervalos son tan cortos que tienden a cero entonces s es igual a S y tendremos el verdadero valor del área. Podemos decir que el área va a ser igual a cualquiera de las sumas si $\Delta x \to 0$: Entonces:

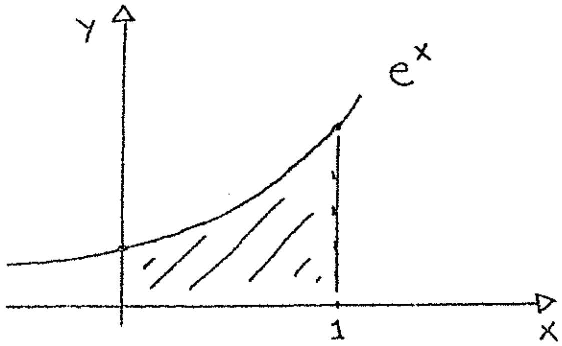
$$\boxed{A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i}$$

Esta fórmula es exacta y no aproximada.
Si pensamos que A es el límite de estas sumas podemos tenemos la definición de:

Integral definida

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i}$$

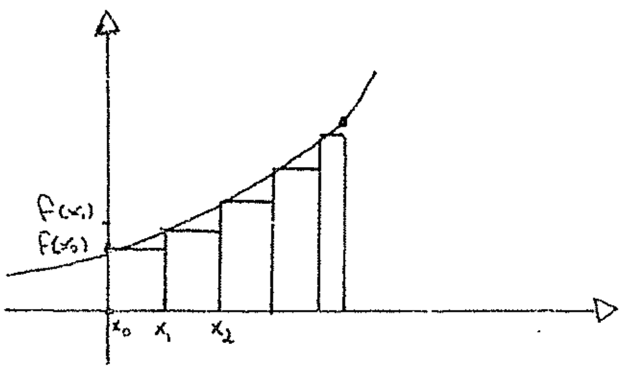
Vamos a ver en un ejemplo como usar las sumas de Riemann para hallar el área bajo la curva de la función $f(x) = e^x$ desde el valor $x=0$ hasta el $x=1$:



Divido el segmento $[0,1]$ en n partes iguales: $\Delta x = \frac{1}{n}$ → $x_0 = 0$; $x_1 = 0 + \Delta x = \frac{1}{n}$;

$x_2 = 0 + 2\Delta x = \frac{2}{n}$; ... ; $x_n = 0 + n\,\Delta x = \frac{n}{n} = 1$.

Como x_i^* tomemos los extremos izquierdos:



$x_0 = 0$ → $f(x_0) = e^0 = 1$; $x_1 = \frac{1}{n}$ → $f(x_1) = e^{1/n} = e^{\Delta x}$

$x_2 = 2\Delta x$ → $f(x_2) = e^{2\Delta x}$

formemos la suma:

$$S = f(x_0).\Delta x + f(x_1).\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$s = e^{x_0}\Delta x + e^{\Delta x}\cdot\Delta x + e^{2\Delta x}\cdot\Delta x + \dots + e^{(n-1)\Delta x}\cdot\Delta x$$

$$s = \Delta x + e^{\Delta x}\cdot\Delta x + e^{2\Delta x}\cdot\Delta x + \dots + e^{(n-1)\Delta x}\cdot\Delta x$$

$$s = \left(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}\right)\Delta x$$

toda la expresión que se halla entre paréntesis es una progresión geométrica y la razón es $e^{\Delta x}$.
La fórmula de una progresión geométrica es:

$\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ y r es la razón. En nuestro problema todo queda:

$$s = \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}\cdot\Delta x = (e-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$$

Para que esta suma s de exacto el valor del área dijimos que teníamos que tomar el límite con $\Delta x \to 0$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} s = \lim_{\Delta x \to 0} (e-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = (e-1)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$$

El límite podemos resolverlo por L'hopital y da 1
Entonces el área vale $e - 1$.

o podemos decir que la integral definida vale $e-1$:

$$\boxed{A = \int_0^1 e^x dx = e-1}$$

Podemos decir ahora que el límite de las sumas de Riemann definen integrales, y no tienen porque ser un área. Una integral definida puede dar negativa ó nula, pero si el problema que tenemos que resolver es el de hallar un área, entonces sí sera positiva..

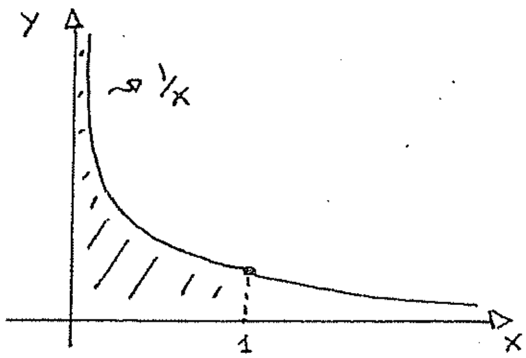
Conocemos ya las integrales definidas y su definición como el límite de una suma de Riemann.

Ahora podemos preguntarnos: ¿Que condiciones tiene que cumplir una función $f(x)$ para que su integral definida en el intervalo $[a,b]$ exista?

Lo primero que tiene que ocurrir es que las sumas de Riemann tengan un límite L:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = L$$ y L tiene que

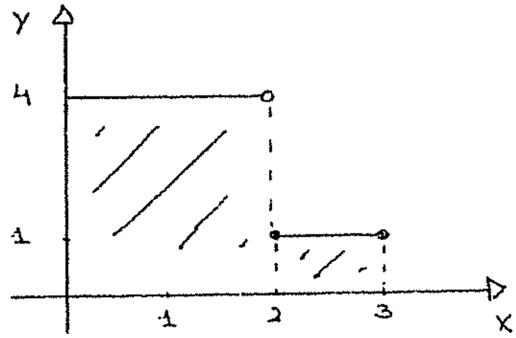
existir finito. También puede ser que la integral definida no exista, si la función $f(x)$ No esta definida en todos los valores x del intervalo, por ejemplo si $f(x) = \frac{1}{x}$ y el intervalo es el $[0,1]$:



Vemos que $\int_0^1 1/x\,dx$ no existe, no existe finita el área porque $f(x) = 1/x$ no esta definida y ademas no es "acotada" en el $[0,1]$.

No es necesario que $f(x)$ sea continua para que sea integrable, claro que si es continua sera automaticamente integrable. Veamos por ejemplo la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



f(x) es discontinua en $x=2$ pero acotada en $[0,3]$ entonces $\int_0^3 f(x)\,dx$ existe. el área total es la suma de cada una de las áreas de cada rectangulo. (En verdad deberiamos tomar el límite cuando $x \to 2^-$)

finalmente podemos decir que si f(x) es una función acotada en $[a,b]$ y que tiene un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, entonces f(x) es integrable en $[a,b]$.

Ahora ya sabemos cuando una función es integrable, podemos ver cuales son las propiedades mas importantes de la integral definida.

No vamos a mostrar las demostraciones de estas propiedades ya que las podemos hallar en cualquier texto de analisis.

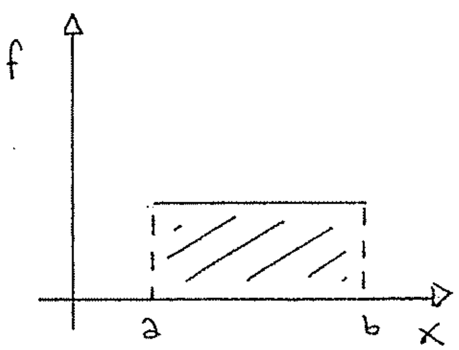
Propiedades de la integral definida

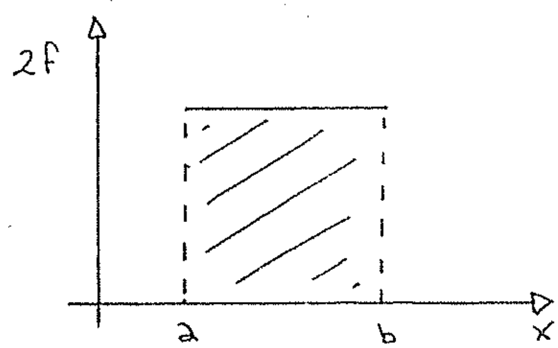
Propiedad 1: Las constantes pueden salir fuera de la integral.

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

Para entender esta propiedad imaginemos que $k=2$

Entonces $k f(x)$ es $2 f(x)$





Claramente vemos que si la función se duplica el área se duplica.

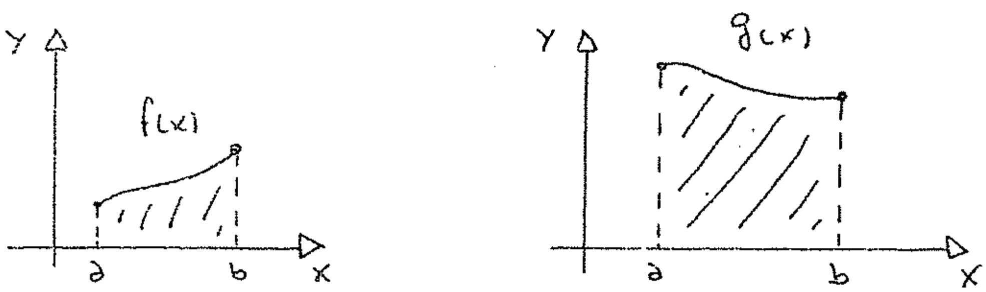
Propiedad 2: $\int_a^b (f_1 + f_2)\, dx = \int_a^b f_1\, dx + \int_a^b f_2\, dx$

Esta propiedad es bastante clara: el área de dos regiones es la suma de las áreas de cada una.

Propiedad 3:

Si en el intervalo $[a,b]$ $f(x)$ es menor o igual que otra función $g(x)$ entonces: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$



El área bajo $f(x)$ es menor al área bajo $g(x)$.

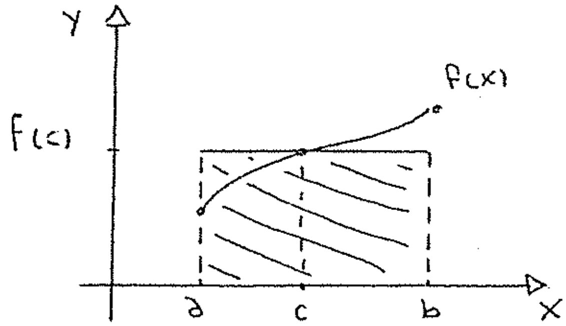
Propiedad 4: "teorema del valor medio integral"

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

Esto quiere decir que el valor del área bajo $f(x)$ es igual al área de un "rectangulo" de base $(b-a)$

y de altura f(c) siendo c un punto del intervalo.



Todas estas propiedades las hemos entendido pensando que la integral definida representa un área pero recordemos que la integral definida "no" tiene porque ser un área. por ejemplo puede ser el momento de inercia de un cuerpo rígido, y las propiedades son igualmente válidas.

Llegamos ahora a un punto muy importante:

¿Como calculamos una integral definida?

Armar una suma de Riemann y calcularle el límite es muy complicado, entonces que hacemos?

Por ejemplo como calculamos la siguiente integral

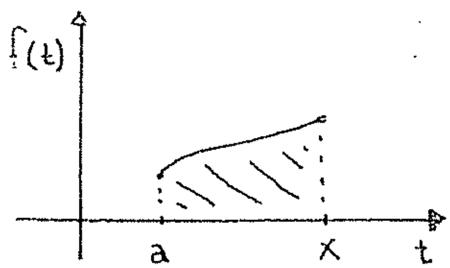
$$\int_0^1 (x^2 + 2x + 1)\, dx$$

Para resolver este problema necesitamos la ayuda de el "teorema fundamental del cálculo" y la "regla de Barrow"

Teorema fundamental del cálculo

Si el intervalo de integración es $[a, x]$, entonces la integral definida es una función de x:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$



El área es una función de x.

El teorema nos dice que $\boxed{F'(x) = f(x)}$

y sabemos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Lo que dijimos recién no cambia si sumamos una constante C: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$ porque si derivamos la constante da cero.

Ésta constante C es fácil de hallar: supongamos que el valor de x es a ⇒

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

; pero la integral da cero: "No hay área desde a hasta a" ⇒

$0 = F(a) + C \Rightarrow -F(a) = C$ y con esto la fórmula queda: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

y finalmente si elijo x igual a b tenemos la

Regla de Barrow

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Con esta fórmula es que podemos calcular integrales definidas. Nosotros queríamos hallar $\int_0^1 (x^2 + 2x + 1)\,dx$, entonces lo que tenemos que hacer es: primero buscamos una primitiva de la función que esta dentro de la integral.

$$\int (x^2+2x+1)\,dx = F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

y ahora la calculamos en el límite superior de la integral y en inferior:

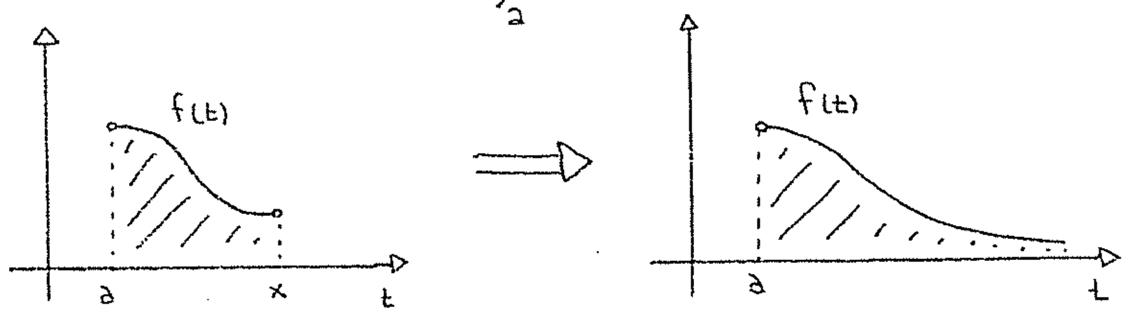
$F(1) = 1/3 + 1 + 1 = 7/3$
$F(0) = 0$
Solo tenemos que restar estos valores:

$$\int_0^1 (x^2+2x+1)\,dx = 7/3$$

Nos queda un último punto por examinar, cuando nosotros hablamos del área en función de x: $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

que sucede si el valor de x es infinitamente grande

$$\text{si } x \to +\infty \Rightarrow A = \int_a^\infty f(t)\,dt$$



parece que tenemos un área infinita. sin embargo si la función se pega al eje de las absisas rapidamente el valor del área puede ser finita: Éstas integrales se llaman:

Integrales impropias

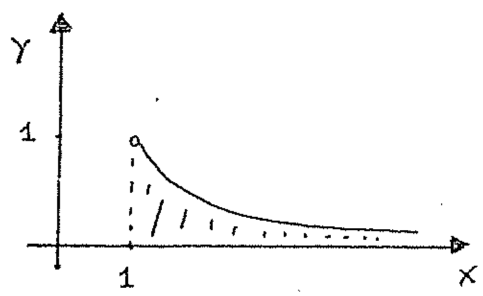
Una integral impropia tiene la forma: $\int_a^{\infty} f(t)dt$

y para calcularla haremos:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt$$ si éste

límite existe finito entonces diremos que la integral impropia converge, si no diremos que diverge.

Por ejemplo: Queremos hallar el área bajo la función $f(x) = 1/x^2$ desde $x=1$ hasta $x=+\infty$



Entonces planteamos la integral:

$$\int_1^{\infty} 1/x^2 \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-2} \, dx = \lim_{b\to\infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^{b}$$

La barra significa que la primitiva la evaluamos primero en b y luego en 1:

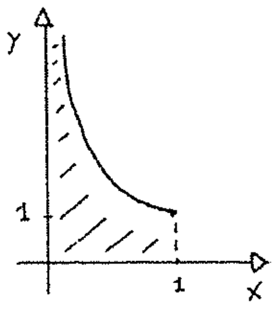
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = 1$$

finalmente esta integral converge.

Puede pasarnos también que la integral sea impropia no porque un límite de integración tienda a infinito, sino porque la función tenga por ejemplo una asíntota vertical dentro del intervalo [a,b]:

Supongamos que queremos hallar la integral:

$\int_0^{1} 1/x^2 \, dx$; vemos que la función $\frac{1}{x^2}$ tiene una asíntota vertical en $x=0$

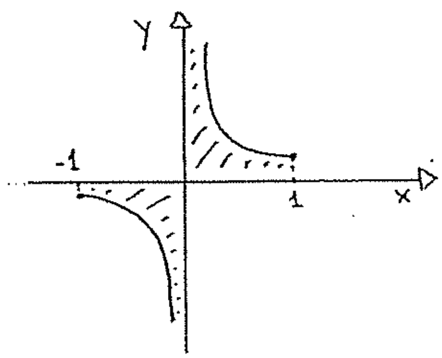


La cuenta que tendríamos que hacer es:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 x^{-2}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{\epsilon} \right)$$

y éste límite da infinito, entonces la integral diverge.

Veamos un ejemplo más: queremos hallar $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$



Podemos comenzar por calcular 2 integrales:

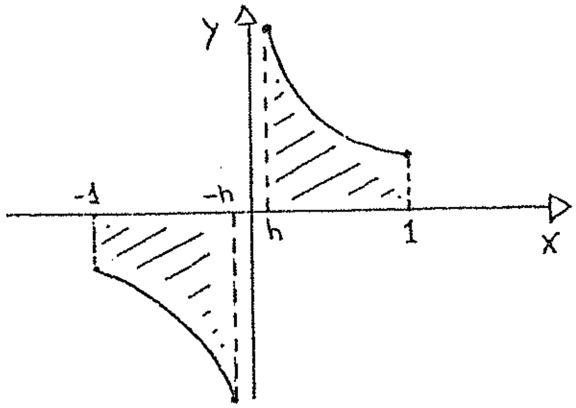
$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$, para hallar la primera

$$\lim_{\epsilon_1 \to 0^-} \int_{-1}^{\epsilon_1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^-} \ln|x| \Big|_{-1}^{\epsilon_1} = \lim_{\epsilon_1 \to 0^-} \ln|\epsilon_1| = -\infty$$

para hallar la segunda:

$$\lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{\epsilon_2}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \ln x \Big|_{\epsilon_2}^{1} = -\lim_{\epsilon_2 \to 0} \ln \epsilon_2 = +\infty$$

y como ambas integrales divergen tenemos que decir que la integral impropia original diverge. Pero veamos otra forma de hallar esta integral:



tomemos un mismo h a cada lado y hagamos tender a cero este valor h:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0}\left\{ \int_{-1}^{-h} \frac{1}{x}dx + \int_{h}^{1} \frac{1}{x}\,dx \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{ \ln|x|\Big|_{-1}^{-h} + \ln x\Big|_{h}^{1} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{ \ln h - \ln h \right\} = 0$$ Ahora el resultado es cero. Esto se llama valor principal de Cauchy.

Entonces si f(x) tiene una asintota vertical en x=c dentro del [a,b], el valor principal de la integral sera:

$$vp\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0}\left\{ \int_{a}^{c-h} f(x)dx + \int_{c+h}^{b} f(x)dx \right\}$$

FIN TEORIA UNIDAD 6

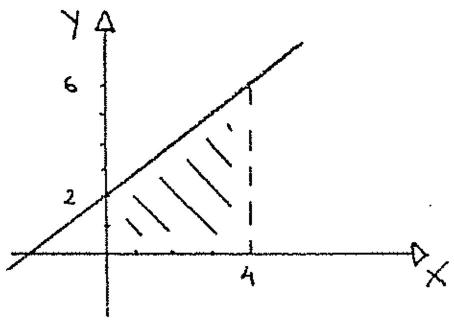
EJERCICIOS UNIDAD SEIS

Ejercicio 1.

Mediante las sumas de Riemann evaluar el área A bajo la gráfica de $f(x) = x+2$ en el intervalo $[0,4]$.

Solución:

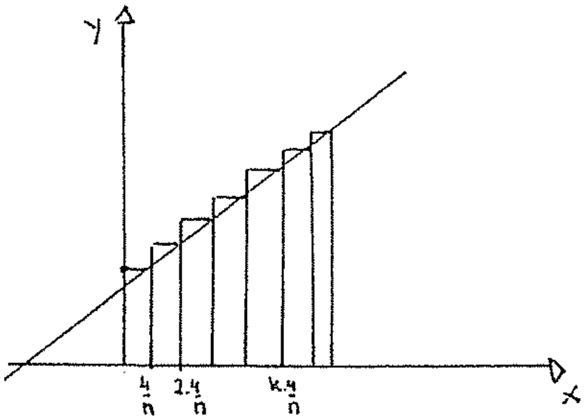
El área que nos piden es el área de un trapecio:



Si usamos n intervalos de igual amplitud, la amplitud de cada uno de ellos será:

$\Delta x = \dfrac{4-0}{n} = \dfrac{4}{n}$ Entonces la suma de Riemann es:

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$



Si como en la figura elegimos el x_i^* en el extremo izquierdo de cada intervalo, entonces en el primer intervalo elijo el 0; en el segundo el $\frac{4}{n}$; en el tercero el $2.\frac{4}{n}$ y en el k+1-ésimo el $k.\frac{4}{n}$

Entonces en general tendremos que las alturas de los rectangulos seran: $f(k.\frac{4}{n})$ y esto es:

$k.\frac{4}{n}+2$ y la suma de Riemann queda:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(k.\frac{4}{n}+2\right).\frac{4}{n} = \frac{4}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} k.\frac{4}{n} + \sum_{k=1}^{n} 2\right\}$$

$$S = \frac{4}{n}\left\{\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2\right\}$$

La suma que contiene al 2 es: $\sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$ porque seria n veces sumar el 2. La segunda suma, la que tiene la k, ya no es tan facil pero por suerte tenemos una fórmula: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\Rightarrow$

$$S = \frac{4}{n}\left\{\frac{4}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} + 2n\right\} = \frac{4}{n}\left\{2(n+1)+2n\right\}$$

$$= \frac{4}{n}\left\{4n+2\right\} = 16 + \frac{8}{n}$$

para que esta suma nos de el área tenemos que tender n a $\infty \Rightarrow A = \lim_{n\to\infty} \left(16 + \frac{8}{n}\right) = 16$.

El área del trapecio es entonces 16.

Ejercicio 2.

Empleando la regla de Barrow hallar el área bajo la curva $Y = X + 2$ en el intervalo $[0,4]$

Solución:

El problema es el mismo que en el ejercicio 1 pero ahora para poder hallar el área usamos la integral definida:

$$A = \int_0^4 (x+2)\,dx$$

Para resolver esta integral primero tenemos que hallar una primitiva de la función $Y = X+2$:

$\int (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x$, elegí la primitiva que tiene la constante de integración igual a cero, (siempre podemos hacer esto)

$A = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^4$ ahora esta cuenta la evaluamos en el limite superior (4) y en el inferior (0) y restamos estos valores:

$$A = \left(\frac{4^2}{2} + 2.4\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 2.0\right) = 16.$$

El valor del área da lo mismo que con la suma de Riemann, como tenía que ser.

Ejercicio 3.

Evaluar $\int_0^2 x.\sqrt{2x^2+1}\,dx$

Solución:

El problema parece sencillo, buscamos una primitiva y luego aplicamos la regla de Barrow.

Empecemos entonces buscando una primitiva.

$\int x.\sqrt{2x^2+1}\,dx$ podemos usar la sustitución: $2x^2+1 = u \rightarrow 4x\,dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{4x}$

La integral queda: $\int x.\sqrt{u}\,\frac{du}{4x} = \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du$

Hacemos ahora esta integral: $\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{6}u^{3/2}$

Tenemos que volver a la variable x, entonces recordamos que U era $2x^2+1$ $\rightarrow$ la primitiva es:

$\frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}$; con esta primitiva usamos la

regla de Barrow: $\frac{1}{6}\left(2x^2+1\right)^{3/2}\Big|_0^2$ $\rightarrow$

$\frac{1}{6}\left(2.2^2+1\right)^{3/2} - \frac{1}{6}\left(2.0^2+1\right)^{3/2} = \frac{13}{3}$ finalmente:

$$\boxed{\int_0^2 x\cdot\sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{13}{3}}$$

Ahora veamos otra manera muy útil de llegar a este mismo resultado; despues de la sustitución $2x^2+1 = U$ la integral nos quedo:

$\frac{1}{4}\int U^{1/2}\,du$, lo que hicimos fue integrar y volver a la variable x; pero podemos hacer otra cosa: No volveremos a la variable x; en cambio usaremos otros límites de integración: los límites eran 0 y 2 para la x, pero cuales serian para la letra U?

si $x=0 \rightarrow U = 2.0^2+1 = 1$; si $x=2 \rightarrow U = 2.2^2+1 = 9$

Los límites para la letra u serian $1, 9 \rightarrow$ podemos hallar la integral $\frac{1}{4}\cdot\int_1^9 U^{1/2}\,du$ y no tendremos necesidad de volver a x, veamos:

$$\frac{1}{4}\cdot\int_1^9 U^{1/2}\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,U^{3/2}\Big|_1^9 = \left(\frac{2}{3}\cdot 9^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}\right)\frac{1}{4} = \frac{13}{3}$$

Entonces:

$$\boxed{\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^9 U^{1/2}\,du = \frac{13}{3}}$$

Ejercicio 4.

Evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$

Solución:

Nuevamente el problema parece sencillo, buscamos una primitiva y luego aplicamos la regla de Barrow. Ahora vamos a usar otra forma, evidentemente la integral se resulve por el método de integración por partes, pero como influyen los límites de integración en el método por partes?

Tenemos la siguiente fórmula:

$$\int_a^b v\,du = u.v\Big|_a^b - \int_a^b u\,dv$$

Usemos esta fórmula en nuestro problema:

$v = \ln x \rightarrow dv = 1/x\,dx$

$du = dx \rightarrow u = x$

Entonces:

$$\int_1^e \ln x\,dx = x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (e.\underbrace{\ln e}_{1} - 1.\underbrace{\ln 1}_{0}) - \int_1^e 1.dx$$

$$= (e.1 - 0) - x\Big|_1^e$$

$$= e - (e-1) = 1$$

Entonces: $\boxed{\int_1^e \ln x.dx = 1}$

Verificalo buscando directamente una primitiva y luego aplicando Barrow.

Ejercicio 5.

Hallar la derivada de la función:

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} (t^2 + t)\, dt$$

Solución:

Si pensamos que f(x) no es mas que una integral definida, entonces podemos resolverla y luego hacer la derivación:

Una primitiva de la función integrauda seria:

$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$ y con esta primitiva usamos la regla de Barrow:

$$f(x) = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{x^3} = \left(\frac{(x^3)^3}{3} + \frac{(x^3)^2}{2}\right) -$$

$$\left(\frac{(x^2)^3}{3} + \frac{(x^2)^2}{2}\right) = \frac{x^9}{3} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2}$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4$ ahora derivamos:

$$f'(x) = \frac{9}{3}x^8 + \frac{6}{6}x^5 - \frac{4}{2}x^3$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^8 + x^5 - 2x^3}$$ %

Esto fue mas

al menos simple, pero puede pasarnos que encontrar la primitiva sea muy complicado; entonces podremos obtener la derivada de $f(x)$ sin hacer la integral?

La respuesta es que sí, existe una fórmula que nos permite hacer esto: Si

$$f(x) = \int_{U(x)}^{V(x)} g(t)\,dt \qquad \text{entonces:}$$

$$f'(x) = g(V(x)).V'(x) - g(U(x)).U'(x)$$

Usemos esta fórmula a ver si llegamos a lo mismo: en nuestro caso

$$g(t) = t^2 + t \quad ; \quad U(x) = x^2 \ , \quad V(x) = x^3 \ \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x^3)^2 + (x^3)\right).3x^2 - \left((x^2)^2 + (x^2)\right).2x \\ &= \left(x^6 + x^3\right).3x^2 - \left(x^4 + x^2\right).2x \\ &= 3x^8 + 3x^5 - 2x^5 - 2x^3 \\ &= 3x^8 + x^5 - 2x^3 \end{aligned}$$

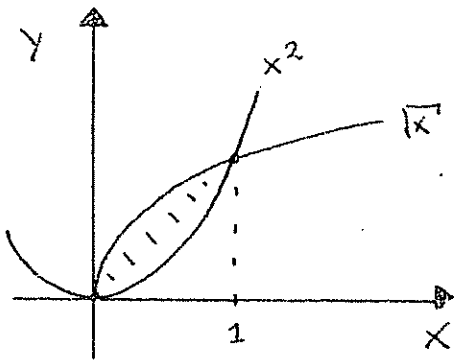
fue mucho mas fácil.

Ejercicio 6.

Obtener el área de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$

Solución:

Comencemos dibujando ambas funciones para poder ver el área que nos piden:



Para hallar las intersecciones igualamos ambas funciones:

$$x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x^4 = x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

y las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

Para hallar el área de una región encerrada por 2 funciones usamos la fórmula:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (\text{función Superior} - \text{función inferior})\,dx$$

En este problema la función superior es $\sqrt{x}$ y la función inferior es la parabola $Y = x^2 \to$

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_0^1 x^{1/2}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx$$

$$A = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \left(2/3 - 0 \right) - \left(1/3 - 0 \right)$$

$$A = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 7.

¿Evaluar si es posible $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$

Solución:

Podemos repartir la integral en otras dos integrales impropias:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx}_{I_2}$$

Si ambas integrales, I_1, I_2 convergen entonces la integral original también converge, si alguna diverge la original diverge.

Comencemos buscando una primitiva:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx \rightarrow \text{sustitución: } \begin{array}{l} 1+e^x = u \\ e^x dx = du \end{array}$$

la integral queda: $\int \frac{du}{u} = \ln u$ es decir:

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1} = \ln(e^x+1)$$

Ahora buscamos I_1:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x\,dx}{e^x+1} = \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 \frac{e^x\,dx}{e^x+1} \rightarrow$$

$$= \lim_{b\to-\infty} \left[\ln(e^x+1)\right]\Big|_b^0 = \ln(e^0+1) - \lim_{b\to-\infty} \ln(e^b+1)$$

pero $\lim_{b\to-\infty} e^b = e^{-\infty} = 0$ con lo cual $\ln(e^b+1) \to 0$

Asique $I_1 = \ln(e^0+1) = \ln(2)$ converge.

Ahora tenemos que ver que pasa con I_2:

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{e^x+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{e^x\,dx}{e^x+1} \rightarrow$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left\{ \ln(e^x+1) \Big|_0^b \right\}$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to\infty} \ln(e^b+1)}_{\infty \text{ porque } e^{\infty}=\infty} - \ln(e^0+1)$$

Acá nos encontramos con que I_2 diverge, entonces la conclusión final es que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{e^x+1} \quad \text{diverge..}$$

Ejercicio 8.

Evaluar $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$; si es posible

Solución:

En este problema el intervalo de integración es $[1,5]$ y la función integranda $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{1/3}}$ tiene una discontinuidad en $x=2$; que pertenece al intervalo $[1,5]$. Entonces nuestra integral es una integral impropia.

Podemos separar la integral en otras dos:

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}}_{I_2}$$

Vamos a buscar primero una primitiva:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = \int (x-2)^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}(x-2)^{2/3}$$

Ahora buscamos I_1:

$$I_1 = \int_1^2 (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{b\to 2^-} \int_1^b (x-2)^{-1/3}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to 2^-} \frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big|_1^b = \frac{3}{2}\left\{ \lim_{b\to 2^-} (b-2)^{2/3} - (-1)^{2/3} \right\}$$

$$= \frac{3}{2}\left\{ 0 - 1 \right\} = -\frac{3}{2}$$

I_1 es convergente, ahora vamos a calcular I_2.

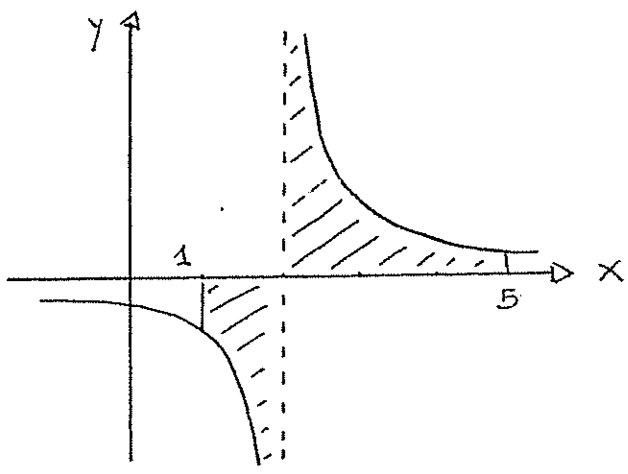
$$I_2 = \int_2^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{b\to 2^+} \int_b^5 (x-2)^{-1/3}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to 2^+} \frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big|_b^5 = \frac{3}{2}\left[3^{2/3} - \underbrace{\lim_{b\to 2^+}(b-2)^{2/3}}_{0}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 3^{2/3} = \frac{3^{5/3}}{2}$$

Como I_2 también converge → la integral original converge y su valor es: $-\frac{3}{2} + \frac{3^{5/3}}{2} \approx 1,62$

$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} \approx 1,62$$



El valor hallado NO corresponde al área sombreada.

El área sería: $\left|-\frac{3}{2}\right| + \frac{3^{5/3}}{2} \approx 4,62$ ..

FIN EJERCICIOS UNIDAD 6

UNIDAD VII
SUCESIONES
SERIES NUMÉRICAS Y FUNCIONALES

Definición de sucesión:

Si a cada entero n está asociado un número real a_n, entonces, el conjunto ordenado:

$$\boxed{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}$$

define una sucesión.

Se puede pensar, también, a una sucesión como una función cuyo dominio son los enteros. La imágen del entero n es a_n, el término enésimo de la sucesión.

Una forma de definir una sucesión es a través de la fórmula para obtener sus términos. Por ejemplo:

$\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ es la sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Convergencia:

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L si para cada ε, perteneciente a los reales positivos, existe un

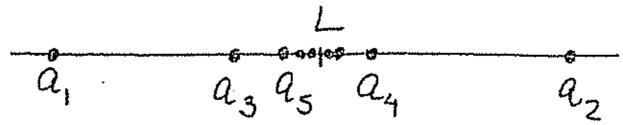
N positivo (que en general dependerá de ε) tal que:

$$\boxed{|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geqslant N}$$

En ese caso decimos que la <u>sucesión</u> <u>converge</u> a L y lo escribimos: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L}$ ó $\boxed{a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L}$.

Esto significa que los valores de a_n se van acercando tanto a L que siempre voy a encontrar un N a partir del cual la distancia de a_n, para $n \geqslant N$, a L sea menor a ε (por más chiquito que elija el ε).

Gráficamente:



Los a_n se acercan a L.

Una sucesión que no converge se llama <u>divergente</u>. Esto puede pasar por dos razones:

- Los términos de la sucesión crecen indefinidamente, tendiendo a $+\infty$ o $-\infty$. (Ej: $a_n = n$)
- Los términos toman valores alternados, haciendo que la sucesión oscile sin tender a ningún valor ($a_n = (-1)^n \Rightarrow 1, -1, 1, -1, \ldots$ oscila).

Sucesiones monótonas:

- Una sucesión es creciente si: $\boxed{a_n \leq a_{n+1}}$ para todo $n \geqslant 1$
  (Fácil, los términos van aumentando su valor a medida que n crece)
- Una sucesión es decreciente si: $\boxed{a_n \geqslant a_{n+1}}$ para todo $n \leq 1$.

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Sucesiones acotadas:

Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si existe un número positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.
(O sea, cualquier término de la sucesión que se me ocurra agarrar va a ser menor a M).

Teorema: Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.

Entonces, con este teorema podés decidir si una sucesión monótona converge o no viendo si encontrás alguna cota para sus términos.

Ejemplo: $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ es decreciente $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ y también es acotada porque como $n \geqslant 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{m} \leq 1$. Por el teorema anterior, concluímos que $\left\{\frac{1}{m}\right\}$ es una <u>sucesión</u> <u>convergente</u>.

Por otra parte este teorema se entiende intuitivamente. Si los a_m vienen creciendo y creciendo, pero no pueden pasar un cierto valor M, entonces seguro van a tener que tender a algún valor menor o igual a M.

Teorema del sandwich :)

Muchas veces te van a pedir que decidas si una sucesión es convergente o no y, en caso en que lo sea, buscar el límite. Muchas veces encontrar el límite es fácil si reemplazás m por x y usás los métodos de la unidad II. Otras veces no es posible resolver la indeterminación por ese camino. En algunos casos te puede servir este teorema:

Si a_m, b_m y c_m son sucesiones tales que:

$\boxed{a_m \leq b_m \leq c_m}$ y además $\lim_{m \to \infty} a_m = \lim_{m \to \infty} c_m = L$

entonces: $\boxed{\lim_{m \to \infty} b_m = L}$

<u>Ejemplo</u>: Dada una b_m tal que:

$$\frac{n^2+1}{3n^2-1} \leq b_n \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\sqrt[n]{4}$$

podemos obtener el límite de b_n sacando los límites de las sucesiones que la acotan, si estos límites son iguales coincidirán con el límite de b_n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overbrace{1/n^2}^{\to 0}}{3-\underbrace{1/n^2}_{\to 0}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0} + \frac{1}{3}\sqrt[n]{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\underbrace{(4)^{\overbrace{1/n}^{\to 0}}}_{\to 1} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, por el teorema del sandwich:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}}$$

Definición de sucesiones por recurrencia:

Como vimos, una sucesión se puede definir a través de la forma del término general (por ej: $a_n = n^{1/2}$). Otra forma de definir una sucesión es por recurrencia. En este caso, el valor de un término depende del valor de los términos anteriores. Por ejemplo:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n . a_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases} \Longrightarrow \text{La sucesión es: } a_1 = 1 \;;\; a_2 = 2\,a_1 = 2$$

$$a_3 = 3\,a_2 = 6 \;;\; a_4 = 4\,a_3 = 24 \;;\; \text{etc...}$$

Es necesario definir el valor a_1 aparte, ya que todos los otros valores de la sucesión dependerán de éste.

Subsucesiones:

Dada una sucesión $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$

se pueden tomar infinitas subsucesiones tomando sólo ciertos términos de esta sucesión (respetando el orden de aparición en $\{a_n\}$). Es decir, dado un conjunto de números $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ tal que: $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ y k_i naturales,

$$\boxed{\{b_n\} = \{a_{k_n}\} = a_{k_1}; a_{k_2}; a_{k_3}; \ldots}$$

es una subsucesión de $\{a_n\}$.

Ejemplo: $\{a_n\} = 0; 3; 5; 9; -1; 10; 1; 5; \ldots$

Dos posibles subsucesiones serían:

$\{b_n\} = 0; 5; -1; 1; \ldots$ (con $k_1 = 1$; $k_2 = 3$; $k_3 = 5$; $k_4 = 7 \ldots$)

$\{c_n\} = 3; 9; 1; 5; \ldots$ (con $k_1 = 2$; $k_2 = 4$; $k_3 = 7$; $k_4 = 8 \ldots$)

Teorema:

Dada una sucesión $\{a_n\}$ convergente, cualquier subsucesión suya también será convergente y tendrá el mismo límite.

Como conclusión de este Teorema podemos decir que, si dada una sucesión encontramos dos subsucesiones con distinto límite, entonces la suc. original no es convergente.

Definición de serie:

Dada una sucesión: $\boxed{a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots}$

Podemos armar una nueva sucesión de manera que el término S_m de esa sucesión sea igual a la suma de los m primeros términos de $\{a_m\}$

Es decir:

$$\boxed{S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \sum_{k=1}^{m} a_k}$$

Esta sucesión $\{S_m\}$ de "sumas parciales" se llama serie.

Por ejemplo: La serie correspondiente a la sucesión $\left\{a_m = \frac{1}{m}\right\}$ es $\left\{S_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right\}$

Convergencia:

Dado que una serie es un caso particular de sucesión, el criterio de convergencia es el mismo. Es decir, la serie es convergente si existe un S tal que: $\boxed{\lim_{m\to\infty} S_m = S}$

Al límite S se le llama suma y se escribe:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)}_{S_m} = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S}$$

Notación: Para indicar los términos de una serie usaremos $\boxed{\sum a_n}$.

Propiedad de las series convergentes:

Dadas dos series convergentes $\sum a_n$ y $\sum b_n$ y dos constantes α y β, la nueva serie $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ también converge y su suma viene dada por:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k}$$

Condición necesaria para la convergencia de una serie

Si la serie $\sum a_n$ es convergente entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (O sea, los términos de la sucesión correspondiente a esa serie tienden a cero).

Otra forma de expresar este teorema es:

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \text{la serie } \sum a_n \text{ no converge}}$$

Este es un teorema muy útil. Si te preguntan si una serie $\sum a_n$ converge o no y vos verificás que la sucesión a_n diverge, o tiene límite no nulo, podés afirmar que $\sum a_n$ diverge y punto.

Ejemplo: $\sum \sqrt{n}$ es una serie no convergente.
Esto se prueba de forma directa viendo que:
$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty$ y no cero.

Ojo: si llegás a que $\lim_{n \to \infty} a_n$ sí tiende a cero, eso no te asegura que la serie $\sum a_n$ sea convergente, sólo que es posible que lo sea.

Serie geométrica:

Las series geométricas tienen la forma $\boxed{\sum x^n}$ donde x es un número real fijo.
Estas series se suelen empezar con $n=0$, o sea que S_n será:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

Podemos obtener la fórmula para el término S_n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ominus \quad S_n &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \\ x \cdot S_n &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1} \end{aligned} \quad \cdot x$$

Multiplico por x la de arriba y las resto.

$$(1-x) S_n = 1 - x^{n+1} \Longrightarrow \boxed{S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}} \quad x \neq 1$$

Para $x=1$ es fácil: $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n+1$

Teniendo la fórmula podemos calcular el límite (si es que existe) de esta serie:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } \boxed{|x|<1}$$

Si $|x| \geq 1$ el límite tiende a ∞ y la serie no converge.

Entonces: Si $|x|<1$, la serie $\sum x^n$ converge y su suma es $\boxed{\frac{1}{1-x}}$.

Ejemplo: Obtener la suma para la serie $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^{k-1}}$

Primero la llevamos a la forma de la serie geométrica:

este es x.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k 3^{-1}} = \frac{2}{3^{-1}} \sum_{k=1}^{n} 3^{-k} = 6.\left[\sum_{k=0}^{n} \left(3^{-1}\right)^k - 1\right]$$

Las constantes las podés sacar factor común

Le agrego el término para $k=0$ y se lo resto afuera (vale $(3^{-1})^0 = 1$)

Ahora sí sacamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left[6\left(\sum_{k=0}^{n}\left(3^{-1}\right)^k - 1\right)\right] = 6.\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(3^{-1}\right)^k\right] - 6$$

con la fórmula de la serie geom.

$$= 6.\frac{1}{1-3^{-1}} - 6 = \boxed{3}$$

Serie armónica:

La serie armónica es $\boxed{\sum \frac{1}{n}}$. Se puede demostrar que esta serie es divergente.

Si tomamos la forma más general: $\boxed{\sum \frac{1}{m^p}}$

se puede demostrar que sólo será convergente si $p>1$. Es decir:

$$\boxed{\sum \frac{1}{m^p} \begin{cases} \text{converge si } p>1 \\ \underline{\text{no}} \text{ converge si } p \leq 1 \end{cases}}$$

(ver demostración más adelante)

Criterios de convergencia para series de términos no negativos.

Muy pocas veces es posible obtener la suma de una serie (como en el caso de las geométricas). Lo que en general se puede saber es si es convergente o no. Hasta ahora tenemos un criterio: si los términos a_m no tienden a 0, seguro no converge. Pero en caso de que sí tiendan a 0 habrá que probar por algún método si efectivamente converge. A continuación vamos a ver algunos métodos para el caso en que los a_m son positivos o cero, pero nunca negativos.

Criterio de comparación

Si $a_m \geq 0$ y $b_m \geq 0$ para todo $m \geq 1$, y existe una constante positiva C tal que: $\boxed{a_m \leq C\, b_m}$

para todo m, entonces, si $\sum b_m$ converge, $\sum a_m$ también converge.

La conclusión de este teorema se puede formular también de la siguiente manera: si $\sum a_m$ no converge $\sum b_m$ tampoco lo hará.

Nota: Si se suprimen un N° finito de términos al principio de una serie la convergencia o divergencia no se ve afectada. Por lo tanto, el teorema anterior también vale si sólo se verifica $a_m \leq c\, b_m$ para $m \geq N$ (donde N es un N° fijo).

Ejemplo: Queremos saber si $\sum \frac{1}{m!}$ es convergente. Suponemos que sí y para probarlo buscamos una b_m que la acote y para la cual sepamos que converge. Veamos

$$m! = \underbrace{m.(m-1)\dots 3.2}_{\substack{m-1 \text{ factores mayores} \\ \text{o iguales a } 2.}}.1 \geq \underbrace{2.2\dots 2}_{m-1 \text{ veces}} = 2^{m-1}$$

$$\Rightarrow m! \geq 2^{m-1} \Rightarrow \frac{1}{2^{m-1}} \geq \frac{1}{m!} \Rightarrow \boxed{2.2^{-m} \geq \frac{1}{m!}}$$

Entonces: $b_m = 2^{-m}$ y $c = 2$

Como $\sum b_m$ converge (geométrica con $x = 2^{-1}$), sabemos que $\boxed{\sum \frac{1}{m!}}$ también converge.

Nota: También podés usar este criterio para probar que alguna serie $\sum b_m$ diverge, buscando alguna $\sum a_m$ que diverja tal que $a_m \leq c b_m$.

Criterio de comparación por paso al límite

Si $a_m \geq 0$ y $b_m \geq 0$ para todo $m \geq 1$ y

$$\boxed{\lim_{m \to \infty} \frac{a_m}{b_m} = 1}$$

entonces $\sum a_m$ converge $\Longleftrightarrow$ $\sum b_m$ converge

Si, en cambio; ese límite es cero. La implicación sólo va hacia la izquierda ($\sum b_m$ converge $\Longrightarrow \sum a_m$ converge).

Nota: Cuando $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{a_m}{b_m} = 1$ se dice que $\{a_m\}$ y $\{b_m\}$ son sucesiones asintóticamente iguales.

Ejemplo: La serie $\sum \dfrac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$ es no convergente.

Esto lo sabemos porque la comparamos con la serie armónica $\sum \dfrac{1}{m}$:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1/m}{1/\sqrt{m(m+1)}} = \lim_{m \to \infty} \frac{\sqrt{m(m+1)}}{m} = \lim_{m \to \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{m}} = 1$$

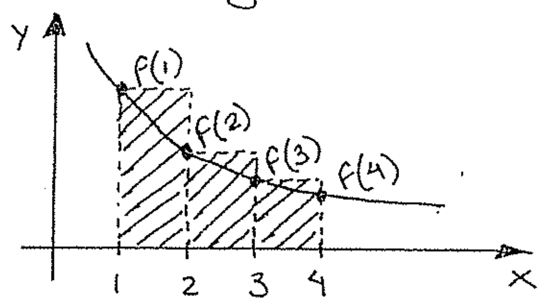
Como $\sum \dfrac{1}{m}$ no converge y es asintóticamente igual a $\sum \dfrac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$ deducimos que tampoco ésta converge.

Criterio de la integral: Sea $f(x)$ una función positiva decreciente, definida para todo real $x \geq 1$

Sean: $\boxed{S_m = \sum_{k=1}^{m} f(k)}$ y $\boxed{\tau_m = \int_1^m f(x)\,dx}$

para $m \geq 1$. Entonces o ambas sucesiones $\{S_m\}$ y $\{\tau_m\}$ convergen, o ambas divergen.

Gráficamente:



τ_m es igual al área bajo la curva $f(x)$ desde $x=1$ hasta m. S_m, en cambio, es igual a la suma de las áreas de los cuadraditos (cuya área es, justamente, $f(k)$) hasta m. Lo que el Teorema dice (y que acá no vamos a demostrar) es que ambas sucesiones se comportan igual: o las dos convergen, o las dos divergen.

Ejemplo: Vamos a demostrar que la serie $\sum \frac{1}{m^p}$ converge sólo si $p>1$. Para eso usamos el Teorema anterior con $\boxed{f(x) = \frac{1}{x^p}}$, entonces:

$\boxed{S_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^p}}$ (es, justamente, la serie armónica generalizada $\sum 1/m^p$)

$$y \quad \tau_m = \int_1^m \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^m = \dfrac{m^{1-p}-1}{1-p} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(|x|)\Big|_1^m = \ln(m) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Ahora vemos si τ_n converge o no y en qué casos:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } 1-p<0 \ (p>1) \\ \infty & \text{si } 1-p>0 \ (p<1) \end{cases} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = \infty \quad \text{si } p=1 \end{cases}$$

Entonces: τ_n sólo converge si $p>1$. Por el teorema, S_n se comportará igual.

Criterio de la raíz (Cauchy)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos tales que: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell}$

Entonces:
- Si $\ell<1$, $\sum a_n$ converge
- Si $\ell>1$, $\sum a_n$ diverge
- Si $\ell=1$, no se puede saber sobre la convergencia de $\sum a_n$.

Entonces, este criterio es muy práctico y útil siempre que ℓ no te de 1. (En ese caso hay que pasar a usar algún otro criterio)

Ejemplo: $\sum n^{-n}$ converge?

Usamos el criterio de la raíz:

ℓ es menor q' 1.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ (<1)$$

Por lo tanto $\sum n^{-n}$ sí converge.

Criterio del cociente (D'Alembert)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tales que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell}$$

Entonces:
- Si $\ell < 1$, $\sum a_n$ converge
- Si $\ell > 1$, $\sum a_n$ diverge
- Si $\ell = 1$, no se sabe.

Ejemplo: Decidir si $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge o no.

Hacemos $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ para usar el criterio del cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

usando $\begin{cases} (n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \dots 1 = (n+1) \cdot n! \\ (n+1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n+1) \end{cases}$

NOTA: La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión que aparece por todos lados. Se puede demostrar que es monótona creciente y que, además, es acotada. Por lo tanto, por uno de los teoremas que vimos en la parte de sucesiones, podemos deducir que converge. El límite al cual converge es el número $\boxed{e}$.
O sea que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182\dots$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \Rightarrow \ell < 1$$

Tiende a "e", como dijimos recién

Por lo tanto $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

Series Alternadas:

Hasta ahora vinimos tratando con series de términos no negativos. Las series alternadas son aquellas cuyos términos son positivos y negativos de forma alternada. Es decir, son de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 \dots + (-1)^{k-1} a_k + \dots$$

donde los $a_k > 0$.

Regla de Leibniz: Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite cero, la serie alternada $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

Además, si S es la suma de esa serie alternada y S_n la suma parcial hasta n, se tiene:

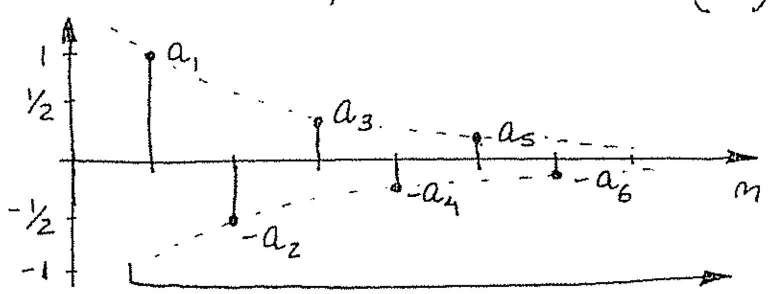
$$0 < (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1}$$

Entonces, lo que dice Leibniz es: si en vez de tomar la suma total de la serie, S, se toma la suma parcial hasta m, S_m, el error "$S - S_m$" cumple lo siguiente:

- $(-1)^m \cdot (S - S_m) > 0 \implies$ o sea que el signo del error es $(-1)^m$, que es el signo del primer término no sumado en S_m.
- $(-1)^m (S - S_m) < a_{m+1} \implies$ el valor del error es menor que el valor absoluto del primer término no sumado en S_m.

<u>Ejemplo</u>: $a_m = \frac{1}{m}$ es monótona decreciente y su límite es cero. Por la regla de Leibniz sabemos que $\sum (-1)^{m-1} \frac{1}{m}$ converge.

Gráficamente, la sucesión $(-1)^{m-1} \, 1/m$ es:



S es la suma de todos estos valores

S_5 es la suma hasta $m = 5$

$S - S_5$ es la suma desde $m = 6$ en adelante.

Leibniz dice, por ejemplo, que: (con $m = 5$)

$$0 < -(S - S_5) < \frac{1}{6}$$

Convergencia absoluta y condicional

Como vimos recién, la serie $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ converge.
Sin embargo $\sum \frac{1}{n}$ no converge. Esto implica que, dada una serie $\sum a_n$ convergente ($a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ en el ejemplo), la serie $\sum |a_n|$ no necesariamente converge. ($|a_n| = \frac{1}{n}$ porque al sacar el módulo desaparece el signo).

El siguiente teorema dice que, en cambio, la implicación inversa sí vale:

Teorema: Dada una serie $\sum a_n$, si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

Entonces se define:

Serie absolutamente convergente: Una serie $\sum a_n$ es abs. conv. si $\sum |a_n|$ converge.

Serie condicionalmente convergente: Una serie $\sum a_n$ es cond. conv. si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge.

Por lo tanto, la serie $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente.

Por otra parte, la serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ es absolutamente convergente porque $\sum \frac{1}{n^2}$, como sabemos, es convergente.

Series de funciones

Hasta ahora hemos tratado con sucesiones y series cuyos términos eran números reales. Ahora vamos a considerar sucesiones $\{f_n\}$ donde cada término es una función real. Cada una de estas funciones $f_n(x)$ tiene un dominio D, común para todas. Para cada $x \in D$ podemos construir otra sucesión $\{f_n(x)\}$ de números, donde los términos son los correspondientes valores de las funciones en x.

Queda definida, entonces, la función límite f:

$$\boxed{f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)} \quad \text{con } x \in S$$

donde S es el conjunto de puntos x para los cuales la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge.

Decimos así, que la sucesión $\{f_n\}$ converge a f en el conjunto S.

Ejemplo: Tomamos $f_n(x) = x^n$ con $0 \leq x \leq 1$ (o sea que $D = [0; 1]$). La función límite es:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

En este caso S coincide con D porque $\{f_n(x)\}$ converge para todo x en D.

Una serie de funciones es, como debés suponer, una sucesión de sumas parciales de términos de una sucesión de funciones $\{f_n\}$. Entonces, los términos de una serie de funciones son:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

Término enésimo de la serie.

También en este caso, para cada x, habrá una serie numérica correspondiente, $\sum f_n(x)$.

Series de potencias: Tomando los términos $\boxed{f_n(x) = a_n\,(x-a)^n}$, la serie de funciones correspondiente se llama serie de potencias de $x-a$.

Para cada x la serie numérica correspondiente tiene términos de la forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-a)^k = a_0 + a_1\,(x-a) + \ldots + a_n\,(x-a)^n$$

Estas series convergerán o no dependiendo de los a_n y del valor de x.

Radio de convergencia: es el "radio" del intervalo de centro "a" para el cual se cumple que:

- para todos los x pertenecientes a ese entorno la serie de potencias converge.
- para todos los x exteriores a él la serie diverge.

<u>Ejemplo</u>: Buscamos el radio de convergencia para la serie de potencias $\sum \frac{1}{n!} x^n$ ($a=0$, en este caso).

Para eso vamos a usar el criterio del cociente.

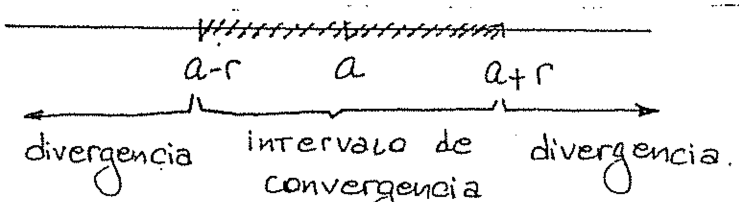
Como, si $x<0$, esa no es una serie de términos positivos, para poder usar el criterio vamos a probar conv. abs. Si $\sum \underbrace{\left|\frac{1}{n!} x^n\right|}_{\text{estos son los } a_n \text{ para el criterio}}$ converge $\Rightarrow \sum \frac{1}{n!} x^n$ converge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n!} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

Concluímos, entonces, que la serie $\sum \frac{1}{n!} x^n$ converge absolutamente para cualquier valor de x.

Entonces, el radio de convergencia de esta serie de potencias es ∞. (converge $\forall x \in \mathbb{R}$).

Gráficamente, el intervalo y el radio de convergencia son:



Finalmente, cada serie de potencias define una función <u>suma</u> cuyo valor en cada x del intervalo de conv. es:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k}$$

→ o sea, $f(x)$ es el límite de la serie $\sum a_n (x-a)^n$ (en los x en que este límite es finito)

Se dice, entonces, que la serie representa la función f en el intervalo $(a-r; a+r)$ y se la denomina desarrollo en serie de f según potencias de a.

Propiedades de las funciones representadas por series de potencias

Teorema 1: Si una función está representada por la serie de potencias $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k}$ ⊛

en el intervalo $(a-r; a+r)$; entonces será continua en ese intervalo y su integral en cualquier intervalo $[a-R; a+R]$ (con $R<r$) podrá calcularse integrando la serie término a término.

Por ejemplo, para todo $x \in (a-r; a+r)$ se tiene

$$\int_a^x f(\tau)\,d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^x (\tau-a)^k\,d\tau = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}}$$

representación en serie de $\int_a^x f$

Por otra parte, se puede demostrar que el radio de convergencia de la serie original y el de la serie integrada son iguales (r en ambos casos)

Teorema 2: Si una función f está representada por la serie de potencias ⊛ en el intervalo $(a-r; a+r)$ de convergencia; entonces existe la derivada $f'(x)$

para cada x del intervalo de conv. y vale:

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k.a_k\,(x-a)^{k-1}}$$ (el término para $k=0$ desaparece porque es constante y al derivar se va).

Además, el radio de conv. de esta serie derivada también es igual a r (como para la serie original).

<u>Serie de Taylor generada por una función</u>

Si a la expresión $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-a)^k$ la derivamos m veces queda

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k!\,a_k\,(x-a)^{k-m}$$ (el único término que no depende de $(x-a)$ es el q' tiene $k=m$)

y evaluando en $x=a$:

$$f^{(m)}(a) = m!\,a_m$$

Entonces: $$\boxed{a_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}}$$ para cada $m \geq 0$

Y esa es la forma de calcular los coeficientes de la representación en serie de potencias de $f(x)$.

<u>Teorema</u>: Si dos series de potencias, $\sum a_m(x-a)^m$ y $\sum b_m(x-a)^m$, tienen la misma función suma $f(x)$ en un cierto entorno de "a"; entonces $\boxed{a_m = b_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}}$.

Entonces, toda función que tenga derivadas de cualquier orden en un intervalo abierto en torno al punto "a" (infinitamente derivable, diremos) tiene la siguiente representación en serie de potencias

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}$$

donde $f^{(0)}(a)$ (el primer término de la sumatoria) es, simplemente, $f(a)$, la función sin derivar evaluada en "a".
Esta representación se llama Serie de Taylor generada por f alrededor del punto "a".

Como ya debés haber notado, los términos de esta serie son los mismos que los del polinomio de Taylor. Es decir, las sumas parciales de esta serie son los polinomios de Taylor de distintos órdenes de $f(x)$.

FIN TEORIA UNIDAD 7

EJERCICIOS_UNIDAD VII

$\boxed{1}$ Obtener el término general de la siguiente sucesión:

$-1 ; \frac{1}{8} ; \frac{-1}{27} ; \frac{1}{64} ; \dots$

Fijate que los denominadores, en cada término, coinciden con n^3 $(1, 8, 27, 64 \dots)$ y que, además, el signo es alternado pudiéndose expresar como $(-1)^n$. Entonces:

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}} \quad n \geq 1$$

<u>Nota</u>: No hay un método mecánico para resolver ejercicios como este, es simplemente al tanteo, probando distintas opciones a ver cuál da.

$\boxed{2}$ Obtener los 5 primeros términos de la siguiente sucesión (expresada de forma recurrente):

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2^n \end{cases}$$

para $n > 1$
(cada término depende del término anterior.)

Bueno, es fácil: $a_1 = \boxed{3}$

$a_2 = a_{2-1} + 2^2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = \boxed{7}$

$a_3 = a_2 + 2^3 = 7 + 8 = \boxed{15}$

$a_4 = a_3 + 2^4 = 15 + 16 = \boxed{31}$

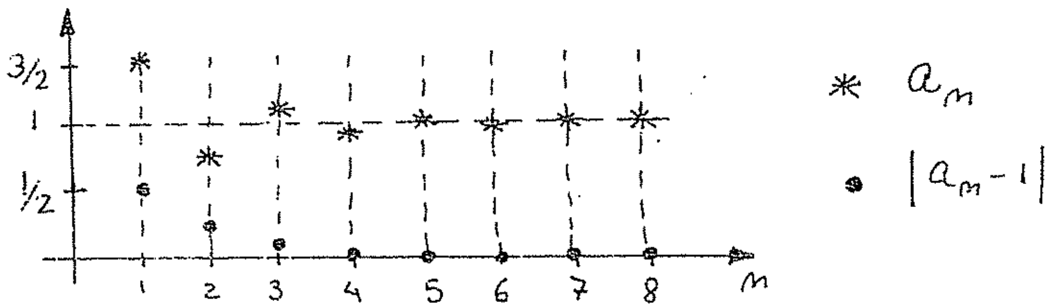
$a_5 = a_4 + 2^5 = 31 + 32 = \boxed{63}$

$\boxed{3}$ Dada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ / $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

a) Completar la siguiente tabla y representar:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	$3/2$	$3/4$	$9/8$	$15/16$	$33/32$	$63/64$	$129/128$	$255/256$
$\lvert a_n - 1\rvert$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$	$1/128$	$1/256$

$$\lvert a_n - 1\rvert = \left| \cancel{1} - \frac{(-1)^n}{2^n} \cancel{+1} \right| = \frac{1}{2^n}$$



Como se ve en el gráfico, los términos a_n oscilan alrededor de 1, acercándose cada vez más.
Los términos $|a_n - 1|$ son monótonamente decrecientes, acercándose a 0.

b) Calcular el límite de la sucesión $\{a_n\}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \boxed{1}$$

$(-1)^n$ oscila, pero es acotada.
Como $2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, entonces $\dfrac{(-1)^n}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Entonces, como era evidente del gráfico, el límite de la sucesión es 1.

c) Hallar todos los n tales que la distancia entre a_n y el límite sea menor que 0,1.

La distancia entre a_n y 1 es $|a_n - 1| = \frac{1}{2^n}$.

Ponemos la condición: $|a_n - 1| < 0{,}1 \implies$

$\frac{1}{2^n} < 0{,}1 \implies \frac{1}{0{,}1} < 2^n \implies 10 < 2^n \implies$

$\log_2 10 < n \implies 3{,}32 < n \implies \boxed{n \geq 4}$

Entonces, de a_4 en adelante se cumple lo pedido

---

4 Demostrar por definición que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2-n+1} = 3}$$

↳ El límite se puede obtener con los mismos métodos que se usan para variable real (como si en vez de n dijera x). Es decir:

(Las flechitas significan "tiende a".)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(\overbrace{3}^{\to 3} + \overbrace{1/n^2}^{\to 0})}{\cancel{n^2}(\underbrace{1}_{\to 1} - \underbrace{1/n}_{\to 0} + \underbrace{1/n^2}_{\to 0})} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

En este ejercicio se pide que compruebes que ese es el límite por definición. La def. de límite dice que 3 es el límite de $\{a_n\}$ si: para cada ε (real positivo) existe un N (positivo y dependiente de ε)

Tal que: $|a_m - 3| < \varepsilon$ para todo $m \geq N$

Entonces, para verificar eso, empezamos imponiendo la condición $|a_m - 3| < \varepsilon$ y buscamos luego el N a partir del cual eso se cumple. Si ese N existe, se prueba que 3 era efectivamente el límite de la sucesión:

$$\left| \frac{3m^2+1}{m^2-m+1} - 3 \right| = \left| \frac{\cancel{3m^2}+1 - \cancel{3m^2}+3m-3}{m^2-m+1} \right|$$

$$= \left| \frac{3m-2}{m^2-m+1} \right| < \varepsilon \Leftarrow \underline{\underline{\text{condición} *}}$$

Ahora se hace la siguiente cadena de desigualdades para simplificar la búsqueda del N a partir del cual se cumple la condición.

$$\underset{(1)}{\frac{3m-2}{m^2-m+1}} \underset{(2)}{<} \frac{3m}{m^2-m+1} \underset{(3)}{<} \frac{3m}{m^2-m} \underset{(4)}{\overset{\boxed{\text{si } m>2}}{<}} \frac{3m}{m^2-\frac{1}{2}m^2}$$

$$= \frac{3m}{\frac{1}{2}m^2} = \boxed{\frac{6}{m} < \varepsilon}$$ ← a esto se redujo la condición *

$\frac{6}{m} < \varepsilon \implies \frac{6}{\varepsilon} < m \implies$ Simplemente tomando a N igual al primer entero mayor a $\frac{6}{\varepsilon}$ (para el ε que quieras), se cumple la condición *. Por lo tanto se ha probado que 3 es el límite de la sucesión $\{a_m\}$.

Justificaciones: Todas las desigualdades obtenidas tienen como meta llegar a una expresión simple del tipo $C/m < \varepsilon$ (donde C es una cte.).

(1) En esta expresión sacamos las barras de módulo. Podemos hacer eso si consideramos que:

$$\begin{cases} 3m-2>0 & \rightarrow \text{ esto es verdad si } m > 2/3 \\ m^2-m+1>0 & \rightarrow \text{ esto es verdad siempre porque} \end{cases}$$

m^2-m+1 es una parábola hacia arriba y sin raíces (o sea, su valor es siempre >0)

Entonces, poniendo como condición que $m > 2/3$ (lo cual no tiene sentido en este caso porque eso siempre es verdad, ya que $m \geq 1$, pero podría tener sentido si hubiera dado una condición del tipo $m > 3$), se pueden sacar las barras de módulo.

(2) Esta desigualdad sale, simplemente de que: $3m-2 < 3m$ (siempre).

(3) Como $$\underbrace{m^2-m+1 > m^2-m}_{\text{valores positivos}} \Rightarrow \frac{3m}{m^2-m} > \frac{3m}{m^2-m+1}$$

valores positivos, por eso puedo pasar dividiendo sin dar vuelta la desigualdad.

(4) Este es el truquito final. Consideramos $m > 2$, entonces: $\frac{1}{2}m > 1 \xRightarrow{\cdot m} \frac{1}{2}m \cdot m > m \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}m^2 > m \xRightarrow[\cdot(-1)]{} -\frac{1}{2}m^2 < -m \xRightarrow[+m^2]{} m^2 - \frac{1}{2}m^2 < m^2 - m$$

$$\Longrightarrow \frac{3n}{n^2-n} < \frac{3n}{n^2-\frac{1}{2}n^2}$$

Listo, el resto sale directo.

Podemos decir, entonces, que $|a_n-3| < 0{,}01$ (por ejemplo) si $n > \frac{6}{0{,}01} = 600$. O sea, desde $N=601$ en adelante, los términos de la sucesión están a menos de 0,01 de distancia al 3.

$\boxed{5}$ Usando el teorema de intercalación probar que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=\infty$$

Hay que buscar dos sucesiones a_n y c_n tales que:

$$a_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}} \le c_n$$

y que, además, tengan límite ∞. (En realidad cuando L es ∞ basta con encontrar a_n que sea menor y que tienda a ∞).

Para eso vemos que todos los sumandos de la serie tienen la forma $1/\sqrt{n+i}$, con $i<n$, y, entonces:

$$n+i \le 2n \quad (i<n) \Longrightarrow \frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+i} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+i}} \ge \frac{1}{\sqrt{2n}} \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ sumandos}} \ge \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Con eso obtuvimos $\boxed{a_n = \frac{\sqrt{n}}{2}}$, la cual, obviamente, tiene límite ∞.

Además, como $n+i \geq n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+i}} \Longrightarrow$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \Longrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

y así tenemos $c_n = \sqrt{n}$ cuyo límite también es ∞.

$\boxed{6}$ Calcular los siguientes límites utilizando $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n-1]{(3n-1)^2} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m^2} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m \cdot m}$$

Llamamos $m = 3n-1$ (m ya no es entero)

$$= \lim_{m\to\infty} \underbrace{\sqrt[m]{m}}_{\to 1}\,\underbrace{\sqrt[m]{m}}_{\to 1} = \boxed{1}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}}\right]^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Bigg[\underbrace{\frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}}{2}}_{\to 1/2}\Bigg]^n = \boxed{0}$$

$\boxed{7}$ Demuestre que la siguiente sucesión es <u>no</u> convergente. $\left\{ a_n = (-1)^n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Esta sucesión es : $-1 ; 1 ; -1 ; 1 ; \ldots ; -1 ; 1 ; -1 ; \ldots$

Los términos con n par forman una subsucesión $b_n = 1$ cuyo límite es 1.

Los términos con n impar forman una subsucesión $c_n = -1$ cuyo límite es -1.

Como los límites de dos subsucesiones de a_n son distintos, entonces a_n <u>no</u> converge (no tiene límite)

$\boxed{8}$ Demostrar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

<u>Falsa</u>: Para demostrarlo ponemos un contraejemplo y listo. Con $a_n = n$ y $b_n = n^2$ se cumple la hipótesis (los límites son ∞) pero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 1$$

b) Toda sucesión acotada es convergente.

<u>Falsa</u>: Un contraejemplo es la sucesión del ej 7. $a_n = (-1)^n$ es acotada: $|a_n| \leq 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ y sin embargo, como ya probamos, no es convergente.

$\boxed{9}$ Calcular, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2^n - 1}$

b) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{2n}$

c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ d) $a_n = \frac{2n!}{n!-1}$

e) $a_n = \sqrt{n(n+4)} - n$ f) $a_n = \log(n+c) - \log(n)$

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overbrace{1/2^n}^{\to 0}}{1-\underbrace{1/2^n}_{\to 0}} = \boxed{1}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{2n} =$$

divido: $\begin{array}{r|l} 3n+2 & 3n+1 \\ -\,3n+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$

(Vamos a usar $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, así que tratamos de llevarlo a esa forma).

$$= \lim_{n\to\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}}_{\text{todo esto tiende a "e"}}\Bigg]^{\overbrace{\frac{1}{3n+1}\cdot 2n}^{\text{esto tiende a "}\frac{2}{3}\text{"}}} = \boxed{e^{2/3}}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \boxed{0}$$

Esto se debe a que $\frac{1}{2^n}$ es una sucesión convergente con límite igual a cero. y $(-1)^n$ es una sucesión no convergente (oscilante), pero acotada.

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{n!-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{n!-1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-\underbrace{\frac{1}{n!}}_{\to 0}} = \boxed{2}$$

e) $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{n(n+4)} - n}_{\substack{\text{indeterminación} \\ (\infty - \infty)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n(n+4)} - n\right)\left(\sqrt{n(n+4)} + n\right)}{\sqrt{n(n+4)} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n+4)}^2 - n^2}{\sqrt{n(n+4)} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} + 4n \cancel{- n^2}}{\sqrt{n(n+4)} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\frac{\sqrt{n(n+4)}}{n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0}} + 1} = \boxed{2}$$

F) $$\lim_{n\to\infty} \left[\log(n+c) - \log(n)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\log\left(\frac{n+c}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \underbrace{\frac{c}{n}}_{\to 0}\right) = \log(1) = \boxed{0}$$

Viste? No tiene nada raro, es lo mismo que en la unidad II pero con n en vez de x...

$\boxed{10}$ Para las siguientes sucesiones:

$\{a_n\} = -2; 0; 2; -2; 0; 2; \ldots$ $\qquad \{b_n\} = \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \ldots$

Obtener:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

a) Esta sucesión no tiene límite (es oscilante).
Fijate que hay 3 subsucesiones que tienen $\neq$ límites

$\{a'_m\} = -2; -2; -2; \ldots \rightsquigarrow$ Límite $= -2$

$\{a''_m\} = 0; 0; 0; \ldots \rightsquigarrow$ Límite $= 0$

$\{a'''_m\} = 2; 2; 2; \ldots \rightsquigarrow$ Límite $= 2$

b) $\lim\limits_{m \to \infty} b_m = 0$. ; obvio, no? Esta sucesión es $b_m = \frac{1}{m}$ para $m \geq 5$, así que converge a 0.

c) Como $\{a_m\}$ es acotada $\left(|a_m| \leq 2\right)$, aunque no converja, y $\{b_m\}$ tiene límite $= 0 \implies \lim\limits_{m \to \infty} (a_n b_m) = 0$

d) $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{a_m}{1/m} = \lim\limits_{m \to \infty} m a_m$

Para la sucesión $\{m a_m\}$ hay 3 subsucesiones, una con límite $-\infty$, otra con límite 0 y otra ∞.
Por lo tanto, no tiene límite.

$\boxed{11}$ Para la sucesión $a_m = 1 + \frac{1}{m}$ decir si:

a) Crece o decrece

b) Converge o diverge

c) Es acotada o no.

Los primeros términos son: $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \ldots$

O sea: $2;\ 1{,}5;\ 1{,}33;\ 1{,}25;\ \dots$

Evidentemente es decreciente. Para probarlo comparás a_n con a_{n+1}: $a_n = 1+\frac{1}{n}$ $\quad a_{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$

Como $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \boxed{a_n > a_{n+1}}$ ⇝ sucesión <u>monótona</u> <u>decreciente</u>.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = \boxed{1} \Rightarrow$ converge

c) $\left|1+\frac{1}{n}\right| = 1+\frac{1}{n} \leq 2 \Rightarrow$ es <u>acotada</u>.

Nota: Como es monótona decreciente y acotada, necesariamente debía ser convergente.

Ahora pasamos a los ejercicios de <u>series</u>

---

12 Determinar si las siguientes series, de términos positivos, Σa_n, son convergentes o no.

a) $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$

Vamos a usar el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+1/2^{n+1}}{n+1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\to 1}\,\frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Como $\ell = \frac{1}{2}$, que es menor que 1, por el criterio del cociente Σa_n <u>converge</u>.

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Este es muy fácil. Usamos la condición necesaria para la convergencia de una serie. Como $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es cero $\Longrightarrow$ la serie $\sum a_n$ no converge.

c) $a_n = \frac{n!}{(n+2)!}$

Primero simplificamos a_n:

$$a_n = \frac{\cancel{n!}}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Y ahora podemos usar el criterio de paso al límite con $b_n = \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n+2}{n}\,\frac{n+1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\right)\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)} = \boxed{1}$$

Como $b_n = \frac{1}{n^2}$ es una armónica generalizada con $p = 2$, sabemos que $\sum b_n$ converge y, como el límite del cociente dió 1 $\Rightarrow \sum a_n$ también converge.

d) $a_n = n\,e^{-n^2}$

Podemos usar el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\; e^{-n^2/n}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} e^{-n^2/n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 \Longrightarrow \sum a_n$ converge

e) $a_n = \dfrac{\log n}{n\sqrt{n^2+1}}$

Vamos a usar dos criterios en este caso. Primero el de paso al límite con $b_n = \dfrac{\log n}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{n\sqrt{n^2+1}}}{\frac{\log n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \boxed{1}$$

Como el límite del cociente dió 1, sabemos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ se comportan igual. Pero todavía no sabemos cómo se comporta $\sum b_n$, así que vamos a usar el criterio integral para ver eso:

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2} \Longrightarrow T_n = \int_1^n \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

Para integrar eso buscás en la tabla (o lo hacés "por partes"), obteniendo:

$$t_n = \left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{\log n}{n} - \frac{1}{n} + 1$$

El límite de la sucesión T_n es:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{\log n}{n} - \frac{1}{n} + 1\right] = \boxed{1}$$

Por lo tanto, la sucesión T_n converge.

Por el criterio de la integral, la serie $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ (o sea $\sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k^2}$) se comporta igual que T_n.

Conclusión: $\sum b_n$ converge y por lo tanto $\sum a_n$ también converge.

f) $a_n = \dfrac{3^n\, n!}{n^n}$

Vamos a usar el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{3^n\, n!}{n^n}} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!}{3^n\, n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{3^n}\, 3\, \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}\, n^n}{\cancel{3^n}\, \cancel{n!}\, (n+1)^n \cancel{(n+1)}} = \frac{3\, n^n}{(n+1)^n} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 3\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{e} > 1$$

Por lo tanto $\sum a_n$ <u>no</u> converge.

g) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

Usamos también el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \frac{((n+1)\, n!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}$$

$$= (n+1)^2\, 2^{n^2-(n+1)^2} = (n+1)^2\, 2^{-2n-1} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{2^{2n}} = 0$$

(Eso probalo como quieras, es fácil. Una manera: en el ej 12.a probamos que $\sum \frac{n+1}{2^n}$ converge, con lo cual $\frac{n+1}{2^n}$ debe tener límite igual a cero y por lo tanto $\frac{(n+1)^2}{2^{2n}} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{n+1}{2^n}$ también tiene límite igual a cero.)

Listo, como el límite dió $< 1 \Longrightarrow \sum a_n$ converge

h) $a_n = \left(n^{1/n} - 1\right)^n$

Usamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(n^{1/n}-1\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{1/n} - 1\right) = \boxed{0}$$

esto tiende a 1 (es $\sqrt[n]{n}$).

Listo! Como $l < 1 \Longrightarrow \sum a_n$ converge.

$\boxed{13}$ Sabiendo que $a_n > 0$ (términos positivos) y que $\lim_{n\to\infty} (n\, a_n) = \frac{1}{2}$; probar que $\sum 4 a_n$ diverge.

Vamos a usar el criterio del paso al límite.

Como vimos, este criterio dice que si: $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Longrightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ se comportan igual.

Nota: No importa, en realidad, cuánto valga ese límite siempre que sea una constante distinta de 0 y de ∞.

Entonces, por el enunciado:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum a_n \text{ y } \sum \frac{1}{n} \text{ se comportan}$$

igual. Como $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Además, si $\sum a_n$ diverge, evidentemente $\sum 4a_n$ también diverge, ya que $\sum 4a_n = 4 \cdot \sum a_n$ y, entonces, ambas deben comportarse igual.

$\boxed{14}$ Determine la convergencia absoluta o condicional de las siguientes series alternadas.

a) $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

Primero vamos a probar si $\sum \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| = \sum \frac{\sqrt{n}}{n+100}$; converge, porque si esa serie converge, entonces la serie alternada original también converge (convergencia absoluta). Para eso, usamos el criterio de paso al límite con $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (de la cual sabemos que diverge porque es una serie armónica generalizada con $p = \frac{1}{2} < 1$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+100}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+100} = \boxed{1}$$

Por lo tanto; $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ también diverge.

Con esto probamos que la serie alternada $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ no converge absolutamente. Tenemos que ver, entonces, si converge condicionalmente, es decir, si $\sum (-1) \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ tiene suma finita. Para eso quisiéramos usar Leibniz, pero para usar Leibniz necesitamos que los términos $\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ sean monótonamente decrecientes. Vamos a ver si esto es así o no. Planteamos que lo es, o sea, que $a_{n+1} < a_n$ y vemos a qué llegamos:

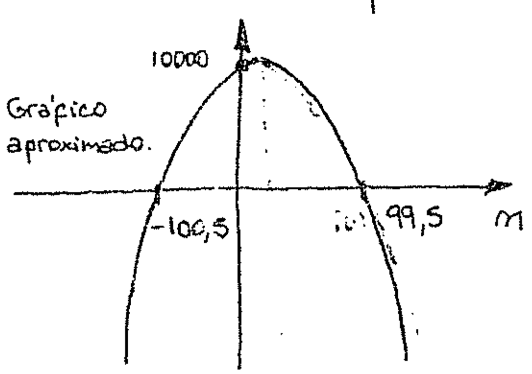
$$\left[\underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+101}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n+100}}_{a_n} \right]^{\text{elevo al cuadrado.}} \Longrightarrow$$

$$\frac{n+1}{(n+101)^2} < \frac{n}{(n+100)^2} \Longrightarrow (n+1)(n+100)^2 < n\,(n+101)^2$$

$$(n+1)(n^2+200n+10000) < n\,(n^2+202n+10201)$$

$$\cancel{n^3} + 200n^2 + 10000n + n^2 + 200n + 10000 \cancel{-n^3} - 202n^2 - 10201n < 0$$

$-n^2 - n + 10000 < 0$ ← Ahora hay que ver si esto es verdad. Graficamos, para eso, la parábola:



← O sea que: $-n^2 - n + 10000 < 0$ es verdad sólo para $\boxed{n \geq 100}$

Es decir que sólo a partir de $n = 100$ la sucesión $\sqrt{n}/n+100$ es monot. decreciente.

Sabiendo eso, podemos hacer lo siguiente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100}(-1)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{99} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}}_{\substack{\text{esta suma es} \\ \text{finita seguro, ya que tiene} \\ \text{un número finito de términos}}} + \underbrace{\sum_{k=100}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}}_{\substack{\text{esta serie sí cumple las} \\ \text{condiciones de Leibniz.} \\ \text{(Tiene términos monot. dec} \\ \text{y con límite igual a 0)}}}$$

Por lo tanto, la suma total es suma de un término finito y una serie que cumple Leibniz y por lo tanto, converge.

Conclusión $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ converge condicionalmente

b) $\sum (-1)^n \frac{n^{37}}{(n+1)!}$

Probemos primero si $\sum \frac{n^{37}}{(n+1)!}$ converge o no.

Usamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{37}}{(n+2)!}}{\frac{n^{37}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{37} \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cancel{(n+1)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{37} \frac{1}{n+2} = \boxed{0}$$

Entonces $\sum \frac{n^{37}}{(n+1)!}$ converge y, por lo tanto,

$\sum (-1)^n \frac{n^{37}}{(n+1)!}$ converge absolutamente.

Nota: No importa cuál sea el exponente de (-1) en la serie alternada, al fin y al cabo, la diferencia es una constante multiplicativa. Es decir, la serie

$\sum(-1)^n a_n$ es igual a la serie $(-1)\sum(-1)^{n-1}a_n$ y ese (-1) afuera no cambia la convergencia.

c) $\sum(-1)^n a_n$ con $a_n = \begin{cases} 1/n^3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1/n^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

<u>Nota</u>: Acá no podríamos usar Leibniz porque la sucesión a_n <u>no</u> es monótonamente decreciente. (Por ejemplo, para $n=3$ vale $1/27$ y para $n=4$ vale $1/16$, entonces $a_3 < a_4 \Rightarrow$ no es decreciente)

Probamos la convergencia de $\sum a_n$. No podemos usar el criterio del cociente porque mirá lo que pasa:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1/(n+1)^3}{1/n^2} = \dfrac{n^2}{(n+1)^3} & \text{si } n \text{ es par } (n+1, \text{ impar}) \\[2ex] \dfrac{1/(n+1)^2}{1/n^3} = \dfrac{n^3}{(n+1)^2} & \text{si } n \text{ es impar } (n+1, \text{ par}) \end{cases}$$

Como esos dos límites dan $\neq$, no sirve usar este criterio.
Lo hacemos de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \text{ impar}} \frac{1}{k^3}$$

Entonces, $\sum a_n$ es suma de dos series, de las cuales sabemos que convergen ($\sum_{k\text{ par}} \frac{1}{k^2} < \sum_{\forall k} \frac{1}{k^2}$ y como $\sum_{\forall k} 1/k^2$ converge $\Rightarrow \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{k^2}$ también converge. Lo mismo podemos decir sobre $\sum_{k \text{ impar}} \frac{1}{k^3}$.) y, por lo tanto, también converge.

<u>Conclusión</u>: $\sum (-1)^n a_n$ <u>converge absolutamente</u>

$\boxed{15}$ Demostrar que si $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces $\sum a_n^2$ es convergente. Dar un contraejemplo para la recíproca.

Vamos a usar el criterio de comparación por paso al límite (la segunda parte) que dice que: dadas $\{d_n\}$ y $\{c_n\}$ de términos positivos, si

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n} = 0 \implies$ si $\sum c_n$ converge, entonces $\sum d_n$ también converge.

Vamos a usar: $\left.\begin{aligned} d_n &= a_n^2 = |a_n|^2 \\ c_n &= |a_n| \end{aligned}\right\}$ son de términos positivos.

Entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n}{c_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|^{\cancel{2}}}{\cancel{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$

Como sabemos, por hipótesis, que $\sum a_n$ es abs. conv, entonces sabemos que $\sum |a_n|$ es convergente y, por lo tanto $\sum c_n$ es convergente. Además, debido a que $\sum |a_n|$ es conv. se debe cumplir que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Por lo tanto, el límite de $\frac{d_n}{c_n}$ da cero y $\sum c_n$ converge $\implies \sum d_n = \sum a_n^2$ <u>converge</u>.

Buscamos, ahora, un contraejemplo para la recíproca: Es fácil. Tomamos $a_n = \frac{1}{n} \Longrightarrow \sum a_n^2$ sí converge, pero $\sum a_n$ <u>no</u>.

$\boxed{16}$ Si la suma de los n primeros términos de una serie es: $\frac{n+2}{2n} - 1$, analizar la convergencia de esta serie y hallar el término a_{10}.

Una serie $\sum a_n$ es, en definitiva, una sucesión. cuyos términos son las sumas parciales (hasta n) de los a_n. El enunciado está diciendo que estos términos son iguales a "$\frac{n+2}{2n} - 1$". Es decir:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n+2}{2n} - 1$$

Es muy fácil, teniendo estos términos, analizar la convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+2}{2n} - 1\right] = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \sum a_n \ \underline{\text{converge}}$$

Para obtener el término a_{10} vemos que:

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10+2}{2.10} - 1 = \boxed{-0{,}4 = S_{10}}$$

$$\sum_{k=1}^{9} a_k = \frac{9+2}{2.9} - 1 = \boxed{-0{,}389 = S_9}$$

restando estas dos

$$\Longrightarrow S_{10} - S_9 = \boxed{a_{10} = -0{,}011}$$

$\boxed{17}$ Dada la serie alternada $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{2^n a^n}{n}$:

a) Obtener los valores de a para los cuales la serie converge absolutamente.

b) Para $a = \frac{1}{4}$, obtener el valor de la suma con error menor a $0{,}001$.

a) Usamos el criterio de la raíz con $a_n = \dfrac{2^n a^n}{n}$ para ver si converge absolutamente:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n a^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.a}{\sqrt[n]{n}} = 2a$$

Para que sea convergente: $l = 2a$ tiene que ser $< 1 \implies \boxed{a < \frac{1}{2}}$

Si $a > \frac{1}{2} \implies$ seguro diverge.

Si $a = \frac{1}{2}$, el l es $= 1$ y el criterio no sirve.

Igual, en ese caso: $a_n = \dfrac{2^n (1/2)^n}{n} = \dfrac{1}{n}$ y sabemos que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

En conclusión: $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{2^n a^n}{n}$ converge absolutamente ($\sum \dfrac{2^n a^n}{n}$ converge) sólo si $\boxed{a < \frac{1}{2}}$

b) Para $a = \frac{1}{4} \implies$ la serie es $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{1}{2^n n}$

La sucesión $\frac{1}{2^n n}$ es monótonamente decreciente y su límite es cero. Por lo tanto, por Leibniz, sabemos que esa serie converge (lo cual ya sabíamos del punto a)) y que, además:

$$0 < (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1} \qquad \left(S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2^k k} \right)$$

Calcular S es imposible, así que la podemos aproximar con la suma parcial S_n. El error cometido en ese caso será (en módulo) menor a a_{n+1}. En el enunciado piden un error menor a 0,001. Con eso sacamos n, la cantidad de términos que debemos sumar para obtener la aproximación:

$$\underset{\text{signo del error}}{(-1)^n} \underbrace{(S - S_n)}_{\text{error}} < a_{n+1} = \boxed{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < 0,01} :$$

De esta condición sale n.

Esa condición es una ecuación "trascendente" (no tiene solución explícita), para resolverla vas probando:

con $n = 3 \Longrightarrow a_{n+1} = 0,015$, no sirve

$n = 4 \Longrightarrow a_{n+1} = 0,00625 \Longrightarrow$ <u>sirve</u>!

Entonces, S_4 aproxima a S con un error menor al pedido.

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{1}{2^k k} = -\frac{1}{2 . 1} + \frac{1}{2^2 . 2} - \frac{1}{2^3 . 3} + \frac{1}{2^4 . 4}$$

$$\boxed{S_4 = -0,401}$$

18 Analizar la convergencia de la serie $\sum a_n$ con $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+2}} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+2)}}$

Veamos, $\sum a_n$ esta formada por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+2}}}_{\text{serie de términos positivos}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k(k+2)}}}_{\text{serie alternada}}.$$

Si las dos series que la componen convergen, entonces $\sum a_n$ también convergerá, siendo su "suma" la suma de las "sumas" (☺) de esas dos series.
Entonces demostramos por separado:

- Para $\dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}$ usamos el criterio del paso al límite con $b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, que por ser una armónica generalizada con $p = \frac{3}{2} > 1$, sabemos que converge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+2}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}} = \boxed{1}$$

Por lo tanto, $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n+2}}$ <u>converge</u>

- Para $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+2)}}$ usamos Leibniz. La sucesión $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ es, evidentemente, monótona decreciente y su límite es cero. Por lo tanto, <u>converge</u>.

Listo, entonces $\sum a_n$ converge.

$\boxed{19}$ Sabiendo que la suma parcial de los n primeros términos de una serie es $S_n = \dfrac{n+2}{n^2-1}$, obtener el término general a_n. Es convergente esta serie?

Para obtener a_n:

$$\left.\begin{aligned} S_n &= \frac{n+2}{n^2-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ S_{n-1} &= \frac{n-1+2}{(n-1)^2-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \end{aligned}\right\} \text{restando}$$

$$\frac{n+2}{n^2-1} - \frac{n+1}{n^2-2n} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\left[= \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n\right]} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \boxed{a_n}$$

Por lo tanto; haciendo la resta:

$$\boxed{a_n = \frac{-n^2-3n+1}{(n^2-1)\,n\,(n-2)}} \qquad \text{para } n \neq 1 \text{ y } n \neq 2$$

Que la serie converge es evidente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{0} \leftarrow \text{su suma es } 0$$

$\boxed{20}$ Si la serie $\sum \dfrac{a_n}{2^n}$ es convergente $(a_n > 0)$. Qué se puede decir sobre la convergencia de:

a) $\sum \dfrac{a_n}{(-2)^n}$ b) $\sum \dfrac{a_n}{3^n}$

a) De la parte teórica sabemos que:

si $\sum |b_n|$ converge $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ converge

Tomando $b_n = \dfrac{a_n}{(-2)^n} \Longrightarrow |b_n| = \dfrac{|a_n|}{|(-2)^n|} = \dfrac{a_n}{2^n}$ ($a_n > 0$ por hip)

Por el enunciado sabemos que $\sum \dfrac{a_n}{2^n}$ converge, por lo tanto $\sum \dfrac{a_n}{(-2)^n}$ también converge.

b) Usamos el criterio del paso al límite, con $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{3^n}}{\frac{a_n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \boxed{0}$$

Como $\sum \dfrac{a_n}{2^n}$ converge y ℓ dió 0 $\Longrightarrow$ $\sum \dfrac{a_n}{3^n}$ también converge.

$\boxed{21}$ Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge, probar que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ diverge.

Es re fácil, mirá: si $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} \neq 0$.

Sabiendo ya que los términos $\dfrac{1}{a_n}$ de la serie $\sum \dfrac{1}{a_n}$ no tienen límite nulo, queda probado que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ va a diverger. (u oscilar).

Ahora pasamos a Series de Potencias.

$\boxed{22}$ Determinar el radio de convergencia para las siguientes series de potencias y analizar el comportamiento de las mismas en los extremos del intervalo de convergencia obtenido.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)\,2^n}$ (desarrollo alrededor de $a=-3$)

Vamos a probar convergencia absoluta para poder usar el criterio del cociente (el cual precisa series de términos positivos). Si $\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$$|a_n| = \left|\frac{(x+3)^n}{(n+1)\,2^n}\right| = \frac{|x+3|^n}{(n+1)\,2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x+3|^{n+1}}{(n+2)\,2^{n+1}}}{\dfrac{|x+3|^n}{(n+1)\,2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|^{n+1}}{|x+3|^n}\,\frac{(n+1)}{(n+2)}\,\frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x+3| \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\text{tiende a } 1} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{|x+3|}{2} = \ell}$$

Por el criterio del cociente, si $\ell < 1$, la serie converge:

$$\ell = \frac{|x+3|}{2} < 1 \Longrightarrow \underbrace{|x+3|}_{\text{distancia al }(-3)\text{ menor que }2} < 2$$

Por lo tanto $\boxed{r=2}$ es el radio de convergencia.
Y el intervalo es: $(-3-2\,;\,-3+2) = (-5\,;\,-1)$

a) De la parte teórica sabemos que:

si $\sum |b_n|$ converge $\Longrightarrow \sum b_n$ converge

Tomando $b_n = \dfrac{a_n}{(-2)^n} \Longrightarrow |b_n| = \dfrac{|a_n|}{|(-2)^n|} = \dfrac{a_n}{2^n}$ ($a_n > 0$ por hip)

Por el enunciado sabemos que $\sum \dfrac{a_n}{2^n}$ converge, por lo tanto $\sum \dfrac{a_n}{(-2)^n}$ también converge.

b) Usamos el criterio del paso al límite, con $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{3^n}}{\frac{a_n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \boxed{0}$$

Como $\sum \dfrac{a_n}{2^n}$ converge y ℓ dió 0 $\Longrightarrow \sum \dfrac{a_n}{3^n}$ también converge.

$\boxed{21}$ Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge, probar que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ diverge.

Es re fácil, mirá: si $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

y por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} \neq 0$.

Sabiendo ya que los términos $\dfrac{1}{a_n}$ de la serie $\sum \dfrac{1}{a_n}$ no tienen límite nulo, queda probado que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ va a diverger. (u oscilar).

Ahora pasamos a Series de Potencias.

$\boxed{22}$ Determinar el radio de convergencia para las siguientes series de potencias y analizar el comportamiento de las mismas en los extremos del intervalo de convergencia obtenido.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)\,2^n}$ (desarrollo alrededor de $a=-3$)

Vamos a probar convergencia absoluta para poder usar el criterio del cociente (el cual precisa series de términos positivos). Si $\Sigma|a_n|$ conv. $\Rightarrow \Sigma a_n$ conv.

$$|a_n| = \left|\frac{(x+3)^n}{(n+1)\,2^n}\right| = \frac{|x+3|^n}{(n+1)\,2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x+3|^{n+1}}{(n+2)\,2^{n+1}}}{\dfrac{|x+3|^n}{(n+1)\,2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+3|^{n+1}}{|x+3|^n}\,\frac{(n+1)}{(n+2)}\,\frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x+3| \underbrace{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}_{\text{tiende a } 1} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{|x+3|}{2} = \ell}$$

Por el criterio del cociente, si $\ell<1$, la serie converge:

$$\ell = \frac{|x+3|}{2} < 1 \Rightarrow \underbrace{|x+3|}_{\text{distancia al } (-3) \text{ menor que } 2} < 2$$

Por lo tanto $\boxed{r=2}$ es el radio de convergencia.
Y el intervalo es: $(-3-2\,;-3+2) = (-5\,;-1)$

Ahora veamos en los extremos del intervalo.

$$X=-1 \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{(n+1)\,2^n} = \frac{1}{n+1}$$

Comparando con $b = 1/n$ se llega a que $\sum a_n$ no converge para $X=-1$.

$$X=-5 \Rightarrow a_n = \frac{(-2)^n}{(n+1)\,2^n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

En este caso, como $\frac{1}{n+1}$ es monot. dec. y su límite es cero; por Leibniz podemos decir que la serie alternada $\sum (-1)^n \frac{1}{n+1}$ sí converge.

Por lo tanto: $\boxed{\sum a_n \text{ converge para } x \in [-5;-1)}$

Nota: Se puede probar que fuera del intervalo $[-5;-1)$ la serie no converge, ni siquiera condicionalmente (que es lo que en realidad importa y no la conv. absoluta). Esto se hace viendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)\,2^n} \neq 0$ en esos casos.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n!}$ ($a=1$ en este caso)

Usamos, otra vez, el criterio del cociente con:

$$|a_n| = \left| (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n!} \right| = \frac{|x-1|^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x-1|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} |x-1| \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = 0$$

Conclusión: esta serie converge para todo valor de x.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n+1\right)\frac{x^n}{n^n} \qquad (a=0)$

Esta serie no es de términos positivos ni alternada, es una mezcla. Lo que podemos hacer es dividirla en dos sumas y ver qué pasa con cada una:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n+1\right)\frac{x^n}{n^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{x^n}{n^n}}_{①} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}}_{②}$$

Vamos a ver si convergen de forma absoluta ① y ②. En ambos casos el V.a. de a_n es el mismo: $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{n^n}$. Con el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{|x|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{1}{(n+1)} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{tiende a } 0} \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\text{tiende a "e"}} = \boxed{0}$$

Por lo tanto, las series ① y ② convergen para cualquier valor de x y, entonces, $\sum\left((-1)^n+1\right)\dfrac{x^n}{n^n}$ también converge para todo valor de x (el radio de convergencia es ∞).

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n = 1;\ 3x;\ x^2;\ 3x^3;\ x^4;\ \dots;\ 3x^n;\ x^{n+1}$

Vamos a buscar, primero, la expresión de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 3x + x^2 + 3x^3 + x^4 + \dots + 3x^n + x^{n+1} + \dots$$

$$= \underbrace{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots}_{} + \underbrace{3x + 3x^3 + 3x^5 + \dots}_{}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + 3x\left[1 + x^2 + x^4 + \dots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\overset{(*)}{=} (1+3x)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n$$

Usamos la fórmula de la geométrica y sacamos la expresión (con base x^2)

$$= \boxed{(1+3x)\cdot \frac{1}{1-x^2}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Si } |x^2| < 1}$$

(Para $|x^2| > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n$ diverge y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge).

Veamos los casos extremos:

- $x = 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{\text{en } (*)}{=} (1+3) \sum_{n=0}^{\infty} 1 \Rightarrow$ diverge
- $x = -1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = (1-3)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^2\right)^n \Longrightarrow$ diverge

Conclusión sólo converge si:

$|x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Longrightarrow \boxed{r = 1}$ y el intervalo de convergencia es $\boxed{(-1; 1)}$

23 Hallar la serie de Taylor en $X_0 = 0$ para cada una de las siguientes funciones, indicando el intervalo de convergencia de las series obtenidas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$ con $a \neq 0$

Queremos expresar $f(x)$ como serie de Taylor alrededor de $x_0 = 0$. O sea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n$$

Como vimos en la teoría los a_n deben tener la forma:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

en la teoría lo llamamos "a"

Obtengamos primero la forma de la derivada enésima $f^{(n)}(x_0)$:

$$f^{(1)}(x) = \frac{-1}{(x+a)^2} \Longrightarrow f^{(1)}(0) = \frac{-1}{a^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(x+a)^3} \Longrightarrow f^{(2)}(0) = \frac{2}{a^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x+a)^4} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = \frac{-6}{a^4}$$

Usando $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}} \Longrightarrow f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}}$$

Entonces, la expresión en serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x_0 = 0$ es:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \cdot x^n}$$

Ahora veamos cuándo esta expresión converge (y de paso verificamos los a_n obtenidos). En este caso podemos reconstruir la expresión usando la fórmula de la geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{(-1)\, x}{a} \right)^n = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-x}{a} \right)} \quad \text{si } \left| \frac{-x}{a} \right| < 1$$

Es decir: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} x^n = \frac{1}{a+x} \quad \text{si } |x| < |a|}$

Por lo tanto, el radio de convergencia es $|a|$.

En los extremos:

$x = a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a} \Rightarrow$ oscila, porque las sumas parciales valen $\frac{1}{a}$; 0; $\frac{1}{a}$; 0; ...

$x = -a \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-a)^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \Rightarrow$ diverge, la sumas parciales dan $\frac{n}{a}$ lo cual tiende a ∞.

Listo, entonces, el intervalo de conv. es $\boxed{(-a; a)}$

b) $f(x) = a^x$ con $a > 0$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{con} \quad x_0 = 0$$

$$f^{(1)}(x) = a^x \ln(a) \implies f^{(1)}(0) = \ln(a)$$

$$f^{(2)}(x) = a^x \cdot \ln(a) \cdot \ln(a) \implies f^{(2)}(0) = \ln^2(a)$$

$$\implies f^{(n)}(0) = \ln^n(a)$$

Entonces, la expesión en serie de Taylor para a^x es:

$$\boxed{a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}}$$

Buscamos ahora el intervalo de convergencia usando el criterio del cociente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left|\frac{(\ln a)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{(\ln a)^n x^n}{n!}\right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\ln a)^{n+1}}{(\ln a)^n} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n \to \infty} (\ln a)|x| \frac{1}{n+1} = \boxed{0}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es ∞ y el intervalo es $(-\infty ; \infty)$.

c) $f(x) = \cos^2 x \quad \implies \quad f^{(0)}(0) = 1$

$$f^{(1)}(x) = 2 \cos x \, (-\operatorname{sen} x) \implies f^{(1)}(0) = 0$$

$$f^{(2)}(x) = -2\left[-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right] \implies f^{(2)}(0) = -2$$

$$f^{(3)}(x) = -2\left[-2\,\text{sen}x\cos x + 2\cos x(-\text{sen}x)\right]$$

$$= \underbrace{8\left[\text{sen}x\cos x\right]}_{\substack{\text{volvimos a la} \\ \text{forma de } f^{(1)}(x) \text{ sólo} \\ \text{que el } (-2) \text{ quedó multiplicado por } (-4).}} \implies f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 8\left[-\text{sen}^2x + \cos^2 x\right] \implies f^{(4)}(0) = 8$$

Ya vemos que $f^{(5)}(0)$ va a ser 0 y que $f^{(6)}(0)$ va a ser $8.(-4) = -32$. Y así...

Entonces; la expresión en serie es:

$$\cos^2 x = 1 + \frac{(-2)}{2!}x^2 + \frac{8}{4!}X^4 + \frac{(-32)}{6!}x^6 + \cdots$$

Y, tanteando y con bastante paciencia, se puede expresar esa suma de la sig. manera:

$$\boxed{\cos^2 x = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m\, 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m}} \quad ⊛$$

(Comprobalo si querés, desarrollá la suma y vas a ver que te dan los términos de arriba).

Ahora veamos la convergencia de la serie del segundo término de la expresión en serie ⊛.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^{m+1}\, 2^{2(m+1)-1}}{(2(m+1))!} x^{2(m+1)}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^m\, 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m}\right|} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^{2m+1}}{2^{2m-1}} \frac{(2m)!}{(2m+2)!} \frac{X^{2m+2}}{X^{2m}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{2}{2^{-1}} \frac{1}{(2m+2)(2m+1)} X^2 = \boxed{0}$$

Por lo tanto esa serie converge para todo valor de x, el intervalo de convergencia son todos los reales.

---

24 Calcular $\ln(1,1)$ con un error menor a $0,0001$.

Para esto vamos a usar la expresión en serie de $\ln(1+x)$ y vamos a evaluar esa expresión en $x=0,1$. Como ese x es cercano a 0, el desarrollo en serie lo hacemos alrededor de $x_0=0$

Como $\ln(1+x)$ es la integral de $1/1+x$ y como el desarrollo en serie para $1/1+x$ ya lo tenemos (ej. 23.a con $a=1$), vamos a usar la propiedad de integración (ver parte teórica) para calcular la serie de $\ln(1+x)$.

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{para } |x|<1} \quad \text{del ej 23.a}$$

Integrando y sabiendo que la serie se puede integrar término a término:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}} \quad \text{para } |x|<1$$

(El radio de conv. es el mismo que para $\frac{1}{1+x}$, como dice la propiedad).

La representación en serie de $\ln(1+x)$, entonces, es una serie alternada. Los términos $a_n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ por otra parte son monótonamente decrecientes (siempre que $x < 1$ y $x > 0$.) y tienen límite nulo. Por lo tanto, podemos usar Leibniz y decir que:

$$(-1)^n \left(S - S_n \right) < a_{n+1}$$

donde S es la suma total y S_n es la suma parcial de los n primeros términos.

El enunciado pide que calculemos la suma para $x = 0,1$ (que aproxima a $\ln(1,1)$) con un error menor al $0,0001$. Para eso hay que sumar n términos donde n debe cumplir:

$$a_{n+1} < 0,0001$$

El a_{n+1} correspondiente a $x = 0,1$ es:

$$a_{n+1} = \frac{(0,1)^{n+2}}{n+2} < 0,0001 \implies \text{esto se cumple con } \boxed{n = 2}$$

De manera que sólo debemos calcular los primeros 3 términos,

$$\ln(1 + 0,1) \simeq \frac{(-1)^0 \, 0,1^1}{1} + \frac{(-1)^1 \, 0,1^2}{2} + \frac{(-1)^2 \, 0,1^3}{3}$$

$$\implies \ln(1,1) \simeq 0,1 - 0,005 + 0,00033 \implies \boxed{\ln(1,1) \simeq 0,0953}$$

FIN EJERCICIOS UNIDAD 7.