Resueltos

MATERIA: Análisis Matemático I

TITULO: T.P. Nº 4
"Funciones Diferenciables"
Edición 2000

AUTOR: Anibal Kasero

AR1AP4

Unidad 4

FUNCIONES DIFERENCIABLES

En la práctica nos encontramos con sucesos que pueden venir determinados por una relación funcional (movimiento en función del tiempo, temperatura de un gas en función de la presión, cierta población en función del tiempo, etc.). Podemos entonces estudiar el suceso, predecir, verificar, estudiando la función.. La herramienta más importante para el estudio de una función es la DERIVADA. Mirá si será fundamental que en la historia de las matemáticas la idea de función tardó 2000 años en aparecer y una vez que estuvo, el concepto de derivada surgió apenas 50 años después. Formalmente, la definición de derivada es:

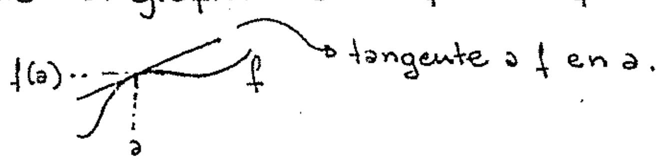
> Si f es una función definida en un intervalo y a es un punto interior de dicho intervalo entonces se denomina derivada de la función f en el punto "a" ($f'(a)$) a:
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Notar que la derivada en a también se puede definir como

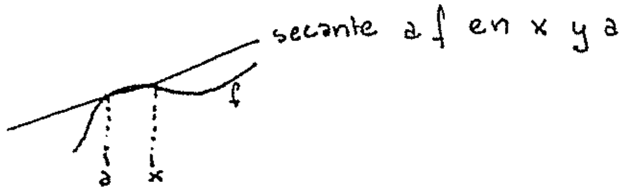
(haciendo $h = x-a$) $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- La derivada de una función en un punto es un límite, por lo tanto es un número real o puede no existir. En este último caso decimos que la función no es derivable en dicho punto y a veces se lo llama PUNTO ANGULOSO.

La derivada de una función en un punto posee una interpretación geométrica bastante inmediata: Supongamos que nos proponemos encontrar la tangente al gráfico de una función f en un punto a.



Para determinar una recta necesitamos un punto y la pendiente, o al menos dos puntos y por ahora no tenemos nada de esto. Para obtener más información nos fijamos en la "secante" que sí la podemos determinar



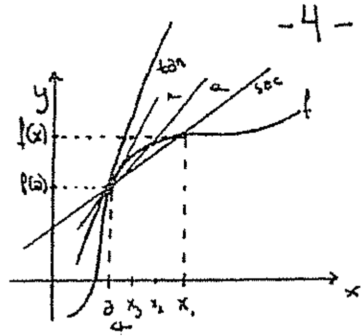
La pendiente de esta recta secante será

$$P_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Esto se debe a que dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera que pertenecen a una recta, la pendiente de dicha recta es

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y en nuestro caso los puntos son $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. Veamos ahora cómo podemos obtener la pendiente de la recta tangente a partir de la pendiente de la recta secante:



Intuitivamente, podés ver en el gráfico que cuando x se aproxima a a, la recta secante se va aproximando a la recta tangente, y por lo tanto la pendiente de la recta secante se va acercando a la pendiente de la recta tangente. Es lógico afirmar entonces:

$$\text{"Pendiente recta tangente"} = P_t = \lim_{x \to a} P_s = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pero esto es precisamente la definición de derivada de la función f en el punto a, entonces:

$$P_t = f'(a)$$

Por lo tanto

> La derivada de la función f en el punto a es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$.

Hemos definido la derivada en un punto, podemos generalizar esta definición haciendo el siguiente razonamiento. Si f es una función y A un conjunto donde para todo $a \in A$, existe $f'(a)$; definimos la <u>función derivada</u> como la función que a cada $a \in A$ le asigna $f'(a)$. O sea que de una función derivable f, obtenemos otra función f' a la que llamamos "derivada de f".

Siguiendo la interpretación geométrica, f' es la función que para cada X me da la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(x, f(x))$.

T.P. 4 - FUNC. DIFERENCIABLES

- VOY A RESOLVER SOLO AQUELLOS EJERCICIOS QUE SEAN IMPORTANTES O QUE TENGAN ALGO INTERESANTE. ALGUNOS NO SON EXACTAMENTE IGUALES A LOS DE LA GUÍA, PERO SÍ MUY SIMILARES.
  LOS EJERCICIOS QUE NO RESOLVÍ O QUE TIENEN EL ENUNCIADO CON ALGUNA MODIFICACIÓN, QUEDAN PARA VOS.

Ej 1) Aplique la definición de derivada para deducir $f'(-1)$ si

1.1) $f(x) = e^x$

1.2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

EJ 1) $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$, según la definición.

- 1.1) Si $f(x) = e^x$,

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(-1+h)} - e^{-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1}.e^h - e^{-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{-1} \underbrace{\frac{(e^h - 1)}{h}}_{\to 1} = e^{-1}.1 = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}.$$

$\to 1$, ver práctica 3.

- 1.2) Si $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{1}{(-1)^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h^2-2h+1} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1 - h^2+2h-1}{h^2-2h+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2+2h}{h\,(h^2-2h+1)} = \text{(simplificando } h\text{)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h+2}{h^2-2h+1} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

Aplique la definición de derivada para deducir $h'(a)$ si:

1-3) $h(x) = \cos x$

1-4) $h(x) = \ln x$

• 1-3) – Te piden averiguar $h'(a)$ para cualquier a en donde esté definido h'. En definitiva lo que te piden no es averiguar la derivada en "un" punto como en el ejercicio 1.1 sino la derivada en "cada" punto a, o sea la <u>FUNCIÓN DERIVADA</u>

Te recuerdo que $\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b$, por lo tanto

$$h'(a) = \lim_{x\to 0} \frac{h(a+x) - h(a)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) - \cos a}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos a \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} a - \cos a}{x} = \text{(reagrupando)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\cos a \Big(\underbrace{\frac{\cos x - 1}{x}}_{\to 0} \Big) - \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \operatorname{sen} a \right) = \boxed{-\operatorname{sen} a}.$$

(ver UNIDAD 3)

Podemos decir entonces que si $h(x) = \cos x \Rightarrow h'(x) = -\operatorname{sen} x$.

• 1-4) – $h'(a) = \lim_{x\to 0} \frac{h(a+x) - h(a)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{a+x}{a}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln\left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \ln\underbrace{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}\cdot\frac{1}{a}}}_{\to e}$$

$$= \ln(e)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \cdot \ln e = \boxed{\frac{1}{a}}.$$

Podemos decir entonces que si $h(x) = \ln x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x}$.

---

3. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique:

3.1. Si $g:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \to \Re \;/\; g(x) = \operatorname{tg} x$, entonces $g':\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \to \Re \;/\; g'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

3.2. $f:\Re^+ \to \Re \,/\, f(x) = \ln x \Rightarrow f':\Re - \{0\} \to \Re \;/\; f'(x) = \frac{1}{x}$

3.3. Si $h(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ entonces existe $h'(0)$

3.4. Si $h:\Re \to \Re \;/\; h(x) = \sqrt[3]{x-1}$ entonces existe $h'(1)$

3.5. El gráfico de la función $\varphi:\Re \to \Re \;/\; \varphi(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ no presenta puntos angulosos.

3.6. Si $u:\Re \to \Re \;/\; u(x) = \begin{cases} |x+2|-1 & \text{si } x \leq -2 \\ -1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ entonces existe $u'(-2)$.

3.7. La continuidad de la función *h* en *x* = *a* es condición necesaria pero no suficiente para que *h* sea derivable en *x* = *a*.

3.8. La recta tangente al gráfico de una función *f* en un punto interseca a dicha gráfica sólo en dicho punto.

3.9. Una función puede ser continua en todo su dominio pero no derivable en todo punto del mismo.

3.10. Una función *f* que es derivable en un intervalo abierto $(a;b)$ también es derivable en su frontera.

3.11. Si $f:\Re - \{3\} \to \Re \;/\; f(x) = x^2$ entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x* = *3* es $y = 6x - 9$

1) - Será cuestión de averiguar el límite:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{tg(x+h) - tg\,x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{sen(x+h)}{cos(x+h)} - \frac{sen\,x}{cos\,x}}{h} \underset{\substack{\text{prop} \\ \text{trigonométricas}}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\frac{cos\,x\,sen\,h + cos\,h\,sen\,x}{cos\,x\,cos\,h - sen\,x\,sen\,h} - \frac{sen\,x}{cos\,x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{cos^2 x\,sen\,h + cos\,h\,\cancel{sen\,x\,cos\,x} - sen\,x\,\cancel{cos\,x}\,cos\,h + sen^2 x\,sen\,h}{cos^2 x\,cos\,h - cos\,x\,sen\,x\,sen\,h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(cos^2 x + sen^2 x)\,sen\,h}{h\,(cos^2 x\,cos\,h - cos\,x\,sen\,x\,sen\,h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{sen\,h}{h}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{cos^2 x\,cos\,h}_{\to cos^2 x} - \underbrace{cos\,x\,sen\,x\,sen\,h}_{\to 0}} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$= \frac{sen^2 x + cos^2 x}{cos^2 x} = 1 + \frac{sen^2 x}{cos^2 x} = \boxed{1 + tg^2 x}$$

Entonces la afirmación es <u>verdadera</u>.

• 2) FALSA, f' debe estar definida donde está f.. Puede suceder que $\exists f$ y $\nexists f'$ pero no la inversa.

• 3) Para ver si existe $h'(0)$ tenemos que verificar que exista $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$, y como la función está definida de a partes, tenemos que averiguar los límites laterales y ver que coincidan.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0. \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^3-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 = 0.\end{array}\right\} \text{COINCIDEN.}$$

En consecuencia $\exists h'(0) = 0$. VERDADERA

•4) Para ver si existe $h'(1)$, calculemos por definición:

$$h'(1) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x+1)-h(1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+1)-1} - 0}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \infty \Rightarrow \nexists\, h'(1)$$ y 4.5) es FALSA.

•5) Ver SOLUCIONES.

•6) Aplicando la definición de valor absoluto al calcular los límites laterales obtenemos:

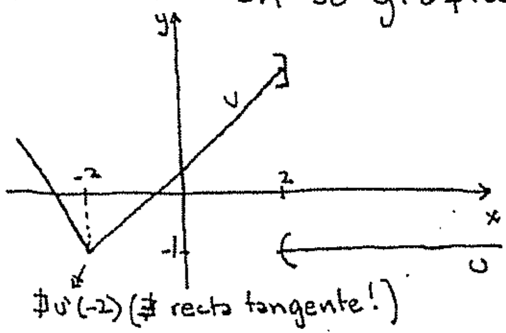
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{u(x-2) - u(-2)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x-2+2|-1 - (-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-1+1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{u(x-2) - u(-2)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 1 + 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

Como los límites laterales no coinciden $u'(-2)$ no existe, esto se debe a que $u(x)$ presenta en -2 un punto anguloso y esto se ve claramente en su gráfica:



• 7) Esto significa que $\boxed{\text{derivable} \Rightarrow \text{contínua}}$ pero no vale que contínua $\not\Rightarrow$ derivable → NO! y está en las teóricas.

(4.) Dada $f: \Re \to \Re \ / \ f(x) = ax\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x$. Indique mediante flechas, de izquierda a derecha, la correspondencia entre las columnas.

$f'(x) = 2x.\mathrm{sen}\,x$	$a=2 \wedge b=-2$
La pendiente de la recta tangente en $\left(\frac{\pi}{2};-2\right)$ es $m=-\pi$	$a=2 \wedge b=2$
La recta tangente en $(\pi;-2\pi)$ es paralela a $y=-4x+1$	$a=-2 \wedge b=2$

• EJ. 4) Si cada vez que deseamos averiguar la derivada de una función tenemos que calcular el límite de los cocientes incrementales, el laburo sería eterno. Para facilitar este trabajo existen unas pocas reglas que te indican la forma de calcular las derivadas de una suma, de un producto, de una composición, etc., sabiendo únicamente las derivadas de las funciones iniciales. De esta manera, conociendo unas pocas derivadas (que sí calculamos por definición) podemos calcular la derivada de cualquier función, siempre y cuando exista. Al final de esta práctica encontrarás una tabla de derivadas que incluye las derivadas de las funciones más importantes. Las reglas que te mencionaba son las siguientes:

Si $f(x)$ tiene por derivada $f'(x)$, y $g(x)$ tiene a $g'(x)$, entonces:

R1 $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

R2 $$(f.g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x).g'(x).$$

R3 $$(k.f)'(x) = k\,f'(x) \qquad k \in \mathbb{R}.$$

R4 $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Por último, la importante REGLA DE LA CADENA:

R5 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Todas estas propiedades se pueden demostrar a partir de la definición de derivada y propiedades del límite. Veamos ahora la forma en que se utilizan con $f(x) = ax\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x$. En este caso, la f está compuesta por x, $\cos x$ y $\mathrm{sen}\,x$.

En el ejercicio 1 vimos que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, de la misma manera se puede ver que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$. También podemos probar en forma inmediata a partir de la definición que $(x)' = 1$:

$$(x)' = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Entonces apliquemos las reglas para averiguar $f'(x)$:

$$f'(x) = (ax\cos x + b\operatorname{sen} x)' \underset{R①}{=} (ax\cos x)' + (b\operatorname{sen} x)' \underset{R③}{=}$$

$$= a(x.\cos x)' + b(\operatorname{sen} x)' \underset{②}{=} a\left[(x)'\cos x + x(\cos x)'\right] + b(\operatorname{sen} x)'$$

Usando las derivadas conocidas y reemplazando:

$$f'(x) = a\left[1.\cos x + x(-\operatorname{sen} x)\right] + b\cos x$$

Entonces:

$$\boxed{f'(x) = (a+b)\cos x - ax\operatorname{sen} x\ .}$$

• 1)- Si te dicen que $f'(x) = 2x.\operatorname{sen} x$, entonces tenemos que

$$f'(x) = (a+b)\cos x - ax\operatorname{sen} x = 2x\operatorname{sen} x$$

O sea que

$$a+b = 0 \quad \wedge \quad -a = 2$$

Esto sucede únicamente si:

$$\boxed{a = -2\ ,\ b = 2}$$

• 2) La pendiente de la recta tangente en $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ es $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
Reemplazando en la fórmula que obtuvimos de $f'(x)$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (a+b)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - a\frac{\pi}{2}\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{=1} = -a\frac{\pi}{2}$$

Queremos que:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \iff -a\frac{\pi}{2} = -\pi \iff \boxed{a=2}$$

Por otro lado sabemos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, y podemos utilizar esto para averiguar el valor de b:

$$-2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + b\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{1} = b$$

Entonces $\boxed{b=-2}$.

• 3) Acá sabemos que $f(\pi) = -2$, por lo tanto:

$$-2 = f(\pi) = a\pi\underbrace{\cos\pi}_{-1} + b\underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0} = -a\pi$$

Entonces $\boxed{a = \frac{2}{\pi}}$ que no figura en ninguno de los casilleros propuestos.

AGREGADO → Indique mediante flechas la correspondencia entre la función y su derivada

1)	$y = \operatorname{sen}^2(3x+2)$	$y' = 6\operatorname{cotg}(3x+2)$
2)	$y = \cos^2(3x+2)$	$y' = 6\operatorname{sen}(3x+2) \cdot \cos(3x+2)$
3)	$y = \ln[\operatorname{sen}^2(3x+2)]$	$y' = -6\operatorname{sen}(3x+2) \cdot \cos(3x+2)$

Nuevamente debemos recurrir a las reglas enunciadas antes del ejercicio 4 para resolver las derivadas de estas funciones usando las de unas pocas funciones con derivada conocida.

1.) Si llamamos
$$h(x) = 3x+2$$
$$g(x) = \operatorname{sen} x$$
$$j(x) = x^2$$

Resulta que conocemos
$$h'(x) = 3 \qquad \text{(usando la tabla)}$$
$$g'(x) = \cos x$$
$$j'(x) = 2x.$$

Por otro lado si $f(x) = \operatorname{sen}^2(3x+2) = j \circ g \circ h(x)$ (verificalo si querés)

Usando la regla de la cadena, tenemos que:

$$f'(x) = (j \circ g \circ h)'(x) = (j \circ g)'(h(x)) \cdot h'(x) = j'(g \circ h(x))\, g'(h(x))\, h'(x)$$

$$= 2\,(g \circ h(x)) \cos(h(x))\, 3 = 6\left(\operatorname{sen}(3x+2)\right)\left(\cos(3x+2)\right) =$$

$$= \boxed{6 \operatorname{sen}(3x+2)\cos(3x+2)}.$$

VEAMOS UNA FORMA MÁS FÁCIL AHORA ↓

2.) En este caso $f(x) = \cos^2(3x+2)$, veremos cómo podemos hacer lo que hicimos en 8.1) en forma más resumida y sencilla y para eso usaremos la siguiente AYUDA:

$$\boxed{\text{"REGLA DE LA CADENA"} \underset{\text{equivalente}}{\equiv} \text{"DERIVAR DE AFUERA PARA ADENTRO"}}$$

Veámoslo con el ejemplo del ejercicio:

$$f'(x) = \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{el cuadrado afecta} \\ \text{todo, está afuera}}}{\cos^2}(3x+2)\Big)' \underset{\substack{\text{derivo y} \\ \text{me meto}}}{=} 2 \cdot \cos(3x+2) \cdot \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{el coseno afecta} \\ \text{todo ahora}}}{\cos}(3x+2)\Big)' \underset{\substack{\text{derivo} \\ \text{y me meto}}}{=}$$

$$= 2\cos(3x+2)\big(-\text{sen}(3x+2)\big) \cdot (3x+2)' \underset{\substack{\text{derivo} \\ \text{lo que} \\ \text{queda}}}{=} \boxed{-6\cos(3x+2)\,\text{sen}(3x+2)}.$$

La única forma realmente buena para aprender a aplicar la regla de la cadena es lamentablemente haciendo muchos ejercicios. Otro grave inconveniente para la salud mental que causa esta regla es que una vez que la aprendiste no se te olvida nunca más.

3) $$f'(x) = \ln\left[\text{sen}^2(3x+2)\right] \underset{\substack{\text{derivo} \\ \text{y me meto}}}{=} \frac{1}{\text{sen}^2(3x+2)} \cdot \left(\text{sen}^2(3x+2)\right)'$$

$$\underset{\substack{\text{usando} \\ 7.1)}}{=} \frac{6\,\text{sen}(3x+2) \cdot \cos(3x+2)}{\text{sen}^2(3x+2)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simplificando}}}{=} 6\,\frac{\cos(3x+2)}{\text{sen}(3x+2} = \boxed{6\,\text{cotg}(3x+2)}$$

---

7) Complete, si se sabe que f y g son derivables:

7.1. $f(x) = g[x + g(a)] \Rightarrow f'(x) = \ldots\ldots$ 7.2. $f(x) = g[x.g(a)] \Rightarrow f'(x) = \ldots\ldots$

7.3. $f(x) = g[x + g(x)] \Rightarrow f'(x) = \ldots\ldots$ 7.4. $f^2(x) = g(x+3) \wedge f(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \ldots\ldots$

_ Están resueltos en las soluciones, aplicando la regla de la cadena. Veamos como ejemplo el 7.3)

Si $f(x) = g(x + g(x))$, entonces

$$f'(x) = \big(g(x+g(x))\big)' \underset{\substack{\uparrow \\ RS}}{=} g'(x+g(x))\,(x+g(x))' \underset{R①}{=} \cdot$$

$$= g'(x+g(x))\left[(x)' + (g(x))'\right] = g'(x+g(x))\left[1 + g'(x)\right]$$

(8.) Complete el siguiente cuadro:

Función f_i	Dominio de f_i	Función f_i'	Dominio de f_i'
$f_1(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$			
$f_2(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$			
$f_3(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$			
$f_4(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$			
$f_5(x) = \cos^2 \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$			
$f_6(x) = x^2.e^{-\frac{x^2}{4}}$			

- Haremos con detalle algunas derivadas, especificando abajo de cada igualdad la regla usada (R① - R⑤) (Ver pág. 11).

Si $f_2(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, entonces $\operatorname{dom} f_2 = \mathbb{R} - \{1\}$ pues en 1 se anula el denominador.

$$f_2'(x) = \left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)' \underset{R①}{=} \frac{(1+x)'\left(\sqrt{1-x}\right) - (1+x)\left(\sqrt{1-x}\right)'}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2} \underset{\substack{\text{tabla}\\ \text{y}\\ R⑤}}{=} \frac{1\left(\sqrt{1-x}\right) - (1+x)\frac{1.(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x} - (1+x)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{\sqrt{1-x} + \frac{(1+x)}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} =$$

$$= \frac{2(1-x) + 1 + x}{2\sqrt{1-x}\,(1-x)} = \frac{2 - 2x + 1 + x}{2\sqrt{1-x}\,(1-x)} = \frac{3-x}{2\,(1-x)^{3/2}}$$

• Por lo tanto $\underline{\underline{\mathrm{Dom}\, f_2' = \mathrm{Dom}\, f_2 = \mathbb{R} - \{1\}}}$.

Si $f_3(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ entonces $\mathrm{Dom}\, f_3 = \mathbb{R}_{>0} - \{e^{-1}\}$ para poder aplicar logaritmo y que no se anule el denominador.

$$f_3'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)' \underset{R(4)}{=} \frac{(1-\ln x)'(1+\ln x) - (1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2} \underset{\substack{(\ln x)' = \frac{1}{x} \\ R(1)}}{=}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(-1-\ln x - 1 + \ln x)}{(1+\ln x)^2} =$$

$$= \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}.$$

Y nuevamente tenemos que $\underline{\underline{\mathrm{Dom}\, f_3' = \mathrm{Dom}\, f_3 = \mathbb{R}_{>0} - \{e^{-1}\}}}$.

Si $f_5(x) = \cos^2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ entonces $\mathrm{Dom}\, f_5 = \mathbb{R}_{\geq 0}$ pues no se le puede calcular la raíz a números negativos.

$$f_5'(x) = \left(\cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)' \underset{R(5)}{=} 2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)' \underset{R(5)}{=}$$

$$= 2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(-\mathrm{sen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)' \underset{R(4)}{=}$$

$$= -2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2} =$$

$$= -2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} =$$

$$= -2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

Usando que $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$, tenemos:

$$f_5'(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \quad \text{y } \operatorname{Dom} f_5' = \mathbb{R}_{>0} \neq \operatorname{Dom} f_5$$

está mal en las soluciones.

Si $f_6(x) = x^2 . e^{-\frac{x^2}{4}}$, entonces $\operatorname{Dom} f_6 = \mathbb{R}$

$$f_6'(x) = \left(x^2 . e^{-\frac{x^2}{4}}\right)' \underset{R②}{=} (x^2)' e^{-\frac{x^2}{4}} + x^2 \left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)' \underset{\substack{\text{tabla} \\ \text{y} \\ R⑤}}{=}$$

$$= 2x\, e^{-\frac{x^2}{4}} + x^2\, e^{-\frac{x^2}{4}} . \left(-\frac{x^2}{4}\right)' \underset{R③}{=} 2x e^{-\frac{x^2}{4}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right)(x^2)' \underset{\text{tabla}}{=}$$

$$= 2x e^{-\frac{x^2}{4}} + x^2\, e^{-\frac{x^2}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right) 2x \underset{\text{agrupando}}{=} e^{-\frac{x^2}{4}} \left(2x - \frac{x^3}{2}\right)$$

y $\operatorname{Dom} f_6' = \mathbb{R} = \operatorname{Dom} f_6$.

---

10 Siendo $h(x) = [g(x)]^{f(x)}$ con f y g derivables y $g(x) > 0$, halle $h'(x)$.

Cuando te encontrás con funciones tanto en la base como en el exponente se suele usar un truquito llamado derivada logarítmica. Básicamente, primero se baja el exponente de un hondazo utilizando el logaritmo y luego se deriva a ambos lados:

Si $h(x)=[g(x)]^{f(x)}$ entonces $\ln(h(x)) = f(x).\ln(g(x))$. Te recuerdo que todo esto tiene sentido pues te aclaran que $g(x)>0$.
Ahora derivemos el primer término de la igualdad:

$$(\ln h(x))' \underset{R⑤}{=} \frac{1}{h(x)} . h'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

Y como $(\ln h(x))' = (f(x) \ln g(x))'$ tenemos:

$$h'(x) = h(x)\,(\ln h(x))' = h(x)\,(f(x).\ln g(x)) \underset{R②}{=}$$

$$= h(x)\,(f'(x) \ln g(x) + f(x)\,((\ln g(x))')) \underset{(h(x)=g(x)^{f(x)})}{=}$$

$$= g(x)^{f(x)}\left(f'(x)\ln g(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

---

(11) Demuestre que $y=\ln\dfrac{1}{1+x}$ con $x>-1$ satisface la ecuación $x.y'+1=e^{y}$.

Para verificar la afirmación primero calcularemos y' y luego lo reemplazaremos dentro de la ecuación:

$$y' = \left(\ln \frac{1}{1+x}\right)' \underset{R⑤}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)} . \left(\frac{1}{1+x}\right)' = (1+x).((1+x)^{-1})' =$$

$$\underset{\substack{\text{tabla} \\ (x^p)'=p.x^{p-1}}}{=} (1+x)(-1).(1+x)^{-2} = -\frac{(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}.$$

Por otro lado,

$$e^y = e^{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)} = \frac{1}{1+x}$$

Y la ecuación $xy'+1 = e^y$ nos queda

$$x\cdot\left(\frac{-1}{1+x}\right)+1 = \frac{1}{1+x}$$

Si y solo si,

$$\frac{-x \quad + (1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

Si y solo si,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

---

13) Sean f y g derivables y $h(x)=\dfrac{f[\ln(x+1)]}{g(4^x)}$. Sabiendo que $f(0)=0$ $f'(0)=2$ y $g(1)=3$, halle $h'(0)$.

Si $h(x)=\dfrac{f(\ln(x+1))}{g(4^x)}$, entonces

$$h'(x)=\frac{\left(f(\ln(x+1))\right)' g(4^x) - f(\ln(x+1))\left(g(4^x)\right)'}{\left(g(4^x)\right)^2} \underset{RS}{=}$$

$(4^x)' = 4^x \cdot \ln 4$.

$$= \frac{f'(\ln(x+1))\frac{1}{x+1}\, g(4^x) - f(\ln(x+1))\cdot g'(4^x)\cdot 4^x \cdot \ln 4}{\left(g(4^x)\right)^2}$$

Entonces $h'(0) = \dfrac{f'(\ln 1)\frac{1}{1}\, g(1) - f(\ln 1)\, g'(1)\, 4^0 \ln 4}{g(1)^2}$

Como $\ln 1 = 0$, tenemos

$$h'(0) = \frac{f'(0)\, g(1) - f(0)\, g'(1) \cdot \ln 4}{g(1)^2} = \frac{2.3 - 0}{3^2} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

---

14 Sea $f : \Re \to \Re \;/\; f(x) = x^3 + x + 3$. Halle $(f^{-1})'(3)$.

La fórmula para obtener la derivada de la función inversa es:

> Sea $a \;/\; f'(a) \neq 0$, $b = f(a)$ entonces $f^{-1}(b) = a$
> y
> $$f^{-1\,\prime}(b) = f^{-1\,\prime}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

En este caso $f(0) = 3$, entonces $f^{-1}(3) = 0$ y aplicando la fórmula

$$(f^{-1})'(3) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)}$$

Pero $f'(x) = 3x^2 + 1$, entonces $f'(0) = 3.0^2 + 1 = 1$ y concluimos que:

$$(f^{-1})'(3) = 1$$

---

15 Sean $f, g : \Re \to \Re \;/\; f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^3$. Determine $\left[(f \circ g)^{-1}\right]'(3)$.

Hay dos formas distintas de resolver este ejercicio. La primera es aplicando la fórmula vista en el ejercicio 14 y la segunda es calculando la inversa en forma directa.

$\boxed{\text{I.}}$ $f_\circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3+1$, entonces $f_\circ g(1) = 3$ y por lo tanto $(f_\circ g)^{-1}(3) = 1$. Aparte

$$(f_\circ g)'(x) = 6x^2 \Rightarrow (f_\circ g)'(1) = 6$$

La fórmula nos decía:

$$((f_\circ g)^{-1})'(3) = (f_\circ g^{-1})'(f_\circ g(1)) = \frac{1}{(f_\circ g)'(1)} = \underline{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{\text{II.}}$ Como $f_\circ g(x) = 2x^3+1$, calculemos la inversa

$$y = 2x^3+1$$

Esto sucede si

$$\frac{y-1}{2} = x^3$$

Calculando $\sqrt[3]{\ }$ a ambos lados:

$$\sqrt[3]{\frac{y-1}{2}} = x$$

Entonces $\quad (f_\circ g)^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}} = \left(\frac{y-1}{2}\right)^{1/3}$

Derivando y usando que $(x^p)' = px^{p-1}$

$$(f_\circ g^{-1})'(y) = \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x regla de} \\ \text{la cadena}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Entonces $((f_\circ g)^{-1})'(3) = \frac{1}{6}\left(\frac{3-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$ que es lo mismo que obtuvimos en I.

16 Halle $g'(2)$ siendo $f:\Re^+ \to \Re \ / \ f(x)=3x^5+4x^3+\ln x$ y

$g:\Re\to\Re^+ \ / \ g(x)=f^{-1}(2x+3)$.

Si $g(x)=f^{-1}(2x+3)$, entonces usando la regla de la cadena obtenemos que $g'(x)=(f^{-1})'(2x+3).(2x+3)'=$
$=(f^{-1})'(2x+3).2$ y por lo tanto:

$$g'(2)=2\,(f^{-1})'(7) \qquad (a)$$

Para averiguar la derivada de la inversa de f procedemos de la misma forma que en los ejercicios **14** y **15** sabiendo que $f(1)=7$, tenemos que

$$(f^{-1})'(7)=\frac{1}{f'(1)} \qquad (b)$$

Pero $f'(x)=3.5x^4+3.4x^2+\frac{1}{x}=15x^4+12x^2+\frac{1}{x}$, entonces

$$f'(1)=15+12+1=28$$

Reemplazando en (b) y luego en (a) obtenemos que:

$$g'(2)=2\,(f^{-1})'(7)=2\frac{1}{28}=\boxed{\frac{1}{14}}$$

AGREGADO → Verifique aplicando las reglas de derivación:

$$f(x)=e^{\operatorname{arc\,sen}(2x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\,e^{\operatorname{arc\,sen}(2x)}}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Si nos fijamos en la TABLA DE DERIVADAS, vemos que $(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $(e^x)'=e^x$, entonces

$$f'(x) = \left(e^{\operatorname{arcsen}(2x)}\right)' \underset{R5}{=} e^{\operatorname{arcsen}(2x)} . \left(\operatorname{arcsen}(2x)\right)' \underset{R5}{=}$$

$$= e^{\operatorname{arcsen}(2x)} \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} (2x)' = \frac{2\, e^{\operatorname{arcsen}(2x)}}{\sqrt{1-4x^2}} .$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left[\ln(ax+b)\right] \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{(ax+b)\left[1+\ln^2(ax+b)\right]}$$

En esta función usaremos que $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg}(\ln(ax+b))\right)' \underset{R5}{=} \frac{1}{1+\ln^2(ax+b)} . \left(\ln(ax+b)\right)' \underset{R5}{=}$$

$$= \frac{1}{1+\ln^2(ax+b)} . \frac{1}{ax+b} (ax+b)' = \frac{1}{\left(1+\ln^2(ax+b)\right)(ax+b)} . a$$

---

(18) Demuestre que $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad -1<x<1$ satisface la ecuación $(1-x^2)y' - xy = 1$

Si $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces

$$y' = \left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \underset{R4}{=} \frac{(\operatorname{arcsen} x)'\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsen} x \left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . \sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsen} x . \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} . (-2x)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1 + \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + x . y}{1-x^2} .$$

Reemplazando sale

---

19) Si $h:[-1;1]\to\Re\,/\,h(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{g(x)}$ siendo $g:[-1;1]\to\Re$ derivable con $g(x)\neq 0$ y $g'(x)\neq 0$. Calcule h'.

Este ejercicio consiste en aplicar sencillamente la regla para derivación de cocientes:

$$h'(x)=\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{g(x)}\right)'=\frac{(\operatorname{arctg}x)'\,g(x)-\operatorname{arctg}x\,(g(x))'}{g^2(x)}=$$

$$=\frac{\dfrac{g(x)}{1+x^2}-\operatorname{arctg}x\,.\,g'(x)}{g^2(x)}=\frac{g(x)-(1+x^2)\operatorname{arctg}x\;g'(x)}{(1+x^2)\,g^2(x)}.$$

---

20) Calcule $f'(x)$

- 20.1. $f(x)=x^{(x^x)}$ con $x>0$
- 20.2. $f(x)=(x^x)^x$ con $x>0$
- 20.3. AGREGADO $\rightarrow$ $f(x)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

En el ejercicio 10) obtuvimos una fórmula para calcular la derivada de $h(x)=(g(x))^{f(x)}$ que decía

$$h'(x)=g(x)^{f(x)}\cdot\left[f'(x)\ln g(x)+\frac{f(x)\,g'(x)}{g(x)}\right]$$

Si $g(x)=x$ y $f(x)=x$, entonces $h(x)=x^x$ y reemplazando en la fórmula:

$$h'(x) = (x^x)' = x^x\left[(x)'\ln x + \frac{x(x)'}{x}\right]$$

Y como $(x)' = 1$, tenemos

$$(x^x)' = x^x\left[\ln x + 1\right].$$

Ahora para obtener la derivada de $f_1(x) = x^{(x^x)}$, aplicamos la fórmula haciendo

$$f(x) = x^x \quad y \quad g(x) = x.$$

Entonces

$$(f_1(x))' = \left(g(x)^{f(x)}\right)' = \left(x^{(x^x)}\right)' =$$

$$= x^{(x^x)}\cdot\left[(x^x)'\ln x + \frac{x^x(x)'}{x}\right] = x^{(x^x)}\left[x^x(\ln x+1)\ln x + \frac{x^x}{x}\right]$$

$$= x^{(x^x)}\left[x^x\left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)\right] \longleftarrow \text{20.1}$$

El ej 20.3 se hace en forma idéntica solo que haciendo

$$f(x) = x \quad y \quad g(x) = x^x$$

Veamos ahora el **20.2**. En este caso $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ y $f(x) = x$. Entonces

$$g'(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{(x)'(1+x) - x(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Usando la formulita:

$$\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)' = \left(g(x)^{f(x)}\right)' = \left((x)'\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{x\cdot\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{x}{1+x}}\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left(\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{1+x} \right)$$

21) Sea $h:\Re \to \Re$ continua en $x = 0$. ¿Existe $f'(0)$ si $f(x) = h(x).(e^x - 1)$? Justifique.

De h sólo sabemos que es contínua en $x=0$, así que no podemos aplicar la regla de derivada del producto:

$$f'(x) = h(x)\,e^x + h'(x)(e^x - 1)$$

↳ no sabemos si tiene sentido.

Entonces debemos aplicar la definición de derivada en 0:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Reemplazando por el valor que tenemos de f y teniendo en cuenta que $f(0) = h(0)(e^0 - 1) = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x)(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) . h(x)$$

Usando que $\frac{e^x - 1}{x} \underset{(x \to 0)}{\longrightarrow} 1$ y que h es contínua en cero, obtenemos:

$$f'(0) = h(0).$$

22) Sea $g:\Re \to \Re / g(x) = \begin{cases} 2f(3x) + a & si\ x \geq 0 \\ bx & si\ x < 0 \end{cases}$

Sabiendo que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$. Encuentre a y b tales que g sea derivable en $x = 0$.

Para que g sea derivable en $x=0$, debe ser continua y debe existir la derivada. Como la g viene definida de a partes para que sea continua deben existir los límites laterales en $x=0$ y coincidir (a). Para que exista la derivada deben coincidir las derivadas laterales (b).

a) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} 2f(3x) + a = \underset{\uparrow\, =1}{2f(0)} + a = 2+a$

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} bx = 0$

Entonces tenemos que para que g sea contínua $2+a=0$, esto sucede si y solo si $\boxed{a=-2}$

b) Si $x \geq 0$ entonces $g'(x) = 2f'(3x).3 = 6f'(3x)$.
Si $x<0$ entonces $g'(x) = b$.

En consecuencia $g'(0)^+ = 6f'(0) = 6.1 = 6$
$g'(0)^- = b$

Para que g sea derivable deben coincidir estos límites, entonces $\boxed{b=6}$

Nos quedó que

$$g(x) = \begin{cases} 2f(3x)-2 & \text{si } x \geq 0 \\ 6x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

AGREGADO → Sea:

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = (\ln x)^2 . (2 - \ln x)$$

Determine:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \;/\; g'(x) > 0\right\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \;/\; g'(x) = 0\right\}$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \;/\; g'(x) < 0\right\}$$

Primero averiguaremos la derivada y luego estudiaremos sus intervalos de positividad y negatividad para determinar A, B y C.

$$g'(x) = \left[(\ln x)^2 (2-\ln x)\right]' \underset{R(2)}{=} \left((\ln x)^2\right)'(2-\ln x) + (\ln x)^2 \left[2-\ln x\right]'$$

$$\underset{R(5)}{=} 2\ln x . (\ln x)' (2-\ln x) + \ln^2 x . \left(-\frac{1}{x}\right) = 2\ln x . \frac{1}{x}(2-\ln x) - \frac{\ln^2 x}{x}$$

Distribuyendo en el primer término y agrupando el $\frac{1}{x}$:

$$g'(x) = \frac{1}{x}\left(4\ln x - 2\ln^2 x - \ln^2 x\right)$$

Entonces:

$$g'(x) = \frac{1}{x}\left(4\ln x - 3\ln^2 x\right)$$

Averigüemos primero los x tal que $g'(x)=0$; tenemos

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(4\ln x - 3\ln^2 x\right)=0 \Leftrightarrow 4\ln x - 3\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x\left(4 - 3\ln x\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \quad \vee \quad 4 - 3\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = 0 \quad \vee \quad \ln x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = e^{4/3}.$$

Entonces $B = \{x \in \mathbb{R}^+ / g'(x) = 0\} = \{1, e^{4/3}\}$

Ahora los x tal que $g'(x)>0$, esto sucede si

$$\frac{1}{x}\left(4\ln x - 3\ln^2 x\right) > 0 \underset{\substack{x>0 \\ \text{siempre}}}{\Leftrightarrow} 4\ln x - 3\ln^2 x > 0 \Leftrightarrow \ln x\left(4 - 3\ln x\right) > 0$$

Un producto es positivo si ambos términos son positivos o si ambos términos son negativos:

$$\ln x > 0 \ \wedge\ 4 - 3\ln x > 0 \quad \text{ó} \quad \ln x < 0 \ \wedge\ 4 - 3\ln x < 0$$

$$x > 1 \ \wedge\ \frac{4}{3} > \ln x \quad \text{ó} \quad x < 1 \ \wedge\ \frac{4}{3} < \ln x$$

$$x > 1 \ \wedge\ x < e^{4/3} \quad \text{ó} \quad x < 1 \ \wedge\ x > e^{4/3}$$

$$x \in (1, e^{4/3}) \quad \text{ó} \quad \emptyset$$

Nos quedó $A = \{x \in \mathbb{R}^+ / g'(x) > 0\} = (1, e^{4/3})$.

Finalmente nos queda averiguar $C = \{x \in \mathbb{R}^+ / g'(x) < 0\}$, pero este conjunto está formado por todos los $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \notin A$ y $x \notin B$:

$$C = (0,1) \cup (e^{4/3}, +\infty).$$

---

(26) Si f es continua en $x=1$, demuestre que $g(x)=(x-1).f(x)$ es derivable en $x=1$.

Al igual que en el ejercicio **21** no podemos derivar la g en forma directa porque no sabemos si la f es derivable. O sea no podemos afirmar

$$g'(1) = (1-1)\underbrace{f'(1)}_{\to\ ¿?\ ¿y\ si\ es\ \infty?} + 1\, f(1)$$

Para solucionar este inconveniente recurrimos a la definición de derivada:

$$g'(1) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x+1)-g(1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1-1)f(x+1) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x.f(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x+1) = \lim_{y\to 1} f(y) \text{ que } \exists \text{ pues } f \text{ es continua en } 1.$$

---

(31) Demuestre que si f es continua en $x=2$ y $f(2)\neq 0$ entonces $g(x)=|x-2|.f(x)$ no es derivable en $x=2$.

Para ver que una cierta función no es derivable en un valor, nos tenemos que fijar en el límite de los cocientes incrementales. En este caso, si aplicamos la definición de valor absoluto a la función $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)\, f(x) & x \geq 2 \\ (2-x)\, f(x) & x < 2 \end{cases}$$

Como g está definida de a partes, calculamos los límites laterales

($\equiv$ las derivadas laterales) y vemos si coinciden:

$$g'(2)^{+} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{g(\overset{>2}{2+x}) - g(2)}{x} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{(2+x-2)f(x+2) - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^{+}} \frac{x\, f(x+2)}{x} = f(2) \text{ pues la } f \text{ es contínua en } 2.$$

$$g'(2)^{-} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{g(\overset{<2}{2+x}) - g(2)}{x} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{(2-(2+x))f(x+2) - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^{+}} \frac{-x\, f(x+2)}{x} = -f(2).$$

Como $f(2) \neq 0$, tenemos que $f(2) \neq -f(2)$ y en conclusión la g no es derivable en $x=2$. Fijate que si hubiese sido $f(2)=0$ la g hubiese resultado derivable.

---

32. Se sabe que $f:\Re \to \Re \,/\, f(x) = (x-a)^2 . g(x)$ siendo g una función polinómica con $g(a) \neq 0$. Demuestre que "a" es una raíz doble de f si y sólo si "a" es una raíz de f y de f' y $f''(a) \neq 0$.

Este es el primer ejercicio que utiliza la noción de derivada segunda. Esta idea es bastante sencilla: Vimos en la introducción que la derivada de una función f podía ser considerada otra función a la que denominábamos $f'(x)$. Entonces a esta función también puedo calcularle la derivada y obtener otra función $(f')'$. A esta función se la llama derivada segunda de la f y la notamos $f''(x)$. Iterando este proceso, cuando es posible, podemos definir la derivada n-ésima en forma inductiva como $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Habíamos visto que la derivada tenía que ver con la "suavidad" de la función. Por lo tanto cuanto "más derivable" sea una función, tanto más suave será.

Volvamos al ejercicio y demostremos primero

" Si a es una raíz doble de $f \Rightarrow a$ es raíz de f, f' y $f''(a) \neq 0$."

$$f(x) = (x-a)^2 g(x) \Rightarrow f'(x) = 2(x-a) g(x) + (x-a)^2 \cdot g'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = (x-a)\left[2g(x) + (x-a) g'(x)\right] \Rightarrow a \text{ es raíz de } f'(x).$$

Solo nos queda ver que que $f''(a) \neq 0$ y para esto le calculamos la derivada a f'.

$$f''(x) = \left[2(x-a) g(x) + (x-a)^2 g'(x)\right]' = \quad \text{(aplicando derivada del producto)}$$

$$= 2g(x) + 2(x-a) g'(x) + 2(x-a) g'(x) + (x-a)^2 g''(x).$$

En consecuencia

$$f''(a) = 2g(a) \neq 0 \quad \text{pues } g(a) \neq 0.$$

Veamos ahora la vuelta:

" Si a es raíz de f, f' y $f''(a) \neq 0 \Rightarrow a$ es raíz doble de f"

Pero te dan la $f(x) = (x-a)^2 g(x)$ y está claro que para esta f a es una raíz doble. Esto se puede demostrar sin haber definido la f pero se necesitan resultados teóricos que aún no vimos.

---

(34) Sea $h: A \to \Re \;/\; h(x) = \ln\left(x^2 + 4x - 2\right)$, determine

34.1. El dominio de h:

34.2. Los puntos en los cuales la recta tangente al gráfico de h tiene pendiente 2.

34.1) La única restricción que posee h en su definición es el logaritmo, que se puede aplicar sólo a valores positivos. Entonces debe ser

$$x^2 + 4x - 2 > 0$$

Averigüemos las raíces de esta parábola para poder factorizarla

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4.2}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}.$$

Entonces $x^2 + 4x - 2 = (x - (-2 + \sqrt{6}))(x - (-2 - \sqrt{6})) > 0$

Para que este producto sea positivo deben ser los dos factores positivos o ambos factores negativos:

$$x - (-2 + \sqrt{6}) > 0 \wedge x - (-2 - \sqrt{6}) > 0 \quad \text{ó} \quad x - (-2 + \sqrt{6}) < 0 \wedge x - (-2 - \sqrt{6}) < 0$$

$$x > \sqrt{6} - 2 \quad \wedge \quad x > -2 - \sqrt{6} \quad \text{ó} \quad x < \sqrt{6} - 2 \wedge x < (-2 - \sqrt{6})$$

$$x > \sqrt{6} - 2 \quad \text{ó} \quad x < -2 - \sqrt{6}$$

$$x \in (\sqrt{6} - 2, +\infty) \qquad x \in (-\infty, -2 - \sqrt{6})$$

Entonces $\underline{\underline{\mathrm{Dom}\, h = (-\infty, -2 - \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6} - 2, +\infty)}}$

34.2) Recordando que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada de la función en ese punto, buscamos los $x \,/\, h'(x) = 2$. Calculemos entonces la derivada de h:

$$h'(x) = (\ln(x^2 + 4x - 2))' \underset{R5}{=} \frac{1}{x^2 + 4x - 2}(x^2 + 4x - 2)' = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 2}$$

Entonces $h'(x) = 2 \iff \dfrac{2x+4}{x^2+4x-2} = 2 \iff 2x + 4 = 2x^2 + 8x - 4$

Pasando de términos:

$2x^2+6x-8=0 \iff x^2+3x-4=0 \iff (x+4)(x-1)=0$

$\iff x=1$ ó $x=-4$.

Para afirmar que estos puntos son puntos en los cuales la recta tangente tiene pendiente 2, deben pertenecer al dominio de la función. Aproximando $\sqrt{6}$ por 2,44 tenemos que

$$A=(-\infty,-2-\sqrt{6})\cup(-2+\sqrt{6},+\infty)\cong(-\infty,-4,44)\cup(0,44,+\infty)$$

Entonces el -4 quedó afuera y el único punto en que $h'(x)=2$ es $\boxed{x=1}$.

(Sinceramente no se de donde calcularon el "Ln3" que figura en las soluciones)

---

35 Determine $f:\Re\to\Re$ / $f(x)=ax^2+bx+c$, sabiendo que la curva representativa de f pasa por el punto (1;12) y que la recta tangente a la misma en (-2;3) es horizontal. Grafique.

El primer dato te indica que $f(1)=12$. Además te dicen que la recta que pasa por $(-2,3)$ es horizontal y tangente. De acá que $f(-2)=3$ y que $f'(-2)=0 \to$ pendiente de una recta horizontal. Las condiciones que nos quedaron son:

$f(1)=12 \iff a.1^2+b.1+c=12$

$f(-2)=3 \iff a(-2)^2+b(-2)+c=3$

Teniendo en cuenta que $f'(x)=2ax+b$

$f'(-2)=0 \iff 2a.(-2)+b = -4a+b=0$

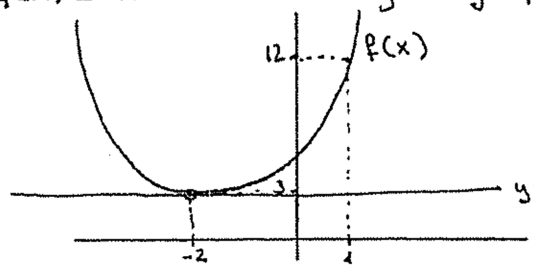
Nos quedó un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{aligned} a+b+c&=12\\ 4a+(-2)b+c&=3\\ -4a+b&=0 \end{aligned}$$

Resolviéndolo obtenemos

$$\boxed{a=1 \quad b=4 \quad c=7}$$

Entonces $f(x) = x^2 + 4x + 7$ y su gráfico es:



(37) Sea $f: \Re \to \Re / f(x) = x^3 + 4ax^2 + bx + 4$. Halle los valores de a y b para que $y = 2x+5$ sea tangente al gráfico de f en $x = -1$.

Si $y=2x+5$ es tangente a f en $x=-1$ entonces se tocan en $x=-1$. En -1 $y=2x+5$ vale $y=2.(-1)+5=3$. Entonces $f(-1)=3$. Aparte la derivada de f en -1 toma el valor de la pendiente de la recta tangente, o sea $f'(-1)=2$. Calculemos $f'(x)$.

$f'(x) = 3x^2 + 8ax + b$

Nos quedaron como condiciones:

$f(-1)=3 \iff (-1)^3 + 4a(-1)^2 + b(-1) + 4 = 3 \iff 4a - b + 3 = 3$

$f'(-1)=2 \iff 3(-1)^2 + 8a(-1) + b = 2 \iff 3 - 8a + b = 2$

Obtuvimos así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$4a - b = 0$$
$$-8a + b = -1$$

Resolviendo obtenemos: $\boxed{a = \frac{1}{4} \qquad b = 1}$

---

(39) Aplique la definición correspondiente y calcule $g''(3)$ si:

AGREGADOS $\leftarrow$ $\begin{cases} 3)\ g(x) = x^2 - 3x + 2 \\ 4)\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

1) $g(x) = |x+2|$

2) $g(x) = \ln x$

3) $-g(x) = x^2 - 3x + 2$

$\cdot g'(x) = 2x - 3$

$\cdot g''(x) = 2 \Rightarrow \boxed{g''(3) = 2}$

4) $\cdot g(x) = \frac{1}{x}$

$\cdot g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\cdot g''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \boxed{g''(3) = \frac{2}{27}}$

1) $-g(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -(x+2) & x < -2 \end{cases}$

$-g'(x) = \begin{cases} 1 & x > -2 \\ -1 & x < -2 \end{cases}$

$\cdot g''(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{-2\} \Rightarrow \boxed{g''(3) = 0}$

2) $g(x) = \ln x$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$g''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{g''(3) = -\frac{1}{9}}$

---

41 Calcule, si existe $f''(0)$ si es $f(x) = x|x|$

$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$.

Entonces $f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

Para calcular la derivada en 0, debemos calcular los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)^+ = 2.0 = 0 \\ f'(0)^- = -2.0 = 0 \end{array}\right\} \text{ Como coinciden, } f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f''(0)^+ = 2 \\ f''(0)^- = -2 \end{array} \Longrightarrow \nexists\, f''(0)$$ pues no coinciden las derivadas laterales.

---

(42) Demuestre que $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ satisface la ecuación $1 + (y')^2 = 2yy''$

Si $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, entonces

$y' = x + 1$

$y'' = 1$

Entonces

$$2yy'' - (y')^2 = 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)1 - (x+1)^2 = x^2 + 2x + 2 - x^2 - 2x - 1 = 1$$

Que era lo que queríamos demostrar.

---

(43) Calcule f^{iv} si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$.

Si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, entonces

$f'(x) = 2\cos(2x)$

$f''(x) = -4\operatorname{sen}(2x)$

$f'''(x) = -8\cos(2x)$

$\boxed{f^{iv}(x) = 16\operatorname{sen}(2x)}$

Entonces $f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16 \text{ sen}\left(2.\frac{\pi}{4}\right) = 16 \text{ sen} \frac{\pi}{2} = 16$

---

44 Dada $h:\Re \to \Re / h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \le x_0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > x_0 \end{cases}$ determine a, b y c en función de x_0 de manera que exista $h''(x_0)$.

Para que exista $h''(x_0)$ debe ser

1. h continua en x_0 (deben coincidir los límites laterales)
2. $h'(x_0)$ debe existir (deben coincidir derivadas laterales)
3. $h''(x_0)$ debe existir.

① $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} h(x) = x_0^3 \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} h(x) = ax_0^2 + bx_0 + c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x_0^3 = ax_0^2 + bx_0 + c}$$

② $$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < x_0 \\ 2ax + b & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} h'(x_0)^+ = 2ax_0 + b \\ h'(x_0)^- = 3x_0^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{3x_0^2 = 2ax_0 + b}$$

③ $$h''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < x_0 \\ 2a & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} h''(x_0)^+ = 2a \\ h'(x_0)^- = 6x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 3x_0}$$

Si $a = 3x_0$, reemplazando en ②:

$$3x_0^2 = 2(3x_0)x_0 + b \Rightarrow b = 3x_0^2 - 6x_0^2 = -3x_0^2$$

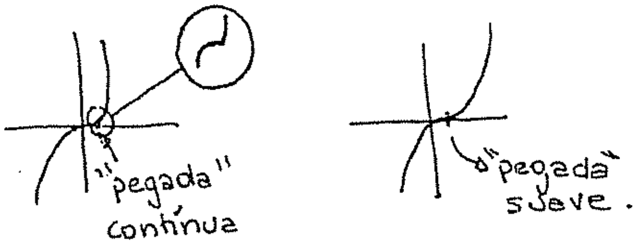
Reemplazando en ①:

$$x_0^3 = (3x_0)x_0^2 + (-3x_0^2)x_0 + c \Rightarrow c = x_0^3$$

Obtuvimos que para que h sea dos veces derivable en x_0 debe ser:

$$\boxed{a = 3x_0 \qquad b = -3x_0^2 \qquad c = x_0^3}$$

OBSERVACIÓN: Este ejercicio busca una forma de "pegar" la cúbica con una parábola cualquiera en un punto x_0. Lo que deducís es la forma de la parábola. Si tan solo te pidiese "pegar" los gráficos te hubiesen dicho que querían a la h continua. Pero además quieren que los pegues en forma prolija, o sea suavemente y para eso te piden que exista hasta la derivada segunda. Esto se ve bien en este gráfico:



---

(45) Calcule y'' si $y = x^{\operatorname{sen} x}$ con $x > 0$.

Se trata de aplicar dos veces la fórmula que vimos en el ejercicio 10).

$$\left(g(x)^{f(x)}\right)' = g(x)^{f(x)}\left(f'(x)\ln g(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

Si tenés ganas... hacelo... lo que es yo... Paso.

---

47) Dada $f(x)=\begin{cases} -x^2+bx+c & \text{si } x<-1 \\ -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & \text{si } -1\leq x<1 \\ a\ln x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

47.1. Halle las constantes a, b y c de manera que f resulte derivable en todo su dominio.

47.2. Para los valores obtenidos en 47.1. defina las funciones f' y f''

47.3. Grafique usando software matemático las funciones f' y f'' del punto 47.2.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+bx+c & x<-1 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & -1\leq x<1 \\ a\ln x & x\geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+b & x<-1 \\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) & -1<x<1 \\ \dfrac{a}{x} & x>1 \end{cases}$$

Para que f resulte derivable deben coincidir los límites laterales en -1 y en 1 de estas dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -(-1)^2+b(-1)+c = -1-b+c \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array}\right\} 1-b+c=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a\ln 1 = 0 \end{array}\right\} \text{coinciden.}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -2(-1)+b = 2+b$$

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2+b = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to 1^+} f'(x) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{2}$$

O sea que obtuvimos $\boxed{a = \frac{\pi}{2} \quad b = -\frac{\pi}{2} - 2 \quad c = -\frac{\pi}{2} - 1}$

- Reemplazando obtenés la fórmula de $f(x)$. Los otros item de este ejercicio están resueltos en las soluciones.

---

(48) Obtenga la expresión de la derivada n-ésima de:

48.1. $h(x) = \cos(2x)$

48.2. $g(x) = \operatorname{sen} x$

48.3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

48.4. $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

* EN ESTE EJERCICIO AGREGO EL ITEM 48.4.

LOS ÚLTIMOS DOS, NO LOS RESOLVÍ; VEÁMOSLOS:
48.4 y 48.5

- Si encontrar la derivada de una función ya es un despelote que depende de la función involucrada, te podrás imaginar que no existe una fórmula para hallar la derivada n-ésima de una función. En general lo que se hace es lo siguiente.

1) Se encuentra f', f'', f'''... hasta que creas tener suficiente información.

II) Se "arriesga" una fórmula genérica para $f^{(n)}(x)$.

III) Se verifica que sea la correcta utilizando el Principio de Inducción.

El paso III) no lo vamos a hacer, pero es útil para probar que la fórmula obtenida es correcta.

48.1) $h(x) = \cos 2x$

$$h'(x) = -2\,\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}(-2x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$h''(x) = -4\cos 2x = 4\cos(2x + \pi)$$
$$h'''(x) = 8\,\text{sen}\,2x = 8\cos\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right)$$
$$h^{IV}(x) = 16\cos 2x = 16\cos(2x + 2\pi)$$

En general $h^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Aunque llegar a esto fue bastante retorcido y se podría haber dicho más fácilmente

$$h^{(2n)}(x) = (2)^{2n}(-1)^n \cos 2x$$

$$h^{(2n-1)}(x) = (2)^{2n-1}(-1)^n\,\text{sen}\,2x$$

Podés verificar que las dos fórmulas que encontramos para la derivada n-ésima son la misma cosa usando:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y.$$

48.2)
$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \text{sen}\,x \\ g'(x) &= \cos x \\ g''(x) &= -\text{sen}\,x \\ g'''(x) &= -\cos x \\ g^{IV}(x) &= \text{sen}\,x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} g^{(2n)}(x) &= (-1)^n\,\text{sen}\,x \\ g^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x \end{aligned}$$

También para esta función se puede expresar la derivada n-ésima con una sola fórmula: $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, que se puede verificar usando que:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x .$$

48.3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f'''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \cdots \end{aligned}\right\} \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!\,(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$$

48.4) $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$u'(x) = \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} = 2(1-x)^{-2}$$

$$u''(x) = 2.(-2)(1-x)^{-3}.(-1) = 4(1-x)^{-3} = 2.2(1-x)^{-3}$$

$$u'''(x) = -12(1-x)^{-4}(-1) = 12(1-x)^{-4} = 2.\underbrace{2.3}(1-x)^{-4}$$

$$u^{IV}(x) = -48(1-x)^{-5}(-1) = 48(1-x)^{-5} = 2.\underbrace{2.3.4}(1-x)^{-5}$$

En general:

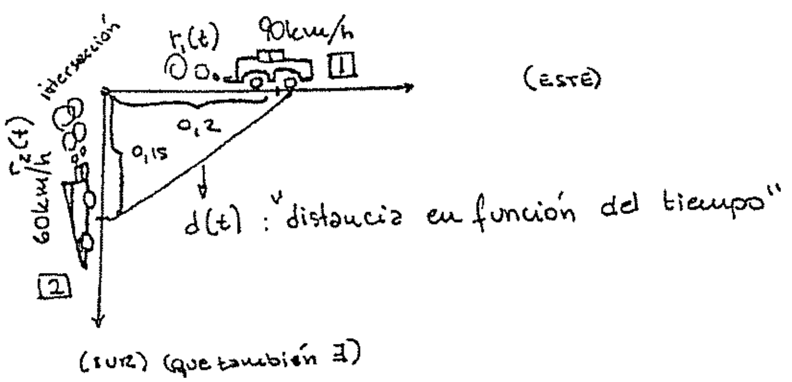
$$u^{(n)}(x) = 2n!(1-x)^{-(n+1)} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}} .$$

Salteo acá varios ejercicios. Pongo un ejercicio adicional y paso directamente al 56).

AGREGADO Dos automóviles, uno de los cuales se dirige hacia el este a razón de 90 km/h y el otro hacia el sur a razón de 60 km/h, viajan hacia una intersección de dos rutas. ¿Con qué rapidez se acercan en el instante en que el primer automóvil se encuentra a 0,2 km y el segundo a 0,15 km de la intersección?

No te preocupes si no te sale este problema, porque es bastante complicado. Sobre todo el plantear las ecuaciones. Una vez planteadas ya sale, pero igual en ese punto las cuentas son complicadas. Te propongo aquí una forma de hacerlo usando funciones y sus derivadas, para estar a tono con la práctica, aunque usando vectores y ángulos sale mucho más rápido.

Como las velocidades son constantes y a uno no le gusta trabajar con tiempos negativos, vamos a suponer que los coches se alejan de la intersección en vez de acercarse. En este caso, la velocidad con que se alejan será la misma que la velocidad con que se acercan. Gráficamente



Supongamos que el móvil $\boxed{1}$ pasó por la intersección en el instante $t=0$, entonces la distancia recorrida desde la intersección en función del tiempo será

$$\boxed{r_1(t) = 90t}$$

Supongamos que el móvil $\boxed{2}$ pasó por la intersección en el instante $t=t_0$ (no necesariamente pasaron en el mismo momento, además no habría problema pues hubiesen chocado). Entonces la distancia recorrida por el movil $\boxed{2}$ en función del tiempo será:

$$\boxed{r_2(t) = 60t + t_0}$$

Pero te dicen que en un instante t $r_1(t) = 0{,}2$ y $r_2(t) = 0{,}15$ o sea

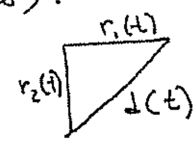
$$r_1(t) = 90t = 0{,}2 \implies \boxed{t = \frac{0{,}2}{90} = \frac{2}{900}}$$

$$r_2(t) = 60t + t_0 = 0{,}15$$

$$\Rightarrow \frac{60.2}{900} + t_0 = \frac{15}{100} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{60}$$

Nos quedó $\boxed{r_2(t) = 60t + \frac{1}{60}}$

Sea $d(t)$ la función que me da la distancia entre los móviles en un instante t (usando Pitágoras):



$$d(t) = \sqrt{r_1^2(t) + r_2^2(t)}\,.$$

Reemplazando por los valores de r_1 y r_2:

$$d(t) = \sqrt{(90t)^2 + \left(60t + \frac{1}{60}\right)^2}$$

Como la derivada de una ecuación de movimiento es la velocidad para obtener la velocidad con que se alejan los móviles tenemos que calcular $d'(t)$. Además como queremos calcular esta velocidad cuando se encuentran a $0{,}2$ y $0{,}15$ km respectivamente, debemos calcular $d'(t)$ cuando $t = \frac{2}{900}$.

Derivando d:

$$d'(t) = \frac{1}{2\sqrt{(90t)^2 + \left(60t + \frac{1}{60}\right)^2}} \cdot \left((90t)^2 + \left(60t + \frac{1}{60}\right)^2\right)' \Leftrightarrow$$

$$d'(t) = \frac{2 \cdot 90^2 \cdot t + 2\left(60t + \frac{1}{60}\right) \cdot 60}{2\sqrt{(90t)^2 + \left(60t + \frac{1}{60}\right)^2}}$$

Reemplazando cuando $t = \frac{2}{900}$

$$d'\left(\frac{2}{900}\right) = \frac{\frac{2 \cdot 90^2 \cdot 2}{900} + 120\left(\frac{60 \cdot 2}{900} + \frac{1}{60}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{90 \cdot 2}{900}\right)^2 + \left(\frac{60 \cdot 2}{900} + \frac{1}{60}\right)^2}}$$

Haciendo la cuenta:

$d'\left(\frac{2}{900}\right) =$ "velocidad de alejamiento" $= 108\ km/h$.

Que es la misma velocidad si se acercasen. Misteriosamente en las soluciones dice "aproximadamente" $108\ km/h$ ...

---

(56) Calcule un valor aproximado de $\sqrt[3]{28}$

En estos ejercicios de "CÁLCULOS APROXIMADOS" se usa la siguiente fórmula que involucra diferenciales.

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) \simeq df = f'(x_1)(x_2 - x_1)}$$

(Esta fórmula es más precisa cuanto más cerca esté x_1 de x_2.)

En nuestro caso queremos aproximar $\sqrt[3]{28}$ y para esto usaremos que conocemos $\sqrt[3]{27} = 3$. Primero tenemos que $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_2 = 28$, $x_1 = 27$. Entonces aplicando la fórmula:

$$\sqrt[3]{28} - \sqrt[3]{27} = f'(27)\,(28-27)$$

Pero si $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Entonces $f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{3 \cdot 3^2} = \frac{1}{27}$, reemplazando:

$$\sqrt[3]{28} \cong \frac{1}{27} \cdot 1 + \sqrt[3]{27} = 3 + \frac{1}{27} \cong \boxed{3{,}\widehat{037}}$$

Verificando con la calculadora, $\sqrt[3]{28} = 3{,}0365889\ldots$, por lo tanto la aproximación no está mal.

---

57 ¿En cuánto aumenta aproximadamente el lado de un cuadrado si su área aumenta de 9 a 9.1 m^2?

Tenemos que escribir el lado en función del área. Sabemos que

$$a_{\square} = \ell^2.$$

Entonces $\ell = \sqrt{a}$ (todas las variables son positivas), o sea

$$\ell(a) = \sqrt{a}.$$

Aplicando la fórmula y teniendo en cuenta que $\ell'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

$$\ell(a_2) - \ell(a) \cong \ell'(a_1)\,(a_2 - a_1)$$

Haciendo $a_2 = 9{,}1$ y $a_1 = 9$

$$\sqrt{9{,}1} - \sqrt{9} \cong \frac{1}{2\sqrt{9}}(9{,}1-9)$$

Haciendo las cuentas:

$$\sqrt{9{,}1} - 3 \cong \frac{1}{6} \cdot 0{,}1$$

Entonces

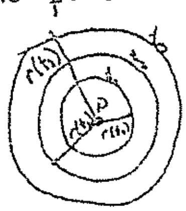
$$\sqrt{9{,}1} \cong \frac{1}{60} + 3 = 3{,}01\hat{6}$$

Por lo tanto el área aumenta aproximadamente $0{,}01\hat{6}$. Haciendo las cuentas con la calculadora obtenemos que el aumento es de $0{,}01662\ldots$ y nuevamente observamos que la aproximación es buena.

---

58 Se arroja una piedra en un lago de agua tranquila. El radio de la onda exterior aumenta a una velocidad de 4 cm/seg, cuando el radio es de 10 cm. ¿A qué velocidad aumenta el área del círculo de agua perturbada?

El radio es una función del tiempo, o sea si P es la piedra:



El área de cualquier circunferencia en función de su radio es

$$a(r) = \pi r^2$$

como en este problema el radio depende del tiempo, el área también:

$$\boxed{a(t) = \pi r^2(t)}$$

Como el radio aumenta con velocidad 4, tenemos que $r'(t_0)=4$ donde t_0 es el momento en que el radio vale 10 $(r(t_0)=10)$
Para averiguar la velocidad con que aumenta el área del círculo derivamos a con respecto a t:

$$a'(t) = (\pi r^2(t))' \underset{\substack{\uparrow \\ R(3)}}{=} \pi (r^2(t))' \underset{\substack{\text{Regla} \\ \text{de la cadena.}}}{=} \pi . 2 r(t) . r'(t)$$

$$a'(t_0) = \pi . 2\, r(t_0)\, r'(t_0) = \pi . 2 . 10 . 4 = \boxed{80\pi}$$

---

59 Un globo pierde aire a razón constante de 2 cm^3/seg. ¿Con qué rapidez decrece el radio del globo cuando su diámetro es de 1m?

El volumen de una esfera de radio r viene dado por la fórmula:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

En este caso el volumen y el radio dependen del tiempo, o sea

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t).$$

Además te dicen que $V'(t) = 2\,\frac{cm^3}{s}$, y que averigüemos la rapidez con que decrece el radio. O sea que tenemos que poner el radio en función del volumen y luego derivar:

$$r(t) = \left(\frac{3}{4\pi} V(t)\right)^{1/3}$$

Entonces

$$r'(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4\pi} V(t)\right)^{-2/3}\left(\frac{3}{4\pi} V'(t)\right)$$

Te piden que calcules esta velocidad de decrecimiento cuando el diámetro es $1m = 100cm$ (para igualar unidades), o sea cuando el radio es $r(t) = 50cm$. En este caso $V(t) = \frac{4}{3}\pi (50)^3$ y $V'(t) = 2$ (porque es constante). Reemplazando:

$$r'(t) = \frac{1}{\cancel{3}}\left(\cancel{\frac{3}{4\pi}}\cdot\cancel{\frac{4\pi}{3}}(50)^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\cancel{3}}{4\pi}\cdot 2\right) = \frac{1}{2\pi}(50)^{-2} = \boxed{\frac{1}{2\pi(50)^2}}.$$

AGREGADO → Determine $d^2 f$ en $x = 0$ si $f(x) = \cos(5x)$

Hay otra notación para la derivada que surge de la teoría de diferenciales. En general se la denomina notación de Leibnitz porque parece que fue el que la inventó. Esta notación tiene gran aceptación entre los físicos por su versatilidad para operar y sobre todo porque permite, a pesar de ser simbología matemática, realizar interpretaciones físicas intuitivas. Según esta notación:

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}$$

En general: $\dfrac{d^{(n)} f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

Por ejemplo si $m(t)$ es un movimiento en función del tiempo, entonces la velocidad instantánea en el instante t será:

$$v(t) = m'(t) = \frac{dm}{dt}$$

Se ve que $\frac{dm}{dt}$ nos dice más sobre el concepto físico que estamos tratando que escribir $m'(t)$, pues la velocidad es $\dfrac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo que se tardó}}$.

$$f(x) = \cos(5x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = f'(x) = -5\,\mathrm{sen}(5x) \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} = -25\cos(5x)$$

$$\Rightarrow d^2 f = -25\cos 5x \,.\, dx^2 \Rightarrow d^2 f(0) = -25\cos(0) dx^2 = -25\, dx^2$$

AGREGADO Determine

1) - $d^5 y$ si $y = x^5$; 2) - $d^4 y$ si $y = \mathrm{sen}\, x$

3) $d^{10} y$ si $y = \cos(2x)$ 4) $d^6 y$ si $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

1)
$y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4 \Rightarrow y'' = 20x^3 \Rightarrow y''' = 60x^2 \Rightarrow y^{IV} = 120x$
$\Rightarrow y^{V} = 120$

En consecuencia $\dfrac{d^5y}{dx^5} = 120 \Rightarrow d^5y = 120dx^5.$

2) Podemos derivar 10 veces para encontrar $y^{(10)}$ o podemos usar la fórmula para $y^{(n)}$ deducida en el ejercicio 49. Luego de pensarlo, nos quedamos con la segunda opción. Según dicha fórmula

$$y^{(10)} = -2^{10}\cos(2x)$$

Entonces

$$\frac{d^{10}y}{dx^{10}} = -2^{10}\cos(2x).$$

Pasando términos,

$$d^{10}y = -2^{10}\cos(2x)\,dx^{10}.$$

3) Usando la fórmula obtenida en 48.2

$$y^{(4)} = \operatorname{sen} x$$

Entonces

$$d^4y = \operatorname{sen} x\, dx^4$$

4) Usaremos la siguiente fórmula:

$$y^{(6)} = \frac{2.6!}{(1-x)^7}, \text{ además } y^{(6)} = \frac{d^6y}{dx^6}$$

Entonces

$$d^6y = \frac{2.6!}{(1-x)^7}\,dx^6$$

60 Calcule y' en (1;1) si $2y = 1 + xy^3$

Este ejercicio y los que siguen involucran lo que se llama derivación implícita. Se hace cuando hay que derivar y no se puede despejar la función a partir de la variable independiente. En estos casos se deriva a ambos lados de la igualdad:

Si tenemos la relación

$$2y = 1 + xy^3$$

Derivando a ambos lados

$$(2y)' = (1 + xy^3)'$$

Aplicando R① y R③

$$2y' = (xy^3)'$$

Aplicando R②

$$2y' = (x)'y^3 + x(y^3)'$$

Como $x' = 1$ y aplicando R. cadena a $(y^3)'$

$$2y' = y^3 + x \cdot 3y^2 y'$$

Agrupando y' a la izquierda

$$2y' - x3y^2y' = y^3$$

Asociando

$$y'(2 - 3xy^2) = y^3$$

Pasando de términos

$$y' = \frac{y^3}{2 - 3xy^2}$$

Si $(x;y) = (1;1)$

$$y' = \frac{1^3}{2 - 3.1.1^2} = \frac{1}{2-3} = \boxed{-1}$$

---

61 Calcule y' si $\operatorname{tg} y = x.y$

Si tenemos $\operatorname{tg} y = xy$ y derivamos a ambos lados;

$$(\text{tg}\, y)' = (xy)'$$

Aplicando la regla de la cadena y R②:

$$(1 + \text{tg}^2 y) . y' = (x)' y + x y'$$

Como $x' = 1$:

$$(1 + \text{tg}^2 y) y' - x y' = y$$

Despejando y':

$$\boxed{y' = \frac{y}{1 + \text{tg}^2 y - x}}$$

---

62 Calcule y'' en $(0;1)$ si $x^4 - xy + y^4 = 1$.

∴ Primero verifiquemos que el $(0,1)$ satisface la ecuación

$$0^4 - 0.1 + 1^4 = 1 \quad \checkmark$$

Derivemos una vez

$$(x^4 - xy + y^4)' = (1)'$$

Aplicando R①

$$(x^4)' - (xy)' + (y^4)' = 0$$

Aplicando R⑤ y R②

$$4x^3 - (y + xy') + 4y^3 . y' = 0$$

Agrupando y'

$$y'(4y^3 - x) = y - 4x^3$$

Despejando

$$y' = \frac{y - 4x^3}{4y^3 - x}$$

En $(0,1)$, $\boxed{y' = \frac{1}{4}}$. Para calcular y'' nos conviene volver a la ecuación antes de despejar y de esta forma evitar calcular la derivada de un cociente:

$$\left(y'(4y^3-x)\right)' = (y-4x^3)'$$

Aplicando R②:

$$y''(4y^3-x) + y'\left[12y^2y'-1\right] = y' - 12x^2$$

Despejando y'':

$$y'' = \frac{y' - 12x^2 - y'\left[12y^2y'-1\right]}{4y^3-x}$$

Reemplazando $x=0,\ y=1,\ y'=\frac{1}{4}$:

$$y'' = \frac{1/4 - 1/4\left[\overbrace{12\cdot\frac{1}{4}-1}^{2}\right]}{4} = \frac{1/4 - 2/4}{4}$$

Por lo tanto $\boxed{y'' = \frac{-1}{16}}$

---

(64) Dada $x^3+y^3.-1=0$ pruebe que: $y''=-2xy^{-5}$

Derivando la ecuación implícita:

$$\left(x^3+y^3-1\right) = 0 \qquad (I)$$

Aplicando R① y la regla de la cadena:

$$3x^2 + 3y^2.y' = 0 \qquad (II)$$

Despejando:

$$y' = -\frac{x^2}{y^2} \qquad (III)$$

Derivando en (II)

$$6x + (3y^2)'y' + 3y^2y'' = 0 \qquad (IV)$$

Aplicando la regla de la cadena

$$6x + 6y.y'^2 + 3y^2y'' = 0 \qquad (V)$$

Despejando y'':

$$y'' = \frac{-2x - 2yy'^2}{y^2} \qquad (VI)$$

Reemplazando y' por el valor obtenido en (III):

$$y'' = \frac{-2x - 2y\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)^2}{y^2}$$

Operando:

$$y'' = \frac{-2x - \frac{2yx^4}{y^4}}{y^2}$$

Si y solo si

$$y'' = \frac{-2x\left(1 + \frac{x^3}{y^3}\right)}{y^2}$$

Como $x^3 + y^3 = 1$, tenemos que $1 + \frac{x^3}{y^3} = \frac{1}{y^3}$, reemplazando

$$y'' = -\frac{2x}{y^5}$$

Que era lo que queríamos demostrar.

---

(65) Pruebe que $y = f(x)$ definida en forma implícita por la ecuación $xy - \ln y = 1$ satisface la igualdad $y^2 + (xy-1)y' = 0$

Derivando a ambos lados de la igualdad:

$$(xy - \ln y)' = 0$$

Aplicando la regla de la cadena y R① y R②:

$$x'y + xy' - \frac{1}{y}y' = 0$$

Teniendo en cuenta que $x' = 1$

$$\frac{y^2 + yxy' - y'}{y} = 0$$

Despejando y agrupando y' tenemos la igualdad deseada:

$$y^2 + (yx - 1)y' = 0.$$

---

66 Pruebe que $y = f(x)$ definida en forma implícita por la ecuación $arc\ \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ satisface la igualdad $x(dy - dx) = y\ (dy + dx)$.

Derivando la ecuación y teniendo en cuenta que

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$: $\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)' = \left(\ln \sqrt{x^2+y^2}\right)'$.

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'$$

Derivando lo que quedó

$$\left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\left(\frac{y'x - x'y}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} (2x + 2yy')$$

Operando

$$\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{y'x - y}{x^2}\right) = \frac{2(x+yy')}{2(x^2+y^2)}$$

Simplificando donde se puede

$$y'x - y = x + yy'$$

Reemplazando y' por $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} x - y = x + y\frac{dy}{dx}$$

Distribuyendo

$$\frac{dy.x - dx.y}{dx} = \frac{xdx + ydy}{dx}$$

Pasando de términos

$$x(dy - dx) = y(dx + dy).$$

67 Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ en el punto (2;1).

IMPORTANTE NOTA PREVIA:

RECTA TANGENTE A f EN (x_0, y_0) (donde $y_0 = f(x_0)$):

La ecuación de una recta cualquiera (no vertical) es

$$y = mx + b \qquad (1)$$

Pag. 4

Sabíamos que la pendiente de la recta tangente a f en x_0 es $f'(x_0)$, siempre y cuando exista. Por lo tanto $\boxed{m = f'(x_0)}$. Para deducir b, tenemos en cuenta que la recta pasa por (x_0, y_0), entonces

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b \implies \boxed{b = y_0 - f'(x_0)x_0}$$

Reemplazando en (1), la fórmula queda:

$$y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

O lo que es lo mismo: $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$

RECTA NORMAL A OTRA RECTA:

Dada la recta que pasa por (x_0, y_0) de pendiente m, su fórmula es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$\Rightarrow$ La recta normal y que también pasa por (x_0, y_0) satisface la ecuación

$$\boxed{y - y_0 = \left(-\frac{1}{m}\right)(x - x_0)}$$

Si en particular $m = f'(x_0)$ la ecuación de la recta normal al gráfico de f en (x_0, y_0) es

$$\boxed{y - y_0 = \left(\frac{-1}{f'(x_0)}\right)(x - x_0)}$$

Volvamos al ejercicio. Si "y" satisface $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$, para averiguar y', derivamos a ambos lados de la ecuación:

$$(2x^3 + 2y^3 - 9xy)' = 0$$

Haciendo lo mismo que en ejercicios anteriores:

$$6x^2 + 6y^2y' - 9y - 9xy' = 0$$

Agrupando y' y dividiendo todo por 3

$$2x^2 - 3y + (2y^2 - 3x)y' = 0$$

Despejando y':

$$y' = \frac{3y - 2x^2}{2y^2 - 3x}$$

En $(2,1)$

$$y' = \frac{3.1 - 2.2^2}{2.1 - 3.2} = \frac{3 - 8}{2 - 6} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

Entonces la recta tangente tiene pendiente $\frac{5}{4}$ y pasa por el $(2,1)$ tiene ecuación

$$\boxed{y - 1 = \frac{5}{4}(x - 2)}$$

Y la normal

$$\boxed{y - 1 = -\frac{4}{5}(x - 2)}$$

---

68 Determine la ecuación de la recta normal a la curva $x - y = \sqrt{x + y}$ en el punto (3;1).

Calculemos y' derivando a ambos lados de la ecuación:

$$(x-y)' = (\sqrt{x+y})'$$

Distribuyendo

$$1 - y' = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}(1+y')$$

Agrupando y'

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} = y' + \frac{y'}{2\sqrt{x+y}} = y'\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right)$$

Pasando de términos

$$y' = \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}} = \frac{2\sqrt{x+y} - 1}{2\sqrt{x+y} + 1}$$

Reemplazando $x=3$, $y=1$ para averiguar la derivada puntual:

$$y'(3,1) = \frac{2\sqrt{4}-1}{2\sqrt{4}+1} = \frac{3}{5}$$

Como la recta tangente a la curva tiene pendiente $\frac{3}{5}$, la recta normal tiene pendiente $\left(-\frac{1}{3/5}\right) = -\frac{5}{3}$. Entonces su ecuación es:

$$\boxed{y-1 = -\frac{5}{3}(x-3)}$$

---

69 ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la recta tangente es perpendicular a la recta de ecuación $4x - 3y + 2 = 0$?

Escribamos la recta que nos dan de manera que la entendamos mejor:

$$4x - 3y + 2 = 0 \iff y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

Esta recta tiene pendiente $\frac{4}{3}$. <u>CUALQUIER</u> recta normal a ella deberá tener pendiente $-\frac{3}{4}$, y podemos reformular la pregunta como ¿En que punto de la curva $y^2 = 2x^3$ vale $y' = -\frac{3}{4}$?

Encontremos y':

$$(y^2)' = (2x^3)'$$

Entonces

$$2yy' = 6x^2$$

Despejando y'

$$y' = \frac{3x^2}{y}$$

Igualando a $-\frac{3}{4}$

$$y' = \frac{3x^2}{y} = \frac{-3}{4}$$

Esto sucede si

$$4x^2 = -y$$

Reemplazando en la ecuación de la curva:

$$y^2 = (4x^2)^2 = 2x^3$$

Entonces

$$16x^4 = 2x^3$$

Esto vale si

$$x^3 \cdot (8x - 1) = 0$$

Entonces $x = 0$ ó $x = \frac{1}{8}$, y la primera opción no es posible pues vimos que $\frac{3x^2}{y} = -\frac{3}{4}$. Nos queda $\boxed{x = \frac{1}{8}}$ y como $y = -4x^2$ tenemos que $\boxed{y = -\frac{1}{16}}$.

---

70 ¿En qué punto de la curva $x + \sqrt{xy} + y = 1$ es la recta tangente paralela al eje x?

Que la recta tangente sea paralela al eje x es lo mismo que afirmar que tenga pendiente 0. O sea buscamos (x_0, y_0) tal que $y'(x_0, y_0) = 0$. Derivemos la ecuación:

$$(x + \sqrt{xy} + y)' = (1)'$$

Aplicando R1 y la regla de la cadena:

Por lo tanto
$$1+\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot(xy)'+y'=0$$

$$1+\frac{1}{2\sqrt{xy}}(y+xy')+y'=0$$

Agrupando los y':

$$1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}+y'\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}+1\right)=0$$

Despejando

$$y'=\frac{-\left(1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}\right)}{\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}}+1\right)}$$

Resulta que $y'=0$ si y solo si

$$-\left(1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}\right)=0$$

Entonces:

$$1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}}=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy}+y=0$$

$$\Leftrightarrow y=-2\sqrt{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y}}=-2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{y}=-2\sqrt{x}$$

Esto sucede si $y=0 \Rightarrow x=0$ lo cual es absurdo pues la ecuación implícita quedaría $0=1$. Entonces no existe un punto tal que la recta tangente en ese punto tenga pendiente nula.

---

(71) Demuestre que $y=\dfrac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ satisface la ecuación: $2x^2\,dy=\left(x^2y^2+1\right)dx$

Calculemos $y'=\dfrac{dy}{dx}$:

$$y' = \left(\frac{1+\ln x}{x - x\ln x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x - x\ln x) - (1+\ln x)(1 - \ln x - 1)}{(x - x\ln x)^2} =$$

$$= \frac{1 - \ln x + (1+\ln x)\ln x}{(x - x\ln x)^2} = \frac{1 - \ln x + \ln x + \ln^2 x}{(x - x\ln x)^2}$$

$$= \frac{1 + \ln^2 x}{(x - x\ln x)^2} = \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

Calculemos $(x^2y^2+1)\,dx$, reemplazando por el valor de y:

$$(x^2y^2+1)\,dx = \left(x^2\left(\frac{1+\ln x}{x - x\ln x}\right)^2 + 1\right)dx = \left(\frac{x^2(1+2\ln x+\ln^2 x)}{(x - x\ln x)^2} + 1\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2 + \cancel{2x^2\ln x} + x^2\ln^2 x + x^2 - \cancel{2x^2\ln x} + x^2\ln^2 x}{(x - x\ln x)^2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^2(1+\ln^2 x)}{(x - x\ln x)^2}\right)dx = 2x^2\,dy$$ por lo que obtuvimos en (1).

$\boxed{\text{OTRA NOTA TEÓRICA}}$

Una <u>CURVA DEFINIDA EN FORMA PARAMÉTRICA</u> son los puntos del plano que satisfacen

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \quad \text{con } a < t < b \quad \text{con } h \text{ y } g \text{ continuas en } (a,b)$$

En el caso particular que la g es inversible, de la ecuación obtenemos $t = g^{-1}(x)$ y entonces $y = h(t) = h(g^{-1}(x)) = h \circ g^{-1}(x)$ y tenemos que la curva representa una función: La función $h \circ g^{-1}$.

Supongamos ahora que tenemos una curva paramétrica que corresponde a una función f a la cual le queremos calcular la derivada. Tenemos entonces que $y = f(x)$ y además

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y(t) = f(x(t))$$

Derivando a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$y'(t) = f'(x(t))\, x'(t)$$

Entonces

$$\boxed{f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}} \quad (= f'(x(t))$$

Derivendo nuevamente obtenemos la fórmula para la derivada segunda:

$$f''(x(t)) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$$

AGREGADO → **Represente gráficamente las funciones definidas en forma paramétrica**

NOTA: Este problema es similar al Ej. 43.

a) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - t^2 \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 2 \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 3 \operatorname{sen} t \\ x = 3 \cos t \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

Los gráficos figuran en las soluciones, acá veremos la forma de deducir la expresión "funcional" a partir de la forma paramétrica.

a)- $\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Como $x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3}$ y reemplazando en la segunda ecuación obtenemos

$$y = 6\left(\frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 2x - \frac{x^2}{9}$$

Entonces $y = f(x) = -\frac{x^2}{9} + 2x$ y la función resultó ser una parábola con raíces 0 y 18. Como el $a = -\frac{1}{9}$ es negativo la parábola apunta hacia abajo y $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

---

b) $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t-2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Si $x = t+1 \Rightarrow t = x-1$ y reemplazando en la segunda ecuación obtenemos

$$y = t-2 = (x-1)-2 = x-3$$

Entonces $f(x) = y = x-3$ y la función resultó ser una recta de pendiente 1 y ordenada al origen (-3). Además $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

---

c) $\begin{cases} y = 3\,\text{sen}\,t \\ x = 3\cos t \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$

Usaremos, para encontrar una relación entre x e y el hecho que $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$. Entonces

$$x^2+y^2 = (3\operatorname{sen}t)^2+(3\cos t)^2 = 9\operatorname{sen}^2t+9\cos^2t = 9(\operatorname{sen}^2t+\cos^2t)$$

Entonces

$$x^2+y^2=9$$

Despejando y en función de x

$$|y| = \sqrt{9-x^2}$$

Pero como $0\leq t\leq\pi$, $y = 3\operatorname{sen}t \geq 0$, entonces nos quedó

$$f(x)=y=\sqrt{9-x^2}$$

Finalmente tenemos que ver cuál es el dominio de la función. Para esto tenemos que analizar entre qué valores se mueve x. Como $0\leq t\leq\pi$ y $x=3\cos t$, tenemos que en el intervalo $[0,\pi]$ la función cost toma todos los valores en el $[-1,1]$. Entonces 3cost toma todos los valores en el $[-3,3]$. En consecuencia $\operatorname{Dom} f = [-3,3]$

---

(74) Determine el valor del parámetro que corresponde a las coordenadas (3;2) del punto perteneciente al gráfico de

$$\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=t^3+t \end{cases} \qquad t\in\mathfrak{R}$$

En forma inmediata, teniendo en cuenta que $(x,y)=(3,2)$ obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} x = t^2+2t = 3 & (a) \\ y = t^3+t = 2 & (b) \end{cases}$$

De (a)

$$t^2+2t-3=0$$

Y resolviendo la cuadrática

$$t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{2}{2}=1 \\ \frac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

EL t obtenido también tiene que satisfacer ⓑ. Supongamos primero que $t=-3$, entonces:

$$t^3+t = (-3)^3 + (-3) = -27-3 = -30 \neq 2.$$

Probemos con $t=1$

$$t^3+t = 1^3+1 = 2.$$

Entonces la respuesta es $\boxed{t=1}$. Si ninguno de los dos t hubiese satisfecho ⓑ, la conclusión hubiese sido que la curva no pasa por el $(3;2)$.

AGREGADO ⟶ **Calcule $y' = \frac{dy}{dx}$, en los siguientes casos**

a) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$

Aplicando la fórmula de la derivada de una función dada en forma paramétrica que figura en la pagina 63:

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

En el caso $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Tenemos que $\begin{array}{l} x'(t) = 2 \\ y'(t) = 3t^2 \end{array} \Rightarrow f'(x(t)) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \boxed{\dfrac{3t^2}{2}}$

b) $\begin{cases} y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \\ x = \frac{1}{t+1} \\ t \neq -1 \end{cases}$

En este caso:

$$y'(t) = 2\left(\frac{t}{t+1}\right)\left(\frac{t}{t+1}\right)' = 2\left(\frac{t}{t+1}\right)\left(\frac{1.(t+1) - t.1}{(t+1)^2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{t}{t+1}\right)\left(\frac{t+1-t}{(t+1)^2}\right) = \frac{2t}{(t+1)^3}$$

Por otro lado

$$x'(t) = \left(\frac{1}{t+1}\right)' = \left((t+1)^{-1}\right)' = -1\,(t+1)^{-2} = \frac{-1}{(t+1)^2}$$

Entonces

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{2t}{(t+1)^3}}{\frac{-1}{(t+1)^2}} = -\frac{2t\,(t+1)^2}{(t+1)^3} = \boxed{\frac{-2t}{t+1}}$$

c) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \\ t \in \mathbf{R}^+ \end{cases}$

Hacemos lo mismo que en los anteriores:

$$y'(t) = \left(\sqrt[3]{t}\right)' = \left(t^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}t^{1/3-1} = \frac{1}{3}t^{-2/3} = \frac{1}{3t^{2/3}}$$

$$x'(t) = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Entonces

$$f'(x(t)) = \frac{\frac{1}{3t^{2/3}}}{\frac{1}{2t^{1/2}}} = \frac{2t^{1/2}}{3t^{2/3}} = \frac{2}{3}t^{1/2-2/3} = \frac{2}{3}t^{-1/6} = \boxed{\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[6]{t}}}$$

d) $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\,\mathrm{sen}^2 t \\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$

Nuevamente calculamos $y'(t)$ y $x'(t)$:

$y'(t) = (b\,\text{sen}^2 t)' \underset{R③}{=} b(\text{sen}^2 t)' \underset{R⑤}{=} b\,2.\,\text{sen}t\,(\text{sen}t)' = 2b\,\text{sen}t\cos t.$

$x'(t) = (a\cos^2 t)' \underset{R③}{=} a(\cos^2 t)' \underset{R⑤}{=} a.2\cos t\,(\cos t)' = -2a\cos t\,\text{sen}t.$

Entonces

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2b\,\text{sen}t\cos t}{-2a\,\text{sen}t\cos t} = \boxed{-\frac{b}{a}}.$$

Nos dio que la derivada es constante, esto se debe a que la función determinada por la forma paramétrica es una recta:

$bx + ay = ab\cos^2 t + ba\,\text{sen}^2 t = 2ab$

O sea la recta:

$$\boxed{bx + ay = 2ab}$$

---

76) Demuestre que la función dada por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$ satisface la ecuación $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

Calculemos $\left(\frac{dy}{dx}(t)\right) = f'(x(t))$ y veamos que satisface la ecuación. Para calcularla haremos lo mismo que en el 78)

$y'(t) = (t^2 + 2t^3)' = 2t + 6t^2$

$x'(t) = (2t + 3t^2)' = 2 + 6t$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx}(t) = f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t + 6t^2}{2 + 6t} = \frac{t(2+6t)}{2+6t} = t$$

Reemplazando ahora en la ecuación:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = t^2 + 2t^3 = y \quad ✓$$

---

77 Siendo $\begin{cases} y = t^3 + 2t^2 + 3t + 1 \\ x = t^2 + t + 3 \end{cases}$ Calcule $\frac{dy}{dx}$ en $t = 0$.

Procediendo similar al ej. agregado anteriormente para averiguar $\frac{dy}{dx}$

$y'(t) = (t^3 + 2t^2 + 3t + 1)' = 3t^2 + 4t + 3$

$x'(t) = (t^2 + t + 3)' = 2t + 1$

Entonces

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 + 4t + 3}{2t + 1}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dt}(0) = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

---

78 Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva en el punto que se indica.

78.1. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ en (2;2)

78.2. $\begin{cases} x = \dfrac{2t + t^2}{1+t^3} \\ y = \dfrac{2t - t^2}{1+t^3} \end{cases}$ en $t = 0$

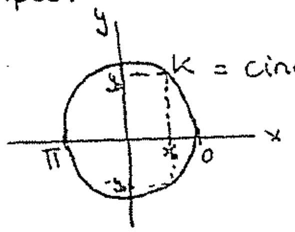
$\downarrow$

Vimos que la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función f en el punto (x_0, y_0) es (cuando $\exists f'$):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

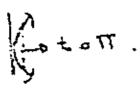
Ahora no tenemos una función sino una curva (que puede o no ser función) que viene dada en forma paramétrica. Sin embargo si la derivada es distinta de ∞ en (x_0, y_0), la curva puede ser considerada una función en un entorno de (x_0, y_0). Vos te podés estar preguntando ¿por qué una curva puede no ser función? Te contesto con un ejemplo:

$$K: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



K = circunferencia unitaria.

Se ve que no es una función pues a un punto le corresponderían dos puntos en la imagen: y_0, $-y_0$. Por otro lado la curva puede ser considerada una función en un entorno de cualquier punto salvo cuando $t = 0$ ó $t = \pi$, pues en esos casos la derivada es ∞:



Para resolver el ejercicio haremos lo mismo que antes, es decir, calcular la derivada y tener en cuenta que vale lo mismo que la pendiente de la recta tangente. Pero hay un inconveniente: la derivada nos quedará expresada en función de t: Entonces lo primero que debemos hacer es hallar $t_0 \,/\, (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, t_0)$.

Podemos sintetizar el procedimiento:

a) Hallar $t_0 \,/\, (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, t_0)$

b) Hallar $f'(x_0) = f'(x(t_0)) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

c) La Recta tangente es $(y - y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

o un poco más generalmente

$$RT: \quad x'(t_0)(y-y_0) = y'(t_0)(x-x_0)$$

d) La Recta Normal es

$$RN: \quad (y-y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

o un poco más generalmente

$$RN: \quad y'(t_0)(y-y_0) = -x'(t_0)(x-x_0).$$

78.1) a) Hallar t_0 / $x(t_0)=2$, $y(t_0)=2$, entonces

$\frac{1+t_0}{t_0^3} = 2$ y $\frac{3}{2t_0^2} + \frac{1}{2t_0} = 2$. A simple vista $t_0 = 1$. (Lo podríamos haber resuelto planteando el sistema de ecuaciones)

b)
$$\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} = \dfrac{1}{t^3} + \dfrac{1}{t^2} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$$

Entonces

$$x'(t) = \left(\frac{1+t}{t^3}\right)' = \left(t^{-3}+t^{-2}\right)' = \left(t^{-3}\right)' + \left(t^{-2}\right)' = -3t^{-4} + (-2)t^{-3}$$

$$= -\frac{3}{t^4} - \frac{2}{t^3}.$$

$$y'(t) = \left(\frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}\right)' = \left(\frac{3}{2}t^{-2} + \frac{1}{2}t^{-1}\right)' = \left(\frac{3}{2}(-2)t^{-3} + \frac{1}{2}(-1)t^{-2}\right) =$$

$$= \frac{-3}{t^3} - \frac{1}{2t^2}$$

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\frac{3}{t} - \frac{1}{2t^2}}{-\frac{3}{t^4} - \frac{2}{t^3}} = \frac{\frac{3}{t^3} + \frac{1}{2t^2}}{\frac{3}{t^4} + \frac{2}{t^3}}$$

Entonces $f'(2) = f'(x(1)) = \dfrac{3+\frac{1}{2}}{5} = \dfrac{7}{10}$

c) RT: $(y-2) = \frac{7}{10}(x-2) \Leftrightarrow 10y - 20 = 7x - 14$

$\Leftrightarrow \boxed{7x - 10y + 6 = 0}$

d) RN: $(y-2) = -\frac{10}{7}(x-2) \Leftrightarrow 7y - 14 = -10x + 20$

$\Leftrightarrow \boxed{10x + 7y - 34 = 0}$

78.2)

a) En este caso te dan el $t_0 = 0$, entonces

$$x_0 = x(t_0) = x(0) = \frac{2.0+0}{1+0} = 0$$

$$y_0 = y(t_0) = y(0) = \frac{20-0}{1+0} = 0$$

O sea que buscamos las rectas tangente y normal al $(0,0)$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{2t+t^2}{1+t^3} \\ y = \dfrac{2t-t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Entonces

$$y'(t) = \left(\frac{2t-t^2}{1+t^3}\right)' = \left(\frac{(2t-t^2)'(1+t^3) - (2t-t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}\right) =$$

$$= \frac{(2-2t)(1+t^3) - (2t-t^2).3t^2}{(1+t^3)^2}$$

Y por lo tanto $y'(0) = 2$.

$$x'(t) = \left(\frac{2t+t^2}{1+t^3}\right)' = \frac{(2t+t^2)'(1+t^3) - (2t+t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2} =$$

$$= \frac{(2+2t)(1+t^3) - (2t+t^2)(3t^2)}{(1+t^3)^2}$$

Y por lo tanto $x'(0) = 2$, de donde

$$f'(x(0)) = \frac{y'(0)}{x'(0)} = \frac{2}{2} = 1$$

c) RT.: $(y-0) = 1(x-0) \Longleftrightarrow \boxed{y - x = 0}$

d) RN: $(y-0) = -\frac{1}{1}(x-0 \Longleftrightarrow \boxed{y + x = 0}$

AGREGADO → **Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de la curva en el punto que se indica:**

a) $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ en $t = 0$

b) $\begin{cases} x = \text{sen } t \\ y = a^t \end{cases}$ en $(0;1)$

a)- Procedemos de la misma forma que en a) b) y c) del ejercicio Anterior

a) Te dan $t_0 = 0$, entonces obtenemos (x_0, y_0) a partir de t_0:

$$(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x(0), y(0)) = (2e^0, e^{-0}) = (2,1).$$

b) $f'(x(0)) = \dfrac{y'(0)}{x'(0)}$, entonces oblenemos y' y x':

$$y'(t) = (e^{-t})' = -e^{-t} \Rightarrow y'(0) = -e^{-0} = -1.$$

$x'(t) = (2e^t)' = 2(e^t)' = 2e^t \Rightarrow x'(0) = 2.e^0 = 2.$

Por lo tanto:

$$f'(x(0)) = \frac{y'(0)}{x'(0)} = \frac{-1}{2}.$$

c) La ecuación de la recta tangente es

$$(y - y_0) = f'(x_0).(x - x_0)$$

Reemplazando, nos queda

$$(y-1) = -\frac{1}{2}(x-2)$$

Distribuyendo

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

Pasando de términos

$$\boxed{\frac{1}{2}x + y - 2 = 0}$$

---

b) $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = a^t \end{cases}$

a) Buscamos t_0 / $(x(t_0), y(t_0)) = (0,1)$, o sea

$x(t_0) = \operatorname{sen} t_0 = 0$

$y(t_0) = a^{t_0} = 1 \Leftrightarrow t_0 = 0$, que verifica también la primera ecuación.

b) Para encontrar la derivada en $(0,1)$ buscamos,

$y'(t) = (a^t)' = a^t . \ln a. \Rightarrow y'(0) = \ln a$

$x'(t) = (\operatorname{sen} t)' = \cos t. \Rightarrow x'(0) = 1$

Por lo tanto:

$$f'(x_0) = f'(x(t_0)) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = \ln a.$$

c) RT: $(y-1) = \ln a\,(x - 0).$

Distribuyendo: $\boxed{y - \ln a\, x - 1 = 0}$

TABLA DE DERIVADAS	
$f(x)$	$f'(x)$
cte.	0
x	1
x^p	px^{p-1} $(p \in \mathbb{R} - \{0\})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\operatorname{th}^2 x - 1$

PROPIEDADES

Dadas f y g derivables:

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(af)' = af'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f g'}{g^2}$

REGLA DE LA CADENA

- $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$