Resueltos

Mto de inercia.

$I = \int R^2 . dm$

MATERIA: FÍSICA I

TITULO: Cuerpo Rígido (1º Parte)

AUTOR: Anibal Kasero

si no patina
a = γ . R

AR1FP5

$V = \omega . r$

DINÁMICA DE LA ROTACION DEL

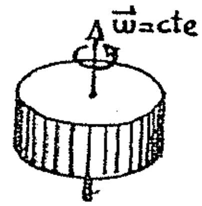
CUERPO RIGIDO

-Por ANÍBAL-

RESUMEN DE LA TEORÍA

ENERGÍA EN LA ROTACIÓN

Un cuerpo que está girando alrededor de un eje que pasa por el C.M. tiene una energía cinética debido a su rotación que vale:

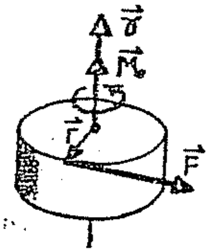


$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}\, I_{CM} . \omega^2}$$

OJO! Esta ecuación es ESCALAR. La velocidad angular $\vec{\omega}$ es un vector ⊥ al plano de rotación. Para saber el sentido de omega uso la regla de la mano derecha.

FUERZAS QUE GENERAN ROTACIONES

Si a un cuerpo se le aplica una Fuerza $\vec{F}$ empezará a girar con una aceleración $\vec{\gamma}$ dada por la expresión:



$$\boxed{\vec{M}_{CM} = I_{CM} . \vec{\gamma}}$$

Esta ecuación es VECTORIAL. $\vec{M}$ y $\vec{\gamma}$ son vectores ⊥ al plano de rotación. $\vec{M}$ es el momento de la fuerza aplicada y se calcula como $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$.
Si $\vec{F}$ es ⊥ a $\vec{r}$ entonces: $|\vec{M}| = F . r$

CUERPO RIGIDO

POR QUÉ ES DIFÍCIL ESTE TEMA?

Mi estimado amigo, he aquí una buena pregunta. Las razones son varias:

1º- Para saber dinámica de rotación tenés que saber primero dinámica, Trabajo y energía y choque.

2º- En dinámica de rotación aparecen un montón de fórmulas y tenés que saber cuál de todas tenés que aplicar y COMO la tenés que aplicar. (y no es fácil).

3º- D.D.R. no se vé en la secundaria, es un tema absolutamente nuevo.

4º- Aparecen un montón de conceptos nuevos que no son fáciles de aprender y que te van a llevar mucho tiempo de estudio (Centro instantáneo de rotación, momento de inercia, cantidad de movimiento angular, etc).

5º- Hay un abismo entre la teoría y la práctica. Podés pasarte 10 hs. leyendo el Resnick que cuando quieras hacer los problemas de la guía no te van a salir.

CONCLUSIONES: (Sugerencias digamos).

1)- Andá a las teóricas. (Aunque no sirvan para nada).

2)- Andá a las clases de problemas. (Aunque no sirvan para nada). Acordate que la suma de un montón de cosas que no sirven para nada, sirve para algo.

3)- Hacele preguntas a los ayudantes que para eso están.

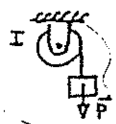
4)- Hacete todos los problemas de la guía (Pero todos eh!). Salteá los que no entiendas y dejalos para después. Acordate que solo si vas al parcial sabiendo TODO, tal vez aprobás. (Así viene la mano en la facultad).

*NOTA: La guía de D.D.R. empieza por los problemas mas generales. Se dice que de esta manera "el alumno aprende la materia desde un punto de vista general". El asunto es que los problemas más generales son casi siempre los mas difíciles, es decir que la guía quedó ordenada al revés, con los problemas mas difíciles al principio y los más fáciles en el medio o al final.
A mí este tipo de teorías no me gustan.
Por eso puse estos problemas como a mi me parece, empezando por los ejercicios más fáciles, siguiendo con los difíciles y terminando con los infernales.
(Uno siempre aprende de lo + fácil a lo + difícil y del caso particular al caso general).
En definitiva, los problemas son los mismos que los que están en la guía pero en otro orden. También metí alguno que otro problema que saqué de algún final viejo.
El orden que a mi me parece aproximadamente correcto es:

1_ PROBLEMAS DE DINÁMICA DE ROTACIÓN PROPIAMENTE DICHA.
(o sea: Fuerzas que provocan rotaciones).

① 

← Una fuerza exterior aplicada al cuerpo que lo hace rotar.

② 

← Un peso que lo hace rotar.

③ 

← Poleas con 2 pesos colgados (Máquinas de Atwood).

④ 

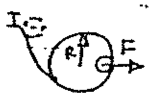
← Planos inclinados sin rozamiento

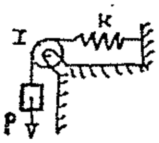
2 - ENERGÍA EN LA ROTACIÓN

(Energías que provocan rotaciones).

(5)  Planos inclinados con rozamiento

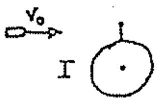
(6)  cilindros que caen rodando sin resbalar

(7)  Energía de rotación adquirida por caida libre.

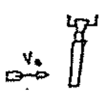
(8)  Energía de rotación adquirida por trabajos hechos por resortes o cosas por el estilo.

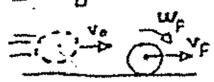
3 - IMPULSOS EN LA ROTACIÓN

(Impulsos que provocan rotaciones).

(9)  Un impulso exterior hace girar un cuerpo (choque)

(10)  Problemas en los cuales se golpea a barras sueltas.

(11)  Problemas en los cuales se golpea a barras vinculadas.

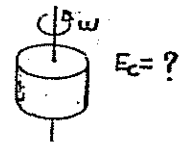
(12)  Esferas que reciben balazos o se las tira sobre planos o se golpean con tacos de billar.

(13)  Problemas de giróscopos o cosas por el estilo en los que hay que trabajar en 3 dimensiones.

FIN DE LA EXPLICACIÓN DE COMO ESTAN ORDENADOS LOS PROBLEMAS EN ESTOS APUNTES.

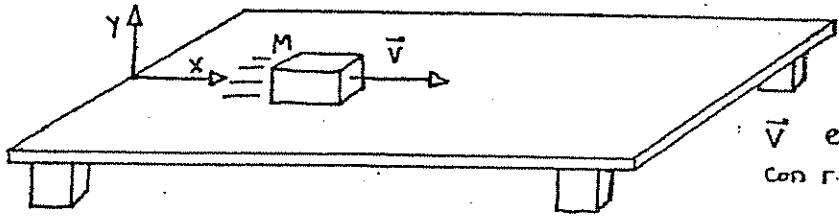
Pongo ahora algo de teoría. La idea es que le des una leída rápida para que veas de dónde salen las principales fórmulas.

ENERGÍA EN LA ROTACIÓN



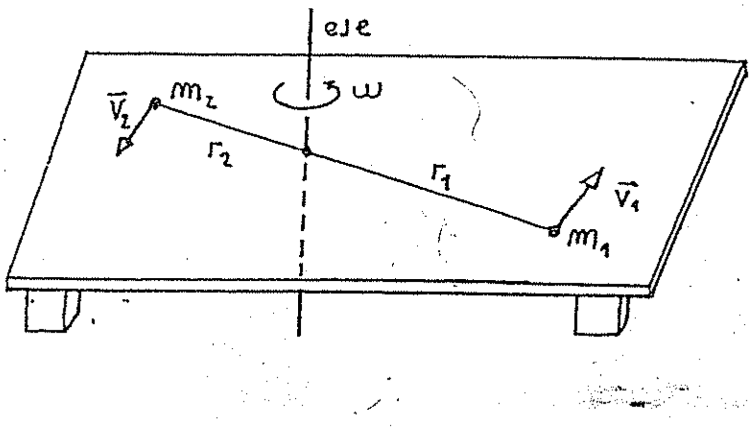
QUÉ ENERGÍA TIENE UN CUERPO QUE ESTÁ ROTANDO ?

Suponete un coso que se mueve sobre una mesa con v=cte.



$\vec{V}$ está medida con respecto a x-y.

Por el hecho de moverse, el cuerpo tiene una energía cinética que vale $E_c = \frac{1}{2} M V^2$. (Eso ya lo sé de antes).
Muy bien.
Fijate ahora lo que pasa cuando un cuerpo en vez de trasladarse empieza a dar vueltas.
Suponé que sobre la mesa sin rozamiento ahora están girando alrededor de un eje 2 partículas de masas m_1 y m_2.
El eje es perpendicular a la mesa y la velocidad angular es ω. Las 2 partículas están unidas por una barra sin masa. (2 piedras con un hilo, digamos).
Quiero decir esto:



2 PARTÍCULAS UNIDAS POR UNA BARRA SIN MASA GIRAN CON ω=cte

Para calcular la energía cinética de las 2 partículas en rotación, sumo la energía que tiene cada una.

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

V_1 y V_2 son las velocidades tangenciales así que V_1 será $V_1 = \omega r_1$ y V_2 será $V_2 = \omega r_2$. Reemplazo.

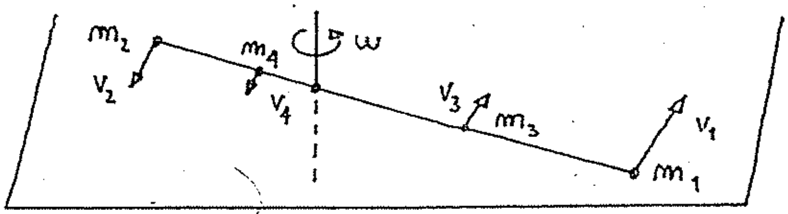
$$E_C = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2$$

como ω es cte para las 2 partículas la saco como factor común.

$$E_C = \frac{1}{2} \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \right) . \omega^2$$

Esta es la energía que tiene el sistema de las 2 partículas sólo por el hecho de estar girando. Para una velocidad angular ω determinada, esta energía cinética depende de la masa de cada partícula y de la distancia al eje de rotación al ^{2}.

Supone ahora que en vez de ser 2 las partículas que están rotando, fueran 4, c/u a una distancia ≠ del eje de rotación. Digamos algo así:



Si otra vez quiero hallar la energía cinética que tienen las 4 partículas girando vuelvo a sumar la energía que tiene c/u y llego a algo así:

$$E_C = \frac{1}{2} \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 \right) . \omega^2$$

Al paréntesis $(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2)$ lo voy poner así:

$$\sum_{i=1}^{4} m_i r_i^2$$

Si las particulas en vez de ser 2 o 4 (o lo que sea), fueran $\underline{n}$, la sumatoria iría de 1 a n y la expresión que me dice cuanto vale la energía cinética de n partículas en rotación quedaría:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i . r_i^2\right) . \omega^2 \longleftarrow \text{ENERGÍA CINÉTICA DE N PARTICULAS GIRANDO ALREDEDOR DE UN EJE.}$$

Esta fórmula será muy linda pero no sirve para nada. El asunto es hallar la energía que tiene un cuerpo en rotación (un cilindro  o una barra ).
<u>no</u> un sistema de partículas!

<u>ACÁ VIENE LA TRAMPA.</u>

Un cuerpo macizo no está compuesto por 10 partículas o n particulas, está compuesto por ∞ partículas! (ojo, partículas, no átomos)..

En este caso la sumatoria queda: $\sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 . m_i$. ← ESTO

El problema es complicado: Como se hace para hallar el valor de una suma de infinitas cosas? La suma no tiene por que valer ∞ por que si dividí al cuerpo en ∞ partículas, la masa de c/ partícula tiende a cero.
Voy a tratar de mostrarte como hicieron los matemáticos para resolver este asunto.
Veamos.
Titulo:

MOMENTO DE INERCIA CON RESPECTO A UN EJE

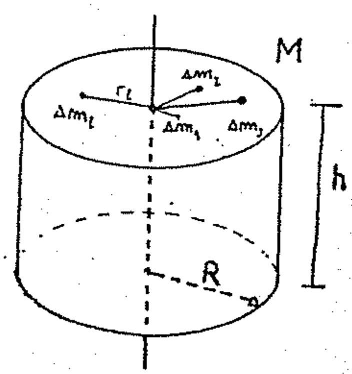
Los tipos dijeron: Vamos a llamar a la sumatoria $\sum_1^\infty r_i^2 . m_i$ momento de inercia (I) y vamos a ver si podemos encontrar alguna manganeta para poder calcularlo.

Supongamos el caso particular de un cilindro. Lo agarro y lo divido en ∞ partículas. Cada partícula tiene una masa Δm_i.

Hago un dibujito para aclarar el asunto.

El volumen de un cilindro es:

$$V = h . \pi . r^2$$



Y como la masa es densidad x Volumen:

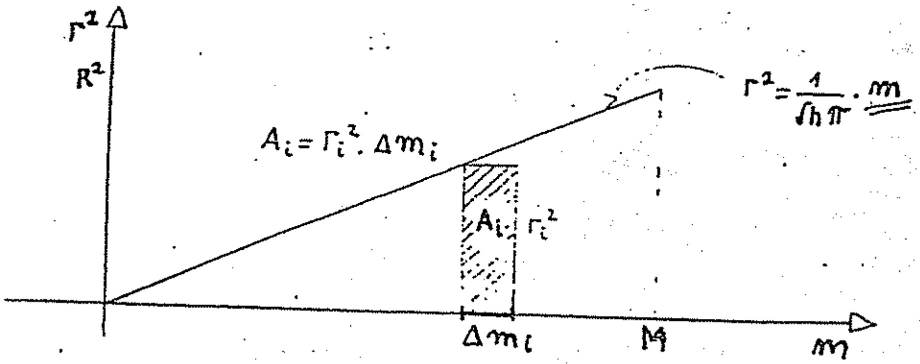
$$m = \delta . V \implies m = \delta . \overbrace{h \pi r^2}^{V}$$

Esto me dice (dicen ellos) que la masa en un cilindro crece con el^2 del radio. (Delta, hache y pi son constantes).

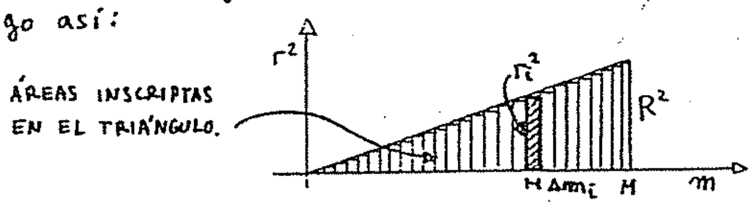
Si ahora despejo r^2:

$$r^2 = \frac{1}{\delta h \pi} . m$$

Esto me dice ahora que el radio al^2 aumenta linealmente con la masa. Graficemos la función $r^2 = f(m)$:



El producto de cada $r_i^2 . \Delta m_i$ significa desde el punto de vista **GRÁFICO** el area de un rectángulo inscripto en un triángulo. La suma de los productos de cada $\Delta m_i . r_i^2$ será la suma de un montón de rectángulos inscriptos en un triángulo.
Es decir, algo así:



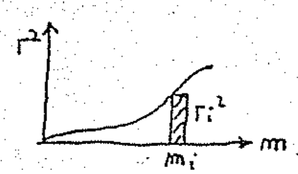
Si divido al cuerpo en infinitas partes, c/ Δm_i tenderá a cero, el área de c/ rectángulo se hará infinitésima y la suma de los ∞ rectangulos me va a dar el triángulo grande. La superf. de un Δ es $b.h/2$, así que en este caso el área del gráfico vale:

$$\text{Area}_{\triangle} = I_{cilindro} = \frac{\overbrace{M}^{b}.\overbrace{R^2}^{h}}{2} \longleftarrow$$

MOMENTO DE INERCIA DE UN CILINDRO (CON RESPECTO A UN EJE QUE PASA POR EL C. de MASA.

Con este truco geométrico los matemáticos resuelven el problema físico. (que era calcular el momento de inercia de un cilindro). En realidad lo que hicieron fué hallar el valór de la maldita expresión: $\sum_1^\infty r_i^2 \Delta m_i$ con $\Delta m_i \to 0$.
En definitiva, la conclusión es que para hallar el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje tenés que graficar la función $r^2 = f(m)$ y hallar el área bajo la curva.
Para un cilindro este asunto resultó fácil porque la función era lineal y el area éra directamente la superficie de un triángulo.
Si vos tratás de hacer este proceso para otro cuerpo, la función no tiene porqué darte lineal.
Por ejemplo, si tengo un coso que tiene esta forma:

El asunto puede dar así:



CURVA DE r^2 EN FUNCIÓN DE m PARA UN CUERPO DE FORMA CUALQUIERA.

El momento de inercia volverá a ser el área bajo la curva pero ahora ya no hay manera GEOMÉTRICA de calcular ésta superficie. El area de cada rectángulo inscripto es variable y hay que integrar. (supongo que ya lo habrás visto en Análisis I).

Para los cuerpos simples que se usan en Física I todas estas integrales ya estan resueltas y los momentos de inercia están todos ordenados en una tabla. Vos no vas a tener que integrar, vas a la tabla y te fijás directamente cuanto vale el momento de inercia para ese cuerpo y listo, pero tenés que saber que para el caso general el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje se calcula haciendo una integral. Esa integral es:

$$I = \int R^2 \, dm$$

DEFINICIÓN DE MOMENTO DE INERCIA QUE LES GUSTA A ELLOS.

En definitiva, la energía cinética de rotación que tiene un cuerpo que está girando alrededor del c. de masa con velocidad angular $\omega = cte$ vale:

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$

ENERGÍA CINÉTICA QUE TIENE UN CUERPO QUE ROTA CON VELOCIDAD ANGULAR ω alrededor de un eje que pasa por el C.M.

Esta es la 1era fórmula importante de dinámica de rotación. Me olvidaba de decirte que el momento de inercia se mide en $Kg.m^2$ porque es el producto de una masa por una distancia al ^{2}.

QUÉ SIGNIFICA EL MOMENTO DE INERCIA DESDE EL PUNTO DE VISTA FÍSICO?

(Esto es muy importante)

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje es una medida de la resistencia que opone el cuerpo a girar alrededor de ese eje.

Compará un poco las formulas de dinámica en la traslación con las de dinámica en la rotación:

TRASLACIÓN: $E_c = \frac{1}{2} M V^2$

ROTACIÓN: $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$

En la traslación la masa representaba la resistencia que el cuerpo oponía a trasladarse.
En la rotación el momento de inercia representa la resistencia que ese cuerpo opone a girar.

Para 2 cuerpos que se trasladan con la misma velocidad, tendrá mayor energía cinética el que tenga mas masa ($E_c = \frac{1}{2} \underline{\underline{M}} V^2$)
Si 2 CUERPOS ESTAN rotando con la misma velocidad angular, tendrá mayor energía cinética el que tenga mayor momento de Inercia. ($E_c = \frac{1}{2} \underline{\underline{I}} \omega^2$).

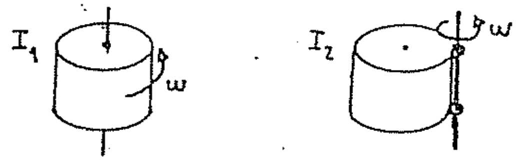
Si tratás de empujar un cuerpo y ves que te cuesta mucho acelerarlo decís: Pucha!, este tipo tiene mucha masa! (La masa te dice mi honor esta en juego y de aquí no me muevo). Si tratás de hacer girar un cuerpo y ves que te cuesta mucho, decís: pucha! Este cuerpo tiene mucho momento de inercia. (El momento de inercia te dice: Mi honor está en juego y sobre éste eje no giro).

Conclusión:

MASA: Inercia a la traslación.
MOMENTO DE INERCIA: Inercia a la rotación.

⟵ IMPORTANTE

La analogía entre la masa y el momento de inercia no es absoluta. La masa de un cuerpo es siempre la misma, lo pongas donde lo pongas, el momento de inercia de un cuerpo depende del eje de rotación:



I_2 es mayor que I_1
(La masa esta mas aleja-da del eje de rotación)

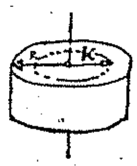
RADIO DE GIRO (K)

Suponé que un cuerpo tiene un determinado momento de inercia con respecto a un eje. Si concentro toda la masa del cuerpo sobre un aro de radio K tal que el momento de inercia de ese aro sea igual al del cuerpo, digo que la distancia K es el radio de giro del cuerpo con respecto a ese eje.

$I = M K^2$

Fijate que para un aro de radio K el momento de inercia vale directamente $I = MK^2$ por que toda la masa está a la misma distancia del eje.

Por ejemplo para un cilindro con respecto al eje que pasa por el centro de Masa, K vale:



$$\underbrace{\frac{1}{2} \cancel{M} R^2}_{I_{CM}} = \cancel{M} K^2 \qquad K = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{K = 0{,}707\, R}$$

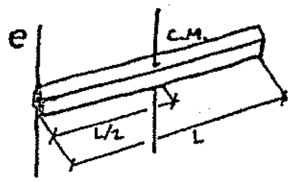
(Toda la masa concentrada a una distancia de 0,707 R tiene el mismo momento de inercia que el cilindro).

TEOREMA DE STEINER

Si un cuerpo tiene un momento de inercia $I_{C.M.}$ con respecto a un eje que pasa por el centro de masa, el momento de inercia de ese mismo cuerpo con respecto a un eje <u>e</u> paralelo al anterior separado una distancia <u>d</u> vale: $I_e = I_{C.M.} + Md^2$

Ejemplo

R 1 1 Para una barra $I_{C.M.} = \frac{1}{12} M.L^2$, para un eje // al anterior pero que pase por la punta de la barra I_e valdrá:

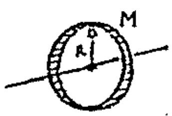


$$I_e = I_{CM} + M.\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

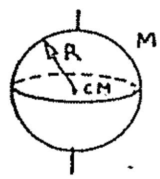
$$I_e = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{L^2}{4} \qquad \underline{I_e = \frac{1}{3} ML^2}$$

Dió mas grande por que la masa está más alejada (en promedio) del eje de rotación.

TABLA DE LOS MOMENTOS DE INERCIA QUE SE USAN EN LOS PROBLEMAS

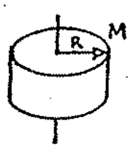


$I_{CM} = MR^2$ ARO

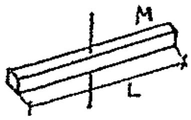


ESFERA

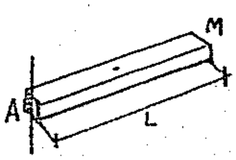
$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$ CILINDRO



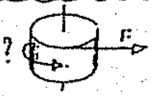
$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$ BARRA



$I_A = \frac{1}{3} ML^2$ BARRA (EL eje pasa por la punta)

QUÉ FUERZA HAY QUE APLICARLE A UN CUERPO PARA QUE ADQUIERA UNA ACELERACIÓN ANGULAR DETERMINADA ?

(Fuerzas que generan rotaciones).

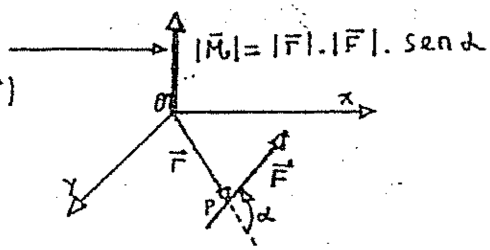


MOMENTO DE UNA FUERZA

Los tipos definen al vector momento de una fuerza con respecto a un punto como el producto vectorial del vector distancia por el vector fuerza.

Significa momento con respecto al punto o. $\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$ ← DEFINICIÓN DE MOMENTO DE UNA FUERZA.

El vector distancia ($\vec{r}$) es la distancia entre el punto donde está aplicada la fuerza y el origen de coordenadas o. (ojo, r vector va de o hacia el punto y no al revés).

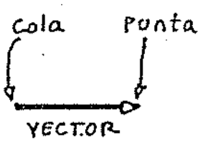


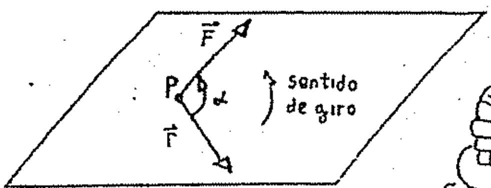
$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$

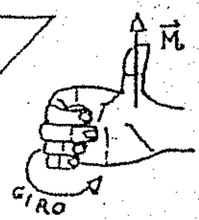
El vector momento es ⊥ al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Su módulo vale $|\vec{M}| = |\vec{r}|.|\vec{F}|.\text{sen}\,\alpha$. α es el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$ si se los une por las colas. Para saber si el maldito vector $\vec{M}$ va para arriba o para abajo se usa este método:

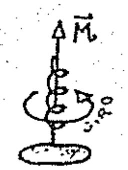
REGLA DE LA MANO DERECHA

1_ Se trasladan los 2 vectores al punto P unidos por las colas.







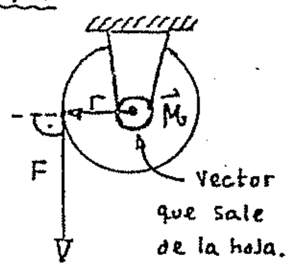


2- Se hace girar $\vec{r}$ hacia $\vec{F}$.
3- Se ponen los dedos como el sentido de giro. El pulgar indicará el sentido de $\vec{M}$.

Atención. Para aplicar esta regla hay que usar siempre la mano derecha! (Si usás la izquierda da al revés).
Ahora, ¿Dónde va el vector momento?
Bueno, generalmente M se suele colocar aplicado en el origen $\underline{o}$ pero puede ponerse en cualquier lado. (Es un vector LIBRE y se puede trasladar paralelamente a sí mismo).
Para saber el sentido de $\vec{M}$ se puede usar también la regla del tirabuzón. Esta regla dice: haga girar un sacacorchos en el sentido de giro. Si el sacacorchos sube, $\vec{M}$ va para arriba. De todas maneras, este método no sirve para nada por que nadie se acuerda nunca p/ donde sube un tirabuzón.

Si un vector sale del plano del papel lo voy a simbolizar así $\odot$ y si entra al papel así $\otimes$ que son las vistas de frente y de atrás de un vector.

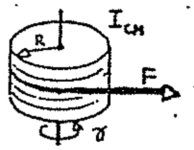
Un ejemplo



Como $\vec{r}$ es $\perp$ a $\vec{F}$ el módulo del vector momento vale directamente F.r. $\vec{M}$ sale del papel y justo en este momento te está dando a vos en la nariz.
La expresión $\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$ se lee: Eme con respecto a o es erre vectorial efe.

Ahora que ya tenés una idea de lo que es el momento de una fuerza, puedo entrar en la 2ª pregunta fundamental de la dinámica de rotación que es: Si un cuerpo está fijo a un eje y se le aplica una fuerza ¿con qué aceleración angular $\vec{\gamma}$ entra a girar?

La respuesta es que la aceleración angular no va a depender sólo de la <u>Fuerza</u> aplicada, sinó que depende también de la distancia que hay entre $\vec{F}$ y el eje de rotación.
Es decir, la aceleración depende del <u>MOMENTO</u> aplicado.
La expresión es:



$$\boxed{\vec{M} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma}}$$

← UN MOMENTO M APLICADO A UN CUERPO QUE TIENE UN MOMENTO DE INERCIA I_{CM} PROVOCA UNA ACELERACIÓN ANGULAR GAMA.

La ecuación esta significa un montón de cosas, y para que la puedas entender bien la voy a comparar (como siempre) con la fórmula equivalente de dinámica lineal.

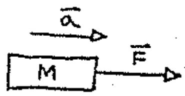
Fijate:

TRASLACIÓN : $\vec{F} = M . \vec{a}$
ROTACIÓN : $\vec{M} = I . \vec{\gamma}$

$\vec{F} = m . \vec{a}$ es una ecuación vectorial. Esta ecuación me dice 2 cosas principales:

1º_ La aceleración adquirida tiene la misma dirección de la fuerza aplicada. (Ec. vectorial).

2º_ La aceleración adquirida es proporcional a la Fuerza aplicada.

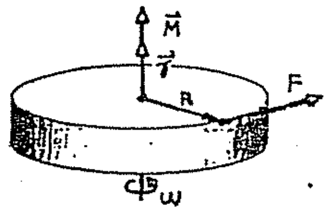


$\vec{F}$ y $\vec{a}$ tienen la misma dirección y sentido.

$\vec{M} = I . \vec{\gamma}$ es también una ecuación vectorial. Esta ecuación me dice 2 cosas principales:

1º - La aceleración angular ($\vec{\gamma}$) adquirida tiene la misma dirección y sentido que el momento aplicado.

2º_ La aceleración angular adquirida es proporcional al Momento aplicado.



$\vec{M}$ y $\vec{\gamma}$ tienen la misma dirección y sentido.

(Acordate que ahora $\bar{M}$ y $\bar{\gamma}$ son vectores ⊥ al plano de rotación).

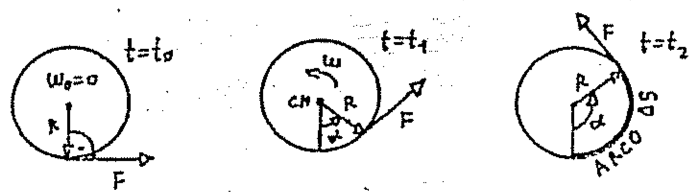
En la ecuación $\bar{F} = m.\bar{a}$ la masa representa la inercia a la traslación. En la ecuación $\bar{M} = I.\bar{\gamma}$ el momento de inercia representa la inercia a la rotación.

R
1

La ecuación $\bar{M} = I.\bar{\gamma}$ representa la ley de Newton para la rotación.

La demostración de como se llega a esta ecuación es bastante complicada. (Hay que trabajar vectorialmente y es un lío).

Sin embargo, una manera de verlo sería la siguiente: Imaginate un cuerpo que gira alrededor de un eje con aceleración angular gamma. Una fuerza (que gira con el cuerpo) aplicada a una distancia R es la responsable de la aceleración.

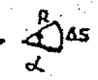


UNA CAÑITA VOLADORA PEGADA AL CUERPO LO HACE GIRAR CON ACELERACIÓN ANGULAR $\vec{\gamma}$.

La Fuerza $\vec{F}$ hace que el cuerpo gire cada vez mas rápido. (ojo, el tipo gira pero no se traslada porque tiene un eje fijo que pasa por el C.M.).

Si encaro el asunto desde el punto de vista del trabajo y la energía, puedo decir que el trabajo que hizo la Fuerza F al recorrer el arco ΔS tiene que haberse invertido en la energía ciné_ tica de rotación que ahora tiene el cuerpo. Si inicialmente el tipo estaba quieto ($\omega_0 = 0$), puedo decir que:

$$L_F = E_{c_F} \Longrightarrow F.\Delta S = 1/2\, I_{cm}.\omega_F^2$$

Ahora, α medido en radianes es $\alpha = \frac{\Delta S}{R}$. (sale de acá $\longrightarrow$ ).
Así que ΔS es: $\Delta S = R.\alpha$
Reemplazando ΔS en $F.\Delta S = 1/2\, I_{cm}.\omega_F^2$: $\underbrace{F.R}_{M_{cm}}\alpha = \frac{1}{2} I_{cm}.\omega_F^2$
El producto F.R es justamente el momento de la fuerza F porque R y F son perpendiculares. $\Longrightarrow$

$$M_{cm}\alpha = 1/2\, I_{cm}.\omega_F^2$$

Como el movimiento que realiza el cuerpo es uniformemente variado, sus ecuaciones horarias son:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + 1/2\, \gamma . t^2 \\ \omega_F = \omega_0 + \gamma . t \\ \gamma = cte \end{cases} \xrightarrow[y\ \omega_0 = 0)]{(\alpha_0 = 0} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\gamma t^2 \\ \omega_F = \gamma . t \\ \gamma = cte \end{cases}$$

Reemplazando α y ω en: $M_{cm}.\alpha = 1/2\, I_{cm}.\omega_F^2$:

$$M.\ 1/2\, \gamma . t^2 = 1/2\, I_{cm} (\gamma . t)^2 \Longrightarrow M_{cm} = I_{cm}.\gamma$$

Esta última expresión relaciona solo el <u>módulo</u> de $\vec{M}$ con el <u>módulo</u> de $\vec{\gamma}$, pero como $\vec{M}$ y $\vec{\gamma}$ tienen la misma dirección y sentido puedo decir que la relación <u>vectorial</u> también es válida, entonces:

$$\vec{M}_{cm} = I_{cm}.\vec{\gamma} \qquad \text{(Relación vectorial).}$$

Esta es la ley de Newton para la rotación y es a lo que quería llegar.

La teoría de fuerzas que generan rotaciones termina acá. Con esto podés empezar a hacer los problemas de la guía.
Qué tengas suerte.

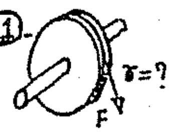
ASIMOV

2

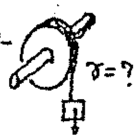
CUERPO RIGIDO

-Por ANÍBAL-

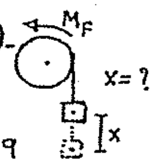
PROBLEMAS QUE ESTAN EN ESTE APUNTE

1-


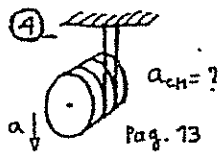
Pag 5

2-


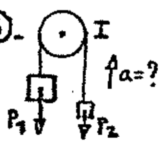
Pág. 7

3-


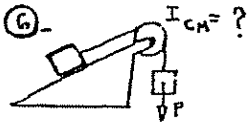
Pag. 9

4-


Pag. 13

5-


Pag. 16

6-


Pag. 17

Son ejercicios en donde aparecen Fuerzas que generan rotaciones.

ECUACIONES

$\vec{M} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma}$ ← Momento aplicado a un cuerpo que gira alrededor del centro de M.

$E_{c_{rot}} = \frac{1}{2} I_{CM} w^2$ ← Energía cinética que tiene un cuerpo que gira alrededor del C.M.

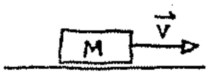
CUERPO RÍGIDO - 2da Parte - Problemas en donde $M = I \cdot \gamma$

RESUMEN DE LO PUBLICADO

Las fórmulas de dinámica de rotación tienen un cierto parecido con las de dinámica de traslación. Para memorizarlas y para saber como aplicarlas tenés que razonar por analogía. R-2

DINÁMICA DE TRASLACIÓN

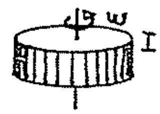
Un cuerpo moviéndose tiene una energía cinética:



$E_c = \frac{1}{2} M v^2$

DINÁMICA DE ROTACIÓN

Un cuerpo rotando alrededor de un eje que pasa por el CM tiene una E_c:



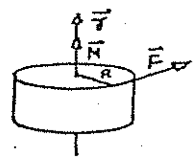
$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$

Estas 2 ecuaciones son escalares. (La energía es un escalar). M es la resistencia al cambio de velocidad. I es la resistencia al cambio de velocidad angular. I se saca de tablas y depende de cuál sea el eje de rotación.

Una fuerza aplicada a un cuerpo le produce una aceleración lineal.

$\vec{F} = M \cdot \vec{a}$

Un momento $\vec{M}$ aplicado a un cuerpo le produce una aceleración angular.



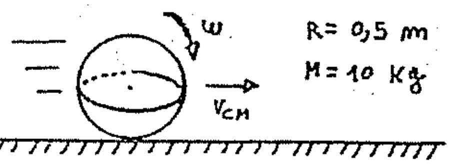
$\vec{M}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{\gamma}$

Estas 2 ecuaciones son vectoriales. (significa que las aceleraciones tienen la misma dirección y sentido que las de la Fuerza y el Momento respectivamente. $\vec{M}$ es el momento de la Fuerza y se calcula como: $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$. El módulo del momento vale: $M_o = F \cdot r \cdot \operatorname{sen} \hat{Fr}$

FIN RESUMEN

Antes de empezar con los problemas te pongo 2 ejemplos fáciles para que veas como se aplican estas fórmulas.

Ejemplo 1



La esfera de la figura gira por el suelo con una velocidad angular $\omega = 6\ 1/s$. ¿Qué trabajo tendrá que realizar un tipo para frenarla?

Veamos:

Por un lado la E_c de rotación que tiene la esfera vale:

$\boxed{E_{c_{rot}} = \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \omega^2}$ Para una esfera $I_{CM} = \frac{2}{5} M R^2$.

Es decir que $E_{c_{rot.}} = \frac{1}{\cancel{2}} \overbrace{\frac{\cancel{2}}{5} M R^2}^{I_{CM}} \cdot \omega^2 = \frac{1}{5}\ 10\ Kg \cdot (0{,}5\ m)^2 \cdot (6\ 1/s)^2$

Por lo tanto: $E_{c_{rot}} = 18\ J.$ ⟵ ENERG. CINET. DE ROT. QUE TIENE LA ESFERA.

Pero ojo!, La esfera rota Y SE TRASLADA, así que también tendrá energía cinética debida a la traslación.

Esta energía vale: $\boxed{E_{c_{tras}} = \frac{1}{2} M\ V_{CM}^2}$

La velocidad con la cual se traslada el CM vale: $V_{CM} = \omega \cdot R = 3\ \frac{m}{s}$.

Entonces:

$$E_{c_{tras}} = \frac{1}{2}\ 10\ Kg \cdot (3\ m/s)^2 = 45\ J.$$

Conclusión: La energía cinética total que tiene la esfera por el hecho de rotar y a la vez trasladarse vale:

$$E_{c_{TOT.}} = E_{c_{rot}} + E_{c_{tras}} = 18\ J. + 45\ J = 63\ J.$$

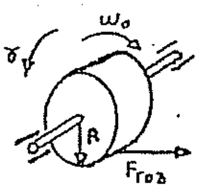
(Las energías cinéticas de traslación y de rotación pueden sumarse directamente porque son ESCALARES, no vectores)

Un tipo (o lo que sea) que quiera frenar a la esfera, va a tener que realizar un trabajo L IGUAL a la Ecinética total que ella trae.
Por lo tanto

$$\underline{\underline{L_{tipo} = 63 \text{ J}}} \longleftarrow$$ TRABAJO QUE TIENE QUE HACER EL TIPO PARA FRENAR A LA ESFERA.

EJEMPLO 2

El cilindro de la figura gira a $\omega = 200$ RPM. Calcular con qué aceleración angular γ comenzará a frenar si se le aplica una fuerza de rozamiento $\perp$ al radio de 100 N.



R 2

Se supone que el eje del cilindro está fijo, de manera que cuando Froz comience a actuar, la velocidad angular empezará a disminuir pero el cilindro no se va a trasladar.
Veamos.
El momento que ejerce Froz vale: $\vec{M} = \vec{R} \wedge \vec{F}_{roz}$. Como $\vec{R}$ y $\vec{F}_{roz}$ son $\perp$, el momento de frenado vale directamente $M = F.R$.
Por lo tanto: $\vec{M}_0 = I_{CM} \cdot \vec{\gamma}$

Para un cilindro I_{CM} vale : $I_{CM} = 1/2\, M.R^2$. Entonces:

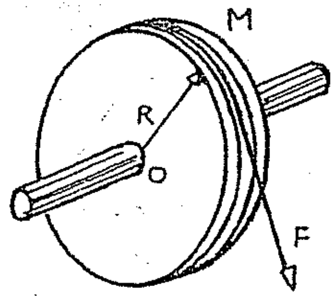
$$F_{roz} \cdot \cancel{R} = \tfrac{1}{2} \cdot M\, R^{\cancel{2}} \cdot \gamma \implies$$

$$\implies 100\, \cancel{Kg} \cdot \frac{\cancel{m}}{s^2} = 0{,}5 \cdot 5\, \cancel{Kg} \cdot 0{,}2\, \cancel{m} \cdot \gamma \implies$$

$$\implies \underline{\underline{\gamma = 200\ 1/s^2}} \longleftarrow$$ ACELERACION ANGULAR CON LA CUAL FRENA.

Fijate que esta va a ser la desaceleración angular que va a tener el tipo INDEPENDIENTEMENTE DE LA VELOCIDAD ANGULAR INICIAL. $\omega_0 = 200$ RPM es un dato de más. (serviría por ejemplo si te preguntaran que tiempo tarda en detenerse).

Vamos ahora a los problemas:



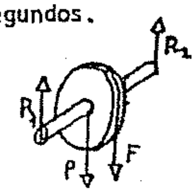
(1) Un disco con una masa de 50 kg. y un radio
R = 0,80 m. puede girar alrededor de su eje.
Se ejerce una fuerza constante
F = 2 Kgs. en el borde del disco.

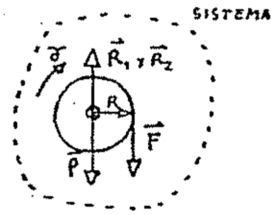
Calcular:

R-2

a) su aceleración angular
b) el ángulo descripto en 5 segundos
c) la energía cinética a los 5 segundos.

Hago un esquema de las fuerzas que actúan: →

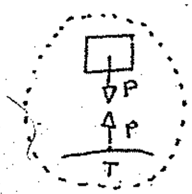




Tomo como sistema al cilindro con el eje. (SISTEMA: conjunto de cuerpos en estudio). Las reacciones R_1 y R_2 en el eje tienen que existir por que sinó el cilindro se trasladaría. Las fuerzas $\vec{F}$, $\vec{P}$, $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ son exteriores. Por qué?
Porque las reacciones a ellas no están dentro del sistema. (Para saber si una fuerza es exterior o interior a un sistema lo que hago es: 1). Envuelvo a mi sistema con una bolsa de plástico. 2). Me fijo si dentro de la bolsa está la reacción a esa fuerza. 3). Si está la reacción, la fuerza es interior. Si no está, la fuerza es exterior).

Ejemplo

SISTEMA: cuerpo.
P: fuerza exterior



SISTEMA: cuerpo + Tierra.
P: fuerza interior

Conclusión: Que una fuerza sea exterior o interior depende sólo del sistema elegido.

Me fijo ahora qué fuerzas tienen efecto sobre la rotación.

El peso del cilindro y las reacciones R_1 y R_2 no ejercen momento por que pasan por el eje de rotación. Así que el momento que produce la fuerza F será el responsable de la aceleración angular.

Planteo entonces: $\vec{M}_{cm} = I_{cm} . \vec{\gamma}$

No hace falta que tome esta ecuación en forma vectorial. Puedo trabajar directamente con los módulos de $\vec{M}$ y $\vec{\gamma}$.

Como $\vec{F}$ es $\perp$ al radio:

$$F . R = I_{cm} . \gamma$$

De la tabla de momentos de inercia $I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$ para un cilindro.

$$\Rightarrow F . \cancel{R} = \frac{1}{2} M R^{\cancel{2}} . \gamma$$

$$2 . 9,8 \frac{Kg . m}{s^2} = \frac{1}{2} 50 Kg . 0,8 m . \gamma \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 0,98 \ 1/s^2}}$$

b) Si el cuerpo gira con γ = cte, el ángulo recorrido vale: $\alpha = w_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 + \alpha_0$. Ahora, si $\alpha_0 = 0$ y $w_0 = 0$, el ángulo alfa es:

$$\alpha = \frac{1}{2} . 0,98 \frac{1}{seg^2} . 25 \ seg^2 = 12,25 \ rad.$$

2π rad ———— $360°$

$12,25$ rad ———— α

$$\alpha = \frac{12,25 . 360°}{2\pi} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 701° \ 52'}}$$

c) Para saber la energía cinética a los 5 segundos tengo que saber cuanto vale la velocidad angular w en ese instante.

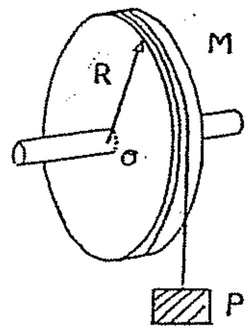
$$w_F = w_0 + \gamma . t \qquad w_0 = 0 \Rightarrow \qquad w_F = 0,98 \frac{1}{seg^2} . 5 \ seg = 4,9 \frac{1}{seg}$$

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} w^2 \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} 50 Kg . 0,8^2 m^2 . 4,9^2 \frac{1}{seg^2} = \underline{\underline{192,08 \ J}}$$

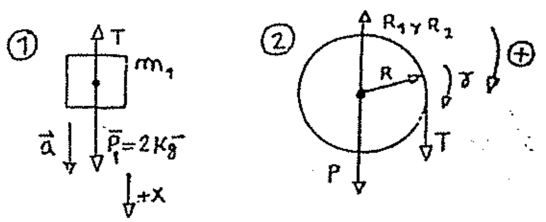
(2) Un disco de radio $R = 0{,}8$ m y masa $M = 50$ kg. puede girar libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro.

Alrededor del disco se arrolla una cuerda en cuyo extremo se coloca un peso $P = 2$ kgs. y el sistema se deja en libertad, a partir del reposo. Determinar:

a) la aceleración angular.
b) El ángulo girado al cabo de 5 segundos.
c) La tensión en la cuerda.



R-2 Como ahora hay 2 cuerpos tengo que hacer 2 diagramas de cuerpo libre, uno para cada uno. Sistema 1: peso P. Sistema 2: cilindro y eje. Los diagramas quedan así



PARA el sistema 1: P_1 y T son fuerzas exteriores

PARA EL sistema 2: Todas las fuerzas son exteriores.

Para el sistema 1 planteo ley de Newton. El sentido del eje x lo elijo siempre en el sentido de la aceleración, así $\underline{\underline{\vec{a}}}$ va a ser siempre ⊕.

$$P_1 - T = m_1 \cdot a \quad \leftarrow \text{Para el cuerpo 1}$$

Para el sistema 2 la única fuerza que ejerce momento es la Tensión T por que todas las demás fuerzas pasan por el eje. Planteo Newton's law para la rotación: $M_{CM} = I_{CM}\,\gamma$. Tomo como ⊕ al giro que va en el sentido de la aceleración angular. (Así gamma va ⊕ en la ecuación).

$$T \cdot R = I_{c.m} \cdot \gamma \quad \leftarrow \text{Para el cuerpo 2.}$$

Las incógnitas son $\underline{T}$, $\underline{a}$ y $\underline{\gamma}$. Falta una ecuación más. La aceleración con la cual cae el peso P_1 tiene que ser la misma que la aceleración tangencial del cilindro.

La ecuación que Falta entonces tiene que ser:

$$a = \gamma . R$$

Te aclaro que esta expresión la puedo plantear por que la soga no patina. Sinó, las aceleraciones NO serían iguales. (Aparte como siempre, supongo soga inextensible, sin masa y etc, etc).

Acá termina el planteo del problema. con esto ya tenés el 80 % bien. A nadie se le va ocurrir sonarte un parcial por resolver mal un sistema de 3 x 3. (Dos por Dos en la Práctica). Ellos quieren que razones y razonar es plantear.

Resuelvo el sistema.

$$\begin{cases} 2 . 9,8\ N - T = 2\ Kg . \gamma . 0.8\ m \\ T . 0,8\ m = \frac{1}{2}\ 50\ Kg\ 0,8^2\ m^2 . \gamma \end{cases}$$

$\underline{\underline{\gamma = 0,907\ 1/seg^2}}$ ⟵ ACELERACIÓN ANGULAR

$\underline{\underline{T = 18,148\ N = 1,851\ \bar{Kg}}}$ ⟵ TENSIÓN EN LA CUERDA

Fijate que lo interesante de este problema es darse cuenta que la aceleración angular dió menor que en el problema 1 (Y en los 2 casos la Fuerza que tiraba era de 2 $\vec{Kg}$) ¿Por qué?

Porque en el problema 1 la Fuerza de 2 $\bar{Kg}$ solo tenía que acelerar a 1 cuerpo (El cilindro) y en el problema 2 a $\boxed{2}$ cuerpos (El cilindro y una masa de 2 Kg). Acordate que la fuerza que hace que el cilindro acelere $\boxed{\text{no es}}$ la Fuerza P_1 que vale 2 $\bar{Kg}$, sinó <u>la tensión en la cuerda</u> que vale 1,85 $\bar{Kg}$.

Para calcular el ángulo girado en 5 seg en vez de hacerlo por cinemática como en el problema anterior, lo voy a calcular así:

R 1 2 A los 5 seg la velocidad angular es $\omega_F = \gamma . t = 0{,}9 \frac{1}{s^2} . 5 \text{ seg} = 4{,}537 \frac{1}{s}$

El trabajo que hizo la tensión de la cuerda tiene que ser igual a la energía cinética que adquirió el cilindro.

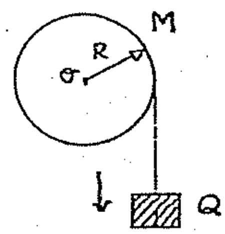
Es decir:

$$\cancel{F . \underbrace{\alpha . R}_{\text{Arco}} = \frac{1}{2} I \omega_F^2}$$

$$M_0 . \alpha = \frac{1}{2} I \omega_F^2 \qquad \underline{\underline{\alpha = 11{,}3 \text{ rad} = 649° \; 53'}}$$

---

③ En el dispositivo de la figura la polea cilíndrica homogénea pesa 10 kgs. y su radio es R = 40 cm. El peso Q es de 30 Kgs. Cuando la velocidad de caída de Q es de 2 m/s se aplica un momento constante, de sentido antihorario de 20 Kgm. Calcular la distancia que recorrerá el peso Q desde el instante en que se aplica el momento de frenado, hasta detenerse.



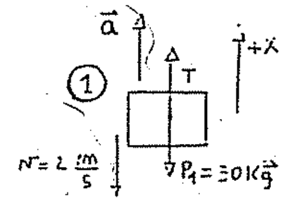
Puedo resolver el problema este de 2 maneras: Desde el punto de vista dinámico o desde el punto de vista energético.

Por dinámica

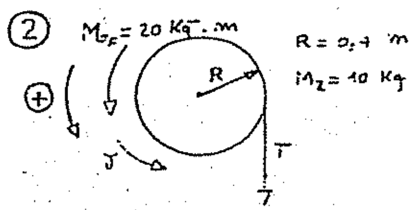
sistema 1: peso P_1. (El peso y la tensión de la cuerda son Fuerzas exteriores).

sistema 2: Polea y eje. (Todas las Fuerzas son exteriores).

Vamos a los diagramas:



DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE



Planteo todo para el instante en que el sistema aceleró hasta que la velocidad tangencial es de 2 m/s y se comienza a aplicar el momento de frenado.

Para el cuerpo 1:

$$T - P = m_1 . a$$

R 1 2

Para el cuerpo 2: De ahora en adelante en el diagrama de cuerpo libre no voy a poner más ni el peso de la polea ni las reacciones en los ejes porque ya sabés que no producen momento. Sobre la polea hay 2 momentos exteriores actuando: uno es el de frenado y el otro es el que hace la tensión T. (ver el diagrama). El momento de frenado es mayor que el de la tensión, así que como dice el problema, a la larga el cuerpo 2 va a terminar por frenarse.

De la misma manera que uno puede escribir la ley de Newton $\vec{F} = m . \vec{a}$ como $\Sigma \vec{F}_{ext} = m . \vec{a}$, uno puede escribir la ecuación $\vec{M}_o = I . \vec{\gamma}$ como $\Sigma \vec{M}_{ext} = I . \vec{\gamma}$. Esto último significa: La suma de $\boxed{\text{TODOS}}$ los momentos actuantes sobre el cuerpo van a provocar la aceleración angular.

Planteo:

$$M_F - T . R = I \, \gamma$$

M_F es ⊕ y T.R es ⊖ porque elegí sentido de giro ⊕ en el sentido de la aceleración angular γ.

como la soga no patina:

$$a = \gamma . R$$

Resuelvo:

$$\begin{cases} T - 30 . 9{,}8 \text{ N} = 30 \text{ Kg} . a \\ 20 . 9{,}8 \text{ N.m} - T . 0{,}4 \text{ m} = \frac{1}{2} \, 10 \text{ Kg} . 0{,}4^2 \text{ m}^2 . \frac{a}{0{,}4 \text{ m}} \end{cases}$$

Como las unidades verifican, directamente escribo:

$$\begin{cases} T - 30\,a = 294 \\ -0{,}4T - 2\,a = -196 \end{cases}$$

Resuelvo:

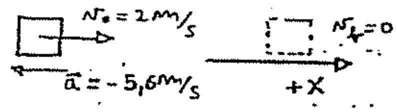
$$\boxed{\begin{array}{c} a = 5{,}6\ \frac{m}{s^2} \\ \hline T = 462\ N \end{array}} \longleftarrow$$ ACELERACIÓN Y TENSIÓN EN LA CUERDA

R12

La aceleración que calculé es la del peso P_1. (En realidad es una desaceleración).

Para saber el espacio recorrido hasta detenerse planteo por cinemática.

$$v_f^2 - v_0^2 = 2\,a\,\Delta X$$



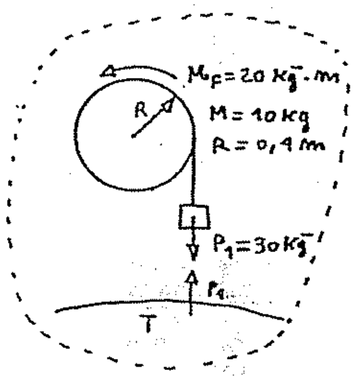
$$0 - 2^2\ \frac{m^2}{s^2} = 2 \cdot \left(-5{,}6\ \frac{m}{s^2}\right) \Delta X$$

$$\underline{\underline{\Delta X = 0{,}357\ m}}$$ DISTANCIA QUE RECORRE HASTA DETENERSE.

Planteo por energía

Tomo como sistema a la polea con el peso P_1 y la Tierra.

El unico momento exterior es M_F, todas las demas fuerzas son interiores al sistema. Fuerzas conservativas: Todas. (En Física I la única fuerza no conservativa es el rozamiento).



Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza a lo largo de una trayectoria cerrada es cero $\circlearrowleft$ ó una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza solo depende del punto de llegada y del punto de partida sin importar en donde estuvo en los puntos intermedios. (El trabajo que realizó no depende de la trayectoria seguida).

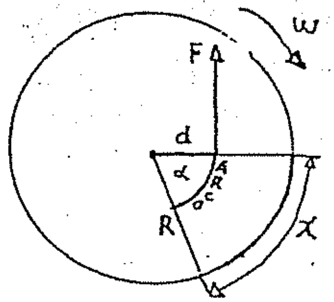
Planteo el teorema del trabajo y la energía:

$$L_{(F.\ ext. + int.\ no\ conservativas)} = \Delta E_{mec.\ sist.}$$

2P

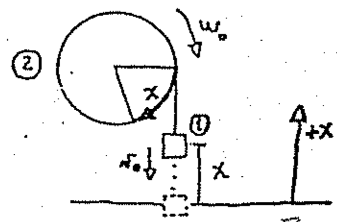
Fuerzas interiores no conservativas no hay, así que el único trabajo lo realizó el momento de frenado. Para calcular este trabajo supongo que M_F está producido por una fuerza $\vec{F}$ que actúa a una distancia d.

R 1 2



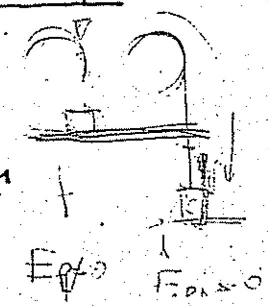
$$W_F = F.\ \text{arco}$$
$$W_F = F.\ \alpha.\ d$$
$$W_F = M.\ \alpha$$
$$W_F = M.\ \frac{x}{R}$$

Este trabajo que realizó el momento es negativo por que va en sentido contrario al movimiento. Para la energía potencial tomo como nivel de referencia la altura más baja que alcanzó el cuerpo.



$$-M_F \cdot \frac{x}{R} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

$$-M_F . X/R = \underbrace{\cancel{E_{c_{f1}}}^{0} - E_{c_{01}}}_{\Delta E_{c_1}} + \underbrace{\cancel{E_{c_{f2}}}^{0} - E_{c_{02}}}_{\Delta E_{c_2}} + \underbrace{\cancel{E_{p_{f1}}}^{0} - E_{p_{01}}}_{\Delta E_p}$$



$$-M_F\ X/R = -\frac{1}{2} I_{cm}\ w_0^2 - \frac{1}{2} m_1\ v_{0_1}^2 - m_1 . g . x$$

ojo, es ⊖, no ⊕

Fin del planteo del problema. Ahora resuelvo:

como la soga no patina, $v_0 = w_0 . R \Rightarrow w_0 = \frac{v_0}{R}$

$$-20 . 9{,}8\ N.m \cdot \frac{x}{0{,}4m} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ 10Kg.\ 0{,}4^2 m^2 . \frac{4\ m^2}{0{,}4^2 m^2 s^2} - \frac{1}{2}\ 30Kg\ 4\frac{m^2}{s^2} - 30^{Kg} . 9{,}8 \frac{m}{s^2} . x$$

como las unidades dan bien puedo trabajar con números y x me va a dar en metros.

$$-490x + 294x = -10 - 60$$

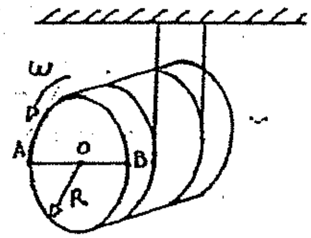
$$\Longrightarrow \underline{\underline{x = 0{,}357\ m}} \longleftarrow$$ DISTANCIA QUE RECORRE HASTA FRENARSE...

(4) En torno de un cilindro macizo de radio R y masa M se arrollan 2 hilos. Fijando las extremidades del hilo y soltando el cilindro, determinar:

a) La tensión T en cada hilo.

b) La a_{cm} del cilindro.

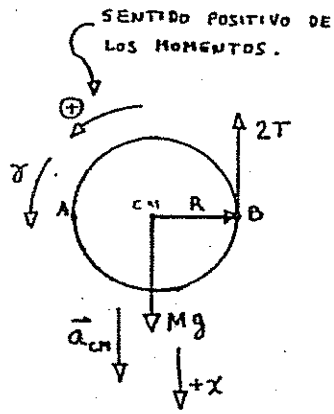
c) Para un instante genérico t la velocidad del c. m. del cilindro y las velocidades de los puntos A y B.



R 1 2

DEFINO el sistema y hago el diag. de c. Libre.

Sistema: cilindro. Todas las fuerzas son exteriores. Tomo el eje $+x$ en el sentido de la aceleración.



Con respecto al C.M. las 2 tensiones producen un momento 2T.R. El peso no produce momento.

Planteo:
$$\begin{cases} 2T.R = I_{CM}.\gamma & \leftarrow \text{Momento de las 2 tensiones T.} \\ M.g - 2T = M.a_{CM} & \leftarrow \text{Newton's law.} \\ a_{CM} = \gamma.R & \leftarrow \text{Relación entre aceleraciones.} \end{cases}$$

a) $\underline{\underline{T = Mg/6}}$ b) $\underline{\underline{a_{CM} = 2/3\, g}}$

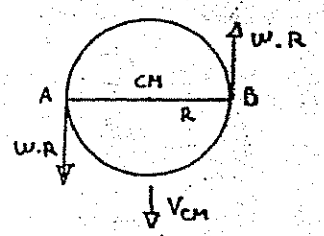
c) Después de un tiempo t la velocidad del centro de masa valdrá: $V_F = V_0 + a_{CM}.t$.

Como la velocidad inicial es cero y la a_{CM} es $2/3\, g$, V_{Final} vale:

$$\underline{\underline{V_{CM} = \frac{2}{3} g.t}}$$

El centro de masa no rota, así que la velocidad que tiene es directamente la velocidad de caída.

con los puntos A y B no pasa lo mismo por que rotan y se trasladan. Lo que tengo que hacer para calcular la velocidad TOTAL del punto A o B es sumarle (o restarle) a la velocidad de caida la velocidad tangencial.



R
1
2

Veamos:

si la a_{CM} vale $\frac{2}{3}g$, como $a_{CM} = \gamma . R$ la aceleración angular vale $\frac{2}{3}\frac{g}{R}$.

Es decir que al cabo de un tiempo t, el cilindro va a adquirir una velocidad angular que vale $w_F = w_0 + \gamma . t$.

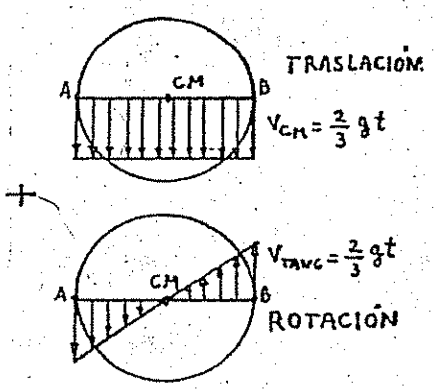
Como $w_0 = 0 \Rightarrow \quad w_F = \frac{2}{3}\frac{g}{R} . t$

Así que al cabo de un tiempo t las velocidades tangenciales de los puntos A y B valen:

$\therefore V_T = w.R \Longrightarrow \quad V_A = \frac{2}{3} g . t$ hacia abajo

$V_B = \frac{2}{3} g . t$ hacia arriba

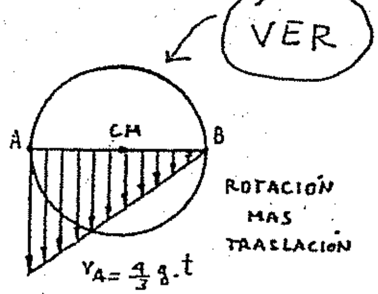
Sumando la velocidad tangencial y la velocidad del CM obtengo la velocidad total.



Para el punto A:

$V_{TOT_A} = \frac{2}{3} g t + \frac{2}{3} g t = \underline{\underline{\frac{4}{3} g t}}$

$V_{TOT_B} = \frac{2}{3} g t - \frac{2}{3} g t = \underline{\underline{0}}$



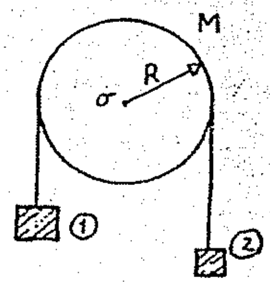
Los diagramas estos son muy, muy importantes.
EL primero representa las velocidades que tienen todos los puntos del cilindro debido a la traslación pura. (Traslación sin rotación).

R
1
2

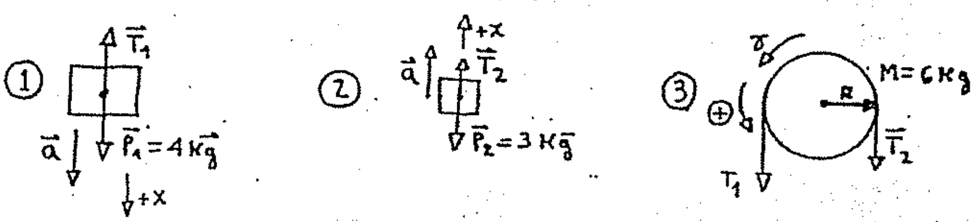
El 2do diagrama representa las velocidades tangenciales para cada punto del cilindro debido a la rotación pura (Rotación sin traslación). El 3er diagrama es la suma de los otros dos y representa la velocidad total INSTANTÁNEA p/ CADA PUNTO.

Acá terminaría el problema si no fuera por una última cuestión: yo calculé la velocidad del punto B y me dió cero. (Fijate en el diagrama de rototraslación). Si lo pensás un poco vas a ver que hay algo que no va. Fijate:
Si la velocidad de B fuera cero, B estaría quieto. Eso no puede ser porque el punto B está cayendo junto con todo el cilindro. Dónde está el error? No hay error, lo que pasa es que hay que saber interpretar las cosas. El diagrama de rototraslación me está dando la velocidad $\boxed{\text{INSTANTÁNEA}}$ del punto B. Significa: En el instante considerado (y sólo en ese instante) B está quieto. De la misma manera, cuando una piedra llega a la altura máxima está quieta. (OJO, sólo en ese instante!). Eso no quiere decir que ella no se haya movido antes o no se vaya a mover después. El punto B está acelerado y una piedra que cae también. Una cosa puede tener velocidad cero y estar acelerando.
Creo que vas a entender mejor esta cuestión cuando empiece con la teoría de centro instantáneo de rotación.

(5) En el dispositivo de la figura la masa de la polea es $M = 6$ Kg. y su radio es $R = 0,40$ m. Las masas m_1 y m_2 son de 4 kg. y 3 kg. respectivamente. El sistema se deja libre iniciándose el movimiento, a partir del reposo. Determinar: a) la energía cinética ganada por el sistema después de 5 segundos; b) las tensiones en las cuerdas.



Hago los diagramas de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos:



La única diferencia que tiene este problema con los problemas anteriores de poleas es que ahora la polea tiene masa. Para poder hacer girar algo que tiene masa tiene que haber un momento neto aplicado. Ese momento lo producen las tensiones en las cuerdas. Si las tensiones fueran iguales la polea no giraría.

b)_Planteo las ecuaciones para cada cuerpo:

Para el cuerpo (1):
Para el cuerpo (2):
Para el cuerpo (3):

$$\begin{cases} P_1 - T_1 = m_1\, a \\ T_2 - P_2 = m_2\, a \\ T_1 R - T_2 R = I_{CM} \cdot \gamma \end{cases} \qquad \text{con: } a = \gamma \cdot R$$

Siendo I_{CM} de un cilindro $\frac{1}{2} M R^2$ y $\gamma = \frac{a}{R}$, Reemplazo:

$$\begin{cases} 39{,}2\ N - T_1 = 4\ Kg \cdot a \\ T_2 - 29{,}4\ N = 3\ Kg \cdot a \\ (T_1 - T_2)\,\cancel{R} = \frac{1}{2}\, 6\, Kg\, R^{\cancel{2}} \cdot \frac{a}{\cancel{R}} \end{cases}$$

Resuelvo el sistema de 3x3 y me queda:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 0{,}98\ m/s^2 \\ T_1 = 35{,}28\ N \\ T_2 = 32{,}34\ N \end{array}} \longleftarrow$$

ACELERACIÓN DE LOS CUERPOS Y TENSIONES EN LAS CUERDAS.

R-2 Acá lo único que tenés que observar es que las tensiones dieron distintas. Esto siempre va a ser así cuando las poleas tengan masa.

a)- La energía cinética ganada por el sistema de los 3 cuerpos es la suma de las energías cinéticas de c/u de ellos.

Calculo las velocidades finales.

$$V_F = a \cdot t = 0{,}98\ \frac{m}{s^2} \cdot 5\ seg = 4{,}9\ \frac{m}{s}$$

$$\omega_F = V_F / R = 4{,}9\ m/s \,/\, 0{,}4\ m = 12{,}25\ rad/seg.$$

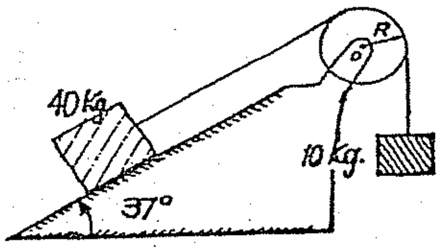
$$E_{c\,ganada} = E_{c\,1} + E_{c\,2} + E_{c\,3} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega^2$$

$$E_{c\,ganada} = \frac{1}{2}\, 4\,Kg \cdot 4{,}9^2\ \frac{m^2}{s^2} + \frac{1}{2}\, 3\,Kg\ 4{,}9^2\ \frac{m^2}{s^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, 6\,Kg\ 0{,}4^2 m^2\right) 12{,}25^2\ \frac{1}{s^2}$$

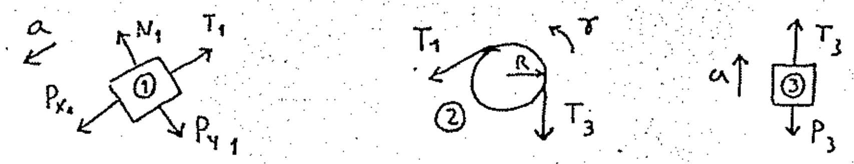
$$\underline{\underline{E_{c\,ganada} = 120\ Joule.}}$$

---

⑥ En el dispositivo de la figura se desprecia el rozamiento entre el bloque y el plano. La aceleración del bloque de 40 Kg. es 0,6 m/s². La polea tiene un radio de 30 cm. Determinar su momento de inercia.



He aquí un típico problema de dinámica de rotación. Se resuelve de manera típica haciendo los diagramas de cuerpo libre y planteando una ecuación para c/u de los cuerpos. Veamos.



DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

$P_{x_1} - T_1 = m_1\, a$ $\qquad$ $T_1 R - T_3 R = I_{CM} \cdot \gamma$ $\qquad$ $T_3 - P_3 = m_3\, a$

Supuse que la aceleración del sistema iba así ↙ porque me di cuenta que P_{1x} (= 40 Kgf. sen 37°) era mayor que P_3 (= 10 Kgf). Este es el planteo del problema. Ahora hay que escribir las ecuaciones bien ordenaditas, reemplazar por los datos y resolver el sistema de 3 x 3.

El enunciado dice que $P_1 = 40$ Kgf, $P_3 = 10$ Kgf, $R = 0{,}3$ m, $a = 0{,}6 \frac{m}{s^2}$ y $\alpha = 37°$.
Entonces:

$$\begin{cases} 40 \times 9{,}8\ N \cdot \text{sen } 37° - T_1 = 40\ Kg \cdot 0{,}6\ \frac{m}{s^2} \\ 0{,}3\, m\, (T_1 - T_3) = I_{CM} \cdot \frac{0{,}6\ m/s^2}{0{,}3\ m} \\ T_3 - 10 \times 9{,}8\ N = 10\ Kg \cdot 0{,}6\ \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

En la 2da ecuación reemplacé γ por $\frac{a}{R}$ porque la soga no patina. De la 1ra ecuación puedo despejar directamente T_1. Me da:

$$\underline{T_1 = 211{,}91\ N}$$

De la 3ra puedo despejar T_3. Eso me da:

$$\underline{T_3 = 104\ N}$$

Reemplazando T_1 y T_3 en la 2da ecuación despejo I_{CM}:

$$\underline{I_{CM} = 16{,}18\ Kg \cdot m^2}$$ ← MOMENTO DE INERCIA DE LA POLEA.

HASTA ACÁ FUERON PROBLEMAS EN LOS QUE DE ALGUNA U OTRA MANERA HABÍA QUE USAR LA ECUACIÓN $M = I \cdot \gamma$. (ES DECIR, APARECÍAN FUERZAS QUE GENERABAN ROTACIONES). EN LOS PROBLEMAS QUE SIGUEN HABRÁ QUE APLICAR LA ECUACIÓN $E_c = \frac{1}{2} I \cdot w^2$, ES DECIR, ENERGÍAS QUE GENERAN ROTACIONES.

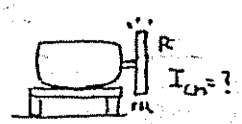
TEORÍA:

$$M_A = I_A \cdot \gamma_A$$ ← MOMENTO APLICADO A UN CUERPO QUE GIRA ALREDEDOR DEL PUNTO A.

$$E_C = \frac{1}{2} I_A \cdot \omega_A^2$$ ← ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO QUE GIRA ALREDEDOR DEL PUNTO A.

PROBLEMAS QUE ESTAN EN ESTE APUNTE:

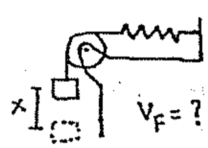
Ejercicios que se resuelven principalmente por consideraciones energéticas.

① 

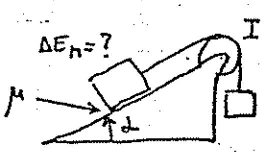
Pag 2

② 

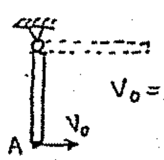
Pag 3

③ 

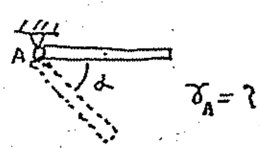
Pag 5

④ 

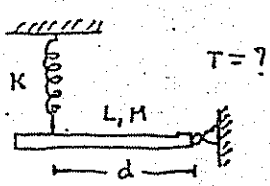
Pag 6

⑤ 

Pag 8

⑥ 

Pag 10

⑦ Pag 12 

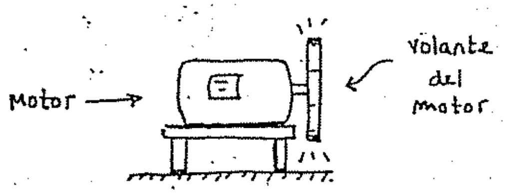
⑧ 

Pag 14

PROBLEMAS EN DONDE HAY ENERGÍAS QUE GENERAN ROTACIONES.

① El volante de un motor de explosión tiene que suministrar una energía de 50 Kgm, mientras su velocidad disminuye de 600 r.p.m. a 540 r.p.m. ¿Cuál es su momento de inercia?

Este problema no tiene dibujito. Hagamos pués un esquema: R 1 3



La cosa es que el volante viene girando a 600 RPM y el motor al entregar los 50 KgF.m hace que su velocidad pase a 540 RPM. Dicho de otra manera, lo que hace el motor es frenarlo al tipo. Para frenarlo hace un trabajo de 50 Kilogramos fuerza por metro. Este trabajo es negativo. (se come energía, como si fuera roz.). Lo que planteo entonces es que:

$$L_{MOTOR} = E_{c_f} - E_{c_0}$$ ← EL TRABAJO QUE REALIZA EL MOTOR ES = A LA ΔE_{CIN}.

El volante no se traslada pero sí gira, de manera que la energía cinética que tiene debida a la rotación vale: $E_c = \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \omega^2$.
Entonces:

$$L_{Mot} = \frac{1}{2} I \, \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \, \omega_0^2$$

Paso las RPM a radianes por segundo:

$$\omega_0 = 600 \text{ RPM} = 600 \cdot \frac{2\pi}{60\,s}$$

$$\omega_f = 540 \text{ RPM} = 540 \cdot \frac{2\pi}{60\,s}$$

ver

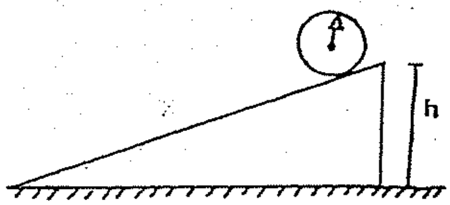
$$\Longrightarrow -50 \text{ KgF.m} = \frac{1}{2} I \left(540 \frac{2\pi}{60\,s}\right)^2 - \frac{1}{2} I \left(600 \frac{2\pi}{60\,s}\right)^2$$

Paso los Kg Fuerza a Newton:

$$-490 \text{ Kg} \cdot \frac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2} I \left(-750 \frac{1}{s^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{I_{CM} = 1,3 \text{ Kg.m}^2}$$ ← MOMENTO DE INERCIA DEL VOLANTE

② Un cilindro que pesa 1000 Kg. y cuyo radio es R = 50 cm cae rodando por un plano inclinado desde una altura h = 5 m. Calcular su velocidad lineal, su velocidad angular y su energía cinética al llegar al pie del plano inclinado, en los siguientes casos:



R
1
3

a) siendo el cilindro macizo

b) suponiendo que es un cilindro hueco y su masa está concentrada en la periferia.

Tomo como sistema el cilindro, el plano inclinado y la Tierra. Toda la energía potencial que tiene el tipo arriba del plano inclinado se convertirá en E_c de traslación y E_c de rotación al llegar abajo. Planteo el teorema del trabajo y la energía:

$$L_{F.\ exteriores} + L_{F.\ int.\ no\ cons.} = \Delta E_{mec.\ sist.}$$

ES decir:

$$0 = \Delta E_{Pot.} + \Delta E_{cin.\ TRASL.} + \Delta E_{cin.\ Rot.}$$

$$0 = \cancel{E_{P.f}} - E_{P_o} + E_{cT_f} - \cancel{E_{c_{TRAS.o}}} + E_{c_{Rot.f}} - \cancel{E_{c_{Rot.o}}}$$

$$0 = -M g h + \frac{1}{2} M V_F^2 + \frac{1}{2} I_{cM} \omega_F^2$$

supongo que nuestro amigo el cilindro cae rodando sin patinar, así que la velocidad final será $V_{F_{CM}} = \omega_F . R$

a) CILINDRO MACIZO

$I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$

$$0 = -Mgh + \frac{1}{2} M V_F^2 + \frac{1}{2} \overbrace{\frac{1}{2} M R^2}^{I_{CM}} \frac{V_F^2}{R^2}$$

$$g.h = \frac{1}{2} V_F^2 + \frac{1}{4} V_F^2$$

$$V_F = \sqrt{\frac{4}{3} g.h} = 8,08 \frac{m}{s}$$

b) CILINDRO HUECO

$I_{CM} = M R^2$ (ES un Aro)

$$0 = -Mgh + \frac{1}{2} M V_F^2 + \frac{1}{2} \overbrace{M R^2}^{I_{CM}} \frac{V_F^2}{R^2}$$

$$gh = \frac{1}{2} V_F^2 + \frac{1}{2} V_F^2$$

$$V_F = \sqrt{g h} = 7 \, m/s$$

3P

$V_{F_{CM}} = \omega . R \implies \underline{\underline{\omega_{Final} = 16,16\ 1/s}}$ $\qquad$ $V_{F_{CM}} = \omega_F . R \implies \underline{\underline{\omega_{Final} = 14\ 1/s}}$

La energía cinética total será la suma de la E_C de Rotación + la energía cinética de traslación.

R 1 3

$$E_C = \frac{1}{2} M V_F^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega_F^2 \qquad\qquad E_C = \frac{1}{2} M V_F^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega_F^2$$

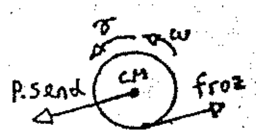
$$\underline{\underline{E_C = 49.000 \text{ Joule.}}} \qquad\qquad \underline{\underline{E_C = 49.000 \text{ Joule.}}}$$

<u>Conclusión</u>: Los 2 cilindros caen todo el tiempo con ≠ velocidad pero tienen todo el tiempo la misma energía cinética.

Teóricamente acá termina este ejercicio. Sin embargo... eemm... hay algo raro. Puede que lo hayas notado, puede que no. Vamos a la trampa, entonces.

La pregunta es: ¿Hay rozamiento en este problema? (Atención).

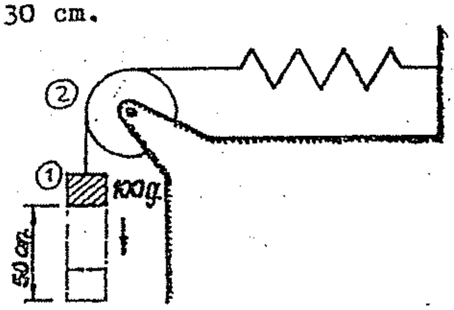
Fijate. Si cuando el cilindro empieza a caer se pone a girar, es por que existe Fuerza de rozamiento. Si froz. no existiera, el cilindro no rotaría, caería deslizando como si fuera un cajón de manzanas.



Ahora, yo te pregunto: Existiendo fuerza de rozamiento, ¿es correcto plantear que la energía mecánica se conserva? ¿Acaso froz no realiza trabajo durante la caída? (Ojo, ojo con esto).

La respuesta a esta pregunta no es nada fácil. Sólo te adelanto una cosa: el problema está bien planteado así pese a que froz <u>efectivamente existe</u>. La explicación de este asunto la voy a poner después, cuando empiece con el tema de cuerpos que ruedan sin resbalar.

③ En el dispositivo de la figura el momento de inercia de la polea es $I = 0{,}5\ Kgm^2$ y su radio es $R = 30$ cm.
La constante del resorte es
$k = 2$ N/m.



Calcular la velocidad de la masa de 100 g cuando ha descendido 50 cm. partiendo del reposo.

R 1 3

Tomo como sistema la masa de 0,1 Kg, la polea, el resorte y la tierra. De acuerdo a este sistema no hay fuerzas exteriores ni hay tampoco interiores no conservativas:

planteo:

$$L_{(F.\ ext.\ +\ int.\ no\ cons.)} = \Delta E_{mec.\ sist.}$$

$$0 = \overbrace{E_{c_{1_F}} - \underset{0}{\cancel{E_{c_{1_0}}}}}^{\Delta E_{c\,masa\,1}} + \overbrace{E_{c_{2_F}} - \underset{0}{\cancel{E_{c_{2_0}}}}}^{\Delta E_{c\,polea}} + \overbrace{\cancel{E_{p_{1_F}}} - E_{p_{1_0}}}^{\Delta E_{p\,masa\,1}} + \overbrace{E_{E_{Final}} - \underset{0}{\cancel{E_{E_0}}}}^{\Delta E_{p\,resorte}}$$

$$0 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_F^2 - m_1 g h + \frac{1}{2} K x^2$$

El resorte se estira 0,5 m que es la distancia que bajó la masa 1.

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\ Kg \cdot V_1^2 + \frac{1}{2}\ 0{,}5\ Kg \cdot m^2 \cdot \overbrace{\frac{V_1^2}{0{,}3^2\ m^2}}^{\omega^2 = V^2/R^2} - 0{,}1 \cdot 9{,}8\ N \cdot 0{,}5\ m + \frac{1}{2}\ 2\ \frac{N}{m} \cdot 0{,}5^2$$

$$0 = 2{,}827\ Kg \cdot V_1^2 - 0{,}24\ N \cdot m$$

$$\underline{\underline{V_1 = 0{,}291\ m/s}} \longleftarrow$$ VELOCIDAD DE LA MASA 1 DESPUÉS DE RECORRER 50 cm

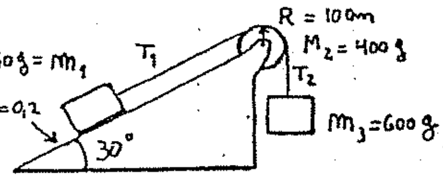
NOTA: En todos los problemas de energía yo siempre considero a la Tierra dentro de mi sistema así el peso me aparece como fuerza interior.

Si no considero a la Tierra dentro del sistema, el peso pasa a ser fuerza exterior y tendría que considerar el trabajo que realiza de este lado de la ecuación.

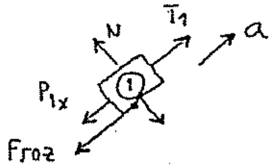
$$L_{(F.\ ext.\ +\ int.\ no\ cons.)} = \Delta E_{mec.\ sist.}$$

En ese caso no tendría que tomar en cuenta la energ. pot. gravitatoria que tenía la masa m_1 por que al no ∃ la Tierra no hay energía potencial. El resultado es el mismo. R 1 3

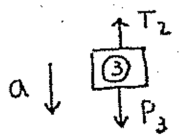
④ Hallar la aceleración del sistema esquematizado y las tensiones T_1 y T_2 en la cuerda. La polea se supone homogénea. Hallar la variación de energía mecánica cuando m_3 desciende una altura h=0,6 m.



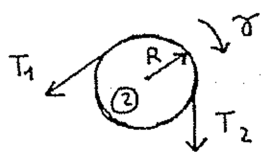
Para la 1ra parte tengo que plantear las ecuaciones de dinámica para los cuerpos ① y ③ y la ecuación de momentos para la polea.
¿De dónde saco estas ecuaciones? RTA: De los diagramas de cuerpo libre.



$$T_1 - P_{1x} - F_{roz} = m_1 . a$$



$$P_3 - T_2 = m_3\, a$$



$$T_2 R - T_1 R = I_{CM} . \gamma$$

Quiero que veas que estos problemas de poleas son siempre parecidos. Hay que hacer los diagramas de cuerpo libre, plantear las ecuaciones y después resolver el sistema. La única diferencia con los problemas comunes de dinámica es que ahora la polea tiene masa. (Esto es lo que hace que aparezca la ecuación de momentos). Sigo.

Como la soga no patina sobre la polea tiene que ser $a = \gamma . R$.

$$\begin{cases} T_1 - 0{,}05 . 9{,}8\,N . 0{,}5 - 0{,}2 . 0{,}05 . 9{,}8\,N . \cos 30^\circ = 0{,}05\,Kg . a \\ (T_2 - T_1)\,\cancel{R} = \frac{1}{2}\, 0{,}4\,Kg\, R^{\cancel{2}} . \frac{a}{\cancel{R}} \\ 0{,}6 . 9{,}8\,N - T_2 = 0{,}6\,Kg . a \end{cases}$$

R
1
3

Las unidades dan bien así que ya sé que las tensiones van a dar en Newtons y la aceleración en m/s^2. $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} T_1 - 0{,}05\,a = 0{,}33 \\ T_2 - T_1 - 0{,}2\,a = 0 \\ T_2 + 0{,}6\,a = 5{,}88 \end{cases}$$

Resuelvo: $\underline{\underline{a = 6{,}53\ m/seg^2}}$ $\underline{\underline{T_1 = 0{,}656\ N}}$ $\underline{\underline{T_2 = 1{,}962\ N}}$

Para calcular la variación de energía mecánica del sistema considero lo siguiente: Cuando en un sistema todas las fuerzas que actúan son conservativas, la energía mecánica del sistema se conserva. En este caso, el rozamiento (como siempre) es una fuerza no conservativa y la variación de energía mecánica que se produzca tiene que ser igual al trabajo que ella se comió.

Ahora, este trabajo va a ser negativo porque la siempre maldita fuerza de rozamiento se opone al desplazamiento y esa energía mecánica se pierde. (se transforma en calor).
Tomo como sistema a los 3 cuerpos con el plano inclinado y la Tierra. Planteo:

$$L_{[F.\,ext\ +\ int.\ no\ cons.]} = \Delta E_{Mec\ sist.} \longleftarrow$$ TEOREMA DEL L Y LA ENERGÍA.

Para este sistema no hay Fuerzas exteriores, sólo hay interiores NO conservativas. (El Rozamiento).

Entonces, ¿a qué va a ser igual la variación de Energía mecánica?

RTA: Al trabajo que realizó la Fuerza de rozamiento. R 1 3

Es decir:

$$\Delta E_{mec} = L_{F_{roz}} = - f_{roz} \cdot X$$

$$\Rightarrow \Delta E_{mec} = -\mu N \cdot X = -\mu\, m_1 g \cos 30^\circ \cdot X$$

$$\Rightarrow \Delta E_{mec} = -0{,}2\ 0{,}05\,Kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot \cos 30^\circ \cdot 0{,}6\,m$$

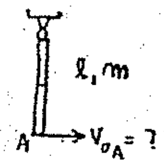
$$\Rightarrow \underline{\Delta E_{mec} = -\,0{,}05\ Joule} \longleftarrow$$ VARIACIÓN DE LA $E_{MEC.}$ DEL SISTEMA

Pregunta: ¿Podría calcularse la variación de la energía mecánica sumando las variaciones de energía que tuvo c/ cuerpo?

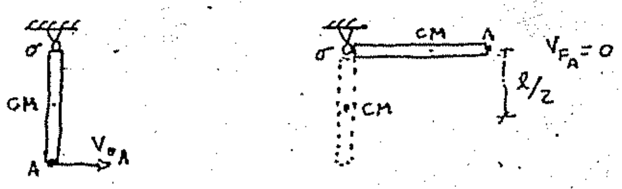
RTA: Sí, se podría, pero sería mucho más lío.

---

(5) UNA BARRA CILINDRICA DE FORMA ALARGADA (L>>R) ESTA ARTICULADA EN UN EXTREMO Y PUEDE OSCILAR LIBREMENTE EN EL PLANO DE LA FIGURA. ¿QUE VELOCIDAD V_0 INICIAL DEBE DARSE AL EXTREMO INFERIOR $\underline{A}$ DE LA BARRA PARA QUE LLEGUE A ALCANZAR UNA POSICION HORIZONTAL ?. DATOS: Masa m, Longitud l, $I_G = \frac{1}{12} m.\ell^2$.



Lo que el problema plantea es lo siguiente:



SITUACION INICIAL SITUACIÓN FINAL

La idea es que toda la energía que la barra tiene al principio tiene que ser igual a la energía que la barra tiene al final. En este problema no hay Fuerzas exteriores ni interiores no conservativas, de manera que la energía se va a tener que conservar. (SÍ hay una Fuerza que actúa en el apoyo σ pero esa Fuerza no se mueve así que no realiza trabajo).

El planteo parece fácil pero no lo es. (que raro en un problema de cuerpo rígido, no?). El asunto es el siguiente: Al final la barra está quieta. Su C.M. se levantó una distancia $\frac{\ell}{2}$ con respecto a la posición inicial. Por lo tanto en el estado final sólo tendrá energía potencial. Esa energía va a valer mgh, en este caso $h = \frac{\ell}{2}$, de manera que $E_{p_F} = mg\frac{\ell}{2}$. R-3

Hasta acá estamos bien.

La pregunta es cuanto vale la energía cinética al principio.

¿Es sólo la de traslación? ¿Es sólo la de rotación? ¿Es la suma de las 2?

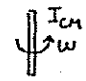
¿El asunto no es fácil y da para pensarlo un rato.

Ahora, sin ánimo de hacer un gran análisis respondo esta pregunta de la siguiente manera: ¿Alrededor de que punto está girando la barra?

_Alrededor del pivote $\underline{\sigma}$

_Muy bien, entonces habrá que referir todas las magnitudes al punto $\underline{\sigma}$.

Es decir, cuando una barra gira alrededor del centro de masa, su energía cinética es $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ ⟶



si una barra está girando alrededor de un punto $\underline{\sigma}$ su energía cinética será $\frac{1}{2}I_\sigma \omega_\sigma^2$. ⟶

Voy a calcular entonces cuanto vale I_σ para la barra. Aplico Steiner:

$$I_\sigma = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$I_\sigma = \frac{1}{3}m\ell^2 \longleftarrow \text{MOMENTO DE INERCIA REFERIDO AL PUNTO } \sigma.$$

La ecuación que planteo entonces es $E_{M_0} = E_{M_F}$, es decir:

$$E_{c_0} = E_{p_F}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I_\sigma\omega_\sigma^2 = mg\frac{\ell}{2}$$

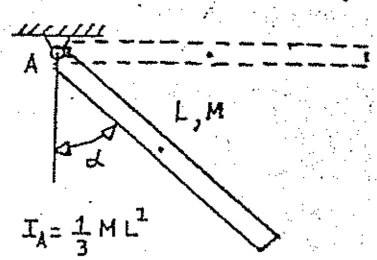
$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{3}\cancel{m}\ell^{\cancel{2}}\omega_\sigma^2 = \cancel{m}g\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}$$

Como la barra está agarrada en σ puedo poner que $V_A = \omega_\sigma \cdot \ell$. De acá despejo ω_σ y lo reemplazo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{3}\cancel{\ell}\frac{V_A^2}{\ell^{\cancel{2}}} = g \Rightarrow V_A^2 = 3g\ell$$

$$\Rightarrow \underline{V_{A_0} = \sqrt{3g\ell}} \longleftarrow \text{VELOCIDAD INICIAL DEL PUNTO A.}$$

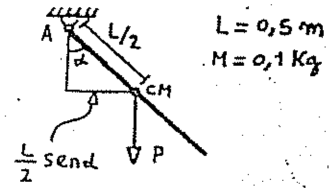
(6) La barra de la figura tiene una masa m = 100 g. y una longitud L = 50 cm. pudiendo girar libremente en el plano vertical, alrededor de un pivote A. Inicialmente se lleva a la posición horizontal y luego se suelta. Determinar, cuando forma un ángulo $\alpha = 45°$ con la vertical



R
1
3

a) su aceleración angular
b) su velocidad angular
c) las reacciones, normal y radial en el pivote A.

Todas las magnitudes que me piden calcular son para el instante en que la barra forma 45°. Tanto γ como ω y las reacciones en el apoyo van variando a medida que la barra cae. (Esto tenés que pensarlo un poco).



La aceleración angular que tiene la barra alrededor del punto A es provocada por el momento que ejerce la fuerza peso respecto a este punto. Por lo tanto planteo:

$$M_A = I_A \cdot \gamma_A$$

Fijate que M, I y γ estan referidas <u>al punto A</u>, por que alrededor de él rota la barra. I_A vale $I_A = 1/3\, M L^2$ y el momento del peso es $M_A = Mg \cdot L/2 \cdot \operatorname{sen}\alpha$. Reemplazando:

$$\cancel{M} \cdot g \frac{\cancel{L}}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3} \cancel{M} \cdot L^{\cancel{2}} \cdot \gamma_A \implies \gamma_A = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\implies \underline{\underline{\gamma_A = 20{,}789 \ 1/s^2}} \longleftarrow$$ ACELERACIÓN ANGULAR DE LA BARRA CUANDO EL ÁNGULO ES $\alpha = 45°$

b)_ Para calcular ω no puedo usar las ecuaciones de mov. circular porque el movimiento <u>no es uniformemente variado</u>. Voy a agarrar el asunto por el lado de la energía.
Elijo como sistema al conjunto barra _ Tierra (así no tengo fuerzas exteriores). Planteo el teorema del trabajo y la energía:

$$L_{F.\,ext} + L_{F.\,int.\,no\,cons.} = \Delta E_{mec.\,sist.}$$

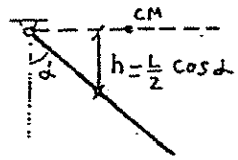
Como aclaran en el enunciado que no hay rozamiento en la articulación A, no hay fuerzas interiores no conservativas.

Entonces: $0 = \Delta E_{mec}$

$$0 = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot}$$

R
1
3

Sólo hay energía cinética de rotación (la barra no se traslada). Por otro lado el c.M. bajó una distancia $h = \frac{L}{2} . \cos\alpha$.



Entonces:

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2} I_A \omega_{A_F}^2 - \cancel{\frac{1}{2} I_A \omega_{A_0}^2}^{0}}_{\Delta E_c} + \underbrace{0 - M . g \frac{L}{2} . \cos\alpha}_{\Delta E_p}$$

$$\Longrightarrow M . g . \frac{L}{2} . \cos\alpha = \frac{1}{2} . \frac{1}{3} M L^2 \omega_{F_A}^2$$

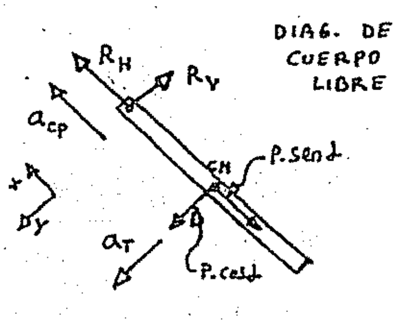
Esta última ecuación me dice que toda la Epot. que tenía la barra se invirtió en energía cinética de rotación.

Despejando ω_{F_A}:
$$\omega_{F_A} = \sqrt{\frac{3g}{L} \cos\alpha} \Longrightarrow$$

$$\underline{\underline{\omega_{F_A} = 6{,}448\ 1/s}} \longleftarrow$$ VELOCIDAD ANGULAR FINAL QUE TIENE LA BARRA CUANDO $\alpha = 45°$.

c)_Determinar las reacciones normal y radial en el pivote es la parte difícil del problema. Mas bien, bien difícil diría yo. Voy a hacer el diagrama de cuerpo libre de la barra poniendo todas las fuerzas que sobre ella actúan.

Calculo 1ero las aceleraciones en la dirección radial ($a_{centrípeta}$) y en la dirección $\perp$ a la barra ($a_{tangencial}$).



$$a_{cp} = \omega_A^2 R = \omega_A^2 . L/2 = 10{,}394\ m/s^2$$
$$a_{TA} = \gamma_A . R = \gamma_A . L/2 = 5{,}197\ m/s^2$$

47

Conocidas las aceleraciones, aplico la 2da ley de Newton $\Sigma F = M.a$ en las direcciones radial y tangencial.

EN DIRECCIÓN RADIAL: $R_H - P.\,\text{sen}\,\alpha = M.\,a_{cp} \implies R_H = Mg.\,\text{sen}\,\alpha + M.\,a_{cp}$

$\therefore$ $\underline{\underline{R_H = 1{,}732\,N}}$ ← Reacción en dirección radial. R I 3

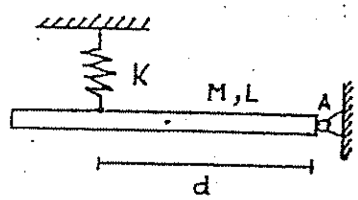
EN DIRECCIÓN TANGENCIAL: $P.\cos\alpha - R_V = M.\,a_T \implies R_V = Mg.\cos\alpha - M.\,a_{Tg}$

$\therefore$ $\underline{\underline{R_V = 0{,}173\,N}}$ ← REACCION EN DIRECCIÓN TANGENCIAL

Las reacciones R_V y R_H en el apoyo tienen los mismos valores pero sentidos opuestos.

---

⑦ - Hallar el período de oscilación de la varilla de la figura si se la desplaza una pequeña distancia x de su posición de equilibrio.



Datos: $M = 0{,}5\,Kg$, $L = 0{,}6\,m$, $d = 0{,}4\,m$, $K_{res} = 370\,N/m$.

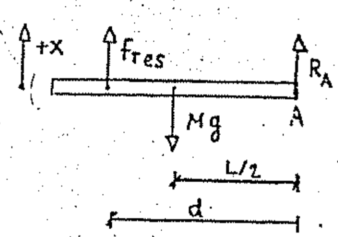
Este infernal problema ha cobrado y seguirá cobrando cientos de víctimas en las fechas de Final.

Lo que plantea el enunciado es lo siguiente: Si uno tira la barra hacia abajo estirando el resorte una distancia x y después la suelta, la barra va a empezar a oscilar alrededor del punto A.

Al principio, cuando la barra está en equilibrio, se debe cumplir que la Σ de los momentos respecto a un punto cualquiera debe ser cero.

Si tomo momentos respecto a A:

DIAGRAMA DE C. LIBRE DE LA BARRA EN EQUILIBRIO



$$f_{res}.\,d - M.g.\,L/2 = 0$$

Ψ·ℓ

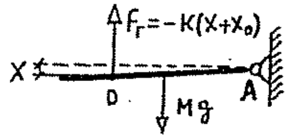
Inicialmente supongo que el resorte está estirado una distancia x_0, de manera que la fuerza que ejerce vale: $f_{res} = -K X_0$.
Reemplazando:

$$-K X_0 d - M g L/2 = 0$$

Ojo, el término $-K X_0 d$ pese a tener signo $\ominus$ será siempre $\oplus$ porque X_0 es negativa. (Fres y desplazamiento tienen sentidos contrarios).

R 1 3

Una vez que aparté la barra del equilibrio y el resorte bajó una distancia x, la barra tendrá una aceleración angular γ alrededor de A.



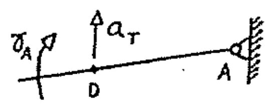
Planteo entonces la ecuación para la rotación: $\Sigma M_A = I_A \cdot \gamma_A$.
Es decir:

$$-K(X+X_0)d - M \cdot g\, L/2 = I_A \cdot \gamma_A \implies$$

$$\implies -K X \cdot d \underbrace{- K X_0 d - M g \cdot L/2}_{\text{cero (de la ec. p/ la barra en equilibrio).}} = I_A \cdot \gamma_A$$

$$\implies -K X \cdot d = I_A \cdot \gamma_A$$

El punto D (que fué el que se desplazó la distancia X) tiene una aceleración tangencial que vale: $a_t = \gamma_A \cdot d \implies \gamma_A = a_t/d$



reemplazando: $-K X d = I_A \cdot a_t/d \implies -K X d^2 = I_A \cdot a_t$

La trampa está en suponer que el punto D oscila con mov. armónico. (Lo cual es verdad si x no es muy grande). Ahora, la característica fundamental del mov. armónico es que la aceleración vale $a = -\omega^2 X$. (Donde X es la elongación y ω la velocidad angular asociada al mov. armónico). Reemplazando en la última ecuación:

$$-K X d^2 = I_A \cdot (-\omega^2 \cdot X) \implies K \cdot d^2 = I_A \cdot \omega^2$$

$$\xrightarrow{\omega = 2\pi/T} K \cdot d^2 = (2\pi)^2/T^2 \implies T^2 = (2\pi)^2/K \cdot d^2$$

por lo tanto: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I_A}{K.d^2}}$

Como $I_A = 1/3\, M L^2 \Longrightarrow T = 2\pi \sqrt{\dfrac{M L^2}{3 K.d^2}} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{T = 2\pi \frac{L}{d}\sqrt{\frac{M}{3K}}}} \longleftarrow$$ PERÍODO DE OSCILACIÓN DE LA BARRA ALREDEDOR DE A.

R 1 3

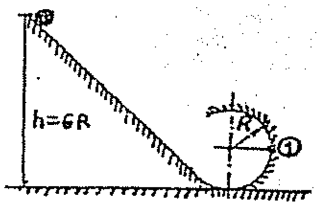
Reemplazando por los datos obtengo $T = 0{,}2$ seg. que era lo que ellos pedían.

P.D.: No me eches la culpa a mi, yo no inventé este problema!.

---

(8) Una esfera pequeña de masa m = 10 g. y radio r = 1 cm. rueda, sin resbalar por una vía en forma de rizo, el radio de este es R = 1m. Comienza, sin velocidad inicial, a una altura h = 6R sobre el fondo.

Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la esfera en el punto (1).



En este problema la esfera cae rodando sin deslizar, quiere decir que va a haber fuerza de rozamiento pero la energía se va a conservar. (El hecho de que f_{roz} exista pero no realice L está explicado después en la teoría de cuerpos que ruedan sin deslizar).

La única fuerza horizontal que actúa sobre la bolita en el punto 1 es la que ejerce el riel. Esta fuerza es la que obliga a la pelotita a seguir una trayectoria circular. La voy a llamar R_H. (Reacción Horizontal). Fijate entonces que R_H es la fuerza CENTRÍPETA que actúa sobre la bolita.

En un mov. circular la fuerza centrípeta depende de la aceleración centrípeta, y a su vez la a_{cp} depende de la velocidad tangencial. ($a_{cp} = V_T^2/R$).

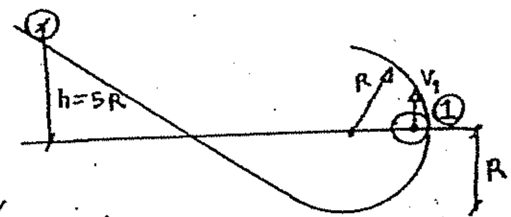
Lo 1ro que tengo que hacer entonces, es calcular la V_T que tiene la bolita en el punto (1).

Voy a plantear conservación de la energía mecánica en el sistema Pelotita + Riel + Tierra. Pregunto:

R
1
3

¿Hay fuerzas exteriores? - No, No hay. ¿Hay Fuerzas interiores? - Sí: Una es el rozamiento (que es interior no conservativa). En este caso no realiza trabajo porque la esfera rueda sin resbalar. Las otras dos son la reacción que la vía ejerce sobre la esfera (R_H) y el peso. Todas estas fuerzas las puse en el diagrama de c. Libre que está en la página siguiente.

La pelotita está a una altura de 6R sobre el piso. Ahora, yo tomo como nivel de referencia el punto ①, así que considero $h = 5R$.



planteo:

$$L_{(f.\ ext. + int.\ no\ cons.)} = \Delta E_{mec}$$

$$0 = \cancel{E_{P_f}} - E_{P_0} + E_{C_{T_f}} - \cancel{E_{C_{T_0}}} + E_{C_{R_f}} - \cancel{E_{C_{R_0}}} \Longrightarrow$$

$$0 = -mgh + \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega_1^2$$

Por rodar sin resbalar $V_1 = \omega r$, además $I_{CM} = \frac{2}{5} m r^2$

$$0 = -\cancel{m} g h + \frac{1}{2} \cancel{m} V_1^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} \cancel{m} \cancel{r^2} \cdot \frac{V_1^2}{\cancel{r^2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} V_1^2 + \frac{1}{5} V_1^2 = g \cdot h \Longrightarrow$$

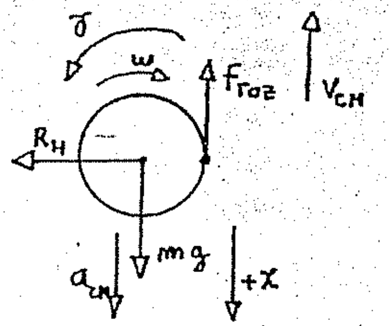
$$\Longrightarrow \frac{7}{10} V_1^2 = g \cdot h \Longrightarrow V_1 = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot h}$$

La altura h vale 5R, entonces:

$$V_1 = \sqrt{\frac{50}{7} g \cdot R} = 8{,}366 \ \frac{m}{s}$$ ⟵ VELOCIDAD EN EL PUNTO ①.

Para calcular las fuerzas R_H y R_V en el punto 1 hago el diagrama de cuerpo libre.

Puse f_r para arriba porque la esfera está disminuyendo su velocidad angular y la única que puede hacer que ω disminuya es f_r. (Ojo con esto).



R
1
3

En la dirección vertical: $\longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} mg - f_{roz} = m\, a_{CM} \\ \\ f_r \cdot r = I_{CM} \cdot \gamma \end{array}\right.$

Momentos con respecto al CM: $\longrightarrow$

Para una esfera $I_{CM} = \frac{2}{5} m R^2$, además por girar sin resbalar $a_{CM} = \gamma\, r$

$$\left\{\begin{array}{l} mg - f_r = m \cdot a_{CM} \implies a_{CM} = g - \frac{f_r}{m} \\ f_r \cdot r = \frac{2}{5} m \cancel{r^2} \cdot \frac{a_{CM}}{\cancel{r^2}} \end{array}\right.$$

$$f_r \cdot r = \frac{2}{5} m \left(g - f_r/m \right) \implies f_r \cdot r = \frac{2}{5} m g - \frac{2}{5} f_r \implies$$

$$\implies f_r \left(1 + 2/5 \right) = 2/5\ m g \implies f_r \cdot 7/5 = 2/5\ m g \implies$$

$$f_r = \frac{2}{7} m g = 0{,}028\ \mathrm{N}$$

La fuerza total que actúa sobre la esfera en la dirección vertical es la resta de mg menos f_r.

R
1
3

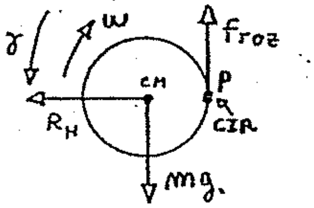
Entonces: $\underline{R_V = mg - f_r = 0{,}07\,N}$ (hacia abajo)

Voy a comentarte otra manera de calcular f_r y de paso te voy a mostrar una tanga que puede ser muy útil en ciertos casos. (Esto miralo nada más. Ya lo vas a entender mejor más adelante).

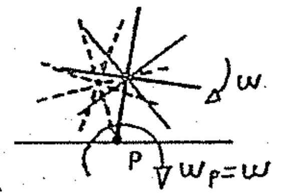
Para la ecuación de rotación ($M = I.\gamma$) uno siempre suele tomar momentos con respecto al CM, pero el centro de masa no es el UNICO PUNTO con respecto al cual se puede tomar momentos!. También puedo tomar momentos con respecto al centro instantáneo de rotación. (CIR).

Fijate:

$$M_P = I_P . \gamma_P$$



El problema es cuanto vale γ_P.
¿Respuesta?. Bueno, la aceleración angular con la cual la esfera gira instantáneamente alrededor del punto P (γ_P) vale lo mismo que Gamma.. Cuando un CUERPO rodaba sin resbalar, si su velocidad angular de rotación era ω, la velocidad con la cual el tipo giraba alrededor del centro inst. de rotación TAMBIÉN VALÍA OMEGA. (Fijate en la parte de teoría de C.I.R.)



De la misma manera con respecto al punto P la aceleración angular γ_P es igual a la del CM. ($\gamma_P = \gamma$).
Por steiner $I_P = I_{CM} + M R^2$ así que la ecuación $M_P = I_P . \gamma_P$ queda:

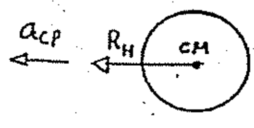
$$mg . r = \left(\frac{2}{5} m R^2 + m R^2 \right) . \gamma$$

con esta ecuación y con $f_r . r = I_{CM} . \gamma$ formo un sistema de 2×2.

$$\begin{cases} mg \cdot r = \left(\frac{2}{5} m R^2 + m R^2\right) \gamma & \text{Momento con resp. a P} \\ fr \cdot r = \frac{2}{5} m R^2 \cdot \gamma & \text{Momento con resp. al CM.} \end{cases}$$

Resolviendo: $f_r = \frac{2}{7} m g = 0{,}028\ N$

Bueno, ahora para ~~c~~alcular la fuerza en la dirección horizontal (R_H) supongo que lo que me están pidiendo es la fuerza que el riel ejerce sobre la esfera. Esta fuerza será igual y contraria a la fuerza que la bolita ejerce sobre la vía.



$$R_H = F_c = m \cdot \frac{v^2}{R} = 10\,g \cdot \frac{836{,}6^2\ cm^2}{100\ cm\ \ s^2} = 0{,}7\ N$$

$$\underline{\underline{R_H = 0{,}7\ N}} \quad \text{(hacia la izquierda)}$$

Conclusión: Para este problema todo el asunto consiste en saber calcular la fuerza de rozamiento y darse cuenta de que va para arriba y NO para abajo.
Si yo hubiera puesto de entrada f_r para abajo pero hubiera puesto bien los sentidos de las aceleraciones (γ y a_{cm}), las ecuaciones me iban a terminar diciendo que la F_{roz} iba para arriba. Si la chingo en las 2 cosas a la vez, el problema iba a dar mal.

FIN DE LOS PROBLEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER PRINCIPALMENTE APLICANDO CONCEPTOS ENERGÉTICOS. EN EL APUNTE QUE VIENE ESTÁ TODA LA PARTE DE CUERPOS QUE RUEDAN SIN DESLIZAR Y CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN.

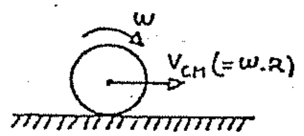
ASIMOV

4 CUERPO RIGIDO.

CUERPOS QUE RUEDAN SIN DESLIZAR.

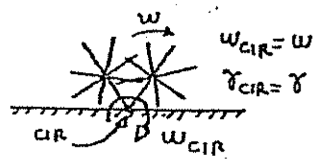
RESUMEN DE LA TEORÍA

Un cuerpo rueda sin deslizar cuando rueda y no patina. Ellos expresan esto Físicamente como:

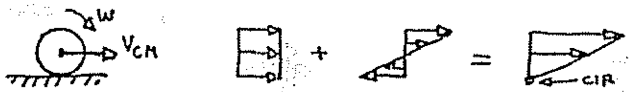


$$\boxed{V_{CM} = \omega . R \;\; y \;\; a_{CM} = \gamma . R}$$ ← CONDICIONES PARA RODAR SIN RESBALAR.

El centro instantáneo de rotación (CIR) es un punto que tiene velocidad total INSTÁNTANEA nula.



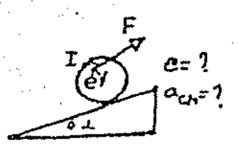
DIAGRAMAS DE VELOCIDADES



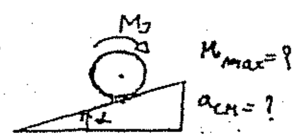
TRASL. ROTAC. ROTOTRASL. ← DIAG. DE VELOC. P/ UN CUERPO QUE RUEDA SIN RESBALAR.

Si cuerpo rodar sin deslizar Fuerza de rozamiento no realizar trabajo ni tampoco valer $\mu . N$.

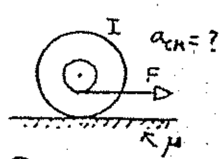
PROBLEMAS QUE ESTAN EN ESTE APUNTE



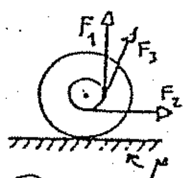
① - Pag 9



② - Pag 11



③ - Pag 13



④ - Pag 17

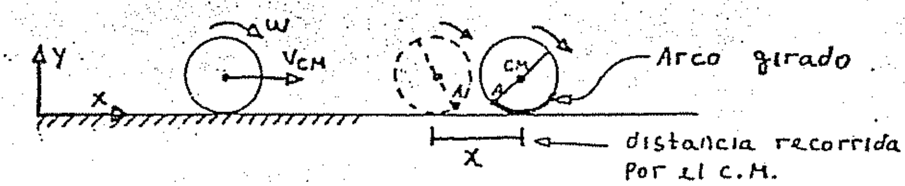
R14

CUERPO RÍGIDO - Parte 4

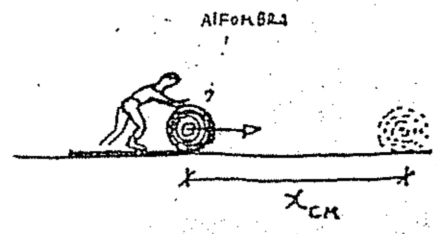
CUERPOS QUE RUEDAN SIN DESLIZAR - TEORÍA

R-4

Supone' un cilindro que viene rodando por el piso y no patina:



Si uno quiere explicar desde el punto de vista intuitivo que es lo que pasa, dice:
si un cilindro rueda sin resbalar, el arco que recorre un punto que está sobre el perímetro del cilindro es igual a la distancia que recorre el centro de masa. (Por que no patina). (Pensarlo).



Es como un tipo que está desenrollando una alfombra: la distancia que recorrió la alfombra sobre el suelo es lo mismo que lo que se desenrolló. Ahora desde el punto de vista Físico yo te digo que esa conclusión significa que:

Arco girado = Distancia recorrida por el C.M.

es decir: $\overbrace{\alpha_{girado} \cdot R}^{Arco} = x_{CM}$

Si supongo que el cilindro se mueve por el plano con V_{CM} constante puedo decir que el ángulo girado en un tiempo t es: $\alpha = \omega \cdot t$ y la distancia que recorrió el CM. es $x_{CM} = V_{CM} \cdot t$.

o sea: $\omega \cdot \cancel{t} \cdot R = V_{CM} \cdot \cancel{t}$

$\Rightarrow V_{CM} = \omega \cdot R$

R
1
4

Lo que esto me dice es que la velocidad tangencial de los puntos de la periferia del cilindro es igual a la velocidad del CM. (claro, los 2 puntos recorren la misma distancia en el mismo tiempo). (otra vez pensarlo).

Si ahora el tipo empuja al cilindro con a_{CM} constante (pero siempre sin resbalar) el arco girado en un tiempo <u>t</u> es $\alpha = \gamma . t$ y la distancia recorrida por el CM. es $x = a_{CM} . t$.

Por lo tanto: $\quad \gamma \cancel{t} . R = a_{CM} . \cancel{t} \Rightarrow a_{CM} = \gamma . R$

En definitiva, para los problemas de Física I un cuerpo va a rodar sin resbalar cuando se cumpla cualquiera de las siguientes cosas:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha_{girado} . R = x_{recorrida\,CM.} \\ &V_{CM} = \omega . R \\ &a_{CM} = \gamma . R \end{aligned}}$$

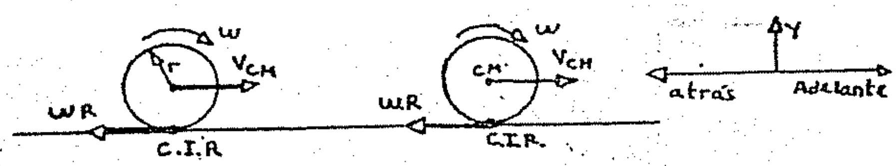
VER

← CONDICIONES PARA RODAR SIN RESBALAR. (muy importantes).

En los problemas sólo se usan la 2^{da} y la 3^{era} ecuación.

CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

Ellos llaman centro instantáneo de rotación al punto de contacto entre el plano y el cuerpo que gira sin resbalar.

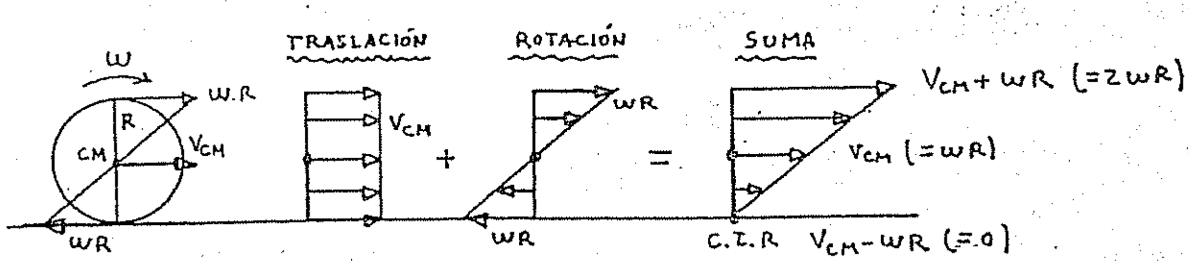


Lo interesante del punto este es que <u>instantáneamente</u> está quieto. (ojo, instantaneamente!). ¿Por qué?

Bueno, ese punto tiene hacia adelante la V_{CM} y hacia atrás ωR y como justo el tipo rueda sin resbalar, $V_{CM} = \omega R$ y la velocidad del punto en ese instante es cero. Ce-ro. No va ni para atrás ni para adelante. Está quieto y esto ocurre instante a instante para todos los puntos de contacto entre el cuerpo y el plano.

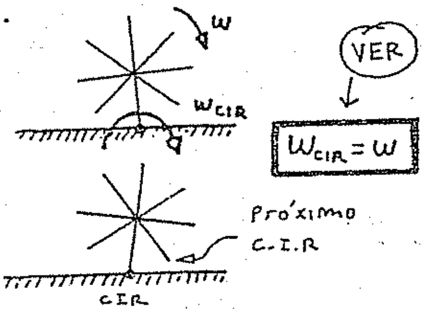
Por eso, ellos definen al C.I.R. como un punto que tiene velocidad total INSTANTÁNEA nula.

Lo vas a ver mejor si te dibujo los diagramas de velocidades.



El diagrama suma dió así ◸. Lo que esto quiere decir es que instantáneamente uno puede interpretar que el cuerpo está girando alrededor del C.I.R..

Miralo así, imaginate una rueda de bicicleta que tiene ∞ rayos.



EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO QUE RUEDA SIN RESBALAR Y ESTÁ GIRANDO ALREDEDOR DEL CM CON VELOCIDAD ANGULAR ω, PUEDE TOMARSE COMO UN MOVIMIENTO DE ROTACIÓN PURA INSTANTÁNEA ALREDEDOR DEL CIR CON VELOCIDAD ANGULAR $\omega_{CIR} = \omega$.

Instante a instante la rueda se apoya en otro rayo distinto y es como si girara en ese instante alrededor de ese punto con velocidad angular ω.

Esto es importante porque muestra que el movimiento de un cuerpo que rota y se traslada puede considerarse como un movimiento de rotación pura instantánea alrededor del CIR.

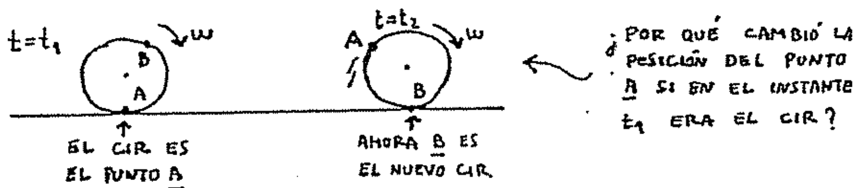
El hecho de que w_{CIR} sea igual a w sale de analizar el diagrama suma este que puse antes.

R 1 4

Voy ahora a una cuestión que suele causar bastante trastorno: si el CIR está quieto... ¿Cómo es que al instante siguiente su posición ya se modificó?

Si el CIR esta quieto... ¿Por qué se mueve el cilindro?

¿Cómo puede moverse una cosa que está quieta?



Para todas las preguntas la respuesta es la misma:

El CIR NO es un punto que está quieto. El CIR es un punto que está

INSTANTÁNEAMENTE

quieto. Una cosa es que algo este quieto todo el tiempo y otra cosa es que esté quieto en un momento determinado.

¿A que voy?. Voy a esto:

Cuando una piedra llega a la altura máxima hay un instante en que está quieta. Eso no quiere decir que la piedra no se mueva. La piedra se mueve, lo que pasa es que hay un momento en donde se encuentra instantáneamente quieta.

Lo mismo pasa con un auto que arranca con aceleración $\vec{a}$. En el momento justo del arranque su velocidad es cero, sin embargo después de 2 segundos el tipo recorrió 10 m...

No te hagas mucho problema con esto ahora. No te lo van a tomar en el parcial. En el parcial te van a tomar problemas, de manera que concentrate en resolver ejercicios. Ese es el primer paso. Entender las cosas desde el punto de vista conceptual viene después.

Tiempo al tiempo.

Esto es difícil, que le vas a hacer...

Y ahora vamos a otra cuestión importante.

S!

EXISTE FUERZA DE ROZAMIENTO SI UN CUERPO GIRA SIN RESBALAR ?

(ojo con esto).

La respuesta es depende.

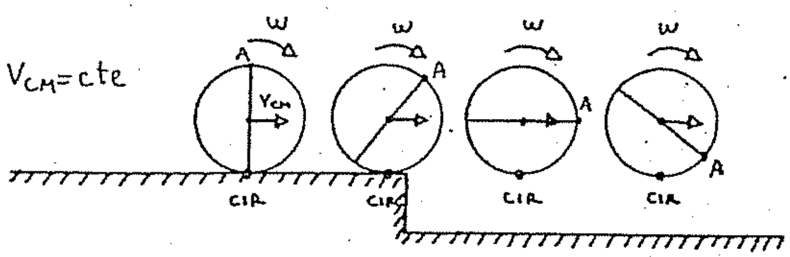
¿Depende de qué?.

Depende de si la V_{CM} es constante o no. Si la V_{CM} es cte <u>no</u> hay fuerza de rozamiento. Si es variable casi siempre sí.

R 1 4

caso 1.- $V_{CM} = cte$.

Por ejemplo si un cilindro rueda sin resbalar por un plano horizontal con V_{CM} constante no hay fuerza de rozamiento. Digamos que si vos le sacás el plano al cilindro, él sigue girando sin resbalar.



EL CILINDRO NO SABE SI HAY O NO HAY PLANO ABAJO DE ÉL. EL GIRA SIEMPRE SIN DESLIZAR POR QUE NO HAY FUERZA DE ROZAMIENTO.

Si vos tirás una pelota al piso que sólo se traslada...

Al tocar el piso empieza a actuar la $F_{roz.}$ que hace que la pelota empiece a rotar (Rueda patinando). Ahí <u>sí</u> hay froz, pero eso pasa hasta que la pelota empieza a girar sin deslizar, ahí la froz. desaparece. (Del todo).

Si vos pudieras conseguir una pelota perfectamente lisa y la tiraras sobre un plano horizontal perfectamente liso (pero con rozamiento), la pelota no se frenaría nunca. (Nunca).

En la práctica se frena porque los planos no son lisos.

- gira sin resbalar $\nexists$ fr 
- gira y resbala $\exists$ fr.

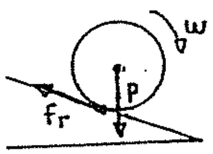
Tienen saliencias así:

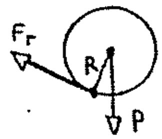
Los golpes contra las montañas hacen que se pierda energia en forma de calor y la pelota se para. (Mala suerte amigo).

R 1 4

Caso 2 V_{CM} no es constante.

Si un cilindro cae rodando sin resbalar por un plano inclinado hay F_{roz}, porque justamente la tonta de la F_{roz} es la que provoca la aceleración angular. Si no hubiera F_r, el coso caería deslizando.





$f_r \cdot R = I_{CM} \cdot \gamma$

(F_r es incógnita)

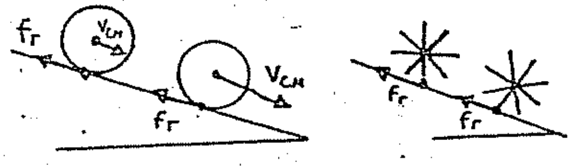
SI UN CUERPO GIRA SIN RESBALAR LA FUERZA DE ROZAMIENTO HACE TRABAJO ? (Mucho cuidado con esto)

La respuesta es NO.

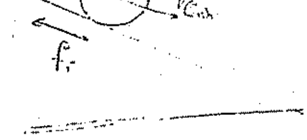
(Ya me tiene cansado este jueguito de preguntas y respuestas).

La cuestión es que pese a haber fuerza de rozamiento, esta F_r se apoya instantáneamente en puntos distintos pero no se traslada !.

Lo vas a ver mejor en este dibujo:

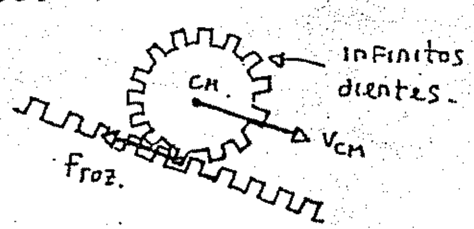


EL CILINDRO CAE POR EL PLANO INCLINADO. ∃ FUERZA DE ROZAMIENTO PERO NO ES QUE SE TRASLADE SINÓ QUE APARECE INSTANTANEAMENTE EN PUNTOS DISTINTOS.



∃ f_r pero no realiza W

Podés mirarlo también así:



F_r ∃ PERO NO SE TRASLADA, SE APOYA INSTANTE A INSTANTE EN LUGARES DISTINTOS. POR ESO ES QUE F_r NO REALIZA TRABAJO.

Yo entiendo que todo esto es muy raro pero que le vas a hacer, parece que es verdad nomás.
Ahora, unas últimas 3 cositas.

1)- Si un cuerpo rota y se traslada, el C.I.R. ya no va a ser más el punto de contacto entre el plano y el cuerpo, puede ser que esté más arriba o más abajo, pero nunca el CIR puede ser el CM. del cuerpo. Eso es un caso límite que ocurre si el cuerpo gira pero no se traslada. (Rotación pura).
Como el CIR es un punto que por definición tiene velocidad instantánea nula, para hallar la posición del CIR cuando el cuerpo patina igualo $V_{CM} = \omega . d$ y despejo la distancia $\underline{\underline{d}}$ del C.M a la cual está CIR.

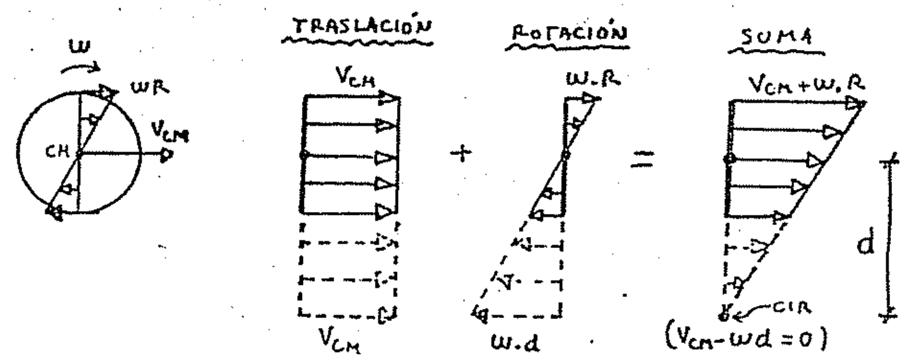
2)- Si un cuerpo rueda y resbala (Patina) podés calcular la fuerza de rozamiento como $\mu . N$. Pero si el cuerpo rueda sin resbalar F_r vale siempre menos que $\mu . N$ y ES INCÓGNITA.
Si en un problema de cilindros que ruedan sin resbalar te dá que F_r es mayor que $\mu . N$ es que o te equivocaste en las cuentas o es que está mal planteado y el cuerpo rueda patinando.

3_ Son importantes los diagramas de velocidades para cuerpos que ruedan resbalando.

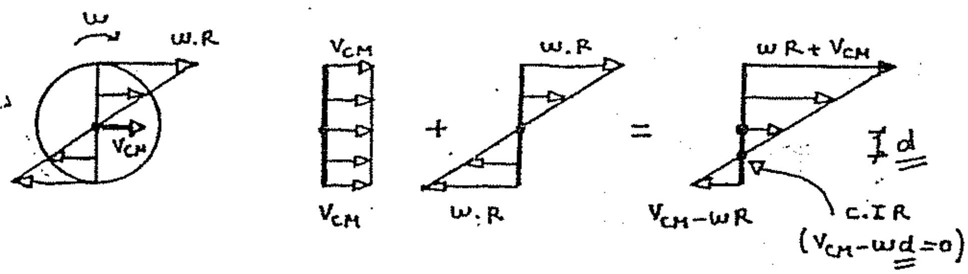
DIAGRAMAS DE VELOCIDADES PARA CUERPOS QUE RUEDAN Y PATINAN

P-4

AVANZA MAS DE LO QUE RUEDA.



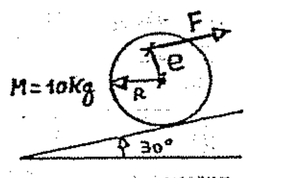
RUEDA MAS DE LO QUE AVANZA.



FIN DE LA TEORÍA DE CUERPOS QUE RUEDAN SIN DESLIZAR Y CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN.

PROBLEMAS

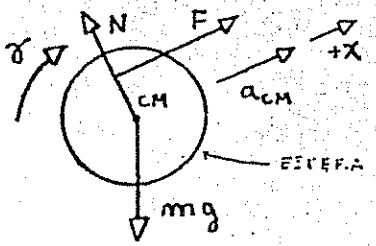
① _La esfera sube por el plano inclinado rodando sin deslizar por acción de la fuerza F paralela al plano inclinado. Si no existe rozamiento calcular la distancia e, la a_{CM} y γ para que se cumpla lo pedido.



$R=0,2\ m \quad F=200N$

El enunciado me obliga a preguntarme algo:

¿Cómo puede ser que a la esfera se le ocurra subir por el plano inclinado si no hay rozamiento?. Voy a dibujar el diag. de cuerpo libre y tal vez me de cuenta.



Veamos: La Fuerza F tira para arriba así que la esfera sube. La Fuerza F produce momento, así que la esfera rota. ⇒ La esfera sube girando.

Ya me di cuenta de que aún cuando no haya f_r la esfera va a subir por el plano inclinado girando. Si ahora quiero que suba rodando sin deslizar (esta es la condición que me piden) deberá ser a_{CM} igual a $\gamma . R$.

Planteo como siempre la ecuación de Traslación y la ecuación de Rotación.

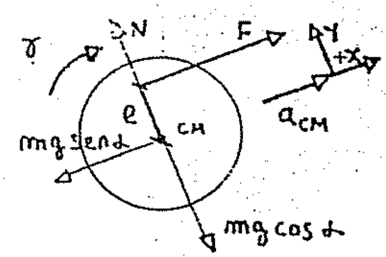


DIAGRAMA DE C. LIBRE

En el eje X: $F - mg.\text{sen}\,\alpha = m.\,a_{CM}$

MOMENTO CON RESP. AL CM: $F.\,e = I_{CM}.\,\gamma$

RODAR SIN RESBALAR: $a_{CM} = \gamma . R$

(No tomo ecuación en el eje Y porque no me sirve para nada). Para una esfera $I_{CM} = \frac{2}{5} m R^2$.

$$\begin{cases} F - mg\ \text{sen}\,\alpha = m.\,a_{CM} \\ F.\,e = \frac{2}{5} m\, R^2 . \frac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 200\,N - 49\,N = 10\,Kg.\,a_{CM} \\ 200\,N.\,e = \frac{2}{5}\,10\,Kg.\,0{,}2\,m.\,a_{CM} \end{cases}$$

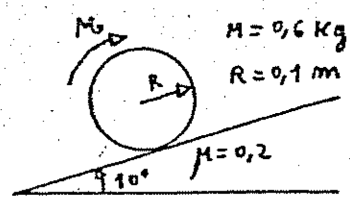
Resuelvo:

$\underline{e = 0{,}06\ m}$ ← EXCENTRICIDAD DE LA FUERZA

$\underline{a_{CM} = 15{,}1\ \frac{m}{s^2}}$ ← ACELERACIÓN DEL C.M.

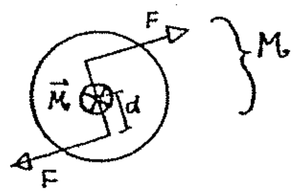
$\underline{\gamma = 75{,}5\ \frac{1}{s^2}}$ ← ACELERACIÓN ANGULAR

(2) -El cilindro sube por el plano inclinado por la acción de un par de fuerzas de valor M. Hallar el valor máximo que pueda tener el par aplicado y la a_{CM} del cilindro para que éste suba por el plano rodando sin resbalar.



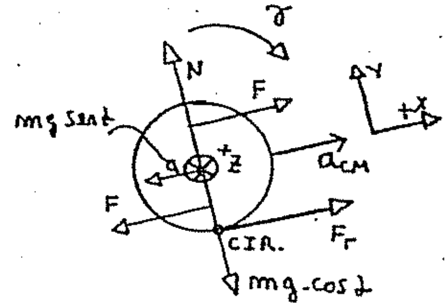
R - 4

Un momento aplicado significa un par de fuerzas iguales y opuestas de resultante nula.
Pero si el cilindro tiene aplicada una resultante nula, cómo diablos hace para subir por el plano inclinado?



$M = 2F.d$

Hagamos el diag. de cuerpo libre y analicemos el asunto:



La componente del peso mg sen α tira al cuerpo para abajo. Las 2 fuerzas F se anulan, sin embargo, si el cilindro sube por el plano inclinado deberá haber una fuerza que apunte para arriba que sea la que lo haga subir. No queda otra posibilidad de que esta fuerza sea la fuerza de rozamiento. No hay vuelta que darle. Si no hubiera una fuerza que tire hacia arriba el tipo no podría subir.

_Perdón no, pero no era que la fuerza de rozamiento siempre se oponía al movimiento?

_Y bueno, parece que no, por que acá la fuerza de rozamiento justamente es la que provoca el movimiento. (Ya te dije al principio que en dinámica de rotación había muchos conceptos nuevos).

En realidad, la F_r SÍ se opone al movimiento...
Al movimiento $\boxed{\text{RELATIVO}}$ de las superficies que están en contacto. (Esto es algo que no todo el mundo sabe). R 1 4

Planteo las ecuaciones de siempre:

TRASLACIÓN EN EL EJE X $\longrightarrow$ $\cancel{F}-\cancel{F}-mg.\operatorname{sen}\alpha+F_r=m.a_{CM}$

MOMENTOS CON RESPECTO AL CM. $\longrightarrow$ $M_o-F_r.R=I_{CM}.\gamma$

CONDICION DE RODAR SIN RESBALAR. $\longrightarrow$ $a_{CM}=\gamma.R$

Para el caso límite para el cual el cilindro esté por rodar y deslizar, F_r valdrá justo $\mu.N$. En ese caso el momento aplicado será el máximo posible por que si fuera un poco mayor el cilindro empezaría a patinar.

$$\therefore\ F_r=\mu.N=\mu.mg.\cos\alpha.$$

$$\begin{cases}-mg.\operatorname{sen}\alpha+\mu.N=m.a_{CM}\\ M_o-\mu.N.R=\frac{2}{5}mR^2.\frac{a_{CM}}{R}\end{cases}$$

DATOS:
$\mu=0{,}2$, $M=0{,}6\,Kg$, $R=0{,}1\,m$, $\alpha=10°$

$$\begin{cases}① & -mg.\operatorname{sen}\alpha+\mu.mg.\cos\alpha=m.a_{CM}\\ ② & M_o-\mu.mg.\cancel{\cos\alpha}.R=2/5\,m\,R\,a_{CM}\end{cases}$$

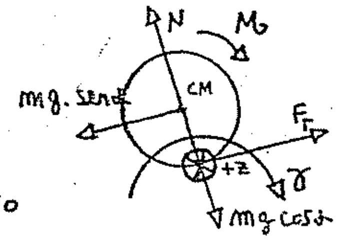
De la 1ra ecuación: $-0{,}6.Kg.9{,}8\,m/s^2.\operatorname{sen}10°+0{,}2.0{,}6Kg.9{,}8\,m/s^2.\cos10°=$
$=0{,}6\,Kg.\,\underline{\underline{a_{CM}}}$

$$\underline{\underline{a_{CM}=0{,}228\ m/s^2}}$$

De la 2º ecuación:

$$\underline{\underline{M_o}}-0{,}2\times0{,}6\,Kg.9{,}8\frac{m}{s^2}.\cos10°.0{,}1\,m=\frac{2}{5}.0{,}6\,Kg.0{,}1\,m.a_{CM}$$
$$\Longrightarrow M_o=0{,}121\,N.m$$

Fijate que también podría haber tomado momentos con respecto al C.I.R. En ese caso:



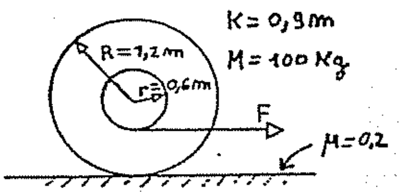
R-4

$$\underline{\underline{M_o}} - mg.\,\text{sen}\alpha \cdot R = \left(\frac{2}{5}\, m R^2 + m R^2\right)\underline{\underline{\gamma}}$$

(Esta ecuación podría haber reemplazado a la segunda).

<u>conclusión</u>:

cuando razonás con el asunto de para que lado tiene que ir Fr tenés que tener mucho cuidado. Siempre dibujá el diag. de cuerpo libre (ojo a los sentidos de las aceleraciones γ y a_{CM}!) y recién de ahí deducís el sentido de Fr. (Debe ser compatible con las aceleraciones). Si en algún problema no te das cuenta aún así para donde va, dale un sentido arbitrario. Las ecuaciones se van a ocupar de decirte si está bien o si está mal.



(3) -La rueda tiene un radio de giro K=0,9 m y es tirada por la fuerza F. Calcular la a_{CM} si la fuerza vale:
a) F=250 N . b) F= 300 N .

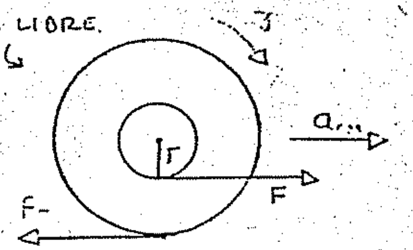
Acá hay un problema: Cuando yo tire con la Fuerza F, ¿la rueda va a rodar sin resbalar o no? La respuesta es no sé. Si la fuerza fuera muy grande (digamos F= 300 Ton) seguro que entra a patinar, pero con una fuerza de 250 N (2,5 Kg) no sé. Voy a hacer una cosa. Voy a plantear las ecuaciones como si el cilindro rodara sin resbalar. Si efectivamente el coso está rodando sin deslizar f_{roz} va a dar < que μ.N. (Mirá la teoría).

Voy al primer caso.

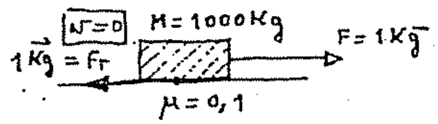
a) $F = 250\,N$

¿Por qué puse que F_r va hacia la izquierda y no hacia la derecha? En dinámica de rotación tenes que dejar la intuición de lado y razonar desde el punto de vista físico y de las ecuaciones. Fijate: si un cuerpo es tirado por una fuerza, la fuerza de rozamiento nunca puede ser mayor que esa fuerza.

DIAGRAMA DE C. LIBRE



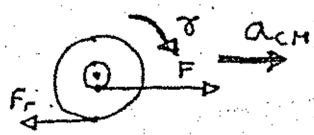
R-4



← SITUACIÓN CUANDO TIRO DE UNA COSA CON UNA FUERZA $\underline{F}$ Y LA COSA <u>NO</u> SE MUEVE.

Si yo tiro del ladrillo con una fuerza de $1\,\vec{Kg}$, la F_{roz} valdrá también $1\,\vec{Kg}$ porque si valiera μN el cuerpo se iría hacia la izquierda. Acordate que μN es la fuerza de roz. <u>MÁXIMA</u> que puede aparecer.

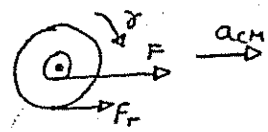
Si en el caso de la rueda F_r valiera también $250\,N$ la rueda <u>NO SE TRASLADARÍA</u> (por que la suma de las fuerzas aplicadas sobre ella valdría cero). así que F_r debe ser <u>menor</u> que F. Ahora, si F_r es menor que F, el cuerpo se traslada hacia la derecha. Pero si la a_{CM} es hacia la derecha y el cilindro gira sin deslizar, γ debe tener el sentido de las agujas del reloj. (sinó patinaría) pero para hacer que el cilindro adquiera γ debe haber una fuerza responsable. Esa fuerza debe ser F_r por que F produce justamente un momento de sentido contrario a γ.



Implica: F_r tiene que ir para la izquierda.

6d

Fijate que pasaba si hubiera supuesto que F_r iba para la derecha:

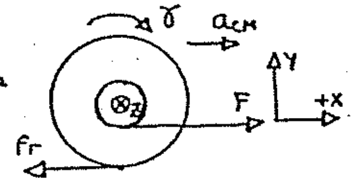


Si F_r y F apuntan para la derecha el cuerpo se mueve para la derecha con aceleración a_{CM}. Pero para poder rodar sin resbalar γ debe ir en sentido de las agujas del reloj. Ahora, ni F ni F_r producen momento en el sentido de las agujas del reloj $\Rightarrow$ F_r está mal puesta.

De todas maneras, si los sentidos de las aceleraciones están bien puestos y me equivoqué en el sentido de F_r, las ecuaciones me lo van a decir.

El planteo queda:

DIAGRAMA



$$\begin{cases} \text{TRASLACIÓN: } & F - F_r = M \cdot a_{CM} \\ \text{ROTACION: } & F_r \cdot R - F \cdot r = I_{CM} \cdot \gamma \\ \text{NO PATINA: } & a_{CM} = \gamma \cdot R \end{cases}$$

Para la ec. de rotación tomé momento con respecto al C.M.

$M = 100\ Kg$, $F = 250\ N$
$I_{CM} = M K^2 = 100\ Kg \cdot 0{,}9^2 m^2$
$R = 1{,}2\ m$, $r = 0{,}6\ m$

← Estos eran los datos.
Así quedan las ecuaciones
↓

$$\begin{cases} 250\ N - F_r = 100 Kg \cdot a_{CM} \\ F_r \cdot 1{,}2\ m - 250 N \cdot 0{,}6\ m = 100 \cdot 0{,}9^2\ Kg\ m^2 \cdot \dfrac{a_{CM}}{1{,}2\ m} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $\underline{\underline{a_{CM} = 0{,}8\ m/seg^2}}$ $\underline{\underline{F_r = 170\ N}}$

Calculo $\mu \cdot N$: $\mu \cdot N = 0{,}2 \cdot 100 \cdot 9{,}8\ N = 196\ N$

F_r dió menor que $\mu \cdot N$ $\Rightarrow$ el planteo esta bien hecho y el cuerpo rueda sin deslizar. (F_r dió $\oplus$ $\Rightarrow$ su sentido esta bien).

caso b) $F = 300\,N$

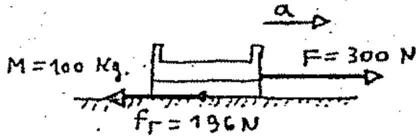
Uso el planteo que hice recién pero en vez de poner $F = 250\,N$ pongo $F = 300N$:

$$\begin{cases} 300N - f_r = 100\ Kg \cdot a_{CM} \\ f_r \cdot 1{,}2\,m - 300\ N \cdot 0{,}6\,m = 100 \cdot 0{,}9^2\ Kg \cdot m^2\ a_{CM}/1{,}2\,m \end{cases}$$

R 1 4

$$F_r = 204\ N \qquad a_{CM} = 0{,}96\ m/s^2$$

como μN valía $196\,N$, f_r resulta mayor que $\mu \cdot N$. Eso no puede ser $\Rightarrow$ está mal planteado y la rueda patina.
vuelvo a Plantear considerando que el cilindro rueda deslizando. (Ahora F_r SI vale $\mu \cdot N$).



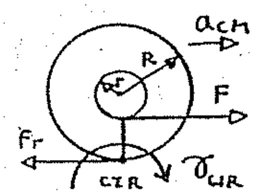
Reemplacé a la rueda por un cajón de manzanas. (Para la traslación es lo mismo por que patina).

$$F - F_r = M\,a_{CM} \Rightarrow 300N - 196\,N = 100\,Kg \cdot a_{CM}$$

$$\underline{\underline{a_{CM} = 1{,}04\ m/s^2}} \qquad \underline{\underline{F_r = \mu \cdot N = 196\ N}}$$

También podría haber planteado la ecuación de rotación tomando momento con respecto al C.I.R. En ese caso sería:

$$F \cdot (R - r) = (I_{CM} + M \cdot R^2)\ \underline{\underline{\gamma_{CIR}}}$$



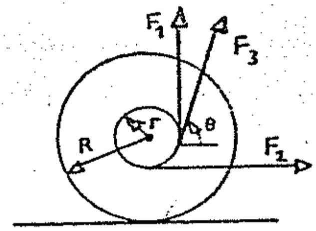
Esta ecuación tiene una sola incógnita que es γ_{CIR}. Así que directamente puedo calcular a_{CM} y F_r. (Planteando la ecuación para la traslación).
Otra vez, si la fuerza de rozamiento da mayor que $\mu \cdot N$, anulo el planteo y hago lo mismo que antes.

(4) -Decir para que lado va a rodar la rueda si se tira con:

a) F_1 (rodando sin resbalar).

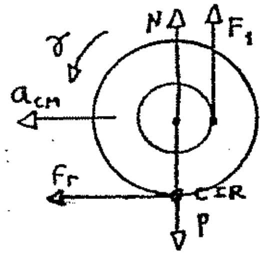
b) F_2 (rodando sin resbalar).

c) F_3 (con $\cos\theta = r/R$).



R 1 4

a) Tiro con F_1 hacia arriba.
Supongo F_r hacia la izquierda.
Tomo momentos con respecto al C.I.R. La única fuerza que hace momento es F_1 y me dice que la aceleración angular γ de la rueda será en sentido contrario a las agujas del reloj. Pero como la rueda gira sin deslizar significa que tendrá que ir para la izquierda.



DIAG. DE CUERPO LIBRE

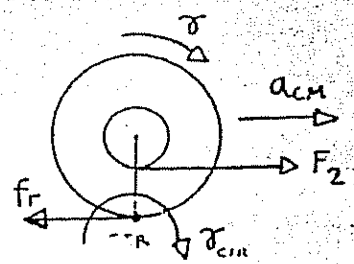
<u>CONCLUSIÓN</u>: LA RUEDA VA PARA LA IZQUIERDA.

Ahora, si la cosa va para la izquierda, quiere decir que tendrá que haber una fuerza que la mueva para la izquierda. Esa fuerza no puede ser otra que la fuerza de rozamiento.

$\Rightarrow$ F_r VA PARA LA IZQUIERDA

Yo entiendo que uno quiera entender todo esto intuitivamente pero NO hay vuelta que darle, saber para donde va la fuerza de rozamiento a ojo es muy difícil.
La intuición no juega en los problemas de cuerpo rígido.
Ahora lo que juega es el razonamiento. Y si te cuesta razonar, no importa. Vos planteá las ecuaciones. Ellas van a razonar por vos.
(creo que entendés lo que quiero decir).
Voy ahora a la 2da situación.

Caso b)



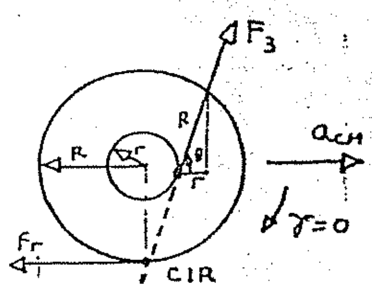
Tomo momentos con respecto al C.I.R. El único momento es el que produce F_2 que me indica que la aceleración angular γ_{CIR} va en el sentido de las agujas del reloj. $\Rightarrow$ Como el cilindro rueda sin resbalar la a_{CM} debe ser hacia la derecha $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ LA RUEDA VA PARA LA DERECHA.

Tomo momento con respecto al C.M. El momento producido por F_2 es contrario a la aceleración angular $\gamma \Rightarrow$ debe haber alguna otra fuerza que se ocupe de provocar $\gamma \Rightarrow$ No puede ser otra fuerza que no sea la fuerza de rozamiento $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ LA F_r VA PARA LA IZQUIERDA.

caso c)



si $\cos\theta = r/R \Rightarrow F_3$ pasa por CIR. Tomo momentos con respecto al CIR y da cero $\Rightarrow$ El cilindro no gira ($\gamma=0$). Tomo momentos con resp. al C.M.. F_r debe oponerse al momento de F_3 para que la rueda no rote. $\Rightarrow$ f_r va para la izquierda. $F_3 \cdot \cos\theta$ tira para la derecha y F_r para la izquierda $\Rightarrow$

si $F_3 \cdot \cos\theta = F_r$ el cuerpo no se mueve.

si $F_3 \cdot \cos\theta > F_r$ la rueda NO GIRA PERO ACELERA PARA LA DERECHA.

FIN DE LOS PROBLEMAS DE CUERPOS QUE RUEDAN SIN DESLIZAR.

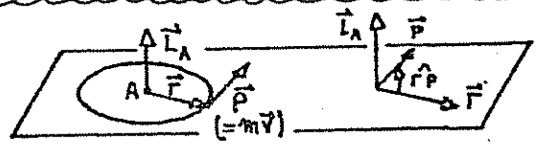
CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

RESUMEN DE TEORÍA

MOMENTO CINÉTICO o CANTIDAD DE MOV. ANGULAR $\vec{L}$ (VECTOR) PARA UNA PARTÍCULA:

Se define como:

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

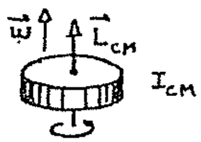


Si $\vec{p}$ es $\perp$ a $\vec{r}$ entonces el modulo de $\vec{L}_A$ vale: $|\vec{L}_A| = r.m.v$

MOMENTO CINÉTICO o CANTIDAD DE MOV. ANGULAR $\vec{L}$ (VECTOR) PARA UN CUERPO RÍGIDO QUE GIRA ALREDEDOR DEL CENTRO DE MASA (SE LLAMA ELE DE SPIN).

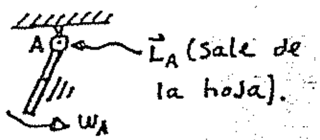
Se define como

$$\boxed{\vec{L}_{CM} = I_{CM} . \vec{w}}$$



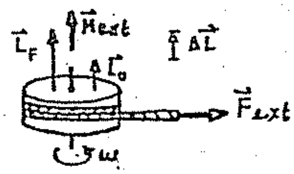
MOM. CINÉTICO o CANT. DE MOV. ANG. P/ UN CUERPO QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE QUE NO PASA POR EL C. DE MASA.

$$\boxed{\vec{L}_A = I_A . \vec{w}_A}$$



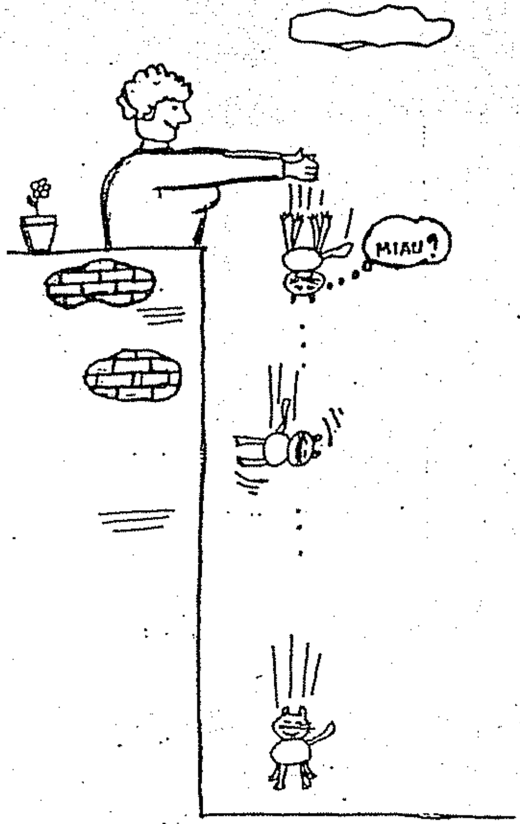
CONSERVACIÓN DE LA CANT. DE MOV. ANGULAR

$$\boxed{\vec{M}_{ext.} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}}$$



Esta ecuación casi no se usa para resolver problemas. (Pero atento al concepto!). Es una expresión vectorial. (El vector momento apunta en la misma dirección que el vector cambio de $\vec{L}$). Si el momento exterior es cero se conserva la cant. de mov. angular. ($\vec{M}_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L}_F = \vec{L}_0$).

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR



ACTO I: una gorda sube a la terraza de su casa y deja caer un gato patas para arriba. El gato se da vuelta en el aire, cae parado y se va caminando. R I 5

ACTO II: La misma gorda sube a la terraza y deja caer el mismo gato. El tipo cae parado y se va caminando.

ACTO III: La misma gorda deja caer el mismo gato. El gato vuelve a caer parado y se va caminando.

¿CÓMO SE LLAMA LA OBRA?

Claro, vos probablemente no tengas la mas mínima idea de que contestar. Sin embargo, para cualquier tipo que sepa un poco de física el título de la obra es evidente: CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.

¿Por qué ese título y no otro? – AAAAhhh! muchacho, no os apresureis!, el enigma siempre se descubre al final!

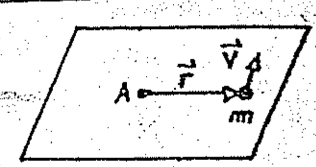
MOMENTO CINÉTICO o CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR ($\vec{L}$).

¿Nunca se te ocurrió pensar por qué los tipos definen la cantidad de movimiento lineal ($\vec{P}$) como $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$?.

¿Por qué no $P = \frac{m}{v}$ o $P = e^2 . \ln v^{\frac{4}{3}}$? (Por ejemplo).
Bueno, la cosa es que ellos la definieron así porque se dieron cuenta de que el producto $m . \vec{v}$ se conservaba en los choques. (Es decir, hicieron experimentos y lo comprobaron).
A partir de esta conclusión, se puede demostrar que si uno tiene un sistema de cuerpos y sobre ese sistema de cuerpos NO ACTÚAN FUERZAS EXTERIORES, la suma de las canti-
RI5 dades $m . \vec{v}$ que hay al principio, tiene que ser igual a la suma de las cantidades $m . \vec{v}$ que hay al final. (Fijate que tanto en un choque como en una explosión actúan fuerzas, pero son INTERIORES. Por eso la cantidad de movimiento lineal $\vec{P}$ se conserva en los choques y en las explosiones).
Acá igual. Los tipos encontraron una magnitud que se conserva cuando hay rotación. (Quiero decir, se conserva en determinados casos que ya te voy a comentar después).
A esta magnitud la denominaron con la letra $\vec{L}$ (No sé por qué) y la llamaron: MOMENTO CINÉTICO o CANTIDAD DE MOV. ANGULAR o IMPULSO ANGULAR o MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO o MOMENTO ANGULAR. (Sí, $\vec{L}$ tiene 5 nombres diferentes). Cada libro y cada profesor usa un nombre distinto. Yo voy a usar los 2 o 3 primeros que son los que mas vi por ahí.
Una vez aclarada la historia de por qué los tipos definen magnitudes que parecen sacadas de la galera, voy a empezar viendo que cantidad de movimiento angular tiene una partícula que se mueve, para después pasar a poder calcular la cantidad de mov. angular que tiene un cuerpo rígido que está girando.
Veamos.

MOMENTO CINÉTICO ($\vec{L}$) PARA UNA SOLA PARTÍCULA

R15



Imaginate una partícula que se está moviendo. Elijo un punto A. Al vector que va desde el punto A hasta la masa m (en ese sentido y NO AL REVÉS) lo llamo vector posición $\vec{r}$.
Con todo esto, ellos dicen:
Se define la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ con respecto al punto A que uno eligió, como el producto vectorial del vector posición $\vec{r}$ por la cantidad de movimiento lineal $\vec{P}$.

Es decir:

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{r} \wedge \underbrace{m.\vec{V}}_{\vec{P}}} \leftarrow$$

MOMENTO CINÉTICO $\vec{L}$ CON RESPECTO AL PUNTO A DE LA PARTÍCULA DE MASA m QUE SE MUEVE CON VELOC. $\vec{V}$

Pongámonos de acuerdo. La expresión $\vec{L}_A = \vec{r} \wedge \vec{P}$ se lee: Ele con respecto a A es igual a Erre vectorial Pe. (o Erre vector Pe). Me gustaría que te fijes que esta definición NO ES NADA SIMPLE. Acá ellos no te estan definiendo cantidades tontas tipo $E_c = \frac{1}{2} m.V^2$ o $J = F.\Delta t$, esas son cosas de la secundaria. Aca te estan diciendo que el momento cinético de una particula se halla haciendo el producto vectorial de 2 vectores. Los productos vectoriales son palabras mayores. Hablar de producto vectorial es estar YA en la universidad. (mis felicitaciones, entre paréntesis).
Lo que quiero decir es que la maldita expresión que recuadré significa varias cosas A LA VEZ.
Esas cosas son:

1) $\vec{L}_A$ es un vector, por que el producto vectorial de 2 vectores (que en este caso son $\vec{r}$ y $\vec{P}$) da un vector.

R 1 5

2)- $\vec{L}_A$ es un vector PERPENDICULAR al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{P}$, por que el $\wedge$ entre 2 vectores da un vector que es $\perp$ a los otros dos.

3)- $\vec{L}_A$ es un vector $\perp$ al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{P}$ cuyo módulo vale:

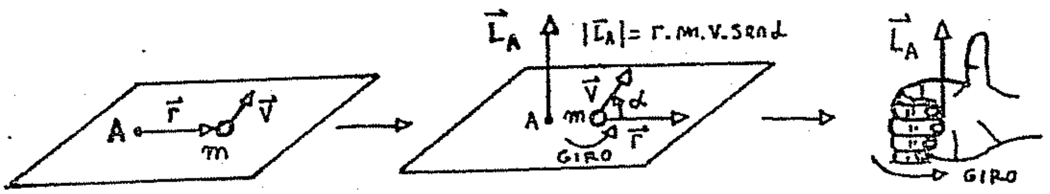
$$L_A = r.\overbrace{m\,v}^{P}.\,\text{sen}\left(\begin{array}{c}\text{del ángulo que forman}\\ \vec{r} \text{ y } \vec{P} \text{ unidos por las colas.}\end{array}\right) \leftarrow \begin{array}{l}\text{MÓDULO DEL}\\ \text{VECTOR } \vec{L}.\end{array}$$

Módulo del vector significa la longitud del vector. Cada vez que ponga L_A (o cualquier otro vector) sin la flechita arriba, significa que estoy hablando del MODULO de ese vector. Idem si pongo $|\vec{L}_A|$.

4)- El sentido del vector $\vec{L}_A$ está dado por la regla de la mano derecha.
Esta aburrida regla dice lo siguiente:

REGLA DE LA MANO DERECHA.

1)- Se trasladan los 2 vectores a un mismo punto.



2)- Se hace girar $\vec{r}$ hacia $\vec{V}$.

3)- Se ponen los dedos de la mano derecha en el mismo sentido en que $\vec{r}$ gira hacia $\vec{V}$. El dedo gordo indica ahora el sentido de $\vec{L}_A$.

*NOTA: El sentido de giro es siempre desde el 1er vector del producto vectorial hacia el 2do. El sentido de $\vec{P}$ $(= m.\vec{V})$ es el sentido de $\vec{V}$. El ángulo α es el ángulo más chico que forman los dos vectores. El vector $\vec{L}_A$ es un vector libre.

77

significa que $\vec{L}$ se puede colocar tanto en el punto A como sobre la masa m. Ojo! Muchas veces uno está escribiendo con la mano derecha y no se da cuenta y empieza a hacer la regla de la mano derecha CON LA MANO IZQUIERDA. HORROR!! ¡Te va dar todo al revés! (Pasa en las mejores familias).

R 1 5

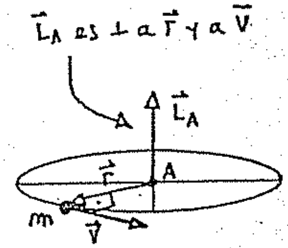
FIN DE LA DEFINICIÓN DE MOMENTO CINÉTICO PARA UNA PARTÍCULA.

Mi estimado amigo, la expresión de vuestro rostro me revela que no entendisteis un pepino. NO DESESPEREIS!, esto es difícil. Fijate los 2 ejemplos que vienen ahora y lo vas a entender mejor.

EJEMPLO

Calcular el momento cinético de una partícula de 1 Kg de masa que gira en una circunferencia de radio 2 m con una velocidad angular de 3 1/s.

Veamos. Primero hago un dibujito. Como no me dicen con respecto a qué punto quieren que calcule $\vec{L}$, supongo que se están refiriendo al centro de la circunferencia. (Punto A).



El momento cinético es por definición: $\vec{L}_A = \vec{r} \wedge m.\vec{V}$

Como me dan la velocidad angular ω, calculo la velocidad tangencial haciendo: $V_T = \omega . r = 3\ 1/s . 2\,m = 6\ m/s$.

La dirección y el sentido de $\vec{L}_A$ ya los indiqué en el dibujito anterior. El módulo de la cant. de mov. angular será:

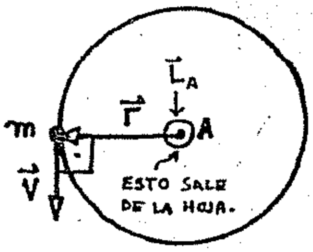
$$|\vec{L}_A| = r . mv \operatorname{sen}(\hat{r V}) = 2\,m . 1\,Kg . 6\,m/s . \operatorname{sen} 90°$$

Fijate que el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{V}$ es 90°.

7R

Entonces el módulo de $\vec{L}_A$ vale:

$$\underline{\underline{L_A = 12\ Kg.\frac{m^2}{s}}}$$



EL PROBLEMA VISTO DESDE ARRIBA.

El resultado dio en $Kg.m^2/s$. En estas unidades se mide la cantidad de mov. angular. Por otro lado, la cantidad de movimiento lineal ($\vec{p}$) se mide en $Kg.\ m/s$. Conclusión: $\vec{L}$ y $\vec{P}$ tienen <u>unidades diferentes</u>: Por este motivo es que $\vec{L}$ y $\vec{P}$ <u>NUNCA</u> se pueden sumar. (como no se pueden sumar Kg y cm).

R I 5

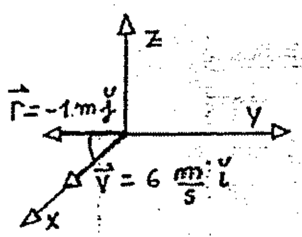
<u>UNA ACLARACIÓN</u>

Quiero que notes una cosa. Ellos en física hacen los productos vectoriales de una manera DIFERENTE a la que los tipos te enseñan en álgebra. Si esto hubiera sido álgebra yo hubiera hecho el $\wedge$ entre $\vec{r}$ y $m\vec{V}$ de la siguiente manera. Fijate:

1) Expreso los vectores $\vec{r}$ y $\vec{P}$ en función de los versores $\check{i}$, $\check{j}$ y $\check{k}$.

$$\vec{r} = 0\check{i} - 1m\ \check{j} + 0\ \check{k}$$

$$\vec{V} = 6\ m/s\ \check{i} + 0\check{j} + 0\ \check{k}$$



multiplicando al vector $\vec{V}$ por la masa, obtengo al vector $\vec{P}$:

$$\vec{P} = 6\ Kg.\ m/s\ \check{i} + 0\check{j} + 0\check{k}$$

Ahora hago el producto vectorial:

$$\vec{r} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & -1m & 0 \\ 6\,Kg.\frac{m}{s} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\check{i} + 0\check{j} + 6\ Kg.\frac{m^2}{s}\ \check{k} \Rightarrow \underline{\underline{L_A = 6\ Kg.\frac{m^2}{s}\ \check{k}}}$$

71

Los resulados coinciden. El versor $\check{k}$ me indica que $\vec{L}_A$ es $\perp$ a los otros 2 vectores. De esta manera se trabaja en mecánica que es una materia (En gral de 3ero) en la cual se ve todo esto mismo de dinámica de rotación pero con el grado máximo de complejidad. (Vectores en el espacio e infernales productos vectoriales). R 1 5

Mi manera de trabajar va a ser la siguiente: Voy a usar siempre el MÓDULO de los vectores hasta terminar hallando el módulo del producto vectorial. La dirección y el sentido del vector resultante la encuentro por medio de la regla de la mano derecha.

Pregunta: ¿Por qué los profesores de física no aclaran esto? ¿Por qué los profesores de álgebra no aclaran esto? Realmente es algo que no entiendo. (La vida es así). Sigamos.

OTRO EJEMPLO

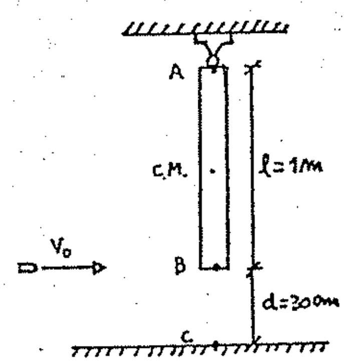
Calcular el impulso angular que tiene una bala de masa 30 g que viene con una velocidad de 100 m/s justo en el instante antes de que choque con la barra.

a)- Con respecto al punto A.

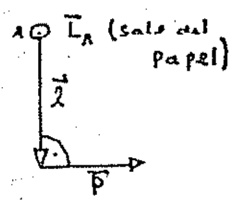
b)- Con respecto al C.M. de la barra.

c)- Con respecto a B.

d)- Con respecto a C, en el piso.



a) Calculo el impulso angular de la bala con respecto a la parte de arriba de la barra. (Punto A).



La bala trae una cantidad de mov. lineal que vale:

$$P = m \cdot V = \frac{30}{1000} \text{ Kg} \cdot 100 \frac{m}{s} = 3 \text{ Kg} \cdot \frac{m}{s}$$

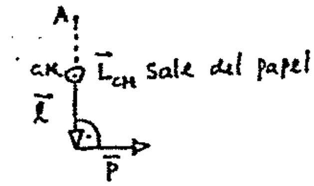
80

Por definición el impulso angular se calcula haciendo la cuenta: $\vec{L}_A = \vec{r} \wedge \vec{P}$. No voy a expresar los vectores $\vec{r}$ y $\vec{P}$ en función de los versores $\check{i}$, $\check{j}$ y $\check{k}$. Voy a trabajar con sus módulos.
Entonces, el módulo de $\vec{L}_A$ vale:

R 1 5 $$L_A = l \cdot P \cdot \operatorname{sen}(\widehat{l\,P}) = 1\,m \cdot 3\,Kg \cdot \frac{m}{s} \cdot \operatorname{sen} 90° = 3\,Kg \cdot \frac{m^2}{s}$$

La dirección y el sentido de $\vec{L}_A$ están en el dibujito anterior. Las hallé aplicando la regla de la mano derecha.

Caso b) _ $\vec{L}$ respecto al cm de la barra.



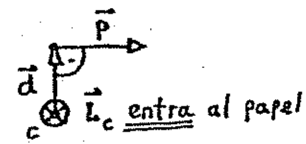
La cantidad de movimiento lineal de la bala sigue siendo $P = 3\,Kg \cdot m/s$, pero ahora r vale 1/2 metro.
Entonces: $\vec{L}_{CM} = \vec{r} \wedge \vec{P} \Rightarrow$

$$|\vec{L}| = l \cdot P \cdot \operatorname{sen}(\widehat{\vec{l},\vec{P}}) = 0{,}5\,m \cdot 3\,Kg \cdot \frac{m}{s} \cdot \operatorname{sen} 90° \Rightarrow L_{CM} = 1{,}5\,Kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Caso c)

En este caso no hay distancia respecto al punto B. (La bala pasa justo por B). Por lo tanto $\vec{l} = 0$ y $\vec{L}_B = 0$.

Caso d)



~~El~~ impulso angular de la bala con respecto al punto c vale: $\vec{L}_c = \vec{d} \wedge \vec{P}$,
Entonces: $|\vec{L}_c| = d \cdot P \cdot \operatorname{sen}(\widehat{\vec{d},\vec{P}}) = 0{,}3\,m \cdot 3\,Kg \cdot \frac{m}{s} \cdot \operatorname{sen} 90°$

Por lo tanto: $L_c = 0{,}9\,Kg \cdot \frac{m}{s}$ Entrante al plano del papel.

De este ejemplo que puse quiero que saques 2 conclusiones importantes: UNA: El momento cinético es una cantidad que DEPENDE DEL PUNTO QUE UNO TOMA.
OTRA: No sólo las cosas que estan girando tienen momento cinético. La bala del problema se movía en línea recta y sin embargo también tenía cantidad de movimiento angular.

OTRA COSA: En estos 2 ejemplos los ángulos que formaban los vectores $\vec{r}$ y $\vec{P}$ eran de 90°. En casi, casi todos los problemas va a pasar lo mismo, por eso es que sin pretender ser muy riguroso puedo decir que:

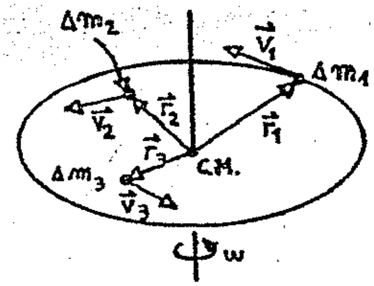
> EL MOMENTO CINÉTICO DE UNA PARTÍCULA CON RESPECTO A UN PUNTO A SITUADO A UNA DISTANCIA d VALE $L_A = m.v.d$.
> LA DIRECCIÓN DEL VECTOR $\vec{L}_A$ SERA ⊥ a v y a d y su sentido ESTA DADO POR LA REGLA DE LA MANO DERECHA. Esta definición vale sólo si los vectores $\vec{P}$ y $\vec{r}$ forman 90°.

RIS

FIN EXPLICACIÓN DE MOMENTO CINÉTICO PARA UNA PARTÍCULA.

MOMENTO CINÉTICO ó CANT. DE MOV. ANGULAR P/ UN CUERPO RÍGIDO.

Lo que quiero calcular ahora es la cantidad de movimiento angular que tiene un cuerpo que está rotando sobre su eje.
Un cuerpo está formado por muchas partículas, así que para calcular el momento cinético total que tiene, voy a utilizar el viejo truco de sumar el momento cinético de c/u de las partículas que componen el cuerpo (MUY astuto por cierto).
Como te dije en el 1er apunte, fijate que un cuerpo tiene un número finito de átomos, pero sin embargo está compuesto POR UN NÚMERO INFINITO DE PARTÍCULAS. (Ojo, partículas matemáticas, es decir, puntos sin dimensiones).
Lo que viene ahora es una DEMOSTRACIÓN. Si andás con poco tiempo podés darle una leída rápida. (Pero prestale atención a las conclusiones que están al final).
Imaginate un disco que está girando alrededor de un eje que pasa por el C.M.



$\vec{L}$ con respecto al centro de masa vale:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_\infty$$

Todos los vectores $\vec{V}_i$ forman 90° con
R 1 5 los vectores $\vec{r}_i$, así que el módulo de un vector genérico L_i para la partícula i vale $L_i = r_i \Delta m_i v_i$. Por otra parte, todos los vectores $\vec{L}_i$ apuntan hacia arriba. (Esto sale de aplicar la regla de la mano derecha), así que puedo sumarlos directamente.

Entonces: $L_{CM} = \Delta m_1 . v_1 . r_1 + m_2 v_2 r_2 + \dots + \Delta m_\infty v_\infty r_\infty$

Como la velocidad tangencial de cada partícula es $\omega . r_i$

$$L_{CM} = \Delta m_1 \underbrace{(\omega . r_1)}_{V_1} . r_1 + \Delta m_2 \underbrace{(\omega . r_2)}_{V_2} . r_2 + \dots + \Delta m_\infty \underbrace{(\omega . r_\infty)}_{V_\infty} . r_\infty$$

$$L_{CM} = \Delta m_1 . r_1^2 . \omega + \Delta m_2 r_2^2 . \omega + \dots + \Delta m_\infty r_\infty^2 . \omega$$

Saco ahora ω como factor común:

$$L_{CM} = (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_\infty r_\infty^2) . \omega$$

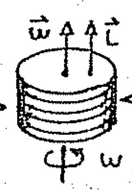
Ahora, toda la suma de ∞ cosas que está dentro del paréntesis la puedo poner así: $(\dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i . r_i^2$.

Justamente en el apunte 1 te había comentado que esta sumatoria de infinitos productos podía ser calculada por los tipos mediante una integral choclaza haciendo tender cada Δm_i a cero. Al valor de esa sumatoria se lo llamaba momento de inercia con respecto al C.M. (I_{CM}), y representaba una <u>medida</u> de la resistencia que el cuerpo oponía a girar alrededor de un eje.

Conclusión, el momento cinético del disco en rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa vale $L_{CM} = I_{CM} w$. Ahora, como todos los vectorcitos $\vec{L}_i$ apuntan hacia arriba, el vector suma de esos L_i ($\vec{L}_{CM}$) también va a apuntar para arriba. Por otra parte, el vector velocidad angular $\vec{w}$ también apunta para arriba, quiere decir que la relación a la que había llegado que relacionaba el modulo de $\vec{L}_{CM}$ con el módulo de la velocidad angular $\vec{\omega}$ ($L_{CM} = I_{CM} \cdot w$) PUEDE SER EXPRESADA TAMBIÉN DE MANERA VECTORIAL, así que puedo poner esta ecuación así : $\vec{L}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{w}$. R 5

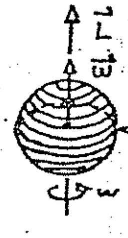
Todo esto es muy interesante pero vale solo para un disco que gira. Yo quiero hallar $\vec{L}$ para un CUERPO que gira. (Un cilindro, una esfera, una barra).

Volviendo a aplicar trucos sacados de la galera, uno puede decir, por ejemplo, que un cilindro es una serie de discos apilados así:

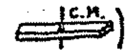


Esto significa que la ecuación $\vec{L}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{w}$ valdría también para un cilindro que gira alrededor de un eje que pasa por el C.M.

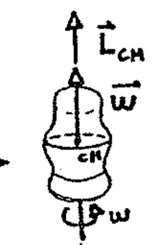
Ahora, una esfera también se puede considerar como una serie de ∞ discos de diámetro variable apilados.



Es decir que la ecuación $\vec{L}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{w}$ también se va poder aplicar a una esfera en rotación.

Así podría seguir y te darías cuenta de que también pue-
do aplicar esta maldita ecuación a una barra (),
a un cubo (), o en general, a cualquier cosa que sea
R 1 5 SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN, como por ejemplo, una
batata espacial.

LA ECUACIÓN $\vec{L}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{w}$ ES VÁLIDA PARA ESTA BATATA MACABRA POR QUE ES SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN. →

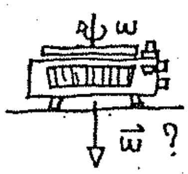


Vos vas a poder usar esta ecuación en casi todos los
problemas, salvo en los últimos donde el cuerpo PESE A
ESTAR ROTANDO ALREDEDOR DE UN EJE QUE PASA POR EL C.M.
NO ES SIMÉTRICO RESPECTO A ESTE EJE.

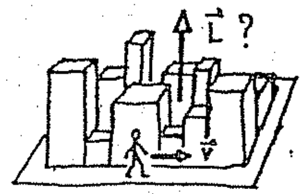
Te doy algunos ejemplos de casos en donde no se pue-
de usar la ecuación $\vec{L}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{w}$. En c/u de estos ca-
sos, el momento cinético $\vec{L}$ no apunta en la misma direc-
ción que el vector velocidad angular $\vec{w}$. Ojo, yo no preten-
do que entiendas todo esto ahora, es imposible, estamos
entrando en la parte mas peluda de la dinámica impul-
siva de rotación, pero sí creo que lo vas a poder
entender si lo relees después de haber hecho TODOS los
problemas de la guía. Esto es difícil. Para hacer este a-
ponte me ví obligado a leer y releer el Resnick y el Tipler
por que no entendía lo que decían. Varias veces tuve que
hacer consultas con tipos que saben mucho de este te-
ma para que me explicaran algunas cosas.
Pero hay algo fundamental que hace que este tema sea di-
fícil de agarrar de entrada: Todo esto es muy antiintuitivo!

Fijate: Vos muchas veces viajaste en autos a $v = cte$. Sabés también qué significa que el auto acelere. Muchas veces ejerciste fuerzas. Tenés una idea de lo que es el peso y la masa. Por eso es que dinámica y cinemática son temas fáciles dentro de todo. Pero ahora decime: ¿Alguna vez en tu vida viste al vector $\vec{\omega}$ saliendo del plato del tocadiscos en rotación? ¿Y de una pelota de futbol que va girando por el piso? ¿Acaso alguna vez que te pusiste a dar una vuelta manzana en sentido contrario a las agujas del reloj viste con sorpresa emerger entre los edificios al vector cantidad de movimiento angular?

R I S



DÓNDE ESTAN $\vec{L}$ Y $\vec{\omega}$? YO NO VEO NADA!

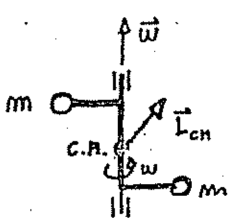


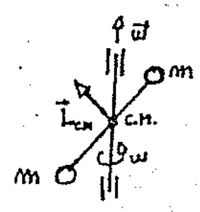
Claro!, obvio que no! $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ y los 10.000 vectores más que vas a ver a lo largo de la carrera no se pueden ver ni tocar! solo son una <u>ABSTRACCIÓN MATEMÁTICA</u> pensada para que se cumplan las leyes físicas.

Los humanos somos así, no creemos en lo que no vemos. Por eso cuesta agarrar este tema.

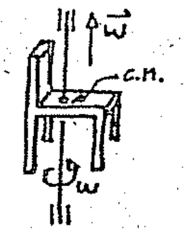
Sigo.

EJEMPLOS EN LOS CUALES NO VALE LA ECUACIÓN $\vec{L}_{CM} = I_{CM} \cdot \vec{\omega}$





EN NINGUNO DE ESTOS CASOS HAY SIMETRÍA RESPECTO AL EJE DE ROTACIÓN.



Puede ser que alguno de estos ejemplos aparezca en la guía o en algún final. Si eso pasa... Que tengas buena suerte.

MOMENTO CINÉTICO DE SPIN (Esto es una definición).

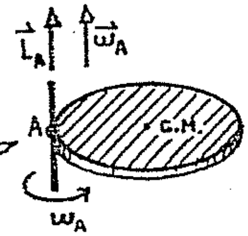
A esta cantidad $\vec{L}_{CM}$ (que es la cantidad de movimiento angular que tiene el cuerpo con respecto al C.M.) se la llama momento cinético de SPIN.

Todo lo que dije desde que empecé a hablar de cant. de mov. angular para un cuerpo rígido, vale para cuerpos que estan girando alrededor de ejes que pasan por el C.M. Puede haber casos en los cuales el tipo gire alrededor de ejes que pasen por algún otro lado. Entonces, título:

R
1
5

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR ($\vec{L}$) PARA UN CUERPO QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE QUE NO PASA POR EL C.M.

Si en la demostración que puse para ver cuanto valía el momento cinético de un disco en rotación, hubiera hecho pasar el eje por este punto A, habría llegado a lo siguiente:



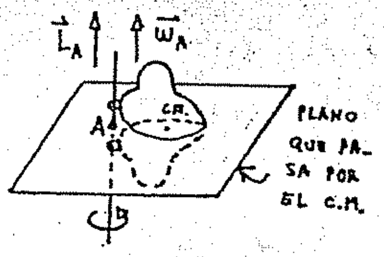
$\vec{L}_A = I_A \cdot \vec{\omega}_A$. Esta es la misma ecuación vectorial anterior, pero ahora todas las magnitudes estan referidas al nuevo punto A. ($\vec{L}_A$, I_A, $\vec{\omega}_A$).

Esta ecuación ($\vec{L}_A = I_A \cdot \vec{\omega}_A$) vale también para un cilindro que gire alrededor de un eje que pase por A ($\vec{L}_A \uparrow \ \uparrow \vec{\omega}_A$), para una esfera ($\vec{L}_A \uparrow \ \uparrow \vec{\omega}_A$), para una barra ($A \ \uparrow \vec{L}_A \uparrow \vec{\omega}_A$) o en general para CUALQUIER CUERPO QUE SEA SIMÉTRICO RESPECTO AL PLANO DE ROTACIÓN. (Significa: arriba del plano de rotación que pasa por el C.M. tiene que haber lo mismo que abajo del plano de rotación).

Ejemplo de esto: Una batata simétrica.

87

PARA ESTA BATATA QUE GIRA ALREDEDOR DEL EJE QUE PASA POR EL PUNTO A SE CUMPLE LA ECUACIÓN $\vec{L}_A = I_A \cdot \vec{w}_A$ POR QUE ES SIMÉTRICA RESPECTO AL PLANO DE ROTACIÓN QUE PASA POR EL CENTRO DE MASA. →



FIN EXPLICACIÓN DE MOMENTO CINÉTICO PARA UN C. RÍGIDO.

Acá termina toda esta parte de qué es y cómo se calcula la cantidad de mov. angular $\vec{L}$ para una partícula o para un cuerpo rígido. Ahora viene lo más importante. (¿Cómo, más teoría todavía ?!?! – sí, más teoría!) R I 5

El asunto es ver qué cosa puede hacer que cambie la cantidad de mov. angular. Dicho de otra manera: Ver qué tiene que pasar para que el momento cinético se conserve. Entonces:

<u>CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO</u> (ojo con ésto).

Me olvidé de comentarte algo: Para que se cumpla todo lo que dice este apunte, los cuerpos que giran tienen que ser <u>CUERPOS RÍGIDOS</u>. ¿Por qué?

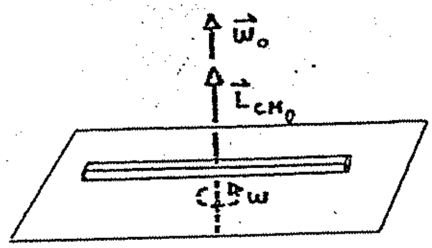
Fijate. Qué significa que un cuerpo sea rígido?. Muy simple. Un cuerpo rígido es un cuerpo duro (infinitamente duro). Un cuerpo tal que por más que vos lo trates de comprimir ($\xrightarrow{F}$○$\xleftarrow{F}$) o de estirar ($\xleftarrow{F}$○$\xrightarrow{F}$) <u>no cambia su forma</u>. ¿Y qué diablos importa si no cambia su forma ??. Muy simple: un cuerpo que no cambia su forma <u>NO CAMBIA SU MOMENTO DE INERCIA I</u>.

Fijate que si el I variara, no se podría aplicar ninguna de las ecuaciones, por que él figura en todas.

RB

Esto es lo mismo que decir que para que se cumpla la ley de Newton $\vec{F} = m.\vec{a}$ la masa tiene que permanecer constante.

Hecha esta aclaración, sigo.



R I 5

Imaginate un cuerpo (por ej, una barra) que está girando con una determinada velocidad angular inicial, digamos, de por ejemplo, 10 vueltas por segundo. Ahora vuelvo a mirar la barra un Δt después y veo que por alguna causa desconocida, la barra esta girando con $\omega_F = 20$ vueltas por segundo. Planteo la ecuación que me dice cuanto vale la cantidad de mov. angular en cada instante:

al principio: $\vec{L}_0 = I . \vec{\omega}_0 \qquad (t = t_0)$

al Final : $\vec{L}_F = I . \vec{\omega}_F \qquad (t = t_F)$

Si quiero saber cuanto cambió $\vec{L}$ en el intervalo Δt, a lo final le tengo que restar lo inicial. Veamos:

resto: $$\underbrace{\vec{L}_F - \vec{L}_0}_{\Delta\vec{L}} = I . \underbrace{(\vec{\omega}_F - \vec{\omega}_0)}_{\Delta\vec{\omega}}$$

es decir: $$\Delta\vec{L} = I . \Delta\vec{\omega}$$

Esta ecuación $\Delta\vec{L} = I . \Delta\vec{\omega}$ a la que llegué ya me dice algo: si querés que cambie $\vec{L}$ tenés que cambiar a $\vec{\omega}$. Bueno, esto es razonable, si $\vec{L} = I.\vec{\omega}$ la única manera de que $\vec{L}$ aumente es que aumente $\vec{\omega}$. (I no puede aumentar porque el cuerpo es RÍGIDO y no cambia de forma).

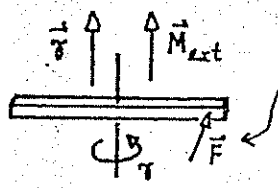
Hay una manera de aumentar a omega. Eso ya lo sé desde el apunte 1: Hay que aplicarle al cuerpo una Fuerza <u>EXTERIOR</u>.

Si esta Fuerza exterior produce un momento $\underline{M}$, entonces el cuerpo rígido va a entrar a acelerar con aceleración angular $\vec{\gamma}$.

Su ecuación es:

$$\vec{M}_{ext.} = I \cdot \vec{\gamma}$$

o sea: $$\vec{M}_{ext.} = \underbrace{I \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}}_{\Delta \vec{L}}$$



LA BARRA ENTRA A ACELERAR POR ACCIÓN DE LA FUERZA $\vec{F}$ QUE PRODUCE UN MOMENTO $\vec{M}$.

R I S

Como $I \Delta \vec{\omega}$ es igual a $\Delta \vec{L}$, reemplazo y llego a esta expresión:

$$\boxed{\vec{M}_{ext} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}}$$

ECUACIÓN QUE RELACIONA EL CAMBIO EN LA CANTIDAD DE MOV. ANGULAR CON EL MOMENTO EXT. APLICADO.

De esta ecuación se desprenden consecuencias muy especiales para la física, por eso ellos le dan mucha importancia. A ver si me seguís:

1ero_ Yo deduje esta expresión para el caso particular de una barra en rotación. Sin embargo, esta ecuación es increíblemente general. (Vale siempre que el centro de momentos sea el C.M del cuerpo o algún punto fijo cualquiera) Inclusive vale si el cuerpo <u>no es rígido</u> (I no figura en la ecuación). Este es el caso de un tipo que da una vuelta el el aire mientras se tira de un trampolín o también el de una galaxia en rotación. (Por ejemplo).

2do_ La ec. $\vec{M}_{ext} = \Delta \vec{L} / \Delta t$ significa desde el punto de vista matemático lo siguiente: $\Delta \vec{L}$ es un vector y Δt un escalar. La división de un vector por un escalar da otro vector de la misma dirección y sentido. Por lo tanto, $\vec{M}_{ext}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector que indica <u>EL CAMBIO</u> en la cantidad de