8. FORMAS CUADRÁTICAS

Definición 1 *Sea* $Q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$*, tal que se puede expresar de la forma:*

$$Q(\overline{x}) = \overline{x}^T H \overline{x}$$

con $\overline{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* H *matriz* $(n \times n)$ *simétrica* $(H = H^T)$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ con } a_{ij} = a_{ji}$$

$Q(\overline{x})$ *se denomina* ***Forma Cuadrática*** *y* H *es llamada matriz de la forma cuadrática.*

Ejemplo 1 $Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$

Ejemplo 2 $Q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2$

Proposición 1 *Si* $Q:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *es una forma cuadrática entonces es homogénea de grado 2. Esto es:*

$$Q(\lambda\overline{x}) = \lambda^2 Q(\overline{x})$$

Demostración. $Q(\lambda\overline{x}) = \overline{\lambda x}^T H \overline{\lambda x} = \lambda \overline{x}^T H \lambda \overline{x} = \lambda^2 \overline{x}^T H \overline{x} = \lambda^2 Q(\overline{x})$ ∎

Definición 2 *Sea* $Q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *una forma cuadrática entonces:*
1. $Q(\overline{x})$ *es definida positiva (negativa) sii* $\forall \overline{x} \neq 0$, $Q(\overline{x})\ 0$ $(\,Q(\overline{x}) < 0)$
2. $Q(\overline{x})$ *es semidefinida positiva (negativa) sii* $\forall \overline{x} \neq 0$, $Q(\overline{x}) \geq 0$ $(Q(\overline{x}) \leq 0)$.
Se suelen llamar a las semidefinidas positivas, no negativas y a las semidefinidas negativas, no positivas.
3. $Q(\overline{x})$ *es indefinida sii* $\exists\, \overline{x}_0 \neq \overline{x}_1 \neq \overline{0} : Q(\overline{x}_0) > 0 \wedge Q(\overline{x}_1) < 0$.

Definición 3 *La matriz* H *se clasificará según la forma cuadrática asociada:*
1. H *es definida positiva (negativa) sii* $Q(\overline{x}) = \overline{x}^T H \overline{x}$ *es definida positiva (negativa).*
2. H *es semidefinida positiva (negativa) sii* $Q(\overline{x}) = \overline{x}^T H \overline{x}$ *es semidefinida positiva (negativa).*
3. H *es indefinida sii* $Q(\overline{x}) = \overline{x}^T H \overline{x}$ *es indefinida.*

Proposición 2 $Q(\overline{x})$ *es definida positiva sii* $-Q(\overline{x})$ *es definida negativa.*

Es una consecuencia inmediata de la definición.

Proposición 3 *Si dos elementos de la diagonal de la matriz* H *tienen signos distintos, entonces la matriz es indefinida.*

Demostración. Sea $H = (h_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n, tal que $h_{ii} \wedge h_{jj}$, $i \neq j$ y $sgn(h_{ii}) \neq sgn(h_{jj})$. Si $\overline{x}_0 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ $(x_i = 1,\ x_j = 0 \text{ si } i \neq j)$ y $\overline{x}_1 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ $(x_j = 1,\ x_i = 0 \text{ si } i \neq j)$

$$Q(\overline{x}_0) = \overline{x}_0^T H \overline{x}_0 = h_{ii} \ \text{ y } \ Q(\overline{x}_1) = \overline{x}_1^T H \overline{x}_1 = h_{jj}$$

Luego $Q(\overline{x})$ es indefinida y por lo tanto H es indefinida. ∎
Dado que generalmente se trabajará con H simétrica $(H = H^T)$, se recuerdan los siguinetes resultados:

Proposición 4 *Los autovalores de matrices simétricas son números reales.*

Proposición 5 *Los autovectores de matrices simétricas, correspondientes a autovalores distintos, son ortogonales.*

Proposición 6 $A\,(n \times n)$ *es diagonalizable si y solo si tiene* n *autovectores linealmente independientes.*

Corolario 1 *Sea* P *la matriz cuyas columnas son los* n *autovectores linealmente independientes de* A*, entonces* $P^T P = I$*, lo que significa:* $P^T = P^{-1}$ *(O sea* P *es ortonormal)*

Proposición 7 *Si $H = H^T$ entonces H es diagonalizable.*

Proposición 8 *$H\,(n \times n)$ es definida positiva (negativa) si y sólo si $\lambda_i > 0$ (< 0) con $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Como H es diagonalizable (proposición 7), entonces existe P ortonormal tal que: $P^T\,H\,P = D$, por tanto:

$$Q(\overline{x}) = \overline{x}^T H \overline{x} = \overline{x}^T P P^T H P P^T \overline{x} = (P^T \overline{x})^T (P^T H P)(P^T \overline{x}) = \overline{y}^T D \overline{y}$$

donde $\overline{y} = P^T \overline{x}$, entonces:

$$Q(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Luego, $\forall\,\overline{x} \neq 0$ es $Q(\overline{x}) > 0$ si y sólo si $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. ■

Corolario 2 *Si $H\,(n \times n)$ tiene autovalores positivos y negativos entonces es indefinida.*

Ejemplo 3 *Sea $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$. Entonces*

$$H - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

de donde la ecuación característica es:

$$-\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

Los autovalores son $\lambda = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, de modo que existe un sistema ortogonal (u, v, w) con respecto al cual la forma cuadrática queda expresada:

$$Q(u, v, w) = u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}w^2,$$

de lo que se deduce que ésta es indefinida.

Definición 4 *Se llama H_q* ***Menor Principal n-ésimo*** *de $H\,(n \times n)$ al determinante de la matriz obtenida al suprimir en H las $(n - q)$ últimas filas y columnas. Así:*

$$H_1 = \det h_{11},\; H_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix},\; H_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix},\; ...,\; H_n = \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \ldots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

Existe otro criterio para determinar si una forma cuadrática es definida positiva o si es definida negativa, es el siguiente.

Proposición 9 *Criterio de Sylvester*
Una matriz simétrica es definida positiva si y solo si

$$|H_k| > 0,\; \forall k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Este criterio nos da una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea definida positiva.

Proposición 10 *H es definida negativa si y sólo si*

$$(-1)^k |H_k| > 0,\; \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Ejemplo 4

$$Q(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x^2 - y^2 + 2xy$$

$$(-1)^1 |H_1| = (-1)^1 \det(-2) = 2 > 0,\;\; (-1)^2 |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Por lo tanto, Q es definida negativa.

Ejemplo 5 $x^2 + y^2 + z^2 + xz$

$$Q(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow |H_1| = 1,\;\; |H_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\;\; |H_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, Q es definida positiva.

E.C. - C.E.