3. DERIVABILIDAD

3.1. Derivadas Parciales

Definición 1 *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, tal que* $z = f(x,y) \in \mathbb{R}$ *y* $\overline{a} = (a,b) \in D^0$*, y sean* $h = x - a,\ k = y - b$*, los incrementos en las variables* x *e* y *respectivamente.*
▲*Si* $y = b$ *constante y sólo se incrementa la variable* x*, se define* ***derivada parcial de*** f ***con respecto de*** x ***en el punto*** (a,b)*, mediante*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

siempre que este límite exista.
▲*Si* $x = a$ *constante y sólo se incrementa la variable* y*, se define* ***derivada parcial de*** f ***con respecto de*** y ***en el punto*** (a,b)*, mediante*

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

siempre que este límite exista.

3.1.1. Notación para las derivadas parciales

Estas derivadas se pueden indicar con cualquiera de las siguientes notaciones:

Derivada parcial de f respecto de x en (a,b)							
$\dfrac{\partial f(\overline{a})}{\partial x}$	$D_1 f(\overline{a})$	$D_x f(\overline{a})$	$f_x(\overline{a})$	$D_x f(\overline{x})\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$	$z_x\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$	$\frac{\partial z}{\partial x}\big\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$	$D_x z\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$

Derivada parcial de f respecto de y en (a,b)							
$\dfrac{\partial f(\overline{a})}{\partial y}$	$D_2 f(\overline{a})$	$D_y f(\overline{a})$	$f_y(\overline{a})$	$D_y f(\overline{x})\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$	$z_y\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$	$\frac{\partial z}{\partial y}\big\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$	$D_y z\vert_{\overline{x}=\overline{a}}$

Observación 1 *Notar que el hecho de que* $(a,b) \in D^0$ *asegura que* $\exists \delta > 0 : N_\delta(\overline{a}) \subset D$*, de modo que al incrementar sólo* x *(o sólo* y*) se consideran los puntos tales que* $(a+h,b) \in N_\delta(\overline{a})$ *(o* $(a,b+k) \in N_\delta(\overline{a})$*), esto es* $\|(a+h,b)-(a,b)\| = \|(h,0)\| = |h| < \delta$ *(o* $||(a,b+k)-(a,b)|| = ||(0,k)|| = |k| < \delta$*), y tiene sentido calcular el cociente incremental* $\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ *(o* $\dfrac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$*).*

Observación 2 *Cada derivada representa la* razón de cambio *de la función según dos* direcciones particulares *que son la del eje* x *para el caso de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$*, y la del eje* y *para el caso de* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*.*

Observación 3 *Se utiliza el signo* ∂*, en lugar de* d*, para distinguir derivadas parciales de derivadas totales.*

Observación 4 *Si en todo un entorno del punto* (a,b) *la función está definida de una misma forma, es posible considerar las funciones* $g(x) = f(x,b)$ *y* $h(y) = f(a,y)$ *y calcular* $\dfrac{\partial f\,(a,b)}{\partial x} = g'(a)$ *y* $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y} = h'(b)$ *aplicando las reglas de derivación que conocemos para funciones de una variable.*

Ejemplo 1 *Hallar las derivadas parciales de* $f\,(x,y) = x^2 + 3xy$ *en el punto* $(-2,1)$*.*
Resolución ▲ *Usando la definición:* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h,1)-f(-2,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^2 + 3\,(-2+h)\,1 + 2}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h-1) = -1$

$$\frac{\partial f(-2,1)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(-2,1+k)-f(-2,1)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{(-2)^2 + 3\,(-2)\,(1+k) + 2}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-6k}{k} = -6$$

▲ *Aplicando técnicas de derivación:*

$$\left.\frac{\partial f\,(\overline{x})}{\partial x}\right|_{(-2,1)} = 2x + 3y|_{(-2,1)} = -1 \qquad \left.\frac{\partial f\,(\overline{x})}{\partial y}\right|_{(-2,1)} = 3x|_{(-2,1)} = -6$$

Ejemplo 2 *Hallar las derivadas parciales de* $f\,(x,y) = \ln\cos\frac{y}{x}$ *en el punto* $(3,2)$*.*
Resolución $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos\frac{y}{x}}\left(-\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = \dfrac{y}{x^2}\tan\dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial f(3,2)}{\partial x} = \dfrac{2}{3^2}\tan\dfrac{2}{3} = 0{,}17485$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}\left(-\operatorname{sen}\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\tan\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial f(3,2)}{\partial y} = -\frac{1}{3}\tan\frac{2}{3} = -0{,}26228$$

Ejemplo 3 *Hallar las derivadas parciales de* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x-y} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$

Resolución ▲ *Para* (x,y) *con* $x \neq y$, *es posible derivar por las técnicas usuales, entonces:*
$f_x(x,y) = \dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x-y)^2}$ *y* $f_y(x,y) = \dfrac{2xy-y^2+x^2}{(x-y)^2}$
▲ *Para* (x,y) *con* $x = y$, *cualquier entorno de* (x,x) *contiene puntos de la forma* $x = y$ *y* $x \neq y$, *por lo que es necesario aplicar la definición para calcular las derivadas parciales:*
$f_x(x,x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,x)-f(x,x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{(x+h)^2+x^2}{x+h-x}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x^2+2hx+h^2}{h^2}$. *Se observa que:*

▲ *Si* $x = 0$ *y por tanto* $(x,y) = (0,0)$: $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2}{h^2} = 1$

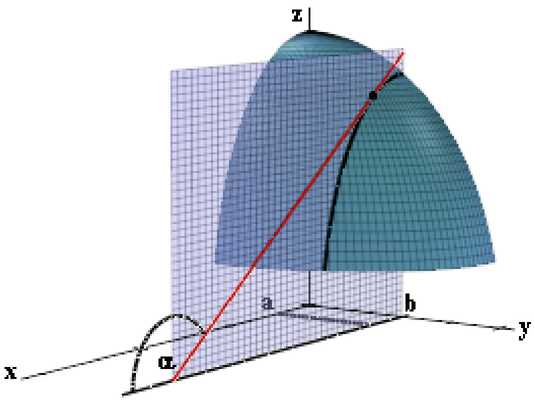
▲ *Si* $x \neq 0$: $f_x(x,x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{(x+h)^2+x^2}{x+h-x}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x^2+2hx+h^2}{h^2} = \infty$, *luego, no existe* $f_x(x,y)$ *cuando* $x = y$ *y* $(x,y) \neq (0,0)$.
Análogamente para $f_y(x,y)$. *Así, resulta*

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2xy-y^2}{(x-y)^2} & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy-y^2+x^2}{(x-y)^2} & \text{si } x \neq y \\ -1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

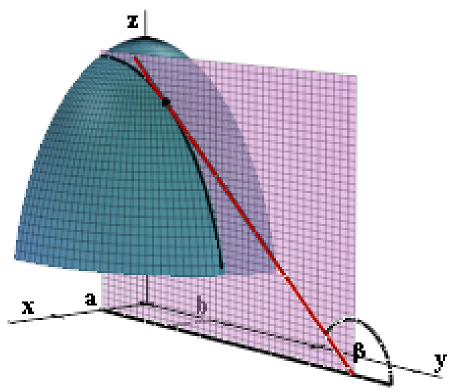
3.1.2. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

La ecuación $z = f(x,y)$ representa una superficie, mientras que para $y = b$ fijo, $z = f(x,b)$ representa una curva $\mathcal{C}$ que resulta de la intersección de la superficie y el plano $y = b$. Por lo tanto, $f_x(a,b)$ es el valor de la pendiente $(\tan\alpha)$ de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $(a,b,f(\overline{a}))$.

De igual manera, la gráfica de la función $z = f(a,y)$ es la curva donde el plano $x = a$ corta a la gráfica de f, y la derivada parcial $f_y(a,b)$ es la pendiente $(\tan\beta)$ de la recta tangente a esta curva en el punto $(a,b,f(\overline{a}))$.



Interpretación geométrica de $f_x(a,b)=\tan\alpha$



Interpretación geométricade $f_y(a,b)=\tan\beta$

El concepto de derivada parcial, se puede generalizar al caso de funciones de más variables.

Definición 2 *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *con* $\overline{a}$ *un punto interior de* D *de la forma* $\overline{a} = (a_1, ...a_n)$ *y sea* $h_i = x_i - a_i$, $1 \leq i \leq n$, *el límite*

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h_i, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h_i}$$

si éste existe, es la ***derivada parcial de*** f ***con respecto a la variable*** x_i ***en el punto*** $\overline{a}$.

Esta derivada se denota por:

$$D_i(f(\overline{a})) \text{ o } f_{x_i}(\overline{a})$$

3.1.3. Derivabilidad y Continuidad

Para funciones de una variable se vio que si una función es derivable en un punto entonces es continua. En el caso de más de una variable puede ocurrir que existan las dos derivadas parciales en un punto y que la función no sea continua en él.

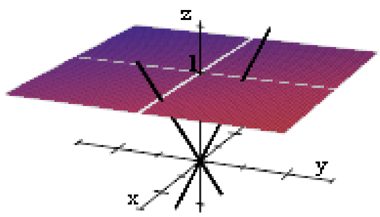
Ejemplo 4 *Sea la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} x+2y & si\ x=0\quad o\quad y=0 \\ 1 & en\ c.o.c. \end{cases} \qquad y\ el\ punto\ (a,b)=(0,0)$$

Se tiene que
$f_x\,(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-0}{h}=1$ *y* $f_y\,(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{2k-0}{k}=2$, *existen las dos derivadas parciales en* $(0,0)$, *sin embargo, se observa que la función no es continua en dicho punto. Pues:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y)=\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+2y)=0 & si\ x=0\quad o\quad y=0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1=1 & en\ c.o.c. \end{cases}, \text{ por tanto no existe } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x,y)$$

La figura (1) muestra el gráfico de esta función.



Función con derivadas parciales y discontinua en (0,0) (1)

3.1.4. Teorema del Valor Medio o de los Incrementos Finitos

Este teorema expresa, mediante las derivadas parciales, el incremento de la función $f\,(x,y)$ cuando se incrementan las variables x e y en h y k respectivamente.

Teorema 1 *Si la función* $z=f\,(x,y)$ *tiene derivadas parciales finitas en un entorno del punto* (a,b), *entonces el incremento* Δz *está dado por la expresión*

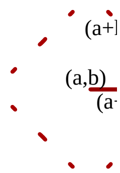
$$\Delta z=f\,(a+h,b+k)-f\,(a,b)=hf_x\,(a+\theta_1 h,b)+kf_y\,(a+h,b+\theta_2 k)\,;\ 0<\theta_1<1;\ 0<\theta_2<1$$

Demostración. Basta descomponer Δz del siguiente modo:

$$\triangle\ z=[f\,(a+h,b+k)-f\,(a+h,b)]+[f\,(a+h,b)-f\,(a,b)]$$

y aplicar a cada sumando el teorema de los incrementos finitos para una variable

$$\begin{array}{rrcl} & f\,(a+h,b)-f\,(a,b) & = & hf_x\,(a+\theta_1 h,b)\,,\quad 0<\theta_1<1 \\ + & \underline{f\,(a+h,b+k)-f\,(a+h,b)} & = & \underline{kf_y\,(a+h,b+\theta_2 k)},\quad 0<\theta_2<1 \\ & f\,(a+h,b+k)-f\,(a,b) & = & hf_x\,(a+\theta_1 h,b)+kf_y\,(a+h,b+\theta_2 k) \end{array}$$



■

Corolario 1 *Una función* $f\,(x,y)$, *con derivadas parciales en todos los puntos de un dominio*[1], *es constante en él si y sólo si* f_x *y* f_y *son nulas en todos los puntos del dominio.*

Demostración. Sea $f:D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\ :\ z=f(x,y)$, D abierto y conexo, $\overline{a}\in D$, y se supone que f_x y f_y existen en D y son finitas.
$\Rightarrow$) Es inmediato, pues, si $z=f(x,y)$ es constante en D, f_x y f_y son nulas $\forall\,(x,y)\in D$
$\Leftarrow$) Como D es conexo $\forall\overline{x},\overline{y}\in D$ existe una poligonal (tiene una cantidad finita de lados) totalmente contenida en D que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$. Por hipótesis $\triangle\ z=f\,(\overline{x})-f\,(\overline{y})=0$, aplicando el teorema de los incrementos finitos a cada par de vértices consecutivos de la poligonal, se obtiene que $\triangle\ z=0$, luego f es constante en D. ■

[1] Dominio: conjunto abierto y conexo.

Corolario 2 *Si dos funciones tienen derivadas parciales finitas e iguales en un dominio, entonces difieren en una constante.*

Demostración. Sean $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $f_x(\overline{x}) = g_x(\overline{x})$ y $f_y(\overline{x}) = g_y(\overline{x})$, $\forall \overline{x} \in D$. Si $u(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$, por el teorema de los incrementos finitos:
$\triangle\ u(x, y) = \triangle\ f(x, y) - \triangle\ g(x, y) = h\frac{\partial(f-g)}{\partial x}(a + \theta_1 h, b) + k\frac{\partial(f-g)}{\partial y}(a + h, b + \theta_2 k) =$
$= h\left[f_x(a + \theta_1 h, b) - g_x(a + \theta_1 h, b)\right] + k\left[f_y(a + h, b + \theta_2 k) - g_y(a + h, b + \theta_2 k)\right]$, con $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$ por hipótesis, las expresiones de los corchetes son iguales a cero. Luego $\triangle\ u(x, y) = 0$, entonces $u(x, y) = cte$, por lo tanto, $f(x, y) - g(x, y) = cte$ ■

Corolario 3 *si f tiene derivadas parciales acotadas en un entorno de $\overline{a}$, entonces f es continua en $\overline{a}$.*

Demostración. Por el teorema de los incrementos finitos,
$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_x(a+\theta_1 h, b) + kf_y(a+h, b+\theta_2 k)$. Por hipótesis, $f_x(a+\theta_1 h, b)$ y $f_y(a+h, b+\theta_2 k)$ están acotadas, tomando límite cuando $(h, k) \to (0, 0)$ resulta:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[f(a + h, b + k) - f(a, b)\right] = 0$$

por tanto, f es continua en (a, b) ■

Luego, si bien la hipótesis de existencia de las derivadas parciales en el punto no aseguran la continuidad de la función en dicho punto; si derivadas parciales están acotadas en un entorno de $\overline{a}$ es suficiente para la continuidad en dicho punto.

3.2. Derivada Direccional

Se vio que $f_x(a, b)$, por definición, determina la rapidez con que varía la función $z = f(x, y)$ en una dirección paralela al eje x, ya que el incremento $h = x - a$ se toma sobre este eje. Análogamente $f_y(a, b)$ determina la rapidez de la variación de la función $z = f(x, y)$ en una dirección paralela al eje y. Ahora se verá cómo calcular la rapidez de cambio de f en una dirección arbitraria.

Definición 3 *Sea f es una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, $\overline{a} \in D$, $t \in R$, $\overline{u} \in R^2$ y $\|\overline{u}\| = 1$, se define derivada direccional de $f(\overline{x})$ en $\overline{a}$, según la dirección del vector $\overline{u}$, al siguiente límite siempre que exista*

$$D_{\overline{u}}f(\overline{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{u}) - f(\overline{a})}{t}$$

Observación 5 *D es abierto, ya que por definición $f(\overline{a} + t\overline{u})$ debe existir, por lo tanto se debe asegurar que exista un entorno $N_r(\overline{a}) \subset D$, es decir que la distancia entre $\overline{a}$ y $\overline{x} = \overline{a} + t\overline{u}$ debe ser menor que r. Pues si D fuese cerrado, ¿cómo se aseguraría la existencia de $f(\overline{a} + t\overline{u})$ si $\overline{a}$ estaría en la frontera de D?*

Observación 6 *Se pide que $\|\overline{u}\| = 1$, porque en realidad lo que interesa es la* ***dirección*** *de $\overline{u}$, ya que hay infinitos vectores con la misma dirección, si se calcula con un vector $\overline{v} = k\overline{u}$, con k distinto de 1, el resultado de la derivada, aún cuando sea en la misma dirección cambiaría.*

Observación 7 *Si se toma la dirección con sentido opuesto, $-\overline{u}$, resulta el mismo valor pero con signo contrario.*

Observación 8 *Las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ son derivadas direccionales según los vectores $\overline{i} = (1, 0)$ y $\overline{j} = (0, 1)$ respectivamente.*

Ejemplo 5 *Sea $f : R^2 \to R$, la función $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcular la derivada direccional en $\overline{a} = (2, 1)$ en la dirección del vector $\overline{u} = (3, -4)$.*
Resolución *Como $\overline{u}$ debe ser unitario, se normaliza, de modo que $\overline{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$*

$$D_{(3,-4)}(2, 1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left[(2, 1) + t\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)\right] - f(2, 1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(2 + \frac{3}{5}t, 1 - \frac{4}{5}t\right) - f(2, 1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + \frac{4}{5}t}{t} = \frac{4}{5}$$

Ejemplo 6 *Sea la función:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad \overline{x} \neq \overline{0} \\ 0 & si \quad \overline{x} = \overline{0} \end{cases}$$

Se verá que no existe la derivada direccional de $f(x,y)$ en $\overline{x}=\overline{0}$ en cualquier dirección unitaria $\overline{u}=(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$. Aplicando la definición:

$$D_{\overline{u}}f\left(\overline{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0+t\cos\varphi, 0+t\operatorname{sen}\varphi\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{|t|\sqrt{\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi}}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{|t|}, \textit{ entonces:}$$

$$D_{\overline{u}}f\left(\overline{0}\right)=\begin{cases} 0, & \varphi\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\} \\ \textit{no existe,} & \textit{c.o.c.}\end{cases}$$

Se observa que la derivada direccional existe en las direcciones de los versores $\overline{i}=(1,0)$ y $\overline{j}=(0,1)$, por lo tanto existen las derivadas parciales en $(0,0)$ y son iguales a cero. También existen las derivadas en sentido opuesto a los versores $\overline{i}$ y $\overline{j}$. En cambio, en cualquier otro caso no existe la derivada direccional en el punto $(0,0)$ ya que los límites laterales son distintos.

Un hecho sorprendente es que podrían existir todas las derivadas direccionales en $\overline{a}$, y sin embargo, la función no ser continua en dicho punto.

Ejemplo 7 *Sea la función:*

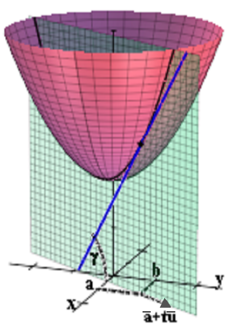
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad \overline{x}\neq\overline{0} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{x}=\overline{0}\end{cases}$$

Resolución

$D_{\overline{u}}f\left(\overline{0}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f\left(t\overline{u}\right)-f\left(\overline{0}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^3u_1u_2^2}{t^2u_1^2+t^4u_2^4}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^3u_1u_2^2}{\left(t^2u_1^2+t^4u_2^4\right)t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{u_1u_2^2}{u_1^2+t^2u_2^4}=\dfrac{u_1u_2^2}{u_1^2}=\dfrac{u_2^2}{u_1}$, si $u_1\neq 0$.
Si $u_1=0$
(como $u_2\neq 0$) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{t}=0$. Por lo tanto, para todo $\overline{u}$ existe $D_{\overline{u}}f\left(\overline{0}\right)$ (observar que las derivadas parciales en $(0,0)$ son nulas). Sin embargo esta función no es continua en $(0,0)$ pues tomando la parábola $x=y^2$ se tiene que $l_S=\lim\limits_{y\to 0}f\left(y^2,y\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^4}{2y^4}=\dfrac{1}{2}$, y como los límites iterados son nulos, no existe el límite en $(0,0)$.

3.2.1. Interpertación geométrica de la derivada direccional

La recta del plano xy que pasa por los puntos $\overline{a}$ y $\overline{a}+t\overline{u}$, está contenida en el plano perpendicular al plano xy que intersecta a la superficie dada por $z=f(x,y)$, determinando una curva $\mathcal{C}$. La derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $\overline{a}$ según la dirección $\overline{u}$ es la pendiente de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $(a,b,f(a,b))$.



Interpretación geométrica de $D_{\overline{u}}(\overline{a})=\tan\gamma$

Si existen las derivadas en todas las direcciones, las rectas que las tienen por pendientes forman en general un *cono tangente* a la superficie.

4. DIFERENCIABILIDAD

Según se observó en el ejemplo (7), el concepto de derivabilidad no tiene la misma categoría para funciones de una sóla variable que para funciones de n variables. Sí será análogo el concepto de *diferenciabilidad.*

Definición 4 *Sea $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\overline{a} \in D^0$, se dice que* ***$\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a}$*** *si existe una transformación lineal*[2] *$\overline{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:*

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{f}\left(\overline{a}+\overline{h}\right) - f\left(\overline{a}\right) - \overline{T}\left(\overline{h}\right)}{\left\|\overline{h}\right\|} = \overline{0}$$

Esta definición es equivalente a decir que, bajo las mismas condiciones, $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a}$ si y sólo si existe una transformación lineal $\overline{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una función $\overline{\rho} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tales que:

- $\overline{f}\left(\overline{a}+\overline{h}\right) - f\left(\overline{a}\right) = \overline{T}\left(\overline{h}\right) + \overline{\rho}\left(\overline{a}+\overline{h}\right)$
- $\lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{\rho}\left(\overline{a}+\overline{h}\right)}{\left\|\overline{h}\right\|} = \overline{0}$, es decir, $\overline{\rho}$ es un infinitésmo de orden superior a $\left\|\overline{h}\right\|$

Teorema 2 *Si $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a}$, entonces es continua en $\overline{a}$.*

Demostración. Por ser $\overline{f}$ diferenciable en $\overline{a}$, $\lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} \dfrac{\overline{f}\left(\overline{a}+\overline{h}\right) - \overline{f}\left(\overline{a}\right) - \overline{T}\left(\overline{h}\right)}{\left\|\overline{h}\right\|} = \overline{0}$; y dado que $\left\|\overline{h}\right\|$ es un infinitésimo en $\overline{h} = \overline{0}$:

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \left[\overline{f}\left(\overline{a}+\overline{h}\right) - \overline{f}\left(\overline{a}\right) - \overline{T}\left(\overline{h}\right)\right] = \overline{0}$$

Por ser $\overline{T}$ una transformación lineal, $\lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} \overline{T}\left(\overline{h}\right) = \overline{T}\left(\overline{0}_{\mathbb{R}^n}\right) = \overline{0}_{\mathbb{R}^m}$, luego:

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \left[\overline{f}\left(\overline{a}+\overline{h}\right) - \overline{f}\left(\overline{a}\right)\right] = \overline{0}$$

Si $\overline{h} = \overline{x} - \overline{a}$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \left[\overline{f}\left(\overline{x}\right) - \overline{f}\left(\overline{a}\right)\right] = \overline{0}$Por tanto, $\overline{f}$ es continua en $\overline{a}$. ■

Teorema 3 *Si $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es diferenciable en $\overline{a} \in D^0$ entonces la transformación lineal asociada es única.*

Demostración. Se supone que existen $\overline{T}_1$ y $\overline{T}_2$, tales que:

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{f}(\overline{a}+\overline{h}) - \overline{f}(\overline{a}) - \overline{T}_1(\overline{h})}{||\overline{h}||} = \overline{0} \tag{2}$$

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{f}(\overline{a}+\overline{h}) - \overline{f}(\overline{a}) - \overline{T}_2(\overline{h})}{||\overline{h}||} = \overline{0} \tag{3}$$

Sea $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\overline{S}(\overline{x}) = \overline{T}_2(\overline{x}) - \overline{T}_1(\overline{x})$, así, se puede probar que $\overline{S}$ también es una transformación lineal. Además.

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{S}(\overline{h})}{||\overline{h}||} = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{T}_2(\overline{h}) - \overline{T}_1(\overline{h})}{||\overline{h}||}$$

Restando (2) menos (3):

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{S}(\overline{h})}{||\overline{h}||} = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{f}(\overline{a}+\overline{h}) - \overline{f}(\overline{a}) - \overline{T}_1(\overline{h})}{||\overline{h}||} - \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{f}(\overline{a}+\overline{h}) - \overline{f}(\overline{a}) - \overline{T}_2(\overline{h})}{||\overline{h}||} = \overline{0}$$

Sea $\overline{h} = t\overline{v} \in \mathbb{R}^n$, con $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\overline{v} \neq \overline{0}$, entonces:

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\overline{S}(\overline{h})}{||\overline{h}||} = \lim_{t\to 0} \frac{\overline{S}(t\overline{v})}{||t\overline{v}||} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} \frac{\overline{S}(\overline{v})}{||\overline{v}||} = \overline{0}$$

luego, $\forall \overline{v} \neq \overline{0}$ resulta $\overline{S}(\overline{v}) = \overline{0}$, y por ser $\overline{S}$ una transformación lineal, $\overline{S}(\overline{0}) = \overline{0}$. Por lo tanto, $\overline{S}$ es la transformación idénticamente nula, por lo que $\overline{T}_1 = \overline{T}_2$. ■

[2] T es una *transformación lineal* si $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, se cumple: $T\left(\lambda_1\overline{x} + \lambda_2\overline{y}\right) = \lambda_1 T\left(\overline{x}\right) + \lambda_2 T\left(\overline{y}\right)$

4.0.2. Diferencial

Como esta transformación lineal, si existe, es única para un $\overline{a}$ determinado, particularmente se le llama *diferencial de* $\overline{f}$ *en* $\overline{a}$ y se la denota como

$$d_{\overline{a}}\overline{f}\left(\overline{h}\right) = \overline{T}_{\overline{a}}\left(\overline{h}\right)$$

Más adelante, se demostrará que

$$\overline{T}_{\overline{a}}\left(\overline{h}\right) = d_{\overline{a}}\overline{f} = \overline{f}'\left(\overline{a}\right)\overline{h}$$

donde $\overline{f}'\left(\overline{a}\right)$ es una matriz de $m \times n$, en términos de las derivadas parciales de $\overline{f}$.

Observación 9 *Sea* $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *con* $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $1 \leq i \leq m$, *sus funciones coordenadas, sea* $\overline{a} \in D^0$ *y sea* $\overline{f}$ *diferenciable en* $\overline{a}$, *entonces existe una transformación lineal* $\overline{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con* $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, *sus funciones coordenadas, tal que:*

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{\overline{f}(\overline{a} + \overline{h}) - \overline{f}(\overline{a}) - \overline{T}(\overline{h})}{||\overline{h}||} = \overline{0}$$

Recordando uno de los teoremas de límites (límite coordenada a coordenada), se sabe que esto ocurre si y sólo si:

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{f_i(\overline{a} + \overline{h}) - f_i(\overline{a}) - T_i(\overline{h})}{||\overline{h}||} = 0, \; con \; 1 \leq i \leq m$$

Por lo que el estudio de diferenciabilidad puede reducirse al caso de las funciones escalares y luego generalizar para funciones vectoriales.

Observación 10 *Se sabe que toda transformación lineal* $\overline{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tiene asociada una matriz* C, *con respecto a la base canónica,* $C(m \times n)$ *tal que*

$$\overline{T}(\overline{x}) = C\overline{x}$$

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una transformación lineal, entonces:*

$$T(\overline{x}) = (c_1 \cdots c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

Teorema 4 *Si* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\overline{a} \in D^0$ *y* $T(\overline{h}) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k h_k$ *es la transformación lineal asociada, entonces cada una de las derivadas parciales* $D_k f\left(\overline{a}\right)$ *existe y se verifica*

$$c_k = D_k f\left(\overline{a}\right), \quad k = 1, 2, ..., n$$

Demostración. Por ser f diferenciable en $\overline{a}$:

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{f\left(\overline{a} + \overline{h}\right) - f\left(\overline{a}\right) - T(\overline{h})}{\left\|\overline{h}\right\|} = 0 \Rightarrow \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{f\left(\overline{a} + \overline{h}\right) - f\left(\overline{a}\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k h_k}{\left\|\overline{h}\right\|} = 0$$

Si $h_k \neq 0$ y $h_i = 0$, $\forall i \neq k$, es decir $\overline{h} = (0, 0, ..., h_k, 0, .., 0)$, reemplazando en la expresión anterior resulta:

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_k + h_k, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n) - c_k h_k}{h_k} = 0 \Rightarrow \lim_{h_k \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_k + h_k, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h_k} - c_k = 0$$

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_k + h_k, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h_k} = c_k \Rightarrow D_k f\left(\overline{a}\right) = c_k \;\; \blacksquare$$

Si $T(\overline{h}) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k h_k$, el teorema 4 establece que la diferencial de f en $\overline{a}$ es

$$d_{\overline{a}} f\left(\overline{h}\right) = T_{\overline{a}}\left(\overline{h}\right) = \sum_{k=1}^{n} D_k f\left(\overline{a}\right) h_k$$

Suelen utilizarse los símbolos $dx_1, ..., dx_n$ en lugar $h_1, ..., h_n$ para las componentes de $\overline{h}$, de modo que $\overline{h} = d\overline{x}$, entonces

$$d_{\overline{a}} f\left(d\overline{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} D_k f\left(\overline{a}\right) dx_k$$

o también:

$$d_{\overline{a}} f\left(d\overline{x}\right) = \frac{\partial f\left(\overline{a}\right)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f\left(\overline{a}\right)}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f\left(\overline{a}\right)}{\partial x_n} dx_n$$

Teorema 5 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\overline{a} \in D^0$. Si f es diferenciable en $\overline{a}$ entonces $\forall \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\|\overline{v}\| = 1$, existe $D_{\overline{v}} f(\overline{a})$ y además $D_{\overline{v}} f(\overline{a}) = T_{\overline{a}}(\overline{v})$*

Demostración. Si f es diferenciable en $\overline{a}$, entonces existe una transformación lineal $T_{\overline{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y una función ρ tal que:

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = T_{\overline{a}}(\overline{h}) + \rho(\overline{a} + \overline{h}), \text{ con } \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \frac{\rho(\overline{a} + \overline{h})}{||\overline{h}||} = 0 \tag{4}$$

Sea $\overline{h} = t\overline{v}$, entonces

$$f(\overline{a} + t\overline{v}) - f(\overline{a}) = T_{\overline{a}}(t\overline{v}) + \rho(\overline{a} + t\overline{v}) = tT_{\overline{a}}(\overline{v}) + \rho(\overline{a} + t\overline{v}), \text{ con } \lim_{t \to 0} \frac{\rho(\overline{a} + t\overline{v})}{||t\overline{v}||} = 0$$

Luego

$$\lim_{t \to 0} \frac{\rho(\overline{a} + t\overline{v})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\rho(\overline{a} + t\overline{v})}{||t\overline{v}||} \frac{||t\overline{v}||}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\rho(\overline{a} + t\overline{v})}{||t\overline{v}||} \frac{|t|}{t} = 0 \tag{5}$$

De (4) y (5)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t\overline{v}) - f(\overline{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tT_{\overline{a}}(\overline{v})}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{\rho(\overline{a} + t\overline{v})}{t} = T_{\overline{a}}(\overline{v}) + 0 = T_{\overline{a}}(\overline{v})$$

Por tanto, $D_{\overline{v}} f(\overline{a}) = T_{\overline{a}}(\overline{v})$. ∎

4.0.3. Gradiente

Definición 5 *Dada una función f que posee las n derivadas parciales $D_1 f, ..., D_n f$ en el punto $\overline{a}$, se llama* gradiente de f en $\overline{a}$ *al vector:*

$$\nabla f(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{a}) \right)$$

Observación 11 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{a} \in D^0$, si f es diferenciable en $\overline{a}$ entonces, por los teoremas 4 y 5:*

$$D_{\overline{v}} f(\overline{a}) = T_{\overline{a}}(\overline{v}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) v_k = \nabla f(\overline{a}) \bullet \overline{v} = f'(\overline{a}) \bullet \overline{v}$$

donde $\nabla f(\overline{a}) = f'(\overline{a})$

4.0.4. Matriz Jacobiana (o Derivada)

Sea $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\overline{a} \in D^0$, si $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a}$ entonces:

$$T_{\overline{a}}(\overline{v}) = \overline{f}'(\overline{a}) \bullet \overline{v}$$

con $\overline{f}'(\overline{a})$ una matriz de $(m \times n)$ y $\overline{v}$ de $(n \times 1)$.

Si f_i es la coordenada $i-$*ésima* de $\overline{f}$, por ser f_i una función escalar con n variables: $f_i'(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{a}), \cdots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{a}) \right)$. Por tanto $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a})$ es el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz $\overline{f}'(\overline{a})$, entonces:

$$\overline{f}'(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\overline{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se llama *matriz jacobiana o matriz derivada de $\overline{f}$ en $\overline{a}$.*

Ejemplo 8 *Sea $\overline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ x^2 y \end{pmatrix}$*
Sus funciones coordenadas son:

$$f_1(x, y, z) = x + 2y - z, \qquad f_2(x, y, z) = x^2 y$$

Se verá que ambas funciones coordenadas son diferenciables en $\overline{a} = (a, b, c)$, para ello se calcula:

$$\nabla f_1(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(\overline{a}), \frac{\partial f_1}{\partial y}(\overline{a}), \frac{\partial f_1}{\partial z}(\overline{a}) \right) = (1, 2, -1)$$

$$\nabla f_2(\overline{a}) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(\overline{a}), \frac{\partial f_2}{\partial y}(\overline{a}), \frac{\partial f_2}{\partial z}(\overline{a})\right) = (2ab, a^2, 0)$$

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{f_1(\overline{a}+\overline{h}) - f_1(\overline{a}) - \nabla f_1(\overline{a})\overline{h}}{||\overline{h}||} = \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{a+h_1+2b+2h_2-c-h_3-a-2b+c-h_1-2h_2+h_3}{||\overline{h}||} = 0$$

Por tanto f_1 es diferenciable en $\overline{a}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{f_2(\overline{a}+\overline{h}) - f_2(\overline{a}) - \nabla f_2(\overline{a})\overline{h}}{||\overline{h}||} &= \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{(a+h_1)^2(b+h_2) - a^2b - 2abh_1 - a^2h_2}{||\overline{h}||} = \\
&= \lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{h_1^2h_2 + bh_1^2 + 2ah_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}
\end{aligned}$$

En coordenadas polares: $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\left(\rho\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi + b\cos^2\varphi + 2a\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right)}{\rho} = 0$, se puede probar, usando la definición, que $\lim\limits_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{f_2(\overline{a}+\overline{h}) - f_2(\overline{a}) - \nabla f_2(\overline{a})\overline{h}}{||\overline{h}||} = 0$, luego f_2 es diferenciable en $\overline{a}$. Así, queda demostrado que las dos funciones coordenadas son diferenciables en $\overline{a} = (a, b, c)$. Luego

$$\overline{f}'(\overline{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2ab & a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Resumiendo, se tiene que las siguientes condiciones.

4.0.5. Condiciones necesarias de diferenciabilidad

- $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a} \Rightarrow \overline{f}$ es continua en $\overline{a}$ (Teorema 2)
- $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a} \Rightarrow$ existen todas las derivadas parciales en $\overline{a}$ (Teorema 4)
- $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a} \Rightarrow$ existen todas las derivadas direccionales en $\overline{a}$ (Teorema 5)
- $\overline{f}$ es diferenciable en $\overline{a} \Rightarrow D_{\overline{v}}f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{a}) \bullet \overline{v}$ (Observación 11)

Luego, la continuidad, la existencia de las derivadas parciales y la existencia de las derivadas direccionales en $\overline{a}$ son condiciones necesarias para que una función sea diferenciable en $\overline{a}$. A los fines prácticos, esto nos ayudará a decidir la **no diferenciabilidad** cuando una función no cumple alguna de estas condiciones.

Ejemplo 9 *Sea*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3}, & x \neq -y \\ 0, & x = -y \end{cases} \qquad \overline{a} = \overline{0}$$

No existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}$*, pues tomando coordenadas polares:*

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos\theta sen^2\theta}{\rho^3(\cos^3\theta + sen^3\theta)} = \frac{\cos\theta sen^2\theta}{\cos^3\theta + sen^3\theta}$$

Luego, f no es continua en $\overline{0}$, por lo tanto f no es diferenciable en $\overline{0}$.

Ejemplo 10 *Sea*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \overline{x} \neq \overline{0} \\ 1, & \overline{x} = \overline{0} \end{cases} \qquad \overline{a} = \overline{0}$$

Si $\overline{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$$\begin{aligned}
D_{\overline{v}}f(\overline{0}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{0}+t\overline{v}) - f(\overline{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta) - f(\overline{0})}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 1}{t}
\end{aligned}$$

Este límite solo existe para $\theta = \frac{\pi}{4}$ o un ángulo congruente a él. Por lo tanto, en particular no existen las derivadas parciales, con lo cual resulta que f no es diferenciable en $\overline{0}$.

Ejemplo 11 *Sea*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \overline{x}\neq\overline{0}\\ 0 & \overline{x}=\overline{0}\end{cases}\qquad \overline{a}=\overline{0}$$

Se puede demostrar que
■ f *es continua en* $\overline{0}$
■ $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{0})=0$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{0})=0$
■ *Si* $\overline{v}\neq\overline{0}$, $\overline{v}=(v_1,v_2)$

$$D_{\overline{v}}f(\overline{0})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{0}+t\overline{v})-f(\overline{0})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t|t|v_1v_2}{|t|.\sqrt{v_1^2+v_2^2}}-0}{t}=\frac{v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

Sin embargo f *no es diferenciable, ya que si lo fuera, debe ser:*

$$D_{\overline{v}}f(\overline{0})=\nabla f(\overline{0}).\overline{v}=(0,0).\overline{v}=0,\quad\forall\overline{v}$$

y esto no coincide con lo calculado en la observación (11).

4.0.6. Condiciones suficientes de diferenciabilidad

Hasta ahora se han deducido propiedades dando por supuesta la existencia de la diferencial de una función. Se ha visto que ni continuidad, ni la existencia de todas las derivadas parciales ni la de todas las derivadas direccionales es suficiente para determinar la diferenciabilidad de una función. Ahora se demostrará que la existencia de derivadas parciales continuas implica la diferenciaibilidad de la función.

Teorema 6 *Sea* $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. *Si existen todas las derivadas parciales en un entorno de* $\overline{a}$ *y las funciones derivadas parciales son continuas en* $\overline{a}$, *entonces* f *es diferenciable en* $\overline{a}$.

Demostración. Si bien es cierto $\forall n\in\mathbb{N}$, se demostrará para $n=2$, ya que su generalización es inmediata. Sea $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\overline{a}\in D^0$, $\overline{a}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Existen $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x})$, $\forall\overline{x}\in N_\delta(\overline{a})$ y además

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}}\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x})=\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a}),\qquad \lim_{\overline{x}\to\overline{a}}\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x})=\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a})$$

Por el teorema de los incrementos finitos o del valor medio:

$$f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a})=h\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1h,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_2k),\quad 0<\theta_1,\theta_2<1$$

Siedo $T_{\overline{a}}(\overline{h})=\nabla f(\overline{a})\bullet\overline{h}=h\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a})+k\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a})$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a})-T_{\overline{a}}f(\overline{h})}{\|\overline{h}\|}\right| &= \frac{\left|h\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1h,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_2k)-h\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{a})-k\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{a})\right|}{\|\overline{h}\|}\leq\\ &\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1h,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|\frac{|h|}{\|\overline{h}\|}+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_2k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|\frac{|k|}{\|\overline{h}\|}\end{aligned}$$

con $0<\theta_1,\theta_2<1$. Además $\frac{|h|}{||\overline{h}||}\leq 1$ y $\frac{|k|}{||\overline{h}||}\leq 1$, por lo que resulta:

$$\left|\frac{f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a})-T_{\overline{a}}f(\overline{h})}{\|\overline{h}\|}\right|\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1h,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_2k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|$$

Como por hipótesis las funciones derivadas parciales son continuas en $\overline{a}$, entonces dado $\epsilon>0$:
$\exists\delta_1:\|\overline{h}\|\leq\delta_1\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1h,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|<\frac{\epsilon}{2}$
$\exists\delta_2:\|\overline{h}\|\leq\delta_2\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\theta_2k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|<\frac{\epsilon}{2}$
Si $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}:\|\overline{h}\|\leq\delta$, entonces

$$\left|\frac{f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a})-T_{\overline{a}}f(\overline{h})}{\|\overline{h}\|}\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

Luego

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a})-T_{\overline{a}}f(\overline{h})}{\left\|\overline{h}\right\|}=0$$

Esto es, f es diferenciable en $\overline{a}$. ■

Notar que la condición de continuidad de las funciones derivadas exigidas en este teorema no son condiciones necesarias para la diferenciabilidad.

Corolario 4 *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *,* $\overline{a} \in D^0$*, si existen* f_x *y* f_y *en un entorno* $N_\delta(\overline{a})$ *y son continuas en el punto* $\overline{a}$ *(esto implica la diferenciabilidad de la función en* $\overline{a}$*) entonces*

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+\varepsilon_1(\overline{h})h+\varepsilon_2(\overline{h})k$$

donde $||\overline{h}||<\delta$*, y* ε_1*,*ε_2 *son infinitésimos en* $\overline{h}=\overline{0}$

Demostración. Por el teorema de los incrementos finitos:

$$f(\overline{a}+\overline{h})-f(\overline{a})=hf_x(a+\theta_1 h,b)+kf_y(a+h,b+\theta_2 k),\quad 0<\theta_1,\theta_2<1$$

Por ser f diferenciable en $\overline{a}$:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)-hf_x(a,b)-kf_y(a,b)=(f_x(a+\theta_1 h,b)-f_x(a,b))h+(f_y(a+h,b+\theta_2 k)-f_y(a,b))k$$

Llamando $\varepsilon_1(\overline{h})=f_x(a+\theta_1 h,b)-f_x(a,b)$ y $\varepsilon_2(\overline{h})=f_y(a+h,b+\theta_2 k)-f_y(a,b)$, se concluye la demostracion. ■

Ejemplo 12 *Sea*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \overline{x}\neq\overline{0}\\ 0, & \overline{x}=\overline{0}\end{cases}\quad,\quad \overline{a}=\overline{0}$$

En este caso se puede ver que las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *no son continuas en* $\overline{a}$ *y sin embargo* f *es diferenciable en* $\overline{a}$*. Pues,*

$$\nabla f(x,y)=\begin{cases}\left(2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \overline{x}\neq\overline{0}\\ (0,0)\,, & \overline{x}=\overline{0}\end{cases}$$

y no existe el límite de $\frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x}$ *ni de* $\frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial y}$ *cuando* $\overline{x}$ *tiende a* $\overline{0}$*. Por otra parte:*

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}}\frac{f(\overline{0}+\overline{h})-f(\overline{0})-T_{\overline{0}}f(\overline{h})}{\left\|\overline{h}\right\|}=\lim_{\overline{h}\to\overline{0}}\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Es decir, f *es diferenciable en* $\overline{0}$*.*

El siguiente teorema, que se enuncia sin demostrar, dá una condición suficiente que exige un poco menos que el teorema 6:

Teorema 7 *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $\overline{a} \in D^0$*. Si existen* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{a})$*,* $0 \le j \le n$ *y todas las funciones derivadas parciales, menos una, existen en un entorno de* $\overline{a}$ *y estas funciones son continuas en* $\overline{a}$ *entonces* f *es diferenciable en* $\overline{a}$

Observación 12 *Estos resultados se generalizan, basándose en el teorema de límite coordenada a coordenada a funciones* $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*.*

Ejemplo 13 *Sea* $\overline{f}(x,y)=(x+y,x.y)$
Las derivadas parciales existen, pues $\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(\overline{x})=(1,y)$ *y* $\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}(\overline{x})=(1,x)$*, y además estas funciones son continuas en todo* $\mathbb{R}^2$*, por tanto* $\overline{f}$ *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*.*

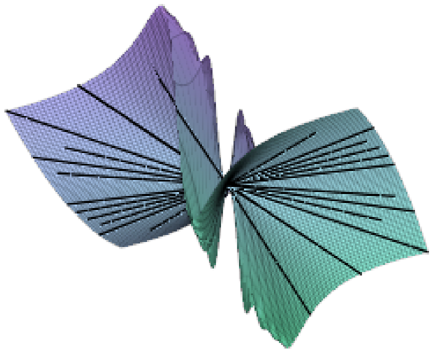
Observación 13 *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. Si* $\Delta z = f(a+h,b+k)-f(a,b)$*,* $dz = hf_x(a,b)+kf_y(a,b)$ *y* $\left\|\overline{h}\right\|=\sqrt{h^2+k^2}$*, la definición de función diferenciable, en términos del incremento y del diferencial expresa que:*

$$\lim_{(h,k)->(0,0)}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

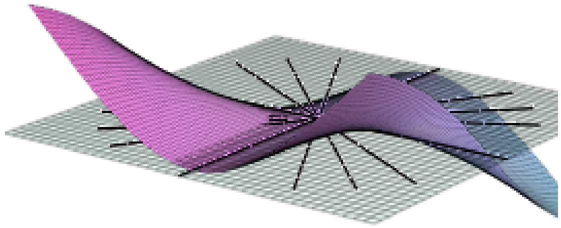
4.1. Interpretación Geométrica de la Diferencial de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Para una función $f(x,y)$, puede ocurrir que en el punto $\overline{a} = (a,b)$ el cono tangente se convierta en un plano tangente donde todas las rectas que tienen como pendientes las derivadas direccionales en $\overline{a}$ están contenidas en este plano.

Como el plano tangente está "cerca" de la superficie en un entorno del punto de tangencia, los valores z_P de este plano son cercanos a valores de $z = f(x,y)$ para puntos próximos a $\overline{x}_0$. En este caso, cuando el plano no es vertical, la función puede ser aproximada, en un entorno del punto, mediante una función lineal que representa al mencionado plano. Si la aproximación es suficientemente buena, se dice que la función $f(x,y)$ es *"diferenciable"* en $\overline{x}_0$.



Función no diferenciable en $\overline{a}$



Función diferenciable en $\overline{a}$

4.1.1. Linealidad local y plano tangente

A partir de la definición de diferenciabilidad, haciendo un reacomodamiento de términos, se tiene que:

$$\lim_{(h,k)->(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - [f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b)]}{\left\|\overline{h}\right\|} =$$
$$= \lim_{(x,y)->(a,b)} \frac{f(x,y) - [f(a,b) + (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b)]}{\|\overline{x}-\overline{a}\|} = 0$$

donde $f(a,b) + (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b)$ es una función lineal de x y de y, y se la llama **linealización local** de f cerca del punto $\overline{a}$.

Se observa que la función $f(x,y)$ difiere de la función lineal en un infinitésimo de orden superior a $\left\|\overline{h}\right\| = \|\overline{x}-\overline{a}\|$, esta ecuación expresa el significado cuando se dice que una función lineal es una aproximación suficientemente buena de $f(x,y)$ en un entorno de $\overline{a}$, esto es:

$$f(x,y) \backsimeq f(a,b) + (x-a)f_x(a,b) + (y-b)f_y(a,b) \qquad (6)$$

Esta linealización local representa el **plano tangente** a la superficie $f(x,y)$ en el punto $\overline{a}$, siendo su ecuación:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \qquad (7)$$

donde $f(x,y)$ es diferenciable en $\overline{a} = (a,b)$.

La ecuación (7) puede expresarse como $f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$, de donde resulta la ecuación normal del plano tangente :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right) \bullet (x-a, y-b, z-f(a,b)) = 0$$

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$ es un vector normal a la gráfica de f en (a,b).

4.1.2. Propiedades relacionadas con una función diferenciable

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto y $\overline{a} \in D$

1. f es diferenciable en $\overline{a} \Rightarrow f$ es continua en $\overline{a}$.

2. f es diferenciable en $\overline{a}$ $\Rightarrow$existen todas las derivadas direccionales de f en $\overline{a}$.

3. f es diferenciable en $\overline{a} \Rightarrow D_{\overline{u}}f\left(\overline{a}\right) = \nabla f\left(\overline{a}\right) \cdot \overline{u}$

4. f_x y f_y son continuas en un entorno de $\overline{a} \Rightarrow f$ es diferenciable en $\overline{a}$

5. f es diferenciable en $\overline{a} \Leftrightarrow$ la superficie que representa f tiene plano tangente en el punto $\overline{a}$

Ejemplo 14 *Hallar la ecuación del plano tangente y un vector normal al paraboloide* $z = 2x^2 + y^2$ *en el punto* $(1, 1, 3)$
Resolución *Si* $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ *resulta* $f(1, 1) = 3$, *además*

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x \Rightarrow f_x(1, 1) = 4 \\ f_y(x, y) &= 2y \Rightarrow f_y(1, 1) = 2 \end{aligned}$$

Luego la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, 3)$ *está dada por*

$$z = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$$

y un vector normal sería

$$\overline{n} = (4, 2, -1)$$

4.2. Aplicaciones de la diferencial

4.2.1. Cálculo aproximado

De la ecuación (6), resulta

$$\Delta f(\overline{a}) \backsimeq d_{\overline{a}}f\left(\overline{h}\right)$$

Así, la diferencial tiene una primera aplicación en el cálculo aproximado de incrementos, cuando no se necesita cuantificar el error cometido.

Ejemplo 15 *Usar diferenciales para encontrar el valor aproximado de* $\sqrt{9(1{,}95)^2 + (8{,}1)^2}$
Resolución *En este caso la función es* $f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2}$ *donde* $a = 2$, $b = 8$, $h = -0{,}05$ *y* $k = 0{,}1$, *como* $f_x(x, y) = \dfrac{9x}{\sqrt{9x^2 + y^2}}$ *y* $f_y(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{9x^2 + y^2}}$ *se tiene*

$$\begin{aligned} \sqrt{9(1{,}95)^2 + (8{,}1)^2} &= f(1{,}95, 8{,}1) \backsimeq f(2, 8) + hf_x(2, 8) + kf_y(2, 8) \\ &\backsimeq 10 + \frac{18}{10}(-0{,}05) + \frac{8}{10}(0{,}1) = 9{,}99 \end{aligned}$$

Se puede verificar con una calculadora que esta aproximación es exacta hasta dos cifras decimales.

4.2.2. Aplicaciones geométricas

- Si $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, es diferenciable en $(a, b, c) \in \mathcal{S}$, con $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = k\}$, si el vector $\nabla f(a, b, c) \neq \overline{0}$ entonces este vector es normal a la superficie de nivel en el punto (a, b, c), ya que si se calcula la diferencial de f en los puntos que pertenecen a la superficie $\mathcal{S}$ ésta es igual a cero, pues sobre la superficie la función es constante, de donde resulta:

$$d_{\overline{a}}f(\overline{h}) = \nabla f(\overline{a}) \bullet \overline{h} = (f_x(\overline{a}), f_y(\overline{a}), f_z(\overline{a})) \bullet (x - a, y - b, z - c) = 0$$

Esta última es la ecuación normal del plano tangente a la superficie de nivel S en el punto (a, b, c) y el vector $\nabla f(\overline{a})$ es un vector normal a este plano y en consecuencia es normal a la superficie de nivel $\mathcal{S}$ en el mismo punto.

- Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es diferenciable en $(a, b) \in \mathcal{C}$ donde la curva de nivel $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}$, si el vector $\nabla f(a, b) \neq \overline{0}$, por ser f constante en todos los puntos que pertenecen a $\mathcal{C}$:

$$d_{\overline{a}}f(\overline{h}) = \nabla f(\overline{a}) \bullet \overline{h} = (f_x(\overline{a}), f_y(\overline{a})) \bullet (x - a, y - b) = 0$$

Esta última es la ecuación normal de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto (a, b) y $\nabla f(a, b)$ es un vector normal a esta recta. En consecuencia, $\nabla f(a, b)$ **es normal a la curva de nivel en el punto** (a, b).

Ejemplo 16 *Encontrar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal en el punto (-2,1,3) del elipsoide* $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$

Resolución *El elipsoide es la superficie de nivel (para $k = 3$) de la función $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$, por lo tanto se tiene:*

$$f_x(x,y,z) = \frac{x}{2} \qquad f_y(x,y,z) = 2y \quad f_z(x,y,z) = \frac{2z}{9}$$
$$f_x(-2,1,3) = -1 \quad f_y(-2,1,3) = 2 \quad f_z(-2,1,3) = -\frac{2}{3}$$

De donde resulta la ecuación del plano tangente:

$$-1(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0 \Rightarrow 3x - 6y + 2z + 18 = 0$$

y la recta normal

$$(x,y,z) = (-2,1,3) + t(-1,2,-\frac{3}{2})$$

4.2.3. Derivada direccional máxima

Muchas veces resulta útil saber en qué dirección se produce la derivada direccional máxima y cuál es el valor de la misma. Para ello se tendrá en cuenta el siguiente teorema.

Teorema 8 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. El valor de la máxima derivada direccional $D_{\overline{u}}f(\overline{x})$ es $||\nabla f(\overline{x})||$ y se presenta cuando $\overline{u}$ tiene la dirección del vector $\nabla f(\overline{x})$.*

Esto es, si $\nabla f(\overline{x}) \neq \overline{0}$, entonces $\nabla f(\overline{x})$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f está creciendo más rápidamente.

Demostración. Por ser f diferenciable se tiene

$$D_{\overline{u}}f(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x}).\overline{u} = ||\nabla f(\overline{x})|| ||\overline{u}|| \cos\theta = ||\nabla f(\overline{x})|| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo comprendido entre $\nabla f(\overline{x})$ y $\overline{u}$. El máximo valor de $\cos\theta$ es 1 y se presenta cuando $\theta = 0$. Por lo tanto el máximo valor de $D_{\overline{u}}f(\overline{x})$ es $||\nabla f(\overline{x})||$ y ocurre cuando $\overline{u}$ tiene la misma dirección que $\nabla f(\overline{x})$. ■

La derivad direccional máxima de la función f en el punto $\overline{a}$, se denota por:

$$D_{\text{máx}} f\left(\overline{a}\right) = \left\|\nabla f\left(\overline{a}\right)\right\|$$

A partir del punto $\overline{a}$, una dirección en la cual f crece más rápido $\nabla f\left(\overline{a}\right)$. Análogamente, una dirección en la cual f decrece más rápido es $-\nabla f\left(\overline{a}\right)$.

Ejemplo 17 *Si $f(x,y) = xe^y$*
(a) Encontrar la razón de cambio de f en el punto $P = (2,0)$ en la dirección de P a $Q = (5,4)$.
(b) ¿En qué dirección tiene f la máxima razón de cambio?¿Cuál es su valor?

Resolución

(a) Se observa que f es diferenciable, por tanto se calcula el vector gradiente:

$$\nabla f(\overline{x}) = (f_x(\overline{x}), f_y(\overline{x})) = (e^y, xe^y); \qquad \nabla f(2,0) = (1,2)$$

El vector unitario en la dirección $\overline{PQ} = (3,4)$ es $\overline{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, así la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es:

$$D_{\overline{u}}f(\ 2,0) = \nabla f(2,0).\overline{u} = (1,2).(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) = \frac{11}{5}$$

(b) De acuerdo al teorema 8, f aumenta más rápidamente en la dirección del gradiente $\nabla f(2,0) = (1,2)$. La máxima razón de cambio es $||\nabla f(2,0)|| = ||(1,2)|| = \sqrt{5}$

- Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, f diferenciable, $\nabla f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ define un campo vectorial. Su gráfica estaría contenida en $\mathbb{R}^6$ por lo que no es posible graficar. Sin embargo muchas veces es útil hacer un esquema dibujando en el punto (a,b,c) el vector $\nabla f(a,b,c)$. El campo gradiente tiene un importante significado geométrico, pues indica la dirección en que f crece más rápidamente y además su dirección es ortogonal a la superficie de nivel.

4.3. Derivadas sucesivas

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{a} \in D$, D abierto. Si f admite derivadas parciales en D, para $i = 1, ..., n$, se tiene

$$f_{x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Estas funciones dependen de las mismas variables que depende f . Si esta nueva función admite derivada con respecto a x_j en $\overline{a}$, se define la derivada segunda de f respecto a x_i, x_j en $\overline{a}$ como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\overline{a}) = \lim_{h_j \to 0} \frac{f_{x_i}(\overline{a} + h_j \overline{e}_j) - f_{x_i}(\overline{a})}{h_j}$$

denotada tambien como $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{a}) = f_{x_i x_j}(\overline{a}) = D_{x_i x_j} f(\overline{a}) = D_{ij} f(\overline{a})$

En particular si $n = 2$, esto es $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, suponiendo que existen f_x y f_y en todo $(x, y) \in D$, se define, si existen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{a}) &= \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)(\overline{a}) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(a, b + k) - f_x(a, b)}{k} \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{a}) &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)(\overline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(a + h, b) - f_x(a, b)}{h} \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{a}) &= \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)(\overline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(a + h, b) - f_y(a, b)}{h} \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{a}) &= \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)(\overline{a}) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(a, b + k) - f_y(a, b)}{k}
\end{aligned}$$

Esto es quedan definidas cuatro derivadas parciales segundas. Las derivadas$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{a})$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{a})$ se llaman derivadas cruzadas.

Ejemplo 18 *Sea* $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$, *se tiene que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + 2(x + 2y) = 5y + 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2(x + 2y)2 = 8y + 5x$$

Dado que existen las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, *es posible calcular las derivadas segundas:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(5y + 2x) = 2 & \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(5y + 2x) = 5 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(8y + 5x) = 5 & \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(8y + 5x) = 8
\end{aligned}$$

Se observamos que en este ejemplo las derivadas cruzadas son iguales, ¿será cierto siempre? la respuesta es ***no***.

Ejemplo 19 *Sea*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & si \quad \overline{x} \neq \overline{0} \\ 0 & si \quad \overline{x} = \overline{0} \end{cases}$$

Las derivadas parciales en $\overline{x} = \overline{0}$ *son*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f\ (0, k) - f(0, 0)}{k} = 0$$

Si $\overline{x} \neq \overline{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4y^2x^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - 4y^2x^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

luego:

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 + 4y^2x^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & si \quad \overline{x} \neq \overline{0} \\ 0 & si \quad \overline{x} = \overline{0} \end{cases} \qquad y \quad f_y(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - 4y^2x^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & si \quad \overline{x} \neq \overline{0} \\ 0 & si \quad \overline{x} = \overline{0} \end{cases}$$

A partir de estas funciones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{k\frac{-k^4}{k^4}}{k} = -1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{h\frac{h^4}{h^4}}{h} = 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. *Lo que indica que las derivadas cruzadas no son siempre iguales. Inclusive podría ser que una de ella exista y la otra no.*

El siguiente teorema da una condicón suficiente para que las derivadas cruzadas sean iguales.

Teorema 9 *Sea* $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $\overline{a} \in D^0$ *tal que están definidas las funciones* f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} *en un entorno* $N_\delta(\overline{a})$ *y son continuas en* $\overline{a}$, *entonces* $f_{xy}(\overline{a}) = f_{yx}(\overline{a})$

Demostración. Se define

$$F(h,k) = [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] - [f(a, b+k) - f(a,b)]$$

Por hipótesis $F: N_\delta(\overline{a}) \to \mathbb{R}$ está definida. Además, sea

$$G(u) = f(u, b+k) - f(u,b)$$

G está definida en el intervalo cerrado $[a-h, a+h]$, es continua en el intervalo abierto$(a-h, a+h)$ y $G'(u)$ existe en $(a-h, a+h)$.
Luego, aplicando el Teorema del Valor Medio:

$$F(h,k) = G(a+h) - G(a) = hG'(x_1), \text{ con } x_1 \in (a, a+h)$$

luego

$$F(h,k) = hG'(x_1) = h\left[f_x(x_1, b+k) - f_x(x_1, b)\right]$$

Si

$$H(v) = f_x(x_1, v)$$

H satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio y por lo tanto se verifica:

$$H(b+k) - H(b) = kH'(y_1), \text{ con } y_1 \in (b, b+k)$$

y por lo tanto:

$$F(h,k) = h(H(b+k) - H(b)) = hkH'(y_1) = hkf_{xy}(x_1, y_1) \tag{8}$$

Reescribiendo F tenemos:

$$F(h,k) = (f(a+h, b+k) - f(a, b+k)) - (f(a+h, b) - f(a,b))$$

repitiendo el mismo procedimiento:

$$F(h,k) = khf_{yx}(x_2, y_2) \text{ con } x_2 \in (a, a+h), \quad y_2 \in (b, b+k) \tag{9}$$

entonces tomando el mismo h y k, de (15) y (16) resulta:

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2)$$

Como por hipótesis las funciones f_{xy}, f_{yx} son continuas en $\overline{a}$ tomamdo límite cuando $(h,k) \to (0,0)$ se cumple que $(x_1, y_1) \to (a,b)$ y $(x_2, y_2) \to (a,b)$, por lo tanto resulta:

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

■

En realidad se pueden debilitar un poco las hipótesis y la tesis sigue valiendo. Los dos teoremas que se enuncian a continuación también dan una condición suficiente para que las derivadas cruzadas sean iguales.

Teorema 10 ***(de Schwarz)*** *Sea* $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $\overline{a} \in D$ *abierto. Si*
■ *existen* $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ *para todo* $(x,y) \in N_\delta(\overline{a})$
■*existe* $f_{xy}(x,y)$ *para todo* $(x,y) \in N_\delta(\overline{a})$ *y es continua en* $\overline{a}$
Entonces existe $f_{yx}(\overline{a})$ *y además* $f_{yx}(\overline{a}) = f_{xy}(\overline{a})$

Teorema 11 ***(de Young)*** *Sea* $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $\overline{a} \in D$ *abierto. Si*
■ *existen* $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ *para todo* $(x,y) \in N_\delta(\overline{a})$
■ $f_x(x,y)$ *y* $f_y(x,y)$ *son diferenciables en* $\overline{a}$
Entonces $f_{yx}(\overline{a}) = f_{xy}(\overline{a})$

Todo lo visto se puede generalizar a funciones de n variables. Además, a través de un proceso iterativo se pueden definir las derivadas terceras, cuarta, etc.

4.4. Diferenciación sucesiva

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, $\overline{a} \in D$, f es diferenciable en $\overline{a}$ entonces:

$$d_{\overline{a}}f(\overline{h}) = \nabla f(\overline{a}) \bullet \overline{h} = hf_x(\overline{a}) + kf_y(\overline{a})$$

Se supone que f es diferenciable para todo $\overline{x} \in D$. Si se toma constante al incremento $\overline{h}$, se puede considerar la función $df : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$df(\overline{x}) = d_{\overline{x}}f(\overline{h}) = hf_x(\overline{x}) + kf_y(\overline{x})$$

Bajo la suposición de que esta función es diferenciable, se define, si existe, la diferencial segunda de f en $\overline{a}$:

$$\begin{aligned}
d^2_{\overline{a}}f(\overline{h}) &= d(df)(\overline{a}) = h\frac{\partial}{\partial x}(df)(\overline{a}) + k\frac{\partial}{\partial y}(df)(\overline{a}) \\
&= h\left[h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{a}) + k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{a})\right] + k\left[h\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{a}) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{a})\right] \\
&= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{a}) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{a}) + kh\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{a}) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{a}) \\
&= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{a}) + 2kh\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{a}) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{a})
\end{aligned}$$

pues por hipótesis f_x y f_y son funciones diferenciables en $\overline{a}$ y por lo tanto las derivadas cruzadas son iguales. Se denota:

$$d^2_{\overline{a}}f(\overline{h}) = d^2 f(\overline{a}) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(2)}(\overline{a})$$

en analogía con el binomio de Newton.

Este proceso se puede iterar, si se supone que la función $d^2 f$ existe para todo $\overline{x} \in D$ y que es diferenciable en $\overline{a}$, se define

$$d^3 f(\overline{a}) = d_{\overline{a}}(d^2 f)(\overline{h}) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\overline{a}) + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\overline{a}) + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\overline{a}) + k^3\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\overline{a})$$

y se denota:

$$d^3_{\overline{a}}f(\overline{h}) = d^3 f(\overline{a}) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(3)}(\overline{a})$$

Por inducción, si $d^{n-1}f$ existe para todo $\overline{x} \in D$ y si la función $d^{n-1}f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, es diferenciable en $\overline{a}$, se define:

$$d^n f(\overline{a}) = d_{\overline{a}}(d^{n-1}f)(\overline{h}) = \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(n)}(\overline{a})$$

4.4.1. Notación de la diferencial:

$$df(\overline{a}) = \nabla f(\overline{a}) \bullet \overline{h} = (f_x(\overline{a}), f_y(\overline{a})\ ) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = hf_x(\overline{a}) + kf_y(\overline{a})$$

$$d^2 f(\overline{a}) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{a}) + 2kh\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{a}) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{a}) = (\ h \quad k\ ) \begin{pmatrix} f_{xx}(\overline{a}) & f_{xy}(\overline{a}) \\ f_{xy}(\overline{a}) & f_{yy}(\overline{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

La matriz $\begin{pmatrix} f_{xx}(\overline{a}) & f_{xy}(\overline{a}) \\ f_{xy}(\overline{a}) & f_{yy}(\overline{a}) \end{pmatrix}$ se llama matriz Hessiana en $\overline{a}$. Esta matriz juega un papel importante en el estudio de extremos de una función.

E.C - C.E.