TRABAJO PRÁCTICO N^{O} 4

PRIMER OBJETIVO

-Conocer los teoremas del valor medio y verificar sus hipótesis a casos concretos.

- Emplear los teoremas del valor medio para el análisis del comportamiento geométrico de gráficos de funciones.

- Aplicar el Teorema de L´Hôpital en el cálculo de límites indeterminados y conocer las limitaciones de su empleo.

1. Determine si la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si\ x<1 \\ 5x-8 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ cumple con las hipótesis del teorema de Rolle en $\left[-2;\frac{8}{5}\right]$.

2. La función $h(x)=x^3-9x+1$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,b]. ¿Cuál es el valor de b? Halle el punto intermedio cuya existencia asegura el teorema.

3. La función $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}}$ se anula en -1 y en 1, sin embargo, $f'(x)\neq 0$ en (-1,1). Explique esta aparente contradicción con el teorema de Rolle.

4. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x+4}{x+1} & x<0 \\ (x+1)(x-2)^2 & x\geq 0 \end{cases}$

X = 2.

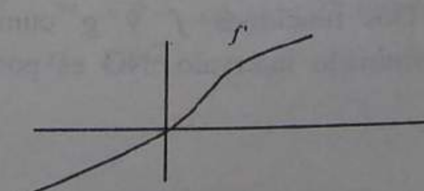
¿Se cumple el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{5}{13},\frac{1}{2}\right]$? ¿Y en $[0,3]$? Razone su respuesta y encuentre, si corresponde, los puntos cuya existencia afirma dicho teorema para ambos intervalos.

5. Si f es continua en $[a;b]$ y dos veces derivable en el intervalo $(a;b)$, y además $f(a)=f(c)=f(b)$ con $a<c<b$, pruebe que existe un $x_0\in(a,b)\ /\ f''(x_0)=0$.

BOLSA NO

6. Pruebe que la ecuación $x^5+5x-3=0$ tiene exactamente una raíz real.

7. El gráfico de la función derivada de f es



a) ¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación $f(x)=0$?

b) Si la ecuación $f(x)=0$ tiene exactamente dos soluciones distintas, ¿pueden ser éstas del mismo signo? Fundamente las respuestas.

8. Sea $f:\Re \to \Re$ una función derivable en todo el eje real. Sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razone debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades. Siempre fundamente la respuesta.

a. Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$.

b. Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$.

c. Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$.

9. Compruebe que las siguientes funciones satisfacen el teorema del valor medio para el cálculo diferencial o de Lagrange en el intervalo que se indica, y encuentre el punto cuya existencia asegura el teorema:

a. $f(x)=2x^2+1 \quad en \quad [0,2]$ b. $g(x)=\sqrt{x} \quad en \quad [1,4]$ c. $h(x)=\dfrac{1}{1+x} \quad en \quad [0,2]$

d. $\omega(x)=\cos x \quad en \quad \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ e. $\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & si \;\; x<1 \\ \dfrac{1}{x} & si \;\; x\geq 1\end{cases} \quad en \; [0,2]$

$\frac{1}{2}$ y $\sqrt{2}$

10. Justifique la siguiente afirmación:

"El teorema de Rolle es un caso particular del Teorema de Lagrange"

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

11. Pruebe la validez de las siguientes desigualdades

a. $x < \operatorname{tg} x \qquad \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ b. $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$

APLIQUE LAGRANGE

12. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3 & si \;\; x=0 \\ -x^2+3x+a & si \;\; 0<x<1 \\ bx+c & si \;\; 1\leq x\leq 2\end{cases}$. Encuentre valores de a,b y c

para que f satisfaga el teorema del valor medio.

a = 3
b = 1
c = 4

13. Si f es una función derivable en $\Re$ tal que $|f'(x)|\leq 1$, $a\in\Re$, pruebe que $|f(x)-f(a)| \leq |x-a|$

ES APLICANDO LAGRANGE PERO COMO

14. Dos funciones f y g cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange en un determinado intervalo. NO es posible demostrar el teorema de Cauchy para f y g

realizando el cociente miembro a miembro de la expresión de la tesis de Lagrange para f y g. ¿Porqué?

15. Calcule los siguientes límites usando el Teorema de L´Hôpital cuando sea posible, de otra forma indique los motivos por los cuales no puede aplicarse:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x^3}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{sen\,\frac{1}{x}}{arc\ tg\,\frac{1}{x}}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos(\alpha x)}{e^{\beta x}-\cos(\beta x)}$ $\beta\neq 0$ g. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

HAY QUE DERIVAR 2 VECES

h. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$; $n\in\mathbb{N}$ i. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^3.\ln x$ j. $\lim\limits_{x\to 0}\ arc\,sen\,x\,.\cot g\ x$

k. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{arctgx}\right)$ l. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x+3\ sen\,x}$ m. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

DERIVE DOS VECES

NO APLICA L'H DIVIDA POR X

APLIQUE LIMITE FUNDAMENTAL EN EL EXPONENTE LUEGO LN.

16. Si sabe que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$, . g(0)=g´ (0)=0 y g´´(0)=17. ¿Puede asegurar que estos son datos suficientes para afirmar que $f'(0)=\dfrac{17}{2}$? **Justifique.**

CREO ES FALSO

17. Muestre que la función dada por $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$ es derivable en $x_0=0$ hasta cualquier orden. Encuentre $f^{(n)}(0)$ $n=1,2,...$

18. Indique hasta qué orden es derivable la función

$$f(x)=\begin{cases}e^x-x-1 & si\ \ x\geq 0\\ x^3 & si\ \ x<0\end{cases}$$

19. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta & si\ \ x<1\\ xe^{x-1} & si\ \ x\geq 1\end{cases}$ $\alpha,\beta\in\Re$

¿Para qué valores de α,β la función f cumple las condiciones del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [0,2]?

20. ¿Es derivable la función $g(x)=\begin{cases}(x-2)e^{\frac{1}{2-x}} & si\ \ x\neq 2\\ 0 & si\ \ x=2\end{cases}$ en $x=2$? Fundamente la respuesta.

NO PUEDO CALCULAR LA DERIVADA PA ES DERIVABLE

SEGUNDO OBJETIVO

-Conocer y manejar la herramienta "derivada" para realizar análisis de gráficos de funciones.

-Modelizar matemáticamente problemas simples del ámbito científico con el objeto de optimizar alguna variable en términos de otra.

-Calcular: aproximaciones numéricas y límites indeterminados mediante el uso de polinomios de Taylor

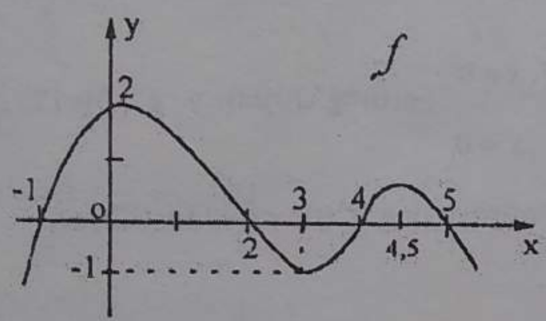
21. Determine los intervalos de monotonía de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ b. $g(x) = x \, . \, e^x$ c. $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ d. $i(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

DERIVE MODULO DESPUES

SE INVIERTE EL SIGNO CUANDO APLICO LA EXPONENCIAL EN LA DESIGUALDAD?

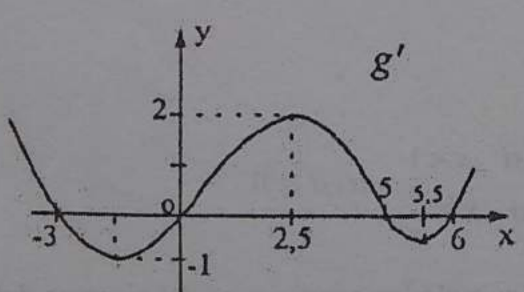
22. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$:



a. Indique intervalos de positividad y negatividad de f' en $[-1;5]$

b. Halle los ceros de f' en $[-1;5]$

23. Dados los gráficos de las funciones derivadas de f y g:



Determine

a. Intervalos de monotonía de g.

b. Extremos locales de g.

c. Intervalos de convexidad y concavidad de g y puntos de inflexión.

c) $M_{abs}(0;\frac{\pi}{2})$ $m_{abs}(-2;-\frac{\pi}{2})$

d) en $\left[e^{-1};e\right]$ tiene $M_{abs}(e;\approx 7,389)$ $m_{abs}(e^{\frac{1}{2}};\approx -0,184)$

en $(0;+\infty)$ no tiene máximo absoluto pero sí $m_{abs}(e^{\frac{1}{2}};\approx -0,184)$

37. $h=r\sqrt[6]{8\pi^2}$

39. La base de 10cm y la altura de 5 cm.

41. $r=h=\dfrac{12}{4+\pi}$

45. 90 *km/h*; 0,09 *lt/km*

47. $y=2x$

49. $1-x+\frac{7}{2}x^2-\frac{19}{6}x^3+\frac{37}{24}x^4+\frac{59}{120}x^5$

51. a) $\sum_{k=0}^{n}(x-1)^k$ b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(3/2)^{2k}}{(2k)!}(x-\pi)^{2k}$ c) $e\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-1)^j}{j!}$

55. 1,0099505 con error $<10^{-8}$

57. a)1 b)1/3

59. a) es derivable en reales.

b) $e^{-1}\left[1+(x-1)-2(x-1)^2\right]$

c) $M_{abs}(\sqrt{\frac{3}{2}};\approx 0,194)$ $m_{abs}(0;0)$

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS IMPARES

1. No, $\nexists f'(1)$

3. f no es derivable en $x=0$

7. a) Ninguna si $f(0)>0$; una si $f(0)=0$ o dos si $f(0)<0$

9. a) $c=1$ b) $c=9/4$ c) $c=\sqrt{3}-1$ d) $c=arcsen\dfrac{2}{\pi}\cong 0,69$ e) $c_1=\dfrac{1}{2}; c_2=\sqrt{2}$

15. a) 1/2 b) 1/3 c) $ln2$ d) $ln2-ln3$ e) 1 f) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ g) $\dfrac{e}{2}$ h) $+\infty$ i) 0 j) 1

k) 0 l) 1/2 m) $e^{-\frac{1}{2}}$

17. $f^{(n)}(0)=0\ \forall n\in N_0$

19. $\alpha=1;\beta=0$

21. a) decrece en $(1;+\infty)$ y crece en $(-\infty;1)$

b) crece en $(-1;+\infty)$ y decrece en $(-\infty;-1)$

c) decrece en $(0;1)\cup(1;e)$ y crece en $(e;+\infty)$

d) decrece en $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ y crece en $(-1;1)$

23. a) g crece en $(-\infty;-3)\cup(0;5);\cup(6;+\infty)$ y decrece en $(-3;0)\cup(5;6)$

b) Hay máximo relativo en los puntos de abscisas -3 y 5 y mínimo relativo en 0 y 6

c) Es cóncava en $(-1;2{,}5)\cup(5{,}5;+\infty)$ y convexa en $(-\infty;-1)\cup(2{,}5;5{,}5)$

Hay punto de inflexión en los puntos de abscisas -1; 2,5 y 5,5

25. a) cóncava en $(-\dfrac{2}{5};+\infty)-\{0\}$ y convexa en $(-\infty;-\dfrac{2}{5})$.

Punto de inflexión $(-\dfrac{2}{5};\approx -0{,}87)$

b) es cóncava en todos los reales

c) es convexa en todo el dominio

27. m(0;0)

29. $g(x)=\dfrac{2}{9}x^3-x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{19}{9}$

31. $a=1;b=-3;c=3$

33. a) $M_{abs}(-\dfrac{4}{3};\approx 7{,}52)$ $m_{abs}(2;-11)$

b) no tiene

59. Dada la función real f dada por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{senx}{x}-1 & si \;\; x<0 \\ x^3e^{-x^2} & si \; x\geq 0\end{cases}$, se pide:

a. Estudie la derivabilidad de f en el eje real.

b. Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden asociado a la función f en un entorno del punto $x_0=1$.

c. Determine los extremos absolutos de f en $[0,+\infty)$

60.

a. Construya el polinomio de Taylor, $P(x)$, de primer orden asociado a la función $g(x)=senx$ centrado en el punto $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

b. Considerando la función f definida como sigue: $f(x)=\begin{cases}senx & x\leq \pi/2 \\ P(x) & x>\pi/2\end{cases}$ siendo P el polinomio obtenido en a) ¿Cuál el la clase de f en $\Re$?

61. Una escalera de 6 metros está apoyada sobre una pared de 2.80 metros de altura. Determine la proyección horizontal máxima del saliente de la escalera al desplazarse de la pared el pie de la escalera. (Indicación: use como variable independiente el ángulo que forma la escalera con el piso.

TERCER OBJETIVO

-Integrar definiciones, conceptos, propiedades y teoremas de la derivada.

-Consolidar argumentaciones teóricas y resolver problemas.

58. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas:

a. La función $f(x)=\dfrac{x+1}{1+x^2}$ posee tres puntos de inflexión situados sobre una recta.

b. El dominio de $f'(x)$ es el conjunto R, siendo $f(x)=(|x+1|-|x|)^2$

c. La función $f(x)=x^3-3x^2+6x+12$ tiene exactamente un cero negativo.

d. Si f es derivable y $f'(x)\neq 0$ para cualquier número real x, entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene exactamente una raíz.

e. Si f es de clase C^1 en $[0,+\infty)$, $f(0)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$

f. Si existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, entonces existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

g. Si existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

h. Si $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\Re$, entonces para que f tenga un extremos local es necesario que $4a^2-12b=0$.

i. Si $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\Re$, entonces el punto $x=\dfrac{a}{3}$ es siempre un punto de inflexión de f.

j. Dado que la función $h(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ verifica $h(1)=h(2)=0$, entonces existe un punto $c\in(1,2)$ tal que $f'(c)=0$

k. Si $f:(0,+\infty)\to R$ es una función derivable en su dominio, tal que $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ y $f(1)=0$, entonces $\dfrac{1}{2}<f(2)<1$.

l. La ecuación $sen^3x+3\cos^2 x+6senx+2=0$ admite a lo sumo dos raíces reales en el intervalo $[0,\pi]$.

m. Si una función verifica las hipótesis el teorema de Rolle en [a , b], entonces no verifica la tesis del teorema de Lagrange del cálculo diferencial en el mismo intervalo.

n. Si f(x) es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y f(a) ≠ f(b), entonces $f'(x)$ no presenta ninguna raíz real en dicho intervalo.

o. Cuando se aproxima linealmente una función se está empleando implícitamente el teorema de Lagrange para el cálculo diferencial.

a. $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ en potencias de $(x-1)$ b. $f(x)=sen\dfrac{3x}{2}$ en potencias de $(x-\pi)$

c. $f(x)=e^{x}$ en potencias de $(x-1)$

El residuo o resto de la Fórmula de Taylor permite establecer una cota del error de truncamiento producido al aproximar la función mediante un polinomio de grado n, pero NO prevé los errores operativos ocasionados al evaluar el polinomio en el valor de x al cual se desea acceder.

52. Calcule

a. sen 1 con error menor que 10^{-4}

b. sen 44° con error menor que 10^{-4}

c. $e^{0.02}$ con error menor que 10^{-6}

¿ d. e con siete decimales significativos.

e. **ln** (0.998) con error menor que 10^{-7}

53. Justifique la fórmula aproximada $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}$ para $|x|<1$ y evalúe el error de la misma.

54. Halle la fórmula de Taylor de orden 2 (resto de orden 3) de la función $f(x)=2.\sqrt{2x+4}-4-x$ en $x_0=0$ y muestre que $\left|f(x)+\dfrac{x^2}{8}\right|\le\dfrac{1}{32}$ si $x\in[0,1]$.

55. Aproxime $\sqrt{1.02}$ empleando un polinomio de Taylor apropiado de 3° orden y estime el error cometido. DUDAS SOBRE EL RESTO

56. Si el polinomio de Taylor de orden 2 de una función f en $x_0=1$ es $(x-1)^2$, halle el polinomio del mismo orden y en el mismo punto de la función g definida por:

$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\ln x+senf(x)$

57. Calcule los siguientes límites empleando el desarrollo limitado de Taylor:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{e^{x}-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot g\ x}{x}\right)$

SE SUGIERE AL ESTUDIANTE CONTINUAR CON LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS QUE SIGUEN SÓLO CUANDO HAYA RESUELTO LOS EJERCICIOS PRECEDENTES.

a) Obtenga la función f tal que $f(x)$ sea el costo de la valla, indicando entre qué valores puede variar x.
b) Deduzca el valor de x en el que la función $f(x)$ alcance el valor mínimo.

45. El consumo de combustible de un automóvil (expresado en litros/km.), viene dado en función de la velocidad, x (expresada en km/hora), por la fórmula $g(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{90}}}{x}$
Determine el consumo mínimo y la velocidad a la que se consigue.

46. a. Defina orden de contacto entre dos curvas e interprete geométricamente el concepto.
b. Enuncie la condición necesaria y suficiente para que dos curvas tengan orden de contacto n en el punto $x=x_0$.
c. Calcule el orden de contacto de los gráficos de las funciones $f(x)=3x-1$ y $g(x)=x^2-x+2$ en $x_0=1$.

47. Dadas las funciones $f(x)=2x+3x^2-4x^3+x^4$ y $g:\Re\to\Re$ **derivable hasta cualquier orden /** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-f(x)}{x^4}=0$. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g por el punto (0;0). Fundamente la respuesta.

48. a. ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden 10 en el punto $x_0=3$ de la función $f(x)=x^3-2x^2+3x-1$?
b. Si el polinomio de orden 5 de una función f en el punto $x_0=-2$ es $P(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$, ¿Cuánto vale la derivada tercera de f en -2? ¿Es posible conocer el valor exacto de $f(0)$?
c. ¿Es cierto que el polinomio de orden 5 de una función tiene grado 5? Justifique todas las respuestas.

49. Halle el polinomio de Taylor de orden 5 en el punto $x_0=0$ de la función $g(x)=\dfrac{x^6+x^5+3x^2+1}{e^x}$

50. Obtenga los polinomios de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados y de los órdenes indicados:

a. $f(x)=\ln x$ *orden* n *en* $x_0=2$
b. $f(x)=e^x$ *orden* n *en* $x_0=1$
c. $f(x)=senx$ *orden* $2n$ *en* $x_0=\dfrac{\pi}{2}$
d. $f(x)=\sqrt{x}$ *orden* 4 *en* $x_0=4$
e. $f(x)=e^x.senx$ *orden* 8 *en* $x_0=0$
f. $f(x)=tgx$ *orden* 5 *en* $x_0=0$

51. Obtenga la Fórmula de Taylor de orden n de:

$f(6) = 0$, máximo absoluto.

35. Muestre que los extremos locales de la función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ no son extremos globales.

36. Muestre que los extremos locales de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ son también extremos globales.

NO SE COMO PROBARLO

37. Una tropa de scouts saldrá de campamento y necesitan comprar género para construir carpas cónicas, sin piso y de un volumen dado. Para disminuir los costos del campamento necesitan comprar el mínimo género. ¿Qué relación debe existir entre la altura de la carpa y el radio del piso para que el área lateral sea mínima?

38. Se cortará una viga con sección transversal rectangular de un tronco de sección transversal circular con radio r conocido. Se supone que la resistencia de la viga es directamente proporcional al producto del ancho por el cuadrado de la altura de su sección transversal. Encuentre las dimensiones de la sección transversal que dé a la viga la mayor resistencia.

39. Se necesita fabricar una caja rectangular, de base cuadrada, sin tapa y cuya capacidad (volumen) sea de 500 cm^3. Calcule las dimensiones que debe tener dicha caja de manera que el material empleado sea mínimo.

40. Demuestre que entre todos los rectángulos con diagonal dada $d = 1$, el que tiene mayor área es el cuadrado.

LO HICE PERO NO SE PORQUE $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

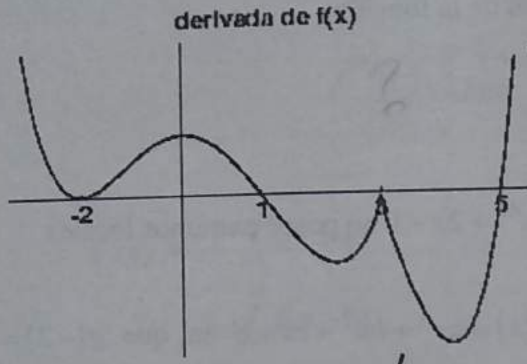
41. Una ventana tiene forma de rectángulo con un semicírculo encima. El perímetro de la ventana es 12 m. Encuentre las dimensiones de la ventana de manera que admita la máxima cantidad de luz.

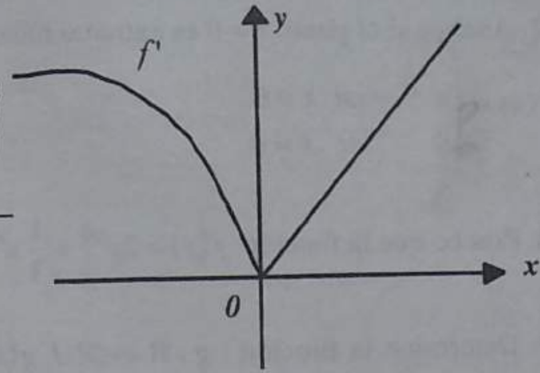
42. Considere el punto (a,b) en el primer cuadrante. Halle los puntos de la curva indicada más próximos al punto (a,b).

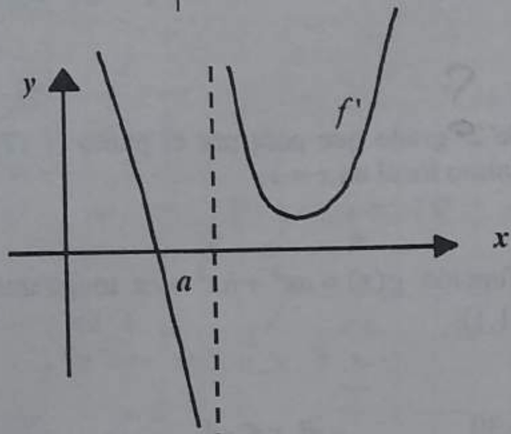
a. $y = x^2$ b. $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ c. $x^2 - y^2 = 1$

43. El agua sale de un estanque hemisférico (base circular) por un orificio del fondo. Sea h la altura del agua por encima del orificio y V el volumen del agua que queda en el estanque en el tiempo t. La física dice que $\dfrac{dV}{dt}$ es proporcional a $\sqrt{h}$. Pruebe que el descenso del nivel del agua es mínimo cuando la profundidad es dos tercios del radio de la base.

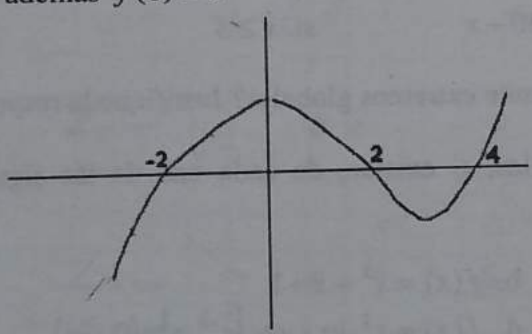
44. En un campo se debe vallar una zona de 400 m^2 de forma rectangular. Cada metro de valla cuesta \$100. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:







24. Realice una gráfica aproximada de f conociendo la gráfica de su derivada y que además $f(0)=0$



25. Analice la convexidad, concavidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

PI $f(-2)=0$

a. $f(x)=(x-2)x^{\frac{2}{3}}$?   b. $g(x)=|x|e^{|x|}$ c. $h(x)=\ln(x^2-6x+8)$?

$\nexists f''(0)$

26. Realizar el estudio completo de las siguientes funciones:

SE COMPLICAN

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$? $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$? $f(x)=x.e^{-2x}$ $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-x}$?

$f(x)=x.\ln x$ ME DA MAL $f(x)=e^{-2x^2}$ SALIO $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$?

$$f(x)=\begin{cases} |3x-1| & x>0 \\ x^2+3x+1 & x\le 0 \end{cases}$$

27. Analice si el punto $x = 0$ es extremo local de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

NO PUEDO SACAR $f'(0)$

28. Pruebe que la función $f(x) = 2x^{99} + \frac{1}{3}x^{41} + 2x - 1$ no posee extremos locales.

29. Determine la función $g : \Re \to \Re \; / \; g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $g(-2) = 3$ sea máximo relativo y $g(1) = 0$ mínimo relativo.

$f_{(-2)} = 3 \quad f_{(1)} = 0$
DESPUES APLICAR GAUSS JORDAN $f'_{(-2)} = 0$ MAX $f'_{(1)} = 0$ MIN

30. La derivada segunda de un polinomio de 2° grado que pasa por el punto (1,17) es 4. Halle el polinomio si se sabe que tiene un mínimo local en $x = 1$.

$y = 2x^2 - 4x + 19$

31. Halle a, b y c tales que el gráfico de la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una recta tangente horizontal en el punto de inflexión (1,1).

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$

32. Sea la función $h : \Re \to \Re / h(x) = \begin{cases} x - 39 & si \;\; x \leq -4 \\ x^3 + 3x^2 - 9x & si \;\; -4 < x < 3 \\ 30 - x & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$

Determine los extremos locales de h. ¿Admite extremos globales? Justifique la respuesta.

33. Halle los máximos y mínimos globales, si existen, de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1 \;\; en \;\; [-2,2]$

b. $f(x) = x^5 + x + 1$

c. $f(x) = arcsen(x+1)$ en su dominio

d. $f(x) = x^2 . \ln x$ en $[e^{-1}, e]$ y $(0, +\infty)$

CON DUDA

34. Esboce un gráfico posible de una función que satisfaga las condiciones que se dan a continuación en cada caso, y determine las ecuaciones de sus asíntotas.

a. $Dom\, f = \Re - \{0\}$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$; f continua en $Dom\, f$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \;\; \wedge \;\; \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$; $\qquad \forall x \in \Re^- : f'(x) > 0$

$\forall x \in Dom f : f''(x) > 0$ y $f(2) = 4$ extremo relativo.

b. f diferenciable en $\Re$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f(0) = -2 \;\; \wedge \;\; f'(0) = 0$; $\qquad \forall x \in (-2;2) : f''(x) > 0$

$f''(-2) = f''(2) = 0 \qquad \wedge \qquad |f'(2)| = |f'(-2)|$

Trabajo práctico IV

① $f_{(x)} = \begin{cases} x^2-4 & si \quad x<1 \\ 5x-8 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ $\quad [-2, \frac{8}{5}]$

ⓐ $\lim_{x \to 1^-} x^2-4 = 1-4 = -3$

$\lim_{x \to 1^+} 5x-8 = 5-8 = -3$

f es continua en $[-2, \frac{8}{5}]$

ⓑ $f'_{(x)} = \begin{cases} 2x & si \quad x<1 \\ 5 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} 2x = 2$

$\lim_{x \to 1^+} 5 = 5$

f no es derivable en $x=1 \wedge 1 \in [-2, \frac{8}{5}]$
No cumple Rolle.

---

② $h_{(x)} = x^3-9x+1$ cumple Rolle $[0, b]$

ⓐ h es contina en $[0, b]$

ⓑ h es derivable en $(0, b)$

ⓒ $h_{(0)} = h_{(b)}$

$1 = b^3-9b+1$ $\qquad b_1 = 0$

$b^3-9b = 0$ $\qquad b_2 = 3$

$b^2-9 = 0$ $\qquad b_3 = -3$

$|b| = \pm 3$

Si $b = 3 \Rightarrow$

$h_{(x)} = x^3 - 9x + 1$

$h'_{(x)} = 3x^2 - 9 \Rightarrow h'_{(x)} = 0$ si:

$3x^2 - 9 = 0$ $\quad x^2 = 3$

$|x| = \pm\sqrt{3}$

$\boxed{C_1 = \sqrt{3}}$ $\quad \nexists\, C_2 = -\sqrt{3}$

---

④

$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{5x+4}{x+1} & x < 0 \\ (x+1)(x-2)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$\left[-\frac{5}{13}, \frac{1}{2}\right]$

ⓐ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5x+4}{x+1} = 4$

Es CONTINUA.

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1)(x-2)^2 = 4$

ⓑ $f'^{-}_{(x)} = \dfrac{5(x+1) - (5x+4)}{(x+1)^2} = \dfrac{\cancel{5x} + 5 - \cancel{5x} - 4}{(x+1)^2}$

$f'^{-}_{(x)} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f'^{+}_{(x)} = (x-2)^2 + 2(x+1)(x-2) = x^2 - 4x + \cancel{4} + 2x^2 - 2x - \cancel{4}$

$f'^{+}_{(x)} = 3x^2 - 6x$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 3x^2 - 6x = 0$

$\nexists\, f'_{(0)}$ $\quad x = 0 \in \left(-\frac{5}{13}, \frac{1}{2}\right)$

AGOSTI — TRABAJO PRÁCTICO IV — HOJA 2. 16/06/2010.

$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{5x+4}{x+1} & x<0. \\ (x+1)(x-2)^2 & x \geq 0. \end{cases} \qquad [0,3].$$

EN ESTE CASO $f'_{(0)}$ EN EL INTERVALO, $x=0.$, PUEDE O NO ESTAR INCLUIDO EN $(0,3)$ POR LO TANTO $\exists f'_{(0)}$ Y PASAMOS A:

ⓒ $f_{(0)} = f_{(3)}$

$(1)(-2)^2 = (4)(1)^2$

$4 = 4.$ CUMPLE ROLLE EN $[0,3]$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{SI } x<0 \\ 3x^2-6x & \text{SI } x \geq 0 \end{cases}$$

$3x(x-2) = 0.$

$x = 2.$

$\boxed{C = 2.}$

---

③ $f_{(x)} = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ $x=-1$ $\wedge$ $x=1$

$f'_{(x)} \neq 0$ EN $(-1,1)$

ⓐ CONTINUA POR POLINÓMICA.

ⓑ DERIVABLE POR POLINÓMICA.

ⓒ $f_{(-1)} = f_{(1)}$.

$1-(-1)^{\frac{2}{3}} = 1-(1)^{\frac{2}{3}}$.

$0 = 0.$

$f'_{(x)} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$f'_{(x)} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$\nexists f'_{(0)} \Rightarrow$ NO CUMPLE ROLLE.

5

6 $f_{(x)} = x^5 + 5x - 3.$

$f_{(0)} = -3.$ $f_{(1)} = 1 + 5 - 3 = 3.$

LA FUNCION PASA DE POSITIVA A NEGA-TIVA A MENOS EXISTE UNA RAIZ REAL.

$f_{(a)} < 0.$

$f_{(b)} > 0.$

$f_{(a)} \cdot f_{(b)} < 0. \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, f_{(c)} = 0.$

Agosti | Trabajo Práctico IV | 16/06/2010 Hoja 3.

(9) (a) $f_{(x)} = 2x^2+1 \quad [0,2]$

(a) Continua por polinómica.

(b) Derivable por polinómica. $f'_{(x)} = 4x.$

(c) $f'_{(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

$4c = \dfrac{9-1}{2-0}.$

$\boxed{c = \dfrac{4}{4} = 1.}$

$\exists c \in [0,2] \,/$ cumple Lagrange.

(b) $g_{(x)} = \sqrt{x} \quad [1,4]$

$D_g = [0,+\infty)$

(a) Continua en su dominio $\Rightarrow$ continua $[1,4]$.

(b) $g'_{(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \nexists\, g'_{(0)}$ Pero $x=0 \notin [1,4]$.

(c) $g'_{(c)} = \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}.$

$\dfrac{1}{2\sqrt{c}} = \dfrac{2-1}{4-1}.$

$2\sqrt{c} = \dfrac{3}{1}.$

$\sqrt{c} = \dfrac{3}{2}.$

$\boxed{c = \dfrac{9}{4} \in [1,4]}$

(c) $h_{(x)} = \dfrac{1}{1+x} \quad [0,2]$

$D_h = \mathbb{R} - \{-1\}.$

(a) Continua en su dominio $\Rightarrow$ continua $[0,2]$.

(b) $h'_{(x)} = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow \nexists\, h'_{(-1)}$ Pero $x=-1 \notin [0,2]$

ⓒ $h'(c) = \dfrac{h(b) - h(a)}{b - a}$

$$\frac{-1}{(1+c)^2} = \frac{\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+0}}{2-0}$$

$$\frac{-1}{(1+c)^2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (1+c)^2 = 3$$

$$1 + c = \sqrt{3}$$

$$\boxed{c_1 = \sqrt{3} - 1}$$

$$\cancel{\exists}\ c_2 = -\sqrt{3} - 1$$

ⓓ $w(x) = \cos x \qquad [0, \frac{\pi}{2}]$

ⓐ CONTINUA POR PERIÓDICA.

ⓑ DERIVABLE POR PERIÓDICA. $w'(x) = -\operatorname{sen} x$.

ⓒ $w'(c) = \dfrac{w(b) - w(a)}{b - a}$

$$-\operatorname{sen} c = \frac{0 - 1}{\frac{\pi}{2} - 0}$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c &= \operatorname{Arcsen}\left(\tfrac{2}{\pi}\right) \\ c &= 0{,}63 \end{aligned}}$$

ⓔ $\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases} \qquad [0, 2]$

ⓐ $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{3 - x^2}{2} = 1$

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1$

ⓑ

$\mu'(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$

Agosti

Trabajo práctico IV

Hoja 4.
16/06/2010

$$\lim_{x \to 1^-} -x = -1.$$

$$\lim_{x \to 1^+} -\frac{1}{x^2} = -1.$$

Para $x < 1$

ⓒ $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$-c = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2 - 0.} \Rightarrow -c = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{2}.}$$

Para $x \geq 1$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2 - 0.} \Rightarrow -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$c^2 = 2.$$

$$\boxed{c_2 = \sqrt{2}.}$$

$$\notin c_3 = -\sqrt{2}.$$

---

⑩ $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a.}$$ Lagrange

y como $f(a) = f(b)$ según Rolle.

$$f'(c) = \frac{0}{b-a} = 0 \qquad f'(c) = 0.$$

(12)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ bx + c & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(a) $\lim_{x \to 1^-} -x^2 + 3x + a = -1 + 3 + a = 2 + a$

$\lim_{x \to 1^+} bx + c = b + c$

$\lim_{x \to 1^-} = \lim_{x \to 1^+} \Rightarrow b + c = 2 + a$

$b + c = 2 + 3$

$b + c = 5$

$1 + c = 5$

$\lim_{x \to 0} = I_{m(0)} \Rightarrow$

$\boxed{c = 4}$

$\lim_{x \to 0} -x^2 + 3x + a = a \Rightarrow \boxed{a = 3}$

(b)

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -2x + 3 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ b & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} -2x + 3 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} b = b$

$\boxed{b = 1}$

15 a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ L'H.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\overset{\to 1}{\operatorname{sen} x}}{2x} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

---

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \dfrac{0-0}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ L'H.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \Rightarrow \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ L'H.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{2\sec x \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{6x} = \dfrac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ L'H

$\lim_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot 2\overset{\to 1}{\sec x}\, \overset{\to 1}{\sec x}\, \overset{\to 0}{\operatorname{tg} x} \cdot \overset{\to 0}{\operatorname{tg} x} + 2\overset{\to 1}{\sec^2 x} \cdot \overset{\to 1}{\sec^2 x}}{6}$

$\dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}} \quad \boxed{\dfrac{1}{3}}$

---

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ L'H.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{2^x \ln 2}{1} = \boxed{\ln 2}$

---

d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ L'H.

$\lim_{x \to 0} \dfrac{2^x \ln 2 - 3^x \ln 3}{1} = \boxed{\ln 2 - \ln 3}$

---

e) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ L'H.

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\cos \frac{1}{x} \cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}} = \dfrac{\cos \frac{1}{x}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}}$

Agosti Trabajo Práctico IV Hoja 6
16/06/2010.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to 1}{\cos \frac{1}{x}}}{\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2}}_{\substack{\text{COCIENTE} \\ \text{IGUAL GRADO}}} \to 1} = \boxed{1}$$

(f) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - \cos(ax)}{e^{bx} - \cos(bx)} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow L'H.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ae^{ax} + \operatorname{sen}(ax)\, a}{be^{bx} + \operatorname{sen}(bx)\, b} = \frac{a \, (\overset{\to 1}{e^{ax}} + \overset{\to 0}{\operatorname{sen}(ax)})}{b \, (\underset{\to 1}{e^{bx}} + \underset{\to 0}{\operatorname{sen}(bx)})}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}}$$

(g) $$\lim_{x \to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e-e}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow L'H.$$

$$\lim_{x \to 0} -(1+x)^{\frac{1}{x}} \Big(\underbrace{-\frac{1}{x^2} \ln(1+x)}_{\to 0} + \frac{1}{x+x^2} \Big)$$

$$-(1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)} \right)$$

$$-(1+x)^{\frac{1}{x}} \Bigg(\underbrace{\frac{\overset{\to 0}{-(1+x)\ln(1+x)} + \overset{\to 0}{x}}{x^2 \underset{\to 0}{(1+x)}}}_{\text{APLIQUE } L'H.} \Bigg)$$

Auxiliar: $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \ln (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x} \frac{1}{1+x}$$

$$y' = \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x+x^2} \right) (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{-(1)\ln(1+x) + (-(1+x)) \frac{1}{1+x} + 1}{2x(1+x) + x^2(1)} =$$

$$\frac{-\ln(1+x) + \frac{\overbrace{-1-x}^{-1(1+x)}}{1+x} + 1}{2x+2x^2+x^2} = \frac{-\ln(1+x) \cancel{-1} \cancel{+1}}{2x+3x^2}$$

$$\frac{-\ln(1+x)}{\underbrace{2x+3x^2}_{\to 0}} \Rightarrow L'H. \quad \frac{-\frac{1}{1+x}}{2+\underbrace{6x}_{\to 0}} = -\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{(2+6x)}$$

$$-e\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{+\frac{e}{2}}$$

ⓗ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow L'H.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow L'H \Rightarrow \boxed{\frac{e^x}{n!} = +\infty.}$$

ⓘ $\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln x = \frac{\ln x}{x^{-3}} \Rightarrow L'H.$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{4}\,3}}{-3} = \boxed{\frac{x^3}{-3} = 0.}$$

---

③ $\lim_{x \to 0} \operatorname{arcsen} x \operatorname{cotg} x = \frac{0}{0} \Rightarrow L'H.$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sec^2 x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{+\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\boxed{1}$$

Agosti — Trabajo Práctico IV — Hoja 7
16/06/2010.

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{\text{arctg}\,x}}_{\to 0} = \infty - \infty. \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{arctg}\,x - x}{\underbrace{x\,\text{arctg}\,x}_{\to 0}} = \frac{0}{0} \Rightarrow L'H.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{\text{arctg}\,x + x\,\frac{1}{1+x^2}} = \frac{\frac{1-1-x^2}{1+x^2}}{\frac{(1+x^2)\,\text{arctg}\,x + x}{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\cancel{1+x^2}} \cdot \frac{\cancel{1+x^2}}{(1+x^2)\,\text{arctg}\,x + x} = \frac{\overset{\to 0}{-x^2}}{\underbrace{(1+x^2)\,\text{arctg}\,x}_{\to 0} + \underbrace{x}_{\to 0}} \Rightarrow L'H$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{2x\,\text{arctg}\,x + \cancel{(1+x^2)}\,\frac{1}{\cancel{1+x^2}} + 1}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}x\,\text{arctg}\,x + \cancel{2}} = \frac{-x}{x\,\text{arctg}\,x + 1} \; \boxed{= 0.}$$

(l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{2x + 3\,\text{sen}\,x} =$ Divido por x.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{2x}{x} + \underbrace{\frac{3\,\text{sen}\,x}{x}}_{\to 0}} = \boxed{\frac{1}{2}.}$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}}}_{\longrightarrow e}{}^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\cos x - 1}{1}}$$

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} \Rightarrow L'H \qquad \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} \Rightarrow L'H.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{e^{-\frac{1}{2}}}$$

---

(16)

$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad g(0) = g'(0) = 0. \quad g''(0) = 17.$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{g'(x)\,x - g(x)}{x^2} \longrightarrow L'H. & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{g''(x)\,x + g'(x) - g'(x)}{2x} \longrightarrow L'H. & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{g'''(x)\,x + g''(x) + \cancel{g''(x)} - \cancel{g''(x)}}{2.} & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{17}{2} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Falso.}}$$

Agosti | Trabajo práctico IV | Hoja 8
16/06/2010.

(17) $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2 e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0}{x^3 \to 0.} & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

L'H

$$\frac{2\,2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2.} \qquad x \neq 0.$$

$$0 \qquad x = 0.$$

$$\frac{4 e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0}{3x^5. \to 0.}$$

(18)

$$f_{(x)} = \begin{cases} e^x - x - 1 & x \geq 0. \\ x^3 & x < 0. \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} e^x - 1 & x \geq 0. \\ 3x^2 & x < 0. \end{cases}$$

$f'^{+}_{(0)} = 1 - 1 = 0.$ $\qquad \exists f'_{(0)}.$

$f'^{-}_{(0)} = 0.$

$$f''_{(x)} = \begin{cases} e^x & x \geq 0. \\ 6x & x < 0. \end{cases}$$

$f''^{+}_{(0)} = 1.$ $\qquad \nexists f''_{(0)}.$

$f''^{-}_{(0)} = 0$

ES DERIVABLE HASTA EL PRIMER ORDEN.

---

(19)

$$f_{(x)} = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1. \\ xe^{x-1} & x \geq 1. \end{cases} \qquad [0,2]$$

$\lim_{x \to 1^-} ax^2 + b = a + b.$

$a + b = 1.$

$\lim_{x \to 1^+} xe^{x-1} = 1.$ $\qquad \boxed{b = 1 - \cancel{a} = 0.}$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} 2ax & x < 1. \\ e^{x-1}(1+x) & x \geq 1. \end{cases}$$

$f'^{-}_{(1)} = 2a.$

$2a = 2.$

$f'^{+}_{(1)} = 2$ $\qquad \boxed{a = 1.}$

Agosti — Trabajo Práctico IV — Hoja 9 16/06/2010.

(20)

$$g(x)\begin{cases}(x-2)\,e^{\frac{1}{2-x}} & \text{si } x\neq 2.\\ 0 & \text{si } x=2.\end{cases}$$

$$g'(x)= e^{\frac{1}{2-x}} + (x-2)-e^{\frac{1}{2-x}}(2-x)^{-2}(-1). \quad \text{si } x\neq 2$$

$$0 \quad \text{si } x=2.$$

$$e^{\frac{1}{2-x}} + \frac{\overset{-1}{\cancel{(x-2)}}\,e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^{\cancel{2}}}$$

$$g'(x)\begin{cases}e^{\frac{1}{2-x}} - \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{2-x}. & \text{si } x\neq 2.\\ 0 & \text{si } x=2\end{cases}$$

$$g'(x)\begin{cases}e^{\frac{1}{2-x}}\left(1-\dfrac{1}{2-x}\right) & \text{si } x\neq 2\\ 0 & \text{si } x=2.\end{cases}$$

$$g'(x)\begin{cases}e^{\frac{1}{2-x}}\left(\dfrac{-x+1}{2-x}\right) & \text{si } x\neq 2\\ 0 & \text{si } x=2.\end{cases}$$

$g'(2)=0.$

SI ES DERIVABLE EN $x=2$.

---

(21) (a) $f(x) = -x^2+2x-1$

$f'(x) = -2x+2.$

$f'(x)=0$ si

$-2x+2=0.$

$x = 1.$

$-2x+2>0.$ $\qquad$ $-2x+2<0.$

$-2x>-2.$ $\qquad$ $-2x<-2.$

$\boxed{x<1. \quad (-\infty,1] \text{ CRECE}}$ $\qquad$ $\boxed{x>1. \quad [1,+\infty) \text{ DECRECE.}}$

ⓑ $g(x) = x e^x \Rightarrow g'(x) = e^x + x e^x = e^x(1+x)$.

$g'(-1) = 0$.

$e^x(1+x) > 0$.

$1+x > 0$.

$x > -1$.

$\boxed{[-1, +\infty) \text{ CRECE}}$

$e^x(1+x) < 0$.

$1+x < 0$.

$x < -1$.

$\boxed{(-\infty, -1] \text{ DECRECE}}$

ⓒ $h(x) = \dfrac{x}{\ln x} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{\ln x - x\frac{1}{x}}{\ln x^2}$.

$h'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

$h'(x) = 0$ si

$\ln x - 1 = 0$.

$\ln_a x_b = 1_c$

$e^1 = b$.

$e = x = e$.

$\ln x - 1 > 0$.

$\ln_a x_b > 1_c$.

$e^1 < x$.

$e < x$

$\boxed{[e, +\infty) \text{ CRECE}}$

$\ln x - 1 < 0$.

$\ln_a x_b < 1_c$.

$e^1 > x$.

$e > x$.

$(-\infty, e]$ HAY QUE DEFINIR EN SU DOMINIO.

$\boxed{\text{DECRECE. } (0, 1) \cup (1, e]}$

AGOSTI — TRABAJO PRÁCTICO IV — HOJA 10
16/06/2010.

ⓓ $i_{(x)} = \dfrac{x}{1+x^2.} \Rightarrow i'_{(x)} = \dfrac{1+x^2 - x(2x)}{(1+x^2)^2.}$

$i'_{(x)} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2.} \Rightarrow i'_{(x)} = 0$ SI $1 - x^2 = 0.$

$1 - x^2 > 0.$

$1 > x^2$

$1 < x < -1.$

$\boxed{[1, -1] \text{ CRECE}}$

$1 - x^2 < 0.$

$1 < x^2.$

$x > 1 \quad \wedge \quad x < -1.$

$\boxed{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ DECRECE.}}$

㉒ $(-1, 0]$ RECTA TANGENTE POSITIVA

$(0, 3.]$ RECTA TANGENTE NEGATIVA

$(3., 4{,}5]$ RECTA TANGENTE POSITIVA

$(4{,}5, 5]$ RECTA TANGENTE NEGATIVA.

ⓑ $x = 0 \qquad f' = 0.$

$x = 3 \qquad f' = 0$

$x = 4{,}5. \qquad f' = 0.$

㉓ ⓐ ⓐ $g' > 0$ EN $(-\infty, -3] \cup [1, 5] \cup [6, +\infty]$ CRECE.

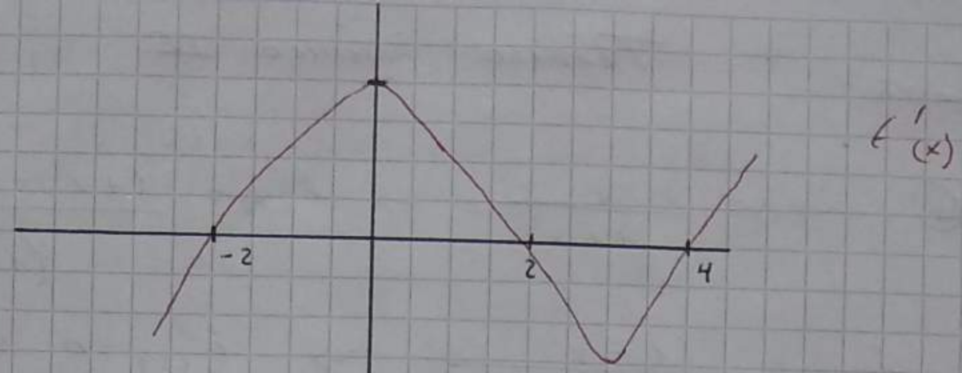
$g' < 0$ EN $[-3, 0] \cup [5, 6].$

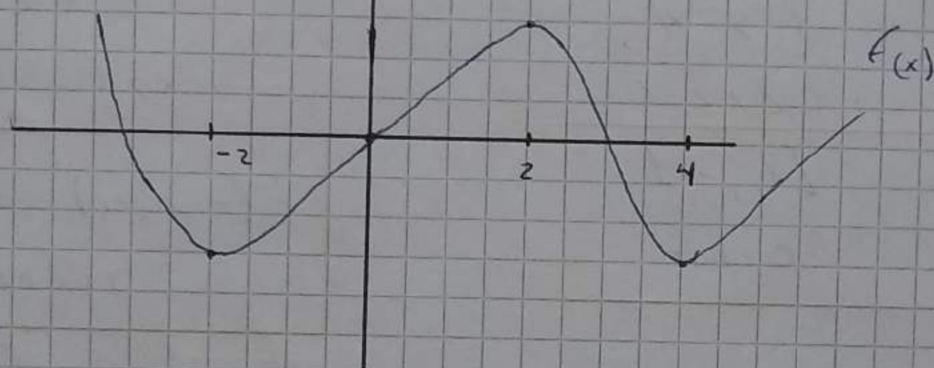
ⓑ $x = -3 \qquad x = 0 \qquad x = 5 \qquad x = 6.$

ⓒ $(-\infty, 1{,}5) \cup (2{,}5, 5{,}5)$ CONVEXA. NEGATIVA

$(1{,}5, 2{,}5) \cup (5{,}5, +\infty)$ CONCAVA POSITIVA.

(24)





(25) (a) $f(x) = (x-2)\, x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)\,\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + (x-2)\,\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} + -(x-2)\,\frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}$$

$$\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left(1 - (x-2)\,\frac{1}{6}\,x^{-1}\right)$$

$$\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\left(1 + (-x+2)\,\frac{1}{6x}\right)$$

$$\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\left(1 - \frac{\cancel{x}}{6\cancel{x}} + \frac{2}{6x}\right)$$

$$\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3x}\right)$$

$$\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3x}\right).$$

$f''_{(x)}$ NO ESTA DEFINIDA EN $x=0$.

$f''_{(x)}=0$ SI $\quad \frac{5}{6}+\frac{1}{3x}=0.$

$$\frac{15x+6}{6 \cdot 3x}=0.$$

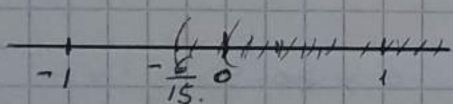
$$15x+6=0.$$

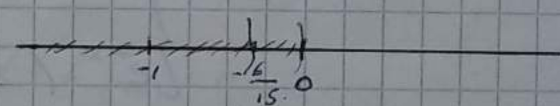
$$x=-\frac{6}{15}$$

$f''_{(x)}>0$. SI

$15x+6>0 \quad \wedge \quad 18x>0 \quad \vee \quad 15x+6<0 \quad \wedge \quad 18x<0.$

$x>\frac{-6}{15} \quad \wedge \quad x>0 \quad \vee \quad x<\frac{-6}{15} \quad \wedge \quad x<0.$





$(0,+\infty) \qquad\qquad (-\infty,-\frac{6}{15})$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{CONCAVA POSITIVA } (0,+\infty)\cup(-\infty,-\frac{6}{15}). \\ \text{CONCAVA NEGATIVA } (-\frac{6}{15},0).\end{array}}$$

$$-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}.$$

---

(6) $\quad g_{(x)}=|x|\,e^{|x|}$ 17/06/2010.

$$g_{(x)}=\begin{cases} x\,e^{x} & \text{SI } x>0. \\ -x\,e^{-x} & \text{SI } x<0.\end{cases}$$

$$g'_{(x)}\begin{cases} e^{x}+x\,e^{x} & \text{SI } x>0. \\ -e^{-x}+x\,e^{-x} & \text{SI } x<0.\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} e^{x}(1+x) & \text{si } x>0. \\ e^{-x}(-1+x) & \text{si } x<0. \end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases} e^{x}(1+x)+e^{x} & \text{si } x>0. \\ -e^{-x}(-1+x)+e^{-x}(1) & \text{si } x<0. \end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases} e^{x}(1+x+1) & \text{si } x>0. \\ e^{-x}(-1(-1+x)+1) & \text{si } x<0. \end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases} e^{x}(2+x) & \text{si } x>0. \\ e^{-x}(2-x) & \text{si } x<0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x}(2+x) = 2.$$

$\exists\ g''(x)$ EN $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{x}}(2-x) = 2.$$

$g''(x)>0$ si $2+x>0$.

$x>-2$.

$g''(x)<0$ si $2-x<0$.

$2<x$

$g''(-1{,}9) = \frac{1}{e^{-1{,}9}}(2-1{,}9) = +$

$g''(2{,}1) = e^{2{,}1}(2+2{,}1) = +$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{No existe punto de inflexión.} \\ \text{Concava positiva en} \\ (-\infty,0)\cup(0,+\infty).\end{array}}$$

ⓒ $h_{(x)} = \ln(x^2-6x+8)$.

$$h'_{(x)} = \frac{2x-6}{x^2-6x+8}$$

$$h''_{(x)} = \frac{2(x^2-6x+8)-(2x-6)(2x-6)}{(x^2-6x+8)^2}$$

$$h''_{(x)} = \frac{2x^2-12x+16-(4x^2-24x+36)}{(x^2-6x+8)^2}$$

$$h''_{(x)} = \frac{-2x^2+12x-20}{(x^2-6x+8)^2} = \frac{2(-x^2+6x-10)}{(x^2-6x+8)^2}$$

$-x^2+6x-10=0$.

$-6 \pm \sqrt{36-40}$

$\nexists\ x_0 \,/\, f''_{(x_0)} = 0$.

$$h''_{(0)} = \frac{2(-10)}{64} = \ominus.$$

$$h''_{(1)} = \frac{2(-1+6-10)}{(1-6+8)^2} = \ominus.$$

$$h''_{(-1)} = \frac{2(-1-6-10)}{(1+6+8)^2} = \ominus.$$

$\boxed{\text{CONCAVIDAD NEGATIVA.}}$

㉖ ⓐ $f_{(x)} = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

ⓐ $Df = \mathbb{R} - \{0\}$.

ⓑ No corta los ejes.

$f_{(-x)} = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x}$ $\quad -f_{(-x)} = \frac{-x^2-1}{-x} = \frac{x^2+1}{x}$.

Es impar.

c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$

$x = 0$ AV.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \frac{1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}} = +\infty$.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1$.

$m = 1$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \frac{x^2+1}{x} - x$.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x} = \frac{1}{x} = 0. = b$.

$y = mx + b = x$ AO

d) $f'(x) = \frac{2x(x) - (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

$f'(x) > 0$ si

$x^2 - 1 > 0$.

$x^2 > 1$

$x > 1 \wedge x < -1$

$f'(x) < 0$ si

$x^2 - 1 < 0$.

$x^2 < 1$.

$-1 < x < 1$.

$\nexists f'(0) \Rightarrow$

$\oplus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$f'(-2) = \frac{4-1}{4} = \oplus$

$f'(0{,}5) = \frac{(0{,}5)^2-1}{(0{,}5)^2} = \ominus$

$f'(0{,}5) = \ominus$

e) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ INT CRECIMIENTO.

$[-1, 1]$ INT DECRECIMIENTO.

PUNTOS CRITICOS $x = -1$
$x = 1$.

Agosti | Trabajo práctico IV | Hoja 13
17/06/2010.

(f) $f''_{(x)} = \dfrac{2x\,x^2 - (x^2-1)\,2x}{(x^2)^2} = \dfrac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}$

$f''_{(x)} = \dfrac{2}{x^3}$

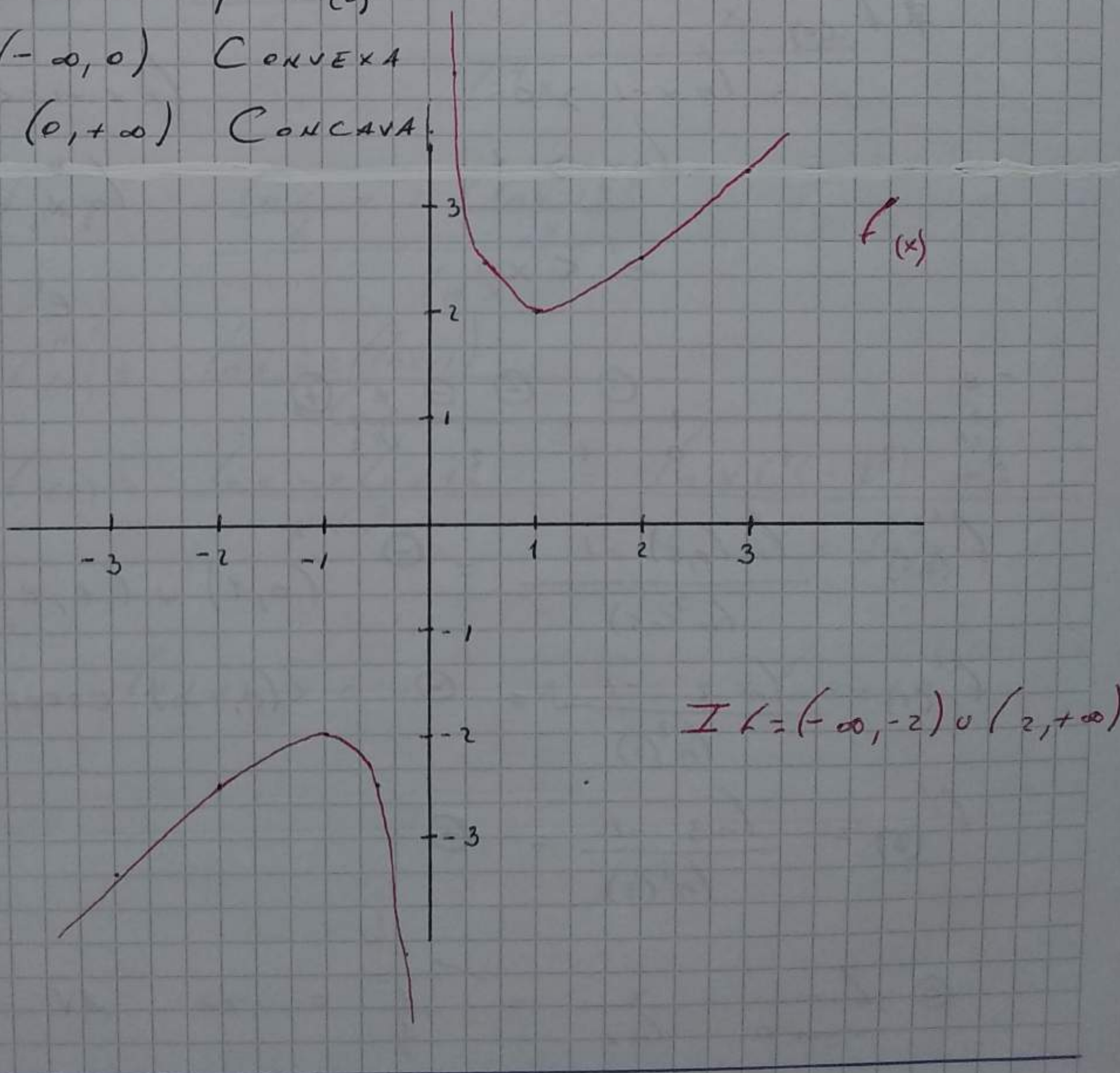
$f''_{(-1)} = \dfrac{2}{(-1)^3} = -2.$ $x = -1$ Máximo $P_1 = (-1, -2)$.

$f''_{(1)} = \dfrac{2}{(1)^3} = 2$ $x = 1$ Mínimo $P_2 = (1, 2)$

$\nexists\, f''_{(0)}$.

$(-\infty, 0)$ Convexa

$(0, +\infty)$ Concava.



(b) $f_{(x)} = \dfrac{x}{\ln x}$

(a) $Df = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(b) No INTERSECTA LOS EJES.

$f_{(-x)} = \dfrac{-x}{\ln(-x)} =$ No ES PAR NI IMPAR.

(e) $f'_{(x)} = \dfrac{\ln x - x\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

$\nexists f'_{(0)}$.

$\ln x - 1 > 0$

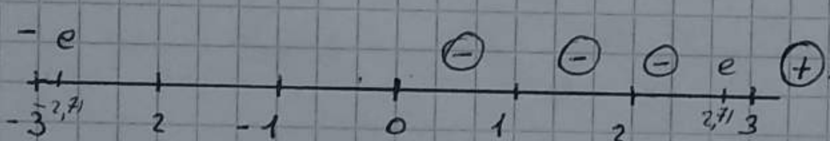
$\ln_a x_b > 1_c$

$e^1 < x$

$\ln x - 1 < 0$.

$\ln_a x_b < 1_c$.

$e^1 > x$.



$f'_{(0,5)} = \dfrac{\ln(0,5) - 1}{\ln^2(0,5)} = ⊖$. $(0,1) \cup (1, e)$ DECRECE.

$f'_{(2)} = \dfrac{\ln 2 - 1}{\ln^2(2)} = ⊖$. $(e, +\infty)$ CRECE.

$f'_{(3)} = \dfrac{\ln 3 - 1}{\ln^2(3)} = ⊕$

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln x} \overset{L'H}{=} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$ AV.

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ AV.

Agosti | Trabajo práctico IV | Hoja
17/06/2010.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} \overset{L'H}{=} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\ln x} = 0.$$

$\nexists$ AO.

(c) $$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln^2 x) - (\ln x - 1)\, 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x.}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - 2\ln x \frac{(\ln x - 1)}{x}}{\ln^4 x.}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{\ln x}{x} - 2\frac{(\ln x - 1)}{x}}{\ln^3 x.}$$

$$f''(x) = \frac{\ln x - 2(\ln x - 1)}{x \ln^3 x.}$$

$$f''(x) = \frac{\ln x - 2\ln x + 2}{x \ln^3 x.} = \frac{\ln x(1-2) + 2.}{x \ln^3 x.}$$

$f''(x) > 0.$

$-\ln x + 2 > 0 \quad \wedge \quad x \ln^3 x > 0.$

ⓒ $f_{(x)} = x e^{-2x} = \dfrac{x}{e^{2x}}$

ⓐ $Df = \mathbb{R}$.

ⓑ $f_{(-x)} = \dfrac{-x}{e^{-2x}} = -x\, e^{2x} \Rightarrow -f_{(-x)} = x e^{2x}$.

No es par ni impar.

ⓒ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} \overset{L'H}{=} \dfrac{1}{2e^{2x}} = 0$.

$y = 0$ AH.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} \overset{L'H}{=} \dfrac{1}{2e^{2x}} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x} e^{2x}} = \dfrac{1}{e^{2x}} = +\infty \quad \nexists$ AO.

ⓓ $f'_{(x)} = e^{-2x} + x\, e^{-2x}(-2) = e^{-2x}(1 - 2x)$.

$f'_{(x)} > 0$ si

$1 - 2x > 0$.

$1 > 2x$

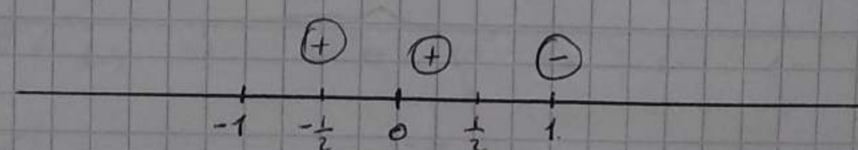
$\frac{1}{2} > x$

$f'_{(x)} < 0$ si

$1 - 2x < 0$.

$1 < 2x$

$\frac{1}{2} < x$



$f'_{(-1)} = \dfrac{1}{e^{-2}}(1+2) = +$.

$f'_{(0)} = (1-0) = +$.

$f'_{(1)} = \dfrac{1}{e^{2}}(-1) = -$.

$(-\infty, \frac{1}{2})$ Crecimiento

$(\frac{1}{2}, +\infty)$ Decrecimiento.

(f) $f''_{(x)} = -2e^{-2x}(1-2x) + e^{-2x}(-2)$

$f''_{(x)} = -2e^{-2x}(1-2x+1)$

$f''_{(x)} = -2e^{-2x}(-2x+2)$

$f''_{(\frac{1}{2})} = \dfrac{-2}{e^{+2(\frac{1}{2})}}\left(-2\tfrac{1}{2}+2\right) = \dfrac{-2}{e}(-1+2) = \ominus$

$x = \frac{1}{2}$ MÁXIMO. $P = (\frac{1}{2},$

$f''_{(x)} > 0$ SI

$-2x+2 > 0$

$-2x > -2$

$x < 1$

$f''_{(x)} < 0$ SI

$-2x+2 < 0$

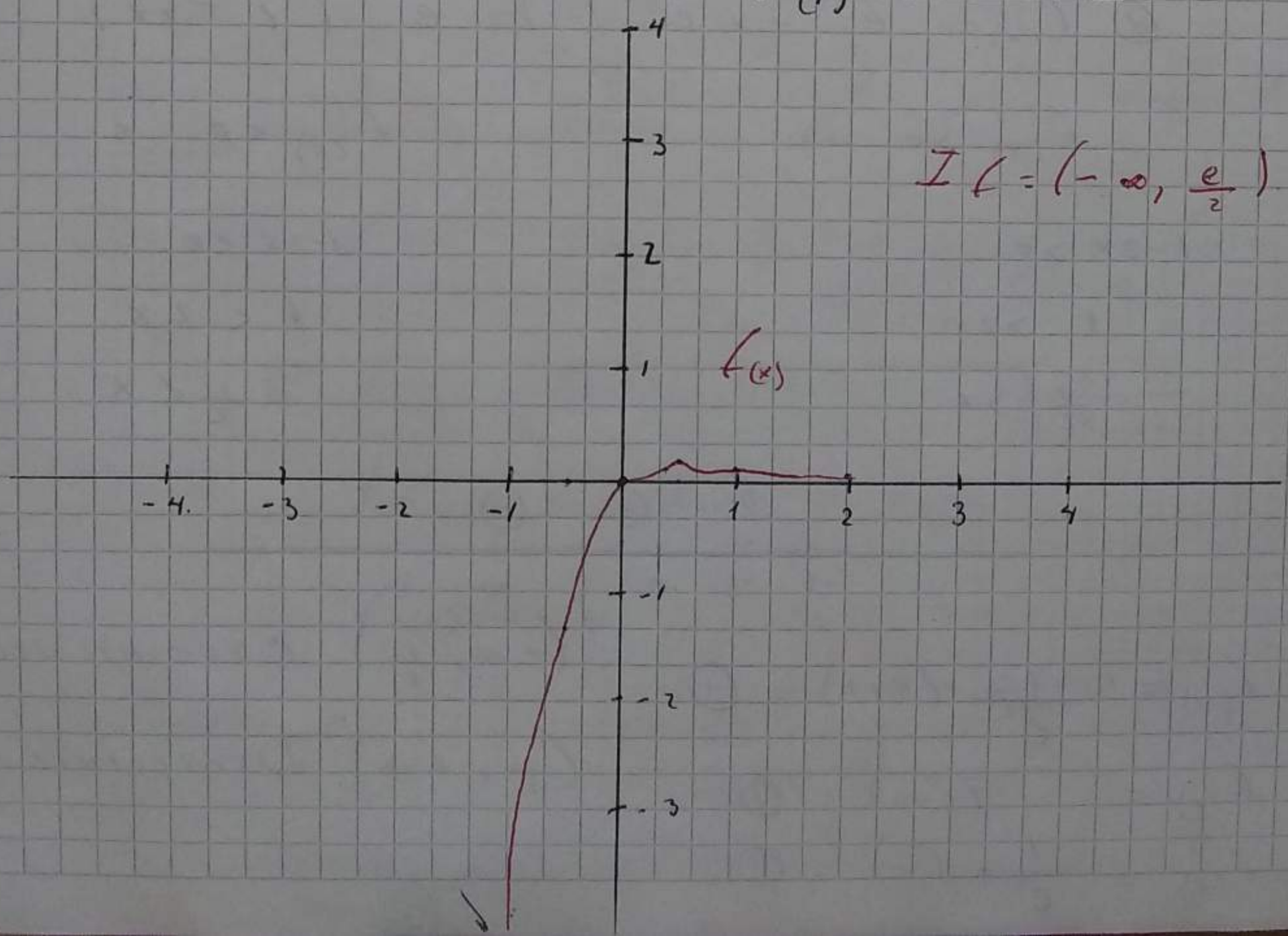
$-2x < -2$

$x > 1$

$(-\infty, 1)$ CONCAVIDAD NEGATIVA.

$(1, +\infty)$ CONCAVIDAD POSITIVA.

$f''_{(1)} = 0$. PI.



Agosti — Trabajo Práctico IV — Hoja — 18/06/2010

(d) $f_{(x)} = \dfrac{1}{2x^2 - x} = (2x^2 - x)^{-1}$

(a) $2x^2 - x \neq 0 \Rightarrow x(2x - 1) \neq 0$

$Df = R - \{0, \frac{1}{2}\}$ $\quad x_1 \neq 0$ $\quad x_2 \neq +\frac{1}{2}$

(b) $f_{(-x)} = \dfrac{1}{2(-x)^2 - (-x)} = \dfrac{1}{2x^2 + x} \Rightarrow -f_{(-x)} = \dfrac{-1}{2x^2 + x}$

No es par ni impar.

No intersecta los ejes.

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2x^2 - x} = \infty$ $\quad x = 0$ AV.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{2x^2 - x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{1}{2x^2 - x} = \infty.$ $\quad x = \frac{1}{2}$ AV.

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{1}{2x^2 - x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f_{(x)} = 0.$ AH

(d) $f'_{(x)} = -(2x^2 - x)^{-2}(4x - 1) = \dfrac{-4x + 1}{(2x^2 - x)^2}$

$\nexists f'_{(x)}$ si $x = 0$ ó $x = \frac{1}{2}.$

$f'_{(x)} = 0$ si $\Rightarrow -4x + 1 = 0.$

$x = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$

$-4x + 1 > 0$ $\qquad -4x + 1 < 0.$

$1 > 4x$ $\qquad 1 < 4x$

$\frac{1}{4} > x$ $\quad f'_{(x)} > 0$ $\qquad \frac{1}{4} < x$ $\quad f'_{(x)} < 0.$

ⓔ

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & + & & + & & + & & + & & - & & - \; - & \\ -1 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & 0 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2} & & 1 \end{array}$$

$f'_{(-\frac{3}{4})} = +$ $\qquad$ $f'_{(\frac{3}{4})} = -$

$f'_{(-\frac{1}{8})} = +$ $\qquad$ $f'_{(\frac{1}{8})} = +$

$f'_{(-1)} = +$ $\qquad$ $f'_{(1)} = -$

$(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{4})$ ---- CRECE.

$x = \frac{1}{4}$ PUNTO CRÍTICO.

$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ ---- DECRECE

ⓕ $f''_{(x)} = \dfrac{-4((2x^2-x)^2) - (-4x+1)(2x^2-x)^2}{(2x^2-x)^4}$

$$f''_{(x)} = \frac{-4\left[4x^4-4x^3+x^2\right] - \left[-4x+1\right]\left[4x^4-4x^3+x^2\right]}{}$$

$$\frac{(4x^4-4x^3+x^2)\left[-4-(-4x+1)\right]}{(2x^2-x)^4}$$

$$\frac{x^2(4x^2-4x+1)(4x-5)}{(2x^2-x)^4}$$

$$\frac{4\cancel{x^2}(x-\frac{1}{2})^2(4x-5)}{\cancel{x^4}^{\,2}(2x-1)^4}$$

$$f''_{(x)} = \frac{4(x-\frac{1}{2})^2(4x-5)}{x^2(2x-1)^4}$$

Agosti — Trabajo Práctico IV — 18/06/2010.

$f''_{(x)} = 0$ si $4x-5=0$

$x = \frac{5}{4}$

$\nexists\, f''_{(\frac{1}{2})} \wedge f''_{(0)}$

$f''_{(x)} > 0$ si $4x-5>0$, $x > \frac{5}{4}$

$f''_{(x)} < 0$ si $4x-5<0$, $x < \frac{5}{4}$

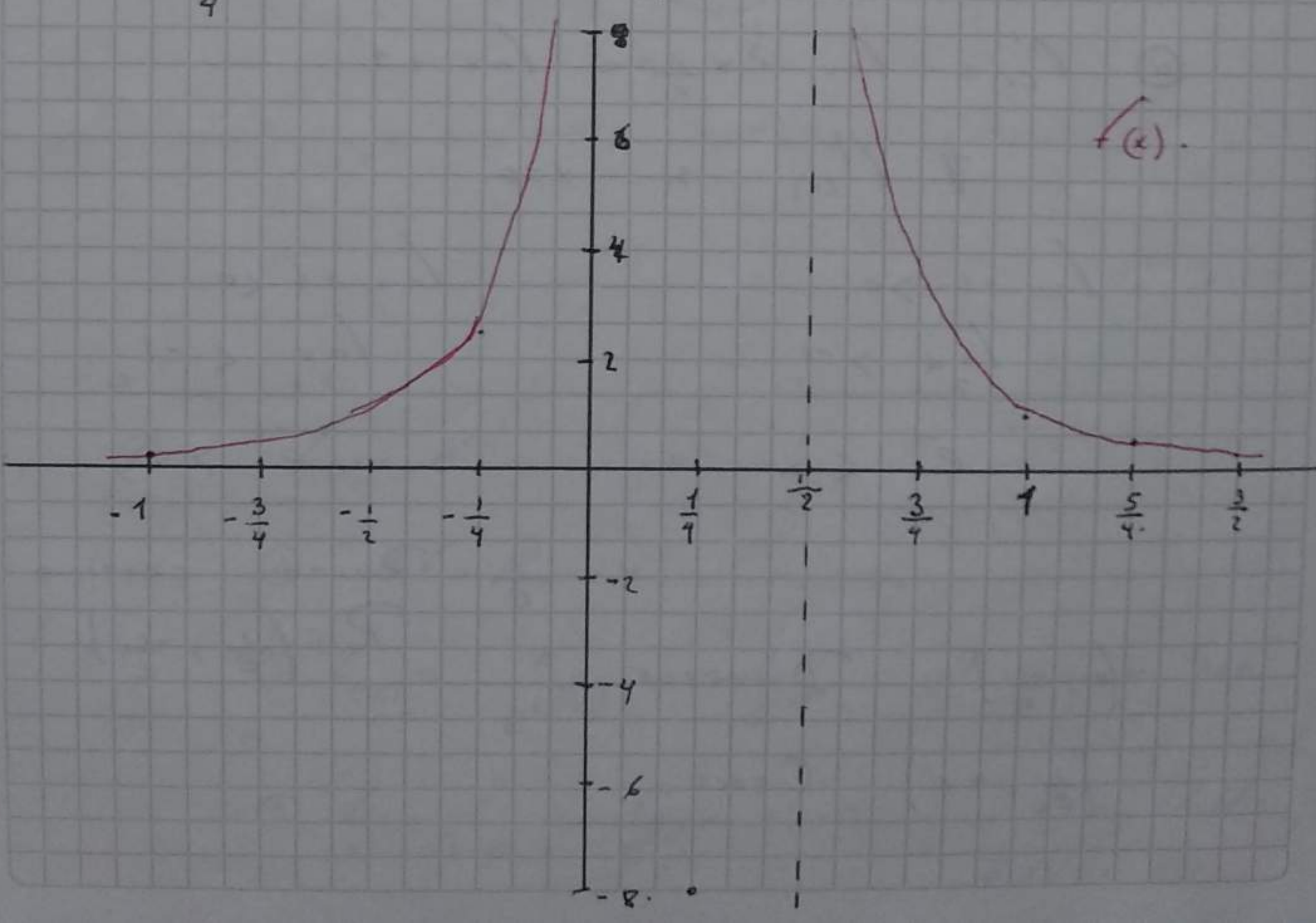
$(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ Convexa.

$(\frac{5}{4}, +\infty)$ Concava.

$f''_{(\frac{1}{4})} = \ominus$ $\quad x = \frac{1}{4}$ Máximo.

$P_{to} = (\frac{1}{4}, -8)$

$x = \frac{5}{4}$ P_{to} inflexion.



ⓔ $f(x) = x \ln x$ $\Rightarrow$ ⓐ $Df = (0, +\infty)$

ⓑ $f_{(-x)} = -x \ln(-x) =$

ⓒ $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$. $\nexists$ AV $x=0$.

$\lim_{x \to +\infty} x \ln x = \infty$.

$\lim_{x \to -\infty} x \ln x = -\infty$. No HAY ASINTOTAS.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} \ln x}{\cancel{x}} = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x \ln x}{x} = \infty$

ⓓ $f'_{(x)} = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$\nexists f'_{(x)}$ si $x=0$.

$\ln x + 1 > 0$ $\qquad$ $\ln x + 1 < 0$.

$\ln_{a} x_{b} > -1_{c}$ $\qquad$ $\ln_{a} x_{b} < -1_{c}$.

$e^{-1} < x$ $\qquad$ $e^{-1} > x$.

$x = \frac{1}{e}$ PUNTO CRITICO.

$P_{TC}: \left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$

$\left(0, \frac{1}{e}\right]$ DECRECE.

$\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ CRECE.

Agosti TRABAJO PRÁCTICO IV

18/06/2010.

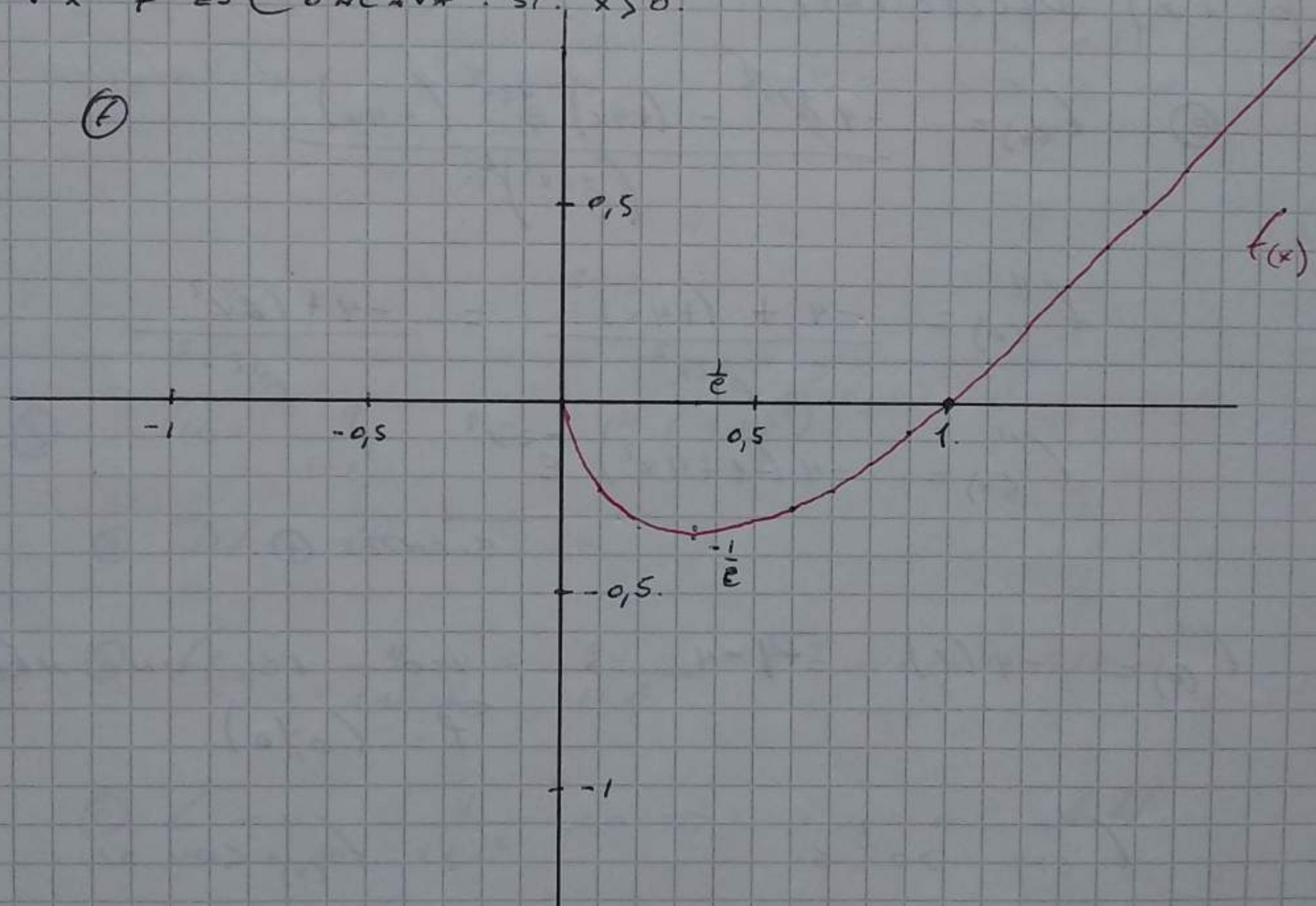
(e) $f''_{(x)} = \frac{1}{x.}$

$f''_{(\frac{1}{e})} = e$ (+). $x = \frac{1}{e}$ Mínimo.

$\frac{1}{x} >$ $\frac{1}{x} <$.

$\forall_x$ f es Concava si $x > 0$.

(f)



(f) $f_{(x)} = e^{-2x^2} = \frac{1}{e^{2x^2}}$

(a) $Df = \mathbb{R}$.

(b) $f_{(-x)} = \frac{1}{e^{2(-x)^2}} = \frac{1}{e^{2x^2}}$ Funcion PAR.

(c) $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{e^{2x^2}} = 0$ $y = 0$ AH.

$\nexists$ AV $\wedge$ HO

(d) $f'_{(x)} = -4xe^{-2x^2} = \dfrac{-4x}{e^{+2x^2}}$

Si $x = 0 \Rightarrow f'_{(x)} = 0$ Punto crítico.

$-4x > 0$ | $-4x < 0$

$x < 0$ | $x > 0$.

$(-\infty, 0]$ Creciente.

$[0, +\infty)$ Decreciente.

(e) $f''_{(x)} = \dfrac{-4\cancel{e^{+2x^2}} - (-4x)\,\cancel{e^{+2x^2}}\,(+4x)}{(e^{+2x^2})^{\cancel{2}}}$

$f''_{(x)} = \dfrac{-4 + (+4x)^2}{e^{+2x^2}} = \dfrac{-4 + 16x^2}{e^{+2x^2}}$

$f''_{(x)} = -4(-1 + 4x^2)\,\underbrace{e^{-2x^2}}_{\text{siempre } +}$

$f''_{(0)} = -4(1) = +4 \Rightarrow$ $x = 0$ es un mínimo.

$P = (0, 1)$.

$f''_{(x)} > 0$ si | $f''_{(x)} < 0$ si.

$-1 + 4x^2 > 0$ | $-1 + 4x^2 < 0$.

$4x^2 > 1$ | $4x^2 < 1$

$x^2 > \frac{1}{4}$ | $x^2 < \frac{1}{4}$.

$x > \frac{1}{2} \wedge x < -\frac{1}{2}$. | $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

$f''_{(-1)} = \dfrac{-4-16}{e^2} = -$.

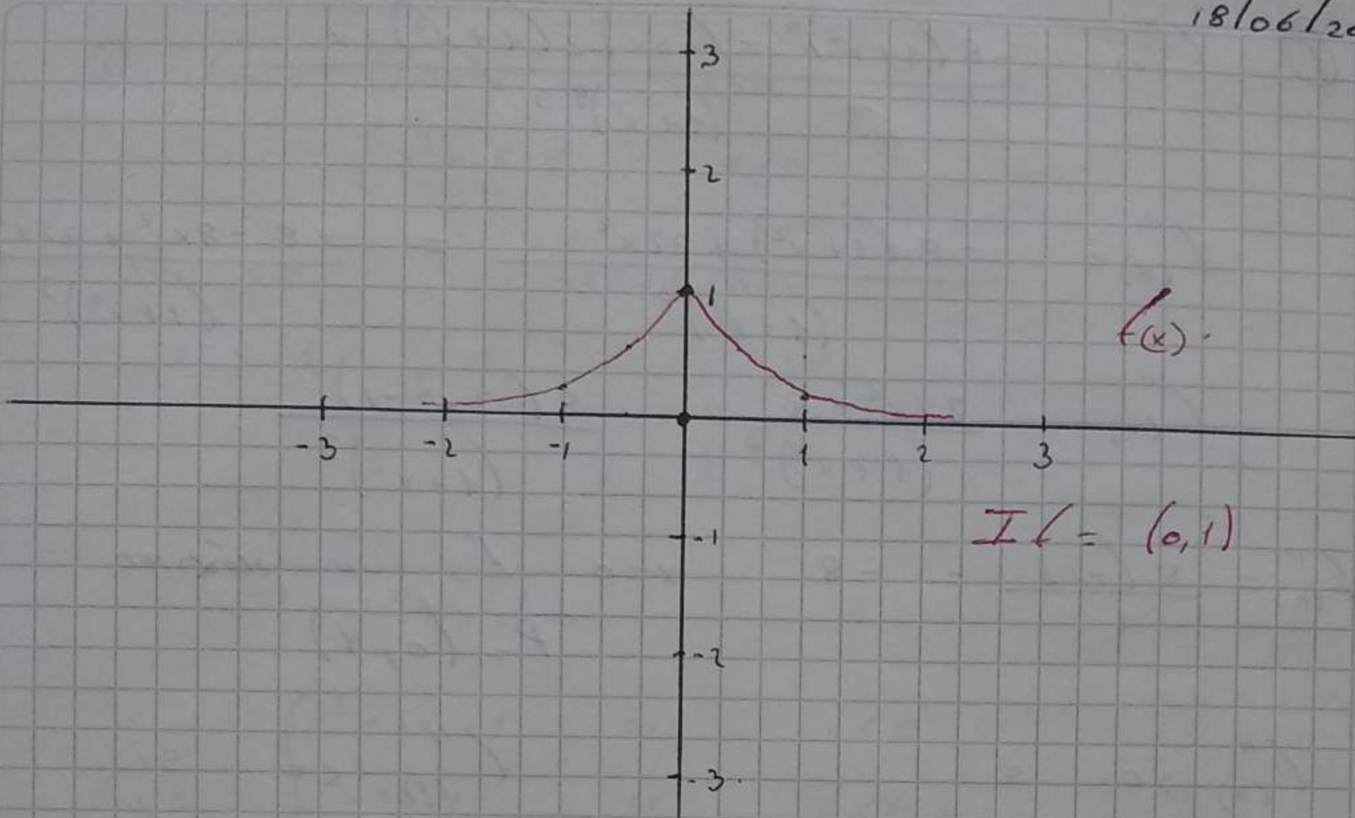
$f''_{(1)} = \dfrac{-4-16}{e^2} = -$.

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Convexa.

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ Concava.

Agosti TRABAJO PRACTICO IV

18/06/2010.



$If = (0,1)$

(9) $f_{(x)} = \dfrac{4}{1+x^2} = 4(1+x^2)^{-1}$

(a) $Df = \mathbb{R}$.

(b) $f_{(-x)} = \dfrac{4}{1+(-x)^2} = \dfrac{4}{1+x^2}$ FUNCION PAR.

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{1+x^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ AH.

(d) $f'_{(x)} = -4(1+x^2)^{-2}(2x) = \dfrac{-8x}{(1+x^2)^2}$.

$f'_{(x)} > 0$. si

$-8x > 0$.

$x < 0$

$(-\infty, 0]$ CRECIMIENTO.

$f'_{(x)} < 0$.

$-8x < 0$.

$x > 0$.

$[0, +\infty]$ DECRECIMIENTO.

(e) $x = 0$ Punto crítico.

(f) $$f''_{(x)} = \frac{-8\left(1+x^2\right)^{\cancel{2}} - (-8x)\,2\cancel{(1+x^2)}\,2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''_{(x)} = \frac{-8\left(1+x^2\right)+32x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-8-8x^2+32x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''_{(x)} = \frac{24x^2-8}{(1+x^2)^3} = \frac{8\left(3x^2-1\right)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''_{(0)} = \frac{8(-1)}{1} = -8$$ $x=0$ Es un máximo

$P = (0, 4)$

$f''_{(x)} > 0$ si | $f''_{(x)} < 0$ si

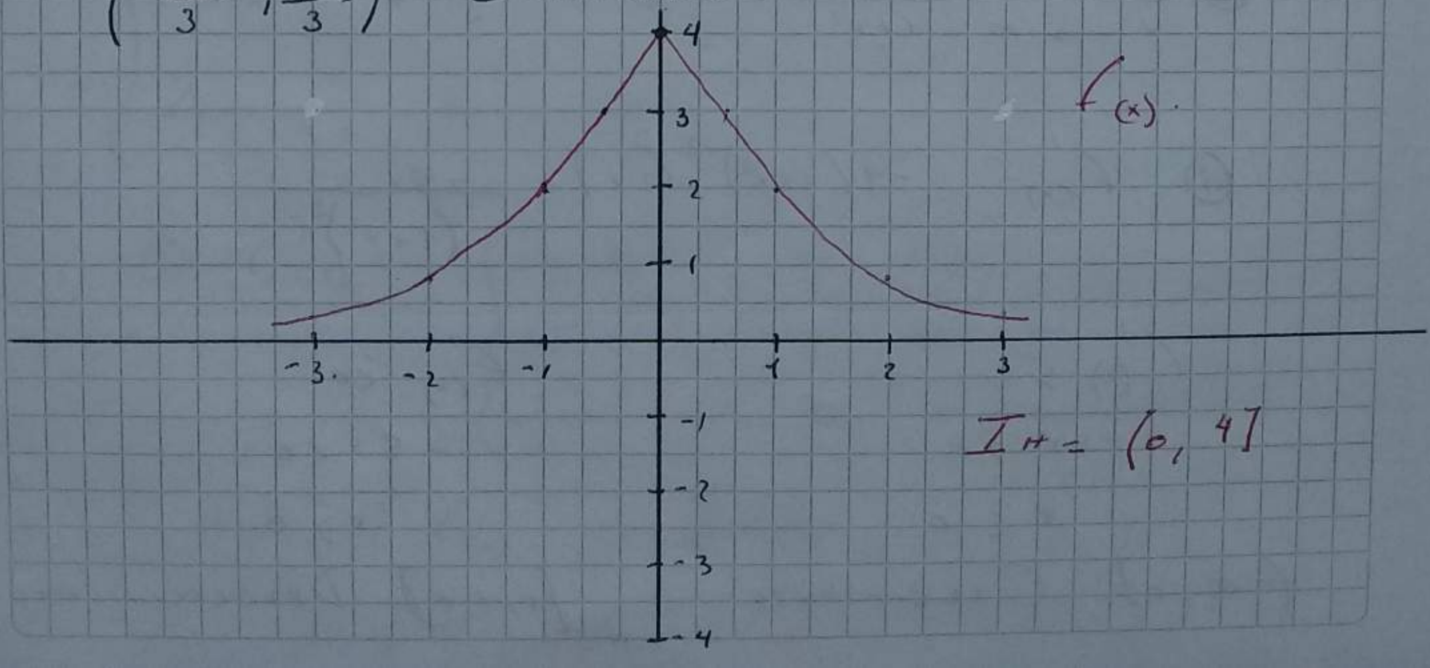
$3x^2 - 1 > 0$ | $3x^2 - 1 < 0$

$x^2 > \frac{1}{3}$ | $x^2 < \frac{1}{3}$

$x > \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ Concavidad.

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ Convexidad.



$I_m = [0, 4]$

Agosti — Trabajo Práctico IV — Mosa 18/06/2010.

ⓗ $f(x) = \begin{cases} |3x-1| & x>0. \\ x^2+3x+1 & x\leq 0. \end{cases}$

$3x-1>0$ $\qquad\qquad$ $-3x+1<0.$

$x > \frac{1}{3}$ $\qquad\qquad$ $1 < 3x$

$\frac{1}{3} < x$

$$\begin{array}{ccccc} \hline & -1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x+1 & \text{si} \quad x\leq 0. \\ -3x+1 & \text{si} \quad 0<x<\frac{1}{3}. \\ 3x-1 & \text{si} \quad x\geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} x^2+3x+1 = 1. \\ \lim_{x\to 0^+} -3x+1 = 1. \end{cases}$$

ⓐ $Df = \mathbb{R}.$

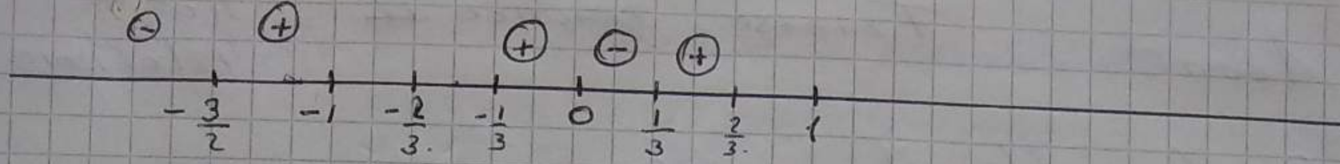
ⓑ No tiene asíntotas

$$\begin{cases} \lim_{x\to \frac{1}{3}^-} -3x+1 = 0. \\ \lim_{x\to \frac{1}{3}^+} 3x-1 = 0. \end{cases}$$

ⓒ $f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x\leq 0. \\ -3 & \text{si} \quad 0<x<\frac{1}{3} \\ 3. & \text{si} \quad x\geq \frac{1}{3}. \end{cases}$

$f'(0)^+ \neq f'(0)^- \qquad \nexists f'(0)$

$f'(\frac{1}{3})^+ \neq f'(\frac{1}{3})^- \qquad \nexists f'(0).$



d) $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$

$f'(x) > 0$ si

$2x + 3 > 0$

$x > -\frac{3}{2}$

$f'(x) < 0$

$2x + 3 < 0$

$x < -\frac{3}{2}$

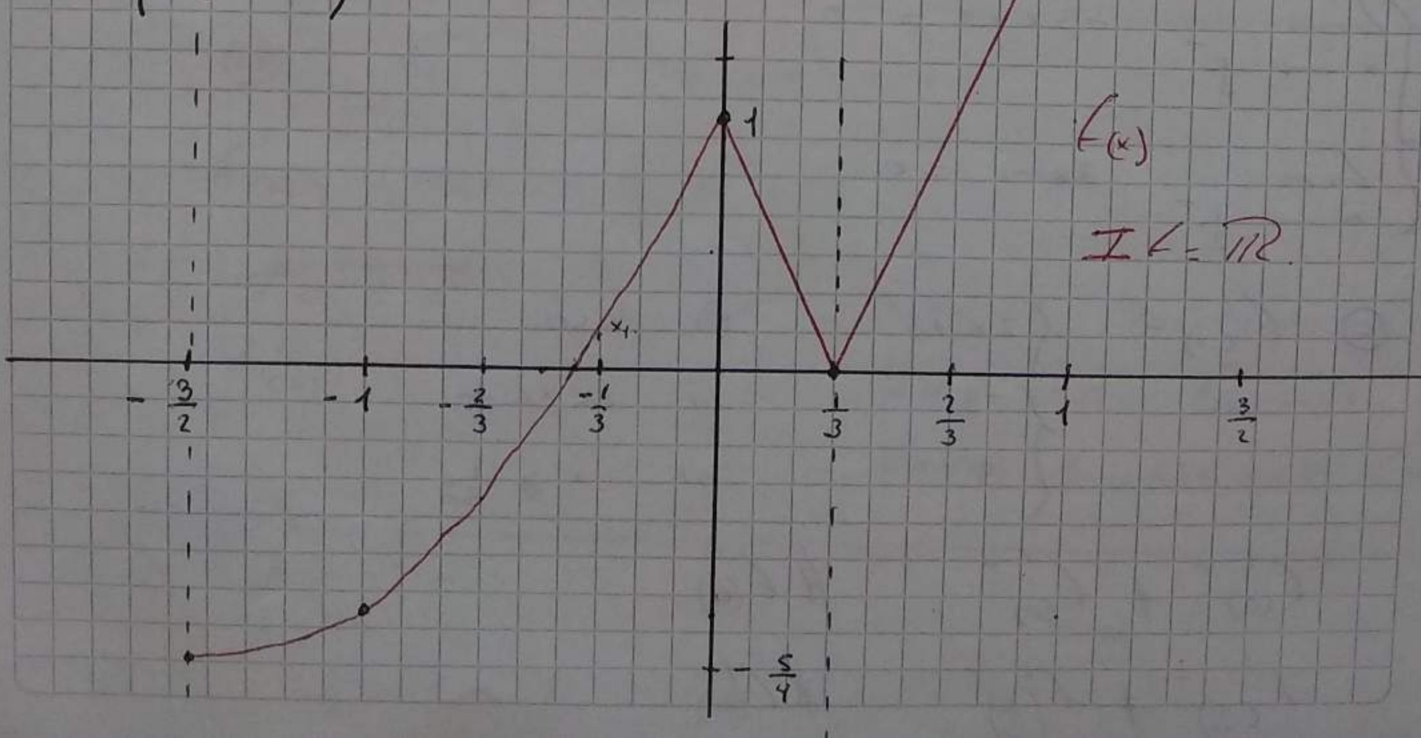
$\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ CRECIENTE.

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right)$ DECRECIENTE.

$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ MÍNIMO RELATIVO.

$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ MÍNIMO RELATIVO

$(0, 1)$ MÁXIMO RELATIVO.



AGOSTI

TRABAJO PRÁCTICO IV

18/06/2010.

(27) $f_{(x)} \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$f'_{(x)} = \begin{cases} 2x^{-3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$f'_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$f''_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{2}{e^{\frac{1}{x^2}}} \left(\dfrac{3x^2+2}{x^6} \right) & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$f'_{(-1)} = \dfrac{2\,e^{-1}}{-1} = -.$

$f'_{(1)} = \dfrac{2e^{-1}}{1} = +.$

$(0,0)$ MÍNIMO LOCAL.

---

(28) $f_{(x)} = 2x^{99} + \frac{1}{3}x^{41} + 2x - 1.$

$f'_{(x)} = 198x^{98} + \frac{41}{3}x^{40} + 2.$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_{(x)} \neq 0$ SIEMPRE POSITIVA.

$f'_{(x)}$

EN $x=0$ $f_{(x)} = -1.$

CORTA EL EJE Y EN $(0,-1)$.

---

(29) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

$g(-2) = 3$ MÁXIMO RELATIVO.

$g(1) = 0$ MÍNIMO RELATIVO.

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

$g(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 3.$

$g'(-2) = 12a - 4b + c = 0$

$g(1) = a + b + c + d = 0.$

$g'(1) = 3a + 2b + c = 0.$

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 3 \\ a + b + c + d = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \quad \%4 \\ 3a + 2b + c = 0. \end{cases}$$

1	1	1	1	0
-8	4	-2	1	3
3	-1	$\frac{1}{4}$	0	0
3	2	1	0	0

1	1	1	1	0	
0	12^{1}	$6^{\frac{1}{2}}$	$9^{\frac{3}{4}}$	$3^{\frac{1}{4}}$	%12.
0	-4	$-\frac{11}{4}$	-3	0	
0	-1	-2	-3	0	

1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	
0	0	$-\frac{3}{4}^{1}$	1	0	$\%-\frac{3}{4}$.
0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$	0	

1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	0	1	0	0
0	0	0	$-\frac{9}{4}$	0.

No PUEDO CALCULAR EL SISTEMA.

$g(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{9}.$

Agosti — Trabajo práctico IV

18/06/2010.

(30) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = a + b + c = 17.$

$f'(x) = 2ax + b.$

$f'(1) = 2a + b = 0.$

$b = -2a$

$b = -4.$

$f''(x) = 2a = 4$

$a = \frac{4}{2} = 2.$

$$\boxed{f(x) = 2x^2 - 4x + 19.}$$

$c = 17 - a - b$

$c = 17 - 2 + 4 = 17 + 2 = 19.$

---

(31) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$g(1) = a + b + c = 1.$

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

$g'(1) = 3a + 2b + c = 0.$

$g''(x) = 6ax + 2b$

$g''(1) = 0 \Rightarrow 6ax + 2b = 0$ si $x = 1.$

$6a + 2b = 0.$

$$\begin{cases} a + b + c = 1. \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0. \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

$(0 + 6 + 6) - (12 + 2 + 0)$

$12 - 14 = -2.$

$\Delta = -2.$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right|$$

$\Delta_a = (0 + 0 + 0) - (0 + 2 + 0)$

$\Delta_a = -2.$

$a = \frac{-2}{-2} = 1.$

$6a + 2b = 0.$

$b = \frac{-6a}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$

$c = 1 - a - b = 1 - 1 + 3 = 3.$

$$\boxed{g = x^3 - 3x + 3.}$$

(32) 19/06/2010.

$$h: \begin{cases} x-37 & si \quad x \leq -4 \\ x^3+3x^2-9x & si \quad -4 < x < 3 \\ 30-x & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -4^-} x-37 = -43$

h No es continua en $x=-4$.

$\lim_{x \to -4^+} x^3+3x^2-9x = -64+48+36 = 20.$

$\lim_{x \to 3^-} x^3+3x^2-9x = 27+\cancel{27}-\cancel{27} = 27.$

$\lim_{x \to 3^+} 30-x = 27$

h es continua en $x=3$.

$$h'_{(x)} = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 4 \\ 3x^2+6x-9 & si \quad -4 < x < 3 \\ -1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

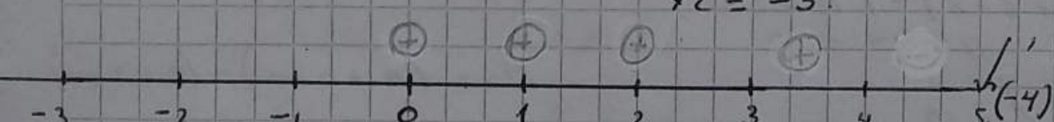
$\lim_{x \to 3^-} 3x^2+6x-9 = 27+18-9 = 36.$

$\lim_{x \to 3^+} -1 = -1.$

$h'_{(x)} = 0$ si $3(x^2+2x-9) = 0.$

$x_1 = 1$

$x_2 = -3.$



$h'_{(-4)} =$

$3x^2+6x-9$

$f''_{(x)} = 6x+6.$

$f''_{(1)} = 12$

$f''_{(-3)} = -18+6 = -12$

$(1,-5)$ Mínimo

$(-3, 27)$ Máximo

Agosti — Trabajo Práctico IV — 19/06/2010 Hoja

(33) ⓐ $f_{(x)} = x^3 - x^2 - 8x + 1 \qquad [-2,2]$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 2x - 8.$

$3x^2 - 2x - 8 = 0.$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\dfrac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6}$

$\dfrac{2 \pm 10}{6}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -\frac{4}{3}.$

$f''_{(x)} = 6x - 2.$

$f''_{(2)} = 12 - 2 = 10$

$\boxed{(2, -11) \quad \text{Mínimo}}$

$f''_{(-\frac{4}{3})} = -10$

$\boxed{\left(-\frac{4}{3}, \frac{203}{27}\right) \quad \text{Máximo.}}$

ⓑ $f_{(x)} = x^5 + x + 1.$

$f'_{(x)} = 5x^4 + 1$

$5x^4 + 1 = 0.$

$x^4 = \frac{-1}{5}.$

$\nexists\, x_0 \in Df \,/\, f'_{(0)} = 0.$

ⓒ $f_{(x)} = \text{arcsen}\,(x+1)$

$f'_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}$

$-x^2 - 2x \neq 0.$

$x^2 + 2x \neq 0.$

$x^2 \neq -2x.$

$x \neq -2.$

$x \neq 0$

$x \neq -2.$

Máximo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Mínimo $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$

$f''_{(x)} = \dfrac{-\frac{1}{2}(-2x-2)}{\sqrt{(-x^2-2x)^3}} \Rightarrow$

d) $f_{(x)} = x^2 \ln x \qquad [e^{-1}, e] \cap [0, +\infty)$.

$f'_{(x)} = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)$.

$f'_{(x)} = 0$ si $x = 0$ y

$2\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -\frac{1}{2}$

$e^{-\frac{1}{2}} = x$.

$f''_{(x)} = 2\ln x + 1 + x\left[\frac{2}{x}\right]$

$f''_{(x)} = 2(\ln x) + 1 + 2$.

$f''_{(x)} = 2\ln x + 3$.

$\nexists f''_{(0)} =$

$f''_{(e^{-\frac{1}{2}})} = 2\ln(e^{-\frac{1}{2}}) + 3 = 2$ (+).

$(e^{-\frac{1}{2}}, -0{,}183)$ MINIMO. ABSOLUTO.

$f_{(e^{-1})} = \frac{1}{e^2}(-1) = -\frac{1}{e^2}$

$f_{(e)} = e^2$ MÁXIMO ABSOLUTO $[e^{-1}, e]$

$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ EN $(0, +\infty)$ MÍNIMO ABSOLUTO

Agosti   Trabajo Práctico IV

19/06/2010.

(35) $f_{(x)} = x^3 - 12x + 2.$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0.$

$x^2 = 4.$

$x_1 = 2$ Punto crít

$x_2 = -2.$ Punto crít

$f''_{(x)} = 6x$

$f''_{(2)} = 6x = 12.$

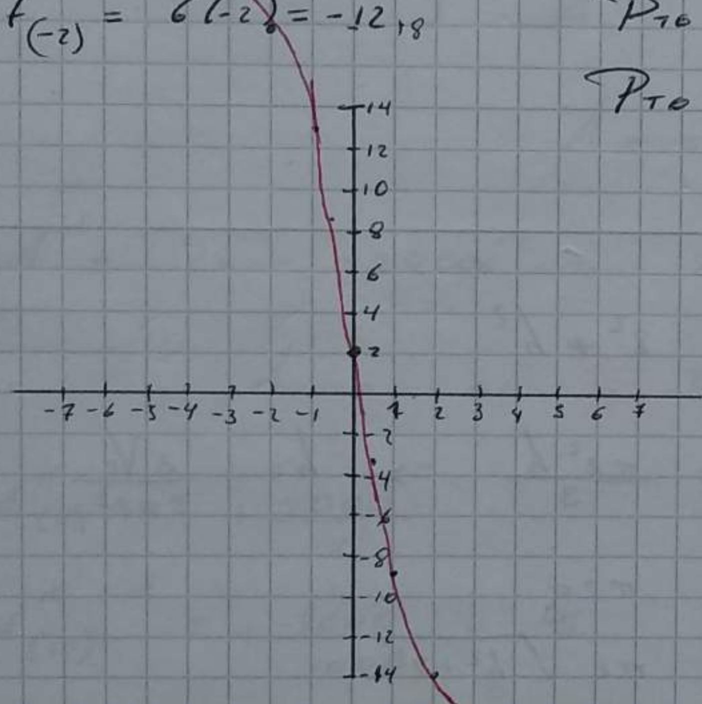
$f''_{(-2)} = 6(-2) = -12$ 18

Pto $(2, -14)$ Mínimo relativo.

Pto $(-2, 18)$ Máximo relativo.

$\forall x > 2 \quad \exists\, x_0 \in \mathbb{R} \,/\, f_{(x_0)} < f_{(2)}$

$\forall x < -2 \quad \exists\, x_0 \in \mathbb{R} \,/\, f_{(x_0)} > f_{(-2)}$



(36) $f_{(x)} = \dfrac{x}{1+x^2}$

$f'_{(x)} = \dfrac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}.$

$f'_{(x)} = 0$ si

$-x^2+1 = 0$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

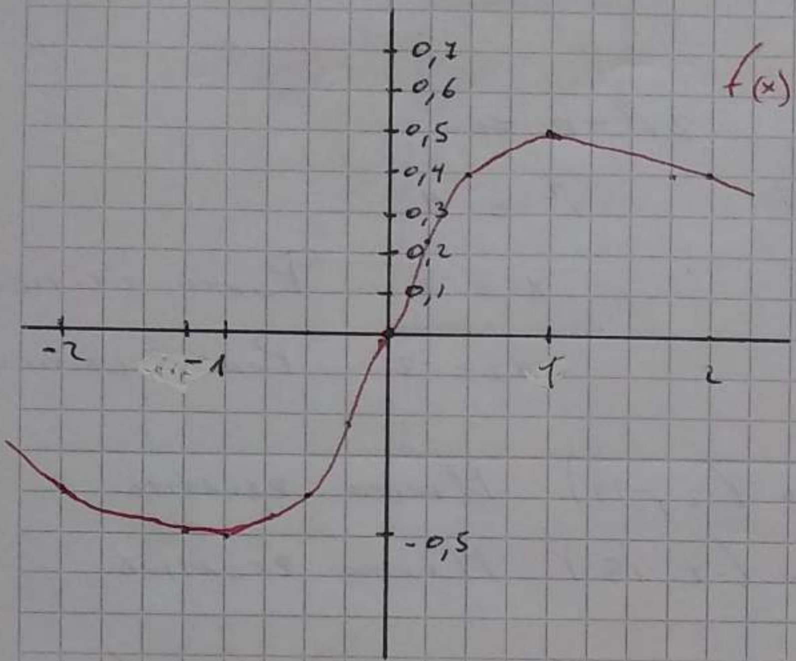
$f''_{(x)} = \dfrac{3x(x^2-2)}{(1+x^2)^3}$

$f''_{(1)} = \dfrac{3(-1)}{27/9} = -\dfrac{1}{9}$ $\ominus$.

$f''_{(-1)} = \dfrac{-3(9-2)}{27} = \dfrac{-21}{27} = -\dfrac{7}{9}$ $\ominus$.

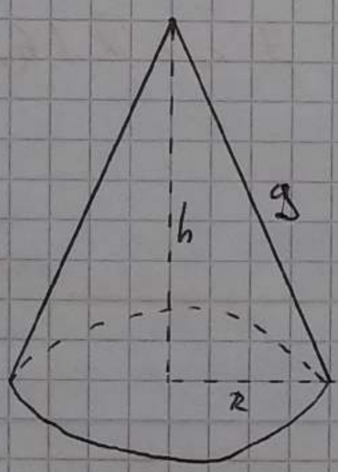
$P_T\left(1, \frac{1}{2}\right)$ Maximo.

$P_T\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ Maximo.



---

(37)



$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$V_c = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow h = \frac{3 V_c}{\pi r^2}$$

$$S_c = \pi r g$$

$$S_c = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$

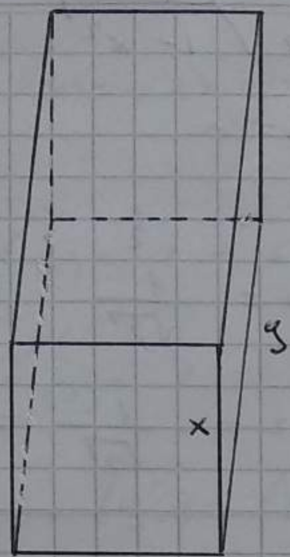
$$S_c = \pi r \sqrt{\frac{9 V_c^2}{\pi^2} \frac{1}{r^4} + r^2}$$

$$K = \frac{9 V_c^2}{\pi^2}$$

Agosti — Trabajo Práctico IV

19/06/2010.

(39)



$V = 500 \, cm^3$

$A_{CASA} = x^2 + 4xy$

$V_C = x^2 y = 500 \, cm^3$

$y = \frac{500}{x^2}$

$A_c = x^2 + 4\cancel{x} \frac{500}{x^{\cancel{2}}}$

$A_c = x^2 + \frac{2000}{x}.$

$A' = 2x + -2000x^{-2} = 2x - \frac{2000}{x^2}.$

$A' = 0$ si $\frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0.$

$A''_{(x)} = 2 + \frac{4000}{x^3}$

$x^3 = \frac{2000}{2}.$

$A''_{(10)} = 2 + \frac{4000}{1000} = 6$

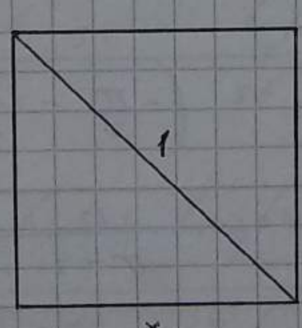
$x = 10.$

Minimo.

$y = \frac{500}{100} = 5$

(40)

$x = y$



$A_{\blacktriangle} = \frac{bh}{2.} = \frac{xy}{2} = \frac{x^2}{2.}$

$A_R = xy = x^2.$

$1^2 = y^2 + x^2. \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$

$y = \sqrt{1 - x^2}$

$A_R = x\sqrt{1 - x^2}$

$A_R' = \sqrt{1 - x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x).$

$$A'_2 = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-2x^2-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-4x^2+2}{2\sqrt{1-x^2}} \qquad -4x^2+2=0.$$

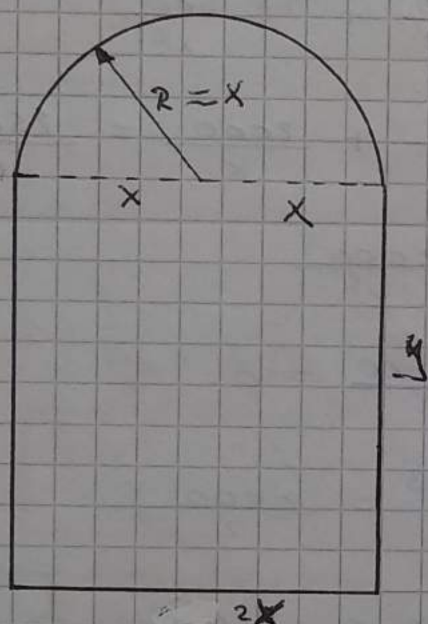
$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \nexists \; x_2.$$

---

(41)



$$P_v = P_{\frown} + P_{\square}$$

$$P_v = \frac{2\pi x}{2} + 2x + 2y = \pi x + 2x + 2y =$$

$$y = \frac{12-\pi x-2x}{2}$$

$$y = 6 - \frac{\pi x}{2} - x$$

$$A = A_{\frown} + A_{\square}$$

$$A = \frac{\pi x^2}{2} + 2xy$$

$$A = \frac{\pi x^2}{2} + 2x\left(6 - \frac{\pi x}{2} - x\right)$$

$$A = \frac{\pi x^2}{2} + 12x - \pi x^2 - 2x^2$$

$$A = x^2\left(\frac{\pi}{2} - \pi - 2\right) + 12x$$

$$A' = 2\left(\frac{\pi}{2} - \pi - 2\right)x + 12$$

$$A' = 0 \quad s$$

$$x = \frac{-12}{2\left(\frac{\pi}{2} - \pi - 2\right)} = 4{,}19 = \frac{+12}{4+\pi}.$$

$$\frac{-12}{2\left(-\frac{\pi}{2} - 2\right)}$$

$$y = 6 - \frac{\pi\left(\frac{12}{\pi+4}\right)}{2} - \frac{12}{\pi+4}$$

$$\boxed{y = \frac{12}{4+\pi}}$$

$$\boxed{x = \frac{12}{\pi+4}}$$

AGOSTI TRABAJO PRÁCTICO IV

20/06/2010.

(47) $f_{(x)} = 2x + 3x^2 - 4x^3 + x^4$

$f_{(0)} = 0.$

$f'_{(x)} = 2 + 6x - 12x^2 + 4x^3$

$f'_{(0)} = 2.$

$$g'_{(x)} = \frac{\left(g'_{(x)} - f'_{(x)}\right) x^4 - \left(\overset{\to 0}{g_{(x)}} - \overset{\to 0}{f_{(x)}}\right) \overset{\to 0}{4x^3}}{x^6} = 0.$$

$g'_{(x)} - f'_{(x)} = 0.$

$g'_{(0)} = f'_{(0)} = 2.$

$y = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0).$

$$\boxed{y = 0 + 2(x) = 2x.}$$

---

(48) (a) $f_{(x)} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$ $f_{(3)} = 27 - 18 + 9 - 1 = 17.$

$f'_{(x)} = 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'_{(3)} = 27 - 12 + 3 = 18$

$f''_{(x)} = 6x - 4 \Rightarrow f''_{(3)} = 14$

$f'''_{(x)} = 6 \Rightarrow f'''_{(3)} = 6.$

$f^{IV} = 0 \Rightarrow f^{IV}_{(3)} = 0.$

Es derivable con $f^{n} \neq 0$ hasta el orden III. Luego $f^{n} = 0.$

$$P_{(x)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''_{(x_0)}}{3!}(x - x_0)^3$$

$$\boxed{P_{(x)} = 17 + 18(x-3) + 7(x-3)^2 + (x-3)^3}$$

$P_{(x)} = 17 + 18x - 54 + 7(x^2 - 6x + 9) + (x^3 + 3x^2(-3) + 3x \cdot 9 + (-3)^3).$

$P_{(x)} = 18x - 37 + 7x^2 - 42x + 63 + (x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$

$P_{(x)} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$

(b) $n = 5$ $x_0 = -2$

$$P_{(x)} = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$
$$P_{(x)} = -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$$

(c) REVISE LA COMPROBACION DEL ESERCICIO (a).

---

(49) $$g_{(x)} = \frac{x^6 + x^5 + 3x^2 + 1}{e^x}$$ $x_0 = 0$

POLINOMIO DE MAC LAWRING.

$g_{(0)} = 1$

$$g'_{(x)} = \frac{(6x^5 + 5x^4 + 6x)\cancel{e^x} - (x^6 + x^5 + 3x^2 + 1)\cancel{e^x}}{e^{\cancel{2}x}}$$

$$g'_{(x)} = \frac{-x^6 + 5x^5 + 5x^4 - 3x^2 + 6x - 1}{e^x}$$

$$g''_{(x)} = \frac{(-6x^5 + 25x^4 + 20x^3 - 6x + 6)\cancel{e^x} - (-x^6 + 5x^5 + 5x^4 - 3x^2 + 6x - 1)\cancel{e^x}}{e^{\cancel{2}x}}$$

$$g''_{(x)} = \frac{x^6 - 11x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 12x + 7}{e^x}$$

$$g'''_{(x)} = \frac{(6x^5 - 55x^4 + 80x^3 + 60x^2 + 6x - 12)\cancel{e^x} - (x^6 - 11x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 12x + 7)\cancel{e^x}}{e^{\cancel{2}x}}$$

Agosti   Trabajo práctico IV

20/06/2010.

$$g'''_{(x)} = \frac{-x^6 + 17x^5 - 75x^4 + 60x^3 + 57x^2 + 18x - 19}{e^x}$$

$$g^{IV}_{(x)} = \frac{(-6x^5 + 85x^4 - 300x^3 + 180x^2 + 114x + 18)e^x - (-x^6 + 17x^5 - 75x^4 + 60x^3 + 57x^2 + 18x - 19)e^x}{e^{2x}}$$

$$g^{IV}_{(x)} = \frac{x^6 - 23x^5 + 160x^4 - 360x^3 + 123x^2 + 96x + 37}{e^x}$$

$$g^{V}_{(x)} = \frac{(6x^5 - 115x^4 + 640x^3 - 1080x^2 + 246x + 96)e^x - (x^6 - 23x^5 + 160x^4 - 360x^3 + 123x^2 + 96x + 37)e^x}{e^{2x}}$$

$$g^{V}_{(x)} = \frac{-x^6 + 29x^5 - 275x^4 + 1000x^3 - 1203x^2 + 150x + 59}{e^x}$$

$$\boxed{P_{(x)} = 1 - x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{19}{6}x^3 + \frac{37}{24}x^4 + \frac{59}{120}x^5}$$

(52) (c) $e^{0,02}$ $\quad \varepsilon < 10^{-6}$

$f_{(x)} = e^{x} \Rightarrow f_{(x_0)} = 1 \qquad x_0 = 0$

$f'_{(x)} = e^{x} \Rightarrow f'_{(x_0)} = 1$

$f''_{(x)} = e^{x} \Rightarrow f''_{(x_0)} = 1$

$f^{n}_{(x)} = e^{x} \Rightarrow f^{n}_{(x_0)} = 1$

$f^{n+1}_{(c)} = e^{c} \Rightarrow f^{n+1}_{(c)} = e^{c}$

$|R_n| < 10^{-6}$

$\frac{f^{n+1}_{(c)}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$0 < c < 0,02$

$\frac{e^{c}}{(n+1)!}\underbrace{x}_{0,02}^{n+1} < 10^{-6}$

$\frac{e^{0,02}}{(n+1)!}0,02^{n+1} < 10^{-6}$

$n = 1 \qquad \frac{e^{0,02}}{2!} \cdot 0,02^{2} = 2,04 \cdot 10^{-4} > 10^{-6}$

$n = 2 \qquad \frac{e^{0,02}}{3!} 0,02^{3} = 1,36 \cdot 10^{-6} > 10^{-6}$

$\boxed{n = 3} \qquad \frac{e^{0,02}}{4!} 0,02^{4} = 6,8 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$

$P_{(x)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x-x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''_{(x_0)}}{3!}(x-x_0)^3$

$P_{(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

$$P_{(0,02)} = 1 + 0,02 + \frac{1}{2}(0,02)^2 + \frac{1}{6}(0,02)^3$$

$$P_{(0,02)} \doteq 1,0202013333.$$

$$e^{0,02} = 1,02020134.$$

(d) e

$$f_{(x)} = e^x \Rightarrow f_{(x_0)} = e^0 = 1 \qquad x_0 = 0$$

$$f'_{(x)} = e^x \Rightarrow f'_{(x_0)} = e^0 = 1$$

$$f''_{(x)} = e^x \Rightarrow f''_{(x_0)} = e^0 = 1.$$

$$f^{n+1} = e^x \Rightarrow f^{n+1} = e^c = e^c$$

$$\frac{e^c}{(n+1)!} \cdot (x - \underbrace{x_0}_{=0})^{n+1}. \qquad 0 < c < 1.$$

$$\frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\frac{e}{(n+1)!} \, 1^{n+1} < 10^{-7}.$$

$n = 1$ $$\frac{e}{2!} \, 1^2 = \frac{e}{2}$$

$n = 2$ $$\frac{e}{3!} \, 1^3 = \frac{e}{6}.$$

$n = 3$ $$\frac{e}{4!} \, 1^4 = \frac{e}{24}.$$

$n = 10$ $$\frac{e}{11!} \, 1^{11} = 6,8 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}.$$

Agosti — Análisis matemático — HOJA N° — FECHA 30/04/2011

$$P_{(x)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x-x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''_{(x_0)}}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{IV}_{(x_0)}}{4!}(x-x_0)^4$$

$$+ \frac{f^{V}_{(x_0)}}{5!}(x-x_0)^5 + \frac{f^{VI}_{(x_0)}}{6!}(x-x_0)^6 + \frac{f^{VII}_{(x_0)}}{7!}(x-x_0)^7 + \frac{f^{VIII}_{(x_0)}}{8!}(x-x_0)$$

$$P_{(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320}.$$

$$P_{(1)} = 2{,}71827877.\ ?$$

Agosti | Análisis Matemático I | HOJA N° | FECHA 30/04/2011.

(55) $\sqrt{1,02}$

$f_{(x)} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_{(x_0)} = 1$ $\quad x_0 = 1.$

$f'_{(x)} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'_{(x_0)} = \frac{1}{2}$

$f''_{(x)} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''_{(x_0)} = -\frac{1}{4}$

$f'''_{(x)} = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''_{(x_0)} = \frac{3}{8}$

$f^{IV}_{(x)} = -\frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow f^{IV}_{(x_0)} = -\frac{15}{16\sqrt{x^7}}$

$$\left| \frac{-\frac{15}{16} c^{-\frac{7}{2}}}{4!} \underbrace{(x-1)}_{1,02}^{4} \right|$$

$$\left| \frac{-\frac{15}{16} c^{-\frac{7}{2}}}{24} 0,02^{4} \right|$$

$$\left| -6,25 \cdot 10^{-9} c^{-\frac{7}{2}} \right|$$

$$1 < c < 1,02$$

$$1,02^{-\frac{7}{2}} < c^{-\frac{7}{2}} < 1^{-\frac{7}{2}}$$

$$1,02^{-\frac{7}{2}} < c^{-\frac{7}{2}} < 1$$

$$6,25 \cdot 10^{-9} \cdot 1,02^{-\frac{7}{2}} < 6,25 \cdot 10^{-9} c^{-\frac{7}{2}} < 1 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9}$$

$$6,25 \cdot 10^{-9} c^{-\frac{7}{2}} < 6,25 \cdot 10^{-9}$$

$$\boxed{\varepsilon < 6,25 \cdot 10^{-9}}$$

(56) $P_{(x)} = (x-1)^2 \cong f_{(x)}$ en $x_0 = 1$.

$P'_{(x)} = 2(x-1)$ $P_{(1)} = 0 \cong f_{(1)}$

$P''_{(x)} = 2$ $P'_{(1)} = 0 \cong f'_{(1)}$

$P''_{(1)} = 2 \cong f''_{(1)}$

$$g_{(x)} = f_{\left(\frac{1}{x}\right)} \ln x + \operatorname{sen}[f_{(x)}]$$

$$g'_{(x)} = f'_{\left(\frac{1}{x}\right)} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \cos[f_{(x)}]\, f'_{(x)}$$

$$g''_{(x)} = f''_{\left(\frac{1}{x}\right)} \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + f'_{\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\frac{2}{x^3}\right) + \left[-\operatorname{sen}[f_{(x)}]\, f'_{(x)} + \cos[f_{(x)}]\, f''_{(x)}\right]$$

$$g_{(1)} = \underbrace{\underbrace{f_{(1)}}_{\to 0} \underbrace{\ln 1}_{\to 0}}_{} + \underbrace{\operatorname{sen}[\underbrace{f_{(1)}}_{\to 0}]}_{\to 0} = 0$$

$$g'_{(1)} = \underbrace{\underbrace{f'_{(1)}}_{\to 0} \underbrace{\left(-\frac{1}{1^2}\right)}_{\to -1}}_{\to 0} + \underbrace{\cos[\underbrace{f_{(1)}}_{\to 0}]}_{\to 1} = 1$$

$$g''_{(x)} = \underbrace{f''_{(1)}}_{\to 2} \underbrace{(-1)(-1)}_{\to 1} + \underbrace{\underbrace{f'_{(1)}}_{\to 0} (2)}_{\to 0} + \left[\underbrace{\operatorname{sen}(\underbrace{f_{(1)}}_{\to 0}) \underbrace{f'_{(1)}}_{\to 0}}_{\to 0} + \underbrace{\cos(\underbrace{f_{(1)}}_{\to 0})}_{\to 1} \underbrace{f''_{(1)}}_{\to 2}\right]$$

$$g''_{(x)} = 2 + 2 = 4.$$

$$P_{(x)} = g_{(x_0)} + g'_{(x_0)}(x-x_0) + \frac{g''_{(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2 \qquad x_0 = 1.$$

$$P_{(x)} = 0 + 1(x-1) + \frac{4}{2}(x-1)^2$$

$$\boxed{P_{(x)} = (x-1) + 2(x-1)^2}$$

(58) $f(x) = \dfrac{x+1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-(x+1)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(1+x^2)^2-(-x^2-2x+1)\left[2(1+x^2)2x\right]}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(1+x^2) - (-x^2-2x+1)(2\cdot 2x)}{\underbrace{(1+x^2)^3}_{>0}}$$

$$f''(x) = -2x-2x^3-2-2x^2-(-4x^3-8x^2+4x)$$

$$f''(x) = -2x-2x^3-2-2x^2+4x^3+8x^2-4x$$

$$f''(x) = 2x^3+6x^2-6x-2$$

$$f''(x) = 2(x^3+x^2-3x-1)$$

AGOSTI | ANÁLISIS MATEMÁTICO I | HOJA N°

FECHA 30/04/2011.

(59) (a)

$$f_{(x)} \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 & x < 0 \\ x^3 e^{-x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} - 1 = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^3}_{\to 0} \cdot \frac{1}{\underbrace{e^{x^2}}_{\to 1}} = 0 \end{array}\right\} \text{CONTINUA } \forall x.$$

$$f'_{(x)} \begin{cases} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{1} & x < 0 \\ 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} x\cos x - \operatorname{sen} x & x < 0 \\ e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} \underbrace{x \underbrace{\cos x}_{\to 1}}_{\to 0} - \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\to 0} = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 1} \underbrace{(3x^2 - 2x^4)}_{\to 0} = 0 \end{array}\right\} \text{DERIVABLE PARA TODO } x.$$

(b) TAYLOR EN $x_0 = 1$ USO $x^3 e^{-x^2}$ CORRESPONDE A LA RAMA QUE CONTIENE EL ENTORNO DE $x_0 = 1$.

$$f_{(x)} = x^3 e^{-x^2} \Rightarrow f_{(1)} = 1^3 \cdot \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$$

$$f'_{(x)} = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2}(-2x)$$

$$f'_{(x)} = e^{-x^2}\left(3x^2 - 2x^4\right)$$

$$f'_{(1)} = \frac{1}{e}(3-2) = \frac{1}{e}$$

$$f''_{(x)} = e^{-x^2}(-2x)\left(3x^2-2x^4\right) + e^{-x^2}\left(6x - 8x^3\right)$$

$$f''_{(x)} = e^{-x^2}\left(-2x\left(3x^2-2x^4\right) + 6x - 8x^3\right)$$

$$f''_{(x)} = e^{-x^2}\left(-6x^3 + 4x^5 + 6x - 8x^3\right)$$

$$f''_{(1)} = \frac{1}{e}\left(-\cancel{6} + 4 + \cancel{6} - 8\right) = \frac{-4}{e}$$

$$P_{(x)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0) + \frac{f''_{(x_0)}}{2!}(x-x_0)^2$$

$$P_{(x)} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}e}(x-1)^2$$

$$\boxed{P_{(x)} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x-1) - \frac{2}{e}(x-1)^2}$$

---

c) $$f'_{(x)} = e^{-x^2}\left(3x^2 - 2x^4\right)$$

$$f'_{(x)} = \frac{3x^2 - 2x^4}{\underbrace{e^{x^2}}_{>0}} = x^2\left(3 - 2x^2\right)$$

$x = 0$ RAIZ DOBLE

$3 - 2x^2 = 0$

$2x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Agosti	Análisis matemático I	HOJA N° FECHA 30/04/2011.

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0{,}194\right)$ Máximo absoluto.

$(0, 0)$ Mínimo absoluto.