1º parcial

EJERCICIOS ... CARMEN LUCOTTI + resueltos.

Plano y Recta en R^3

1) Sea L: $\begin{cases} x = 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$. Hallar la proyección de A (1, 3, 0) sobre L.

2) a) Defina la recta L: (x, y, z) = (0, 3, 2) + t (1, -1, 1) como intersección de dos planos. b) Halle un plano que contenga a L y pase por el punto (2, 3, 2).

3) Sean r : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ y el plano π que es perpendicular al plano coordenado Oxy y que contiene a la recta r. Halle h y k , si existen, para que el punto P(h, k, 0) sea la proyección del punto M(1, -1, 2) sobre el plano π .

4) Dados el haz de planos: $(x + z) + \beta (x - y + 1) = 0$ y la recta r : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ encuentre los planos del haz que formen un ángulo de 45° con la recta r.

5) Dado el haz de planos: $x - z + \beta . (y + 4) = 0$, obtenga, si existen, los planos que distan dos unidades del punto Q(1, -2, 0).

6) Proporcione la ecuación de una recta que corte simultáneamente a las rectas

$L_1: (x, y, z) = (0, 2, -3) + \lambda . (1, 3, 1),\ \lambda \in R$, L_2: $\begin{cases} x = 1 \\ y - 4z = 5 \end{cases}$ y que además esté incluida en el plano $y = 2$

7) El punto A (1,2, 0) es la proyección de B (3, 0, 1) respecto de la recta r. Hallar la ecuación de r sabiendo que es paralela al plano $z = 1$.

8) Dados el haz de planos de ecuación: $\alpha . (x + z) + x - y = 0$ y la recta de ecuación r: (x, y, z) = (1 + 3.t, -1 + k.t, -t), k, t ∈ R. Encuentre el valor de k para el cual existe un plano π perteneciente al haz dado tal que r sea perpendicular a π .

Escaneado con CamScanner

9) Sean el plano π: $a.x + y = -2$ y la recta: r: $\begin{cases} x - z = -1 \\ y - z = k \end{cases}$

Halle los valores de "a" y $k \in R^+$, si existen, para que la recta "r" sea paralela al plano π y la distancia entre ambos sea igual a $\frac{5}{2}\sqrt{2}$. Para $a = -1$ y $k = -3$, determine si la recta "r" está incluida en el plano π. Justifique.

10) Obtenga la ecuación del plano que cumple simultáneamente las siguientes tres condiciones: pasa por la intersección de L_1 y L_2 siendo

$L_1 : \frac{x-7}{-1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+5}{3}$ y $L_2 : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$; pasa por la intersección de L_2 con el plano $x = 0$ y es perpendicular al plano coordenado Oxy.

11) Sean r: $(x,y,z) = (0,1,0) + \lambda.(-1,k,1)$ $\lambda \in R$ y el plano π que es paralelo al eje Oz y pasa por los puntos P (1,-2,0) y Q (1,-1,1). Halle los valores reales de "k", si existen, para los cuales "r" es paralela a π.

12) Sean los puntos M(1,0,2), A(0,1,1) y C(−1,0,1), halle el valor de "h", si existe, para que la proyección ortogonal del punto P(2,1,h) sobre el plano π determinado por los puntos M, A y C sea el punto R(3,0,3).

13) Dadas las rectas $r_1 : \frac{x-1}{-1} = y - 2 = \frac{z}{2}$ r_2: $(x, y, z) = (-4,4,-14) + t\,(2,-1,4)$ $t \in R$

Demuestre que las rectas dadas se cortan en un único punto y calcule las coordenadas de dicho punto. Halle el ángulo determinado por las rectas dadas.

14) Dados r_1: $\begin{cases} x = k \\ y - z = 1 \end{cases}$ r_2 la recta que pasa por A(1, 1, 3) y B(-1, 0, 1)

α: $3x + 3y - z + 1 = 0$, π: plano que contiene al eje z y es perpendicular al plano α.

a) Halle k para que las rectas sean concurrentes en un punto.

b) Para $k = -5$ halle la proyección de $r_1 \cap r_2$ sobre el plano π.

Escaneado con CamScanner

15) Sea π plano perpendicular al plano $\pi_1 : x + 3y + z = 0$ que contiene además al eje x..Sea la recta $L : (x, y, z) = (1, 0, \alpha) + t(0, 1, \beta), t \in R$.
Halle α, β para que la recta L tenga un único punto en común con el plano π y además pase por $P_1 (1, 0, 4)$

16) Dados los puntos A (1, -1, 2) y B (0, a, 3), halle, si es posible, el o los valores de a para que el punto B pertenezca al plano definido por A y la recta r: $\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{1}$ y encuentre la ecuación de dicho plano

17) Sean la recta r: $(x, y, z) = .(t, 2.t, 1-t)$ y el plano α determinado por los puntos M (0, 0, 1), N(1, 1, 0) y R(1, 0, 1) Encuentre todos los planos π que cumplan simultáneamente las siguientes 3 condiciones:
Los planos π sean paralelos a la recta r. Los planos π sean perpendiculares al plano α
La distancia entre el punto T(0, 1, -1) y los planos π sea igual a $\sqrt{11}$.

18) Dados π: $(x, y, z) = (0, 0, h) + \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$ $\alpha, \beta \in R$ y la recta L: $x - 1 = \frac{y}{k} = z$ Halle los valores de h y de k para que la recta L esté incluida en π
Para $h = 5$ y $k = -1$ encuentre la proyección ortogonal del punto $M \in L$ de cota igual a cero, sobre el plano π.

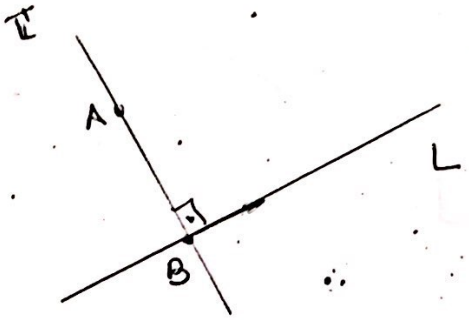
19) Sean $r_1 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ $t \in R$ r_2: $x + 1 = \frac{-y+3}{-2} = \frac{z-2}{-3}$

Obtenga las ecuaciones de los planos paralelos a ambas y que disten $\sqrt{195}$ unidades de ellas.

20) Dados r: $(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda(2, 2, -1)$, $\lambda \in R$ y $\pi : x + 2y - 4z + 2 = 0$.
Hallar: a) h y k sabiendo que la intersección de r con π es $(2h - k, 1, h + 3k)$.
b) la ecuación general del plano determinado por r y su proyección sobre π.

Escaneado con CamScanner

1) $L = \begin{cases} x = 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$ $A = (1, 3, 0)$ sobre L.



1) Busco un plano $\pi \perp L$. que pase por A

2) Busco $L \cap \pi = B$

$L = (x, y, z) = (3, z-1, z)$

$= (3, -1, 0) + (0, z, z)$

$(x, y, z) = \underbrace{(3, -1, 0)}_{A} + z\underbrace{(0, 1, 1)}_{\vec{v}}$

$\vec{v} = \vec{N}$

Hallo $\nexists \pi \perp L$ $\quad \vec{N} \cdot \vec{x} = \vec{N} \cdot A$ Plano dado por un punto y su normal

E-mail : rjveniero@gmail.com

Escaneado con CamScanner

$(0,1,1)\ (x,y,z) . = (0,1,1) . (1,3,0)$

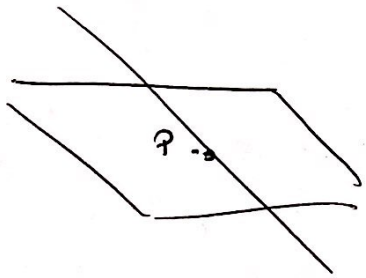
$0x + 1y + 1z = 0 + 3 + 0.$

$\pi : \boxed{y + z = 3.}$

Busco $L \cap \pi$ $\quad L \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \cdot a \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$ Reemplazo la recta en el plano

Tenemos 3 posibles resultados →

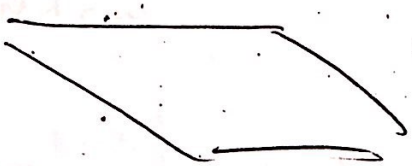
1) $t = N°$ → vuelvo a la recta y hallo el pto intersección:



2) Si reemplaqueo la t y me queda algo verdadero, $(2=2)$, la intersección es toda la recta, la recta está incluida en el plano.

Escaneado con CamScanner

3). Absurdo: $(5=8)$ → la recta es \|\| al plano



$$y + z = 3$$

$$-1 + t + t = 3 \rightarrow 2t = 4 \quad \underline{t = 2}$$

$$L = \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\underline{B = (3, 1, 2)}$$

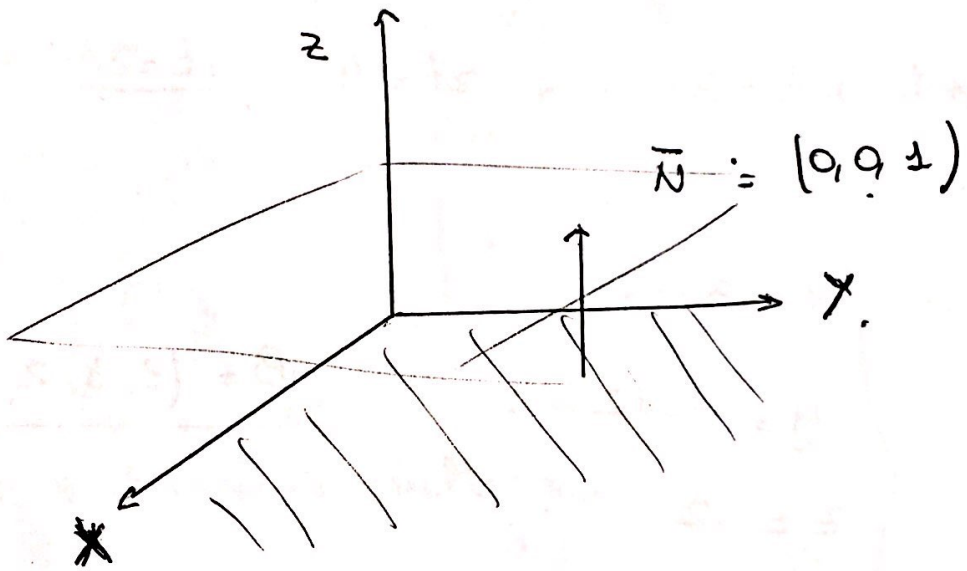
Escaneado con CamScanner

3) $r \begin{cases} x-y=0 \\ x+z=1. \end{cases}$ $\pi \perp$ plano xy. $\leftarrow$

contiene a r.

Hallo h, k. $P_\pi(h,k,0)$ Proyección del $M=(1,-1,2)$

sobre.



$z=k$.

$x=y$ $\perp$ xy. $\boxed{Ax+By=D.}$

$\bar{N}=(A, B, 0)$

Escaneado con CamScanner

$$r = \begin{cases} x = y \\ z = 1 - x \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (x, x, 1-x)$$

$$= \underbrace{(0,0,1)}_{P} + x \underbrace{(1,1,-1)}_{\vec{v}}$$

$x = 2 \qquad (x, y, z) = (2, 2, -1).$

$P = (0,0,1)$

$$Ax + By = D$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 = D \rightarrow \boxed{D = 0}$$

$P = (2,2,-1)$

$$A \cdot 2 + B \cdot 2 = 0.$$

$$2A = -2B.$$

$$\underline{A = -B}.$$

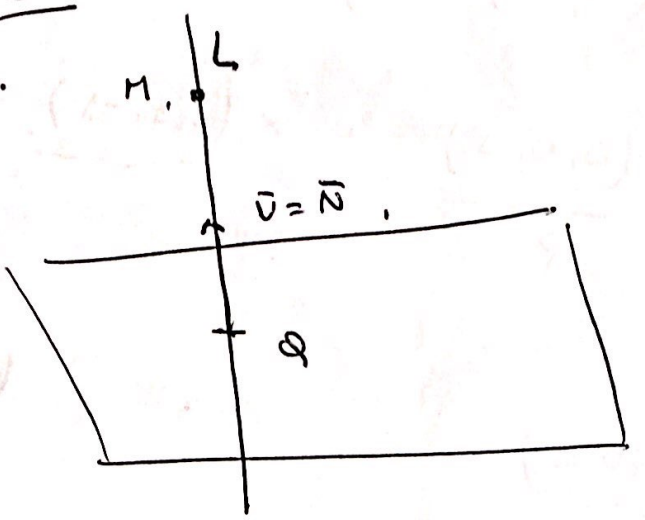
E-mail : rjveniero@gmail.com

Escaneado con CamScanner

$Ax + By = D.$

$-Bx + By = 0$

$B\underbrace{(-x+y)}_{\ddot{o}} = 0 \rightarrow \boxed{-x+y=0}\ \pi.$



$L \rightarrow L \perp \pi$ y pasa por M.

$L \cap \pi \Rightarrow Q =$ proyección

$\vec{N} = (-1,1,0) = \vec{v}.$ $\quad M = (1,-1,2)$

$L = (x,y,z) = (1,-1,2) + t(-1,1,0)$

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+t \\ z = 2 \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

$L \cap \pi$

$$-x + y = 0$$

$$-1 + t - 1 + t = 0$$

$$2t = 2 \qquad \boxed{t = 1}$$

L → reemplazo. Q

$$\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1 + 1 = 0 \\ z = 2 = 2 \end{cases}$$

$$Q = (0, 0, 2)$$

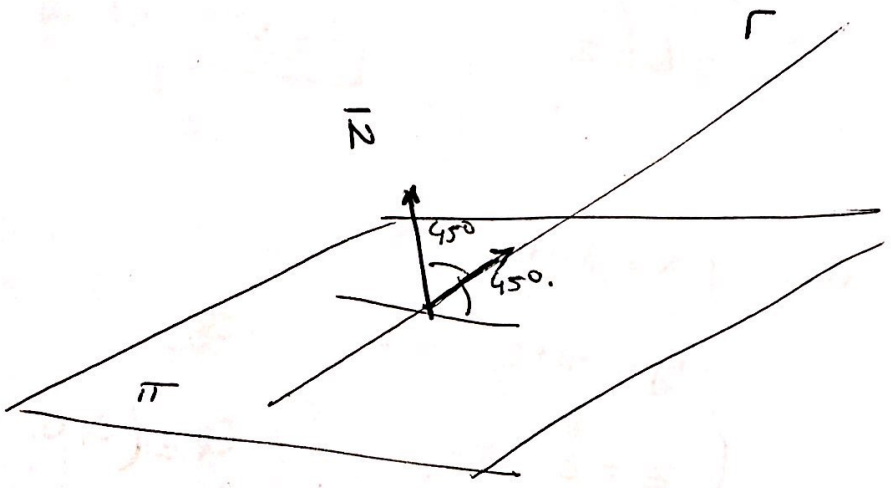
Escaneado con CamScanner

4)

$(x+z) + \beta(x-y+1) = 0$

$r \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

45° con la recta r.



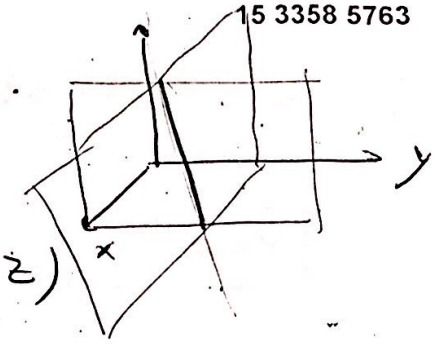
$(x+z) + \beta(x+y+1) = 0$

$x + z + \beta x - \beta y + \beta = 0.$

$x(1+\beta) - \beta y + 1z = -\beta.$

$\vec{N} = ((1+\beta), -\beta, 1)$

Escaneado con CamScanner



$(x,y,z) = (4,2,z)$ ∴

$= (4,2,0) + (0,0,z)$

$(x,y,z) = (4,2,0) + z\dfrac{(0,0,1)}{\vec{v}}$

$\vec{v}\cdot\vec{N} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{N}\| \cos 45$

$(0,0,1)\ (1+\beta, -\beta, 1) = \sqrt{0^2+0^2+1^2}\ \sqrt{(1+\beta)^2 + (-\beta)^2 + 1^2}\ \cos 45°$

$1 = 1\sqrt{(1+\beta)^2 + \beta^2 + 1}\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = (1+\beta)^2 + \beta^2 + 1$

$2 = 1 + 2\beta + \beta^2 + \beta^2 + 1$

$0 = 2\beta + 2\beta^2 \rightarrow 0 = \underbrace{2\beta}_{\beta=0}\ \underbrace{(1+\beta)}_{\beta=-1}$

Escaneado con CamScanner

$\beta = 0$. → vuelvo al haz de planos.

$$\boxed{x + z = 0}$$

$\beta = -1$. $\quad x + z - (x - y + 1) = 0$.

$$\cancel{x} + z - \cancel{x} + y - 1 = 0$$

$$\boxed{y + z = 1}$$

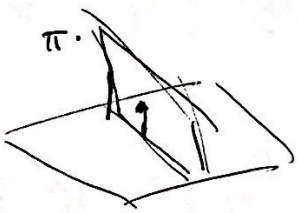
15) π plano 1 $\quad \pi_1 \quad x + 3y + z = 0$. $\quad N_1 = (1,3,1)$

$\vec{v}$ debe estar contenido en π.

contiene al eje x.

eje x

$(x,0,0) = (1,0,0) = \vec{\omega}$.



$\pi \rightarrow$ Ecuación vectorial

$$\pi \quad \vec{x} = a \cdot \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{v}} + b \cdot \underbrace{(1,3,1)}_{\vec{\omega}} + (0,0,0)$$

Escaneado con CamScanner

$$\bar{N} = \bar{v} \wedge \bar{w} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\check{\imath}(0) - \check{\jmath}(1) + \check{k}\,3$$

$$\bar{N} = (0, -1, 3) \qquad P = (0,0,0)$$

$$\bar{N} \cdot \bar{x} = \bar{N} \cdot P$$

$$\pi \Rightarrow (0,-1,3)\,(x,y,z) = (0,-1,3)\cdot(0,0,0)$$

$$\pi: \boxed{-y + 3z = 0}$$

$$L = \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = \alpha + \beta t \end{cases}$$

$$-t + 3(\alpha + \beta t) = 0$$

$$-t + 3\alpha + 3\beta t = 0$$

$$t(-1 + 3\beta) = 3\alpha$$

$$\boxed{t = \frac{3\alpha}{-1 + 3\beta}}$$

E-mail : rjvenierо@gmail.com

Escaneado con CamScanner

$$\boxed{-1+3\beta \neq 0.}$$

Para pos $(1,0,4)$ $\overset{\text{Reemplazo}}{\text{en.}}$
x, y, z

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = t \\ 4 = \alpha + \beta \cdot 0 \end{cases}$$

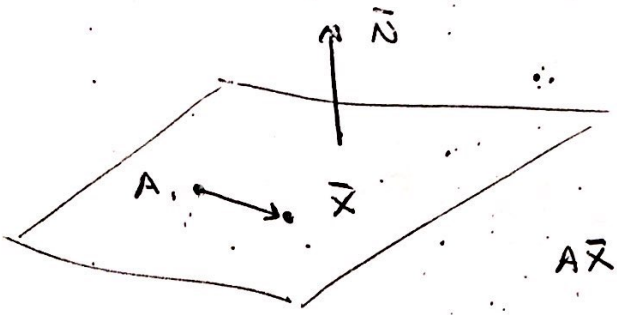
$$\boxed{\alpha = 4}$$

$$3\beta \neq 1$$

$$\beta \neq \frac{1}{3}.$$

Escaneado con CamScanner

Plano Dado por un punto y su normal:



$\bar{N}$ = normal

A es un punto

$$A\bar{X} = \bar{X} - A$$

$$\bar{N} \cdot A\bar{X} = 0$$

$$\bar{N}\,(x - A) = 0$$

$$\bar{N}\bar{x} - \bar{N}A = 0$$

$$\boxed{\bar{N}x = \bar{N}A}$$

$P = A = (3,5,3)$

$\bar{N} = (3,1,2)$

$\bar{N} \cdot \bar{x} = \bar{N} \cdot A$

$(3,1,2)\cdot(x,y,z) = (3,1,2)\cdot(3,5,3)$

$3x + 1y + 2z = 9 + 5 + 6$

$$\boxed{3x + y + 2z = 20}$$

Escaneado con CamScanner

19)

r_1 r_2.

$r_2)$ $\quad x+1 = \dfrac{-y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{-3} = t.$

$$r_2 \begin{cases} x+1 = t \rightarrow x = -1+t. \\ \dfrac{-y+3}{-2} = t \rightarrow -y = -2t-3 \rightarrow y = 2t+3 \\ \dfrac{z-2}{-3} = t \rightarrow z = 2-3t \end{cases}$$

r_1 $P_1 = (2,1,5)$ $\quad r_2 \rightarrow P_2 = (-1,3,2)$

$$\bar{v} = \overline{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \underline{(-3,2,-3)} = \bar{v}.$$

$$r \Rightarrow (x,y,z) = \underbrace{(-2,1,5)}_{P_1} + t(-3,2,-3)$$

P.

Escaneado con CamScanner

$$\|P - P_0\| = \sqrt{195}$$

$$\|(-2+t, 1+2t, 5-3t) - (-2, 1, 5)\| = \sqrt{195}$$

$$\|(t, 2t, -3t)\| = \sqrt{195}$$

$$\sqrt{t^2 + 4t^2 + 9t^2} = \sqrt{195}$$

$$14t^2 = 195$$

$$t^2 = \frac{195}{14}$$

$$t = \sqrt{\frac{195}{14}} \qquad t = -\sqrt{\frac{195}{14}}$$

Escaneado con CamScanner

19)

$$P \Rightarrow (x, y, z) = (-2, 1, 5) + \sqrt{\frac{195}{14}}\,(3, 2, -3)$$

$\bar{N} = \bar{V} = (3, 2, -3)$

$(-2, 1, 5)$.

$\bar{N} \cdot \bar{x} = \bar{N} \cdot P$

$\bar{N} \cdot \bar{x} = \bar{N} \, P_0$.

Escaneado con CamScanner