

**U.T.N. F.R.B.A. - MATEMÁTICA DISCRETA**  
**RESPUESTAS Examen final:** 17 de febrero de 2021

**1)**Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a)  $A \subseteq B \wedge C \cap B = A \Rightarrow A = C$

b)  $A \subseteq B \cup C \wedge C - A = C \Rightarrow A \subseteq B$

(demuestre la verdadera y justifique la falsa).

**RESPUESTA**

a) Es FALSA. Deben dar contraejemplo en que se cumplan las hipótesis y no la tesis. Por

ejemplo:  $A=\{1\}, B=\{1,2\}, C=\{1,3\}$

b) Verdadera. Hay que demostrarla en forma genérica.

$$\forall x: [ x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A \wedge ( x \in B \vee x \in C )$$

$$\Rightarrow ( x \in A \wedge x \in B ) \vee ( x \in A \wedge x \in C ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ( x \in A \wedge x \in B ) \vee ( x \in A \wedge x \in C - A ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ( x \in A \wedge x \in B ) \vee ( x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin A ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ( x \in A \wedge x \in B ) \vee F \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B ]$$

**2)** Analice si las siguientes relaciones son de equivalencia en Reales:

a)  $x R y \Leftrightarrow 5y - 5x = x^2 - y^2$

b)  $x S y \Leftrightarrow \text{ent}(x) + \text{ent}(y) = \text{ent}(x+y)$

Nota:  $\text{ent}(x)$  significa parte entera de  $x$

(para las de equivalencia, halle clases y conjunto cociente)

**RESPUESTA**

a) Es de equivalencia. Se demuestran las tres propiedades en forma genérica. Es un caso

particular de relación con función asociada.  $F(x) = x^2 + 5x$

Las clases son:  $\text{cl}(x) = \{x, -5-x\}$ , excepto la clase:  $\text{cl}(-2.5) = \{-2.5\}$

Conjunto cociente:  $\mathbb{R} / R = \{ \text{cl}(x) / x \in [ -2.5, +\infty )$

b) No es reflexiva ni transitiva. Por ejemplo 3.75 no se relaciona con sí mismo.

Deben justificar con un contraejemplo de alguna de esas dos propiedades.

3) Sea el conjunto ordenado  $(D_{330}; |)$ ,

a) Indique justificando si es red, si es Algebra de Boole. Halle las cotas superiores e inferiores del subconjunto  $A = \{5, 15, 55\}$

b) Establezca un isomorfismo con  $(P(\{a,b,c,d\}), \subseteq)$

### RESPUESTA

a) Es RED, la justificación es que todo par de elementos tiene supremo e ínfimo. iiNo es suficiente decir que tiene primer y último elemento!! No hace falta que hagan todo el diagrama de Hasse, pueden indicar supremo e ínfimo como m.c.m. y m.c.d.

También alcanza la estructura de Algebra de Boole, por ser red distributiva y complementada. Deben indicar los complementos y justificar la distributiva.

Cotas superiores de A son: 165 y 330

Cotas inferiores de A son: 1 y 5

b) Debe definirse la función, pudiendo elegir alguno de los 24 isomorfismos posibles que quedan determinados cada uno por la asignación de los átomos.

Por ejemplo, uno puede ser:

X	1	2	3	5	11	6	10	15	22
F(x)	$\emptyset$	{a}	{b}	{c}	{d}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,d}

X	33	55	30	66	110	165	330
F(x)	{b,d}	{c,d}	{a,b,c}	{a,b,d}	{a,c,d}	{b,c,d}	{a,b,c,d}

4) Dada la recurrencia:  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$

a) Halle la solución particular para  $a_0 = 5 \wedge a_1 = 7$

b) Demuestre por inducción que la formula hallada es correcta

### RESPUESTA

a) La recurrencia dada es de orden 2, lineal y no es homogénea, por lo tanto, se resuelve hallando la solución general de la homogénea asociada ( $a_{nH} = k_1 + k_2 n$ ) y sumando una particular (se propone  $a_{nP} = c 2^n$  y se obtiene  $c=1$ ). Luego se toman en cuenta los datos para obtener la solución particular pedida. Eso da:  $a_n = 4 + n + 2^n$

b) Debe demostrarse en forma clara, paso a paso y sin utilizar la tesis antes de demostrarla.

5) Indique V o F justificando:

a)  $H = \{ x \in \mathbb{R} / x = a \cdot \sqrt{3} + b \text{ con } a, b \in \mathbb{Q} \}$  es subgrupo de  $(\mathbb{R}; +)$

b) Es posible diseñar un autómata finito que reconozca el lenguaje:

$$L = \{ 2^k 1 (0 + 1^h 2) 0 / k \geq 2 \wedge h \geq 1 \}$$

## RESPUESTA

- a) Verdadero. Se deben probar las tres condiciones necesarias y suficientes de subgrupos.  
b) Verdadero, ya que el lenguaje es regular. Deben hacer el autómata que reconozca dicho lenguaje, ni una palabra de más ni de menos.

