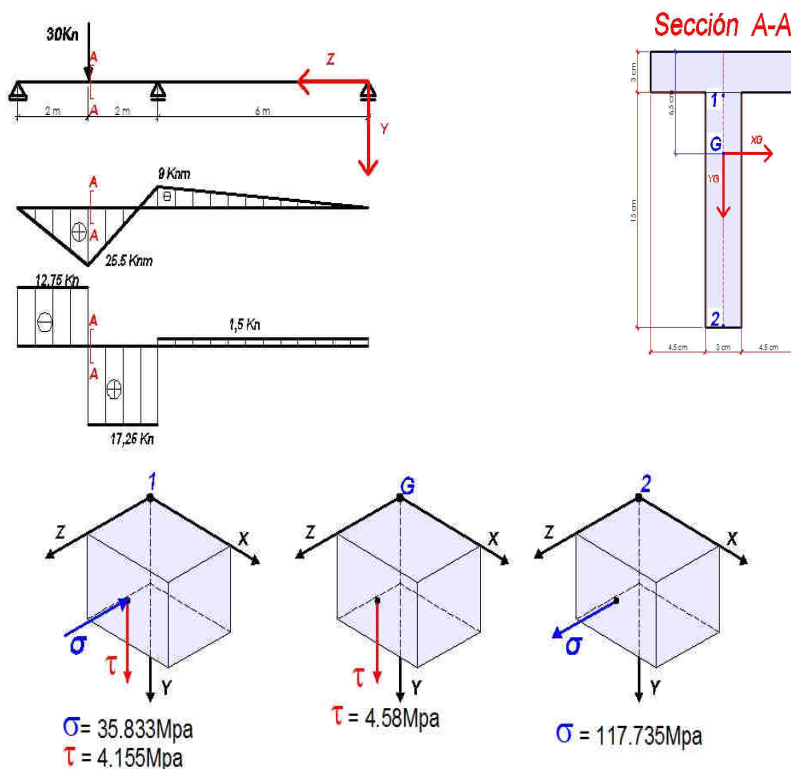


**Ej. N° 1** En la siguiente barra de acero ( $E=210000\text{Mpa}$ ,  $\mu=0.30$ ) de sección transversal T y cargada como se indica en la figura, se ha considerado una sección A-A y se representó el estado de tensión en el entorno de tres puntos (1, G y 2) de la misma.



Se solicita para el entorno de los tres puntos:

- Escribir el tensor de tensiones y descomponerlo en tensor esférico y tensor desviador.
- Determinar tensiones, direcciones y planos principales. Para el estado de tensión que sólo presenta tensión normal, determinar el vector tensión asociado a cada uno de los planos correspondientes al haz cuyo eje sostén es la dirección principal de tensión no nula. ¿Cuántos planos principales presenta dicho estado de tensión?
- Determinar el valor de la tensión tangencial octaédrica.
- Determinar la máxima tensión tangencial y relacionar los planos en que ocurre con los planos principales. Establecer además el valor de la tensión normal asociada a los planos de máxima tensión tangencial.
- Determinar deformaciones y direcciones principales. (el material es homogéneo e isotrópico).
- Relacionar el estado de tensión en el punto analizado con el estado de deformación.
- Determinar si el hexaedro diferencial en el entorno del punto cambia
  - de forma
  - de volumen
  - de forma y volumen
- Determinar la energía específica total de deformación y la energía específica del cambio de forma (habitualmente conocida como de distorsión).

**Punto 1**

a)

$$\sigma_x := 0 \text{ MPa} \quad \sigma_y := 0 \text{ MPa} \quad \sigma_z := -35.833 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zy} := 4.155 \text{ MPa} \quad \tau_{yz} := 4.155 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} := 0 \text{ MPa} \quad \tau_{yx} := 0 \text{ MPa} \quad \tau_{xz} := 0 \text{ MPa} \quad \tau_{zx} := 0 \text{ MPa}$$

$$T_T := \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad T_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.155 \\ 0 & 4.155 & -35.833 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$I_1 := \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -35.833$$

$$I_2 := (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) + (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2) + (\sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xz}^2) = -17.264$$

$$I_3 := |T_T| = 0$$

$$T_E := \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad T_E = \begin{pmatrix} -11.9443 & 0 & 0 \\ 0 & -11.9443 & 0 \\ 0 & 0 & -11.9443 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$T_D := \begin{bmatrix} \left( \sigma_x - \frac{I_1}{3} \right) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \left( \sigma_y - \frac{I_1}{3} \right) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \left( \sigma_z - \frac{I_1}{3} \right) \end{bmatrix} \quad T_D = \begin{pmatrix} 11.9443 & 0 & 0 \\ 0 & 11.9443 & 4.155 \\ 0 & 4.155 & -23.8887 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

b)

Ecuación de Lagrange

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Resolviendo la Ecuación Cúbica nos queda:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 \text{ resolver, } \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} -36.308481873903638773 \\ 0.47548187390363877313 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 := 0.4755 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 := 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 := -36.308 \text{ MPa}$$

### Dirección 1

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_1) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_1) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.4755 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4755 & 4.155 \\ 0 & 4.155 & -36.3055 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-0.4755 \cdot a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

$$-0.4755 \cdot b_1 + 4.155 \cdot c_1 = 0$$

$$4.155 \cdot b_1 - 36.3055 \cdot c_1 = 0$$

Asignando valor unitario a  $b_1$  y Resolviendo la Ecuación nos queda:

$$a_1 := 0$$

$$b_1 := 1$$

$$c_1 := 0.1144$$

$$l_1 := \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0$$

$$m_1 := \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0.9935$$

$$n_1 := \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0.1137$$

Dirección 1  $\rightarrow$  
$$n_1 := \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9935 \\ 0.1137 \end{pmatrix}$$

### Dirección 2

Se Observa que en el Plano Ortogonal al Eje "x" no Existen Tensiones Tangenciales. Entonces la Dirección Principal 2 corresponde al Versor del Eje "x".

Dirección 2  $\rightarrow$  
$$n_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Dirección 3

La dirección 3 se obtiene sabiendo que debe ser Ortogonal con respecto a las otras dos Direcciones Principales

Entre  $n_1$  y  $n_2$  se verifica la Ortogonalidad  $\rightarrow (0; 0.9935, 0.1137) \cdot (1, 0, 0) = 0$

$n_2 \cdot n_3 = 0 \rightarrow (1, 0, 0) \cdot (a_3, b_3, c_3) = 0 \rightarrow a_3 = 0$

$n_1 \cdot n_3 = 0 \rightarrow (0; 0.9935; 0.1137) \cdot (0; b_3, c_3) = 0 \rightarrow$

Dirección 3  $\rightarrow$  
$$n_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1137 \\ -0.9935 \end{pmatrix}$$

El Estado de Tensión Presenta 3 Planos Principales

c)

Tensión Tangencial Octaédrica

$$\tau_{\text{oct}} := \frac{\sqrt{2(I_1^2 - 3 \cdot I_2)}}{3} = 17.2291 \text{ MPa}$$

- d)  
Máxima Tensión Tangencial

$$\tau_{\max} := \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 18.3917 \text{ MPa}$$

El versor normal se encuentra a 45° de las Direcciones 1 y 3 y son 2 Planos Ortogonales entre sí. EL Alumno DEBERA DEMOSTRARLO ya sea Analíticamente o gráficamente (Circulo de Mohr)

$$\sigma_{\tau, \max} := \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = -17.9163 \text{ MPa}$$

- e)  
Deformaciones Principales

$$E := 210000 \text{ MPa} \quad \mu := 0.30$$

$$\xi_1 := \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = 5.4133 \times 10^{-5}$$

$$\xi_2 := \frac{\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} = 5.1189 \times 10^{-5}$$

$$\xi_3 := \frac{\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)}{E} = -1.7357 \times 10^{-4}$$

Las Direcciones Principales de Deformaciones se Obtienen de Forma Análoga a las Direcciones Principales de Tensiones. Siendo Ambas Coincidentes.  
El Alumno DEBERA DEMOSTRARLO EN AL MENOS 1 CASO

- f)  
Se puede observar que: → Estado de Tension es Plano ( $I_3 = 0$  e  $I_2 \neq 0$ )  
Estado de Deformación Triple  $\xi_1, \xi_2$ , y  $\xi_3 \neq 0$

- g)  
Se verifica que: → Existe Cambio de Volúmen ( $T_E \neq 0$ )  
Existe Cambio de Forma ( $T_D \neq 0$ )

h)

Energía Total de Deformación  $\mu_{\text{Total}}$

Energía Específica de Cambio de Forma  $\mu_{\text{Forma}}$

$$\mu_{\text{Total}} := \frac{I_1^2 - 2(1 + \mu) \cdot I_2}{2E} = 3.164 \times 10^{-3} \quad \text{MPa}$$

$$\mu_{\text{Forma}} := \frac{1 + \mu}{3E} \cdot (I_1^2 - 3I_2) = 2.7564 \times 10^{-3} \quad \text{MPa}$$

**Punto G**

a)

$$\sigma_x := 0 \quad \text{MPa} \quad \sigma_y := 0 \quad \text{MPa} \quad \sigma_z := 0 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{zy} := 4.58 \quad \text{MPa} \quad \tau_{yz} := 4.58 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} := 0 \quad \text{MPa} \quad \tau_{yx} := 0 \quad \text{MPa} \quad \tau_{xz} := 0 \quad \text{MPa} \quad \tau_{zx} := 0 \quad \text{MPa}$$

$$T_T := \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

$$T_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.58 \\ 0 & 4.58 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

$$I_1 := \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$$

$$I_2 := (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) + (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2) + (\sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xz}^2) = -20.9764$$

$$I_3 := |T_T| = 0$$

$$T_E := \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

$$T_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MPa

$$T_D := \begin{bmatrix} \left(\sigma_x - \frac{I_1}{3}\right) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \left(\sigma_y - \frac{I_1}{3}\right) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \left(\sigma_z - \frac{I_1}{3}\right) \end{bmatrix} \quad \text{MPa}$$

$$T_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.58 \\ 0 & 4.58 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

b) Ecuación de Lagrange

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Resolviendo la Ecuación Cúbica nos queda:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 \text{ resolver, } \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} -4.58 \\ 4.58 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 := 4.58 \quad \text{MPa} \quad \sigma_2 := 0 \quad \text{MPa} \quad \sigma_3 := -4.58 \quad \text{MPa}$$

### Dirección 1

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_1) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_1) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4.58 & 0 & 0 \\ 0 & -4.58 & 4.58 \\ 0 & 4.58 & -4.58 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-4.58 \cdot a_1 = 0$$

$$-4.58 \cdot b_1 + 4.58 \cdot c_1 = 0$$

$$4.58 \cdot b_1 - 4.58 \cdot c_1 = 0$$

Resolviendo la Ecuación nos queda:

$$a_1 := 0 \quad b_1 := 1 \quad c_1 := 1$$

$$l_1 := \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0$$

$$m_1 := \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0.7071$$

$$n_1 := \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0.7071$$

Dirección 1 →  $n_1 := \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7071 \\ 0.7071 \end{pmatrix}$

### Dirección 2

Se Observa que en el Plano Ortogonal al Eje "x" no Existen Tensiones Tangenciales. Entonces la Dirección Principal 2 corresponde al Versor del Eje "x".

Dirección 2 →  $n_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

### Dirección 3

La dirección 3 se obtiene sabiendo que debe ser Ortogonal con respecto a las otras dos Direcciones Principales

Dirección 3 →  $n_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7071 \\ -0.7071 \end{pmatrix}$

El Estado de Tensión Presenta 3 Planos Principales

c)

Tensión Tangencial Octaédrica

$$\tau_{\text{oct}} := \frac{\sqrt{2(I_1^2 - 3 \cdot I_2)}}{3} = 3.7396 \quad \text{MPa}$$

d)

Máxima Tensión Tangencial

$$\tau_{\text{max}} := \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 4.58 \quad \text{MPa}$$

El versor normal se encuentra a 45° de las Direcciones 1 y 3 y son 2 Planos Ortogonales entre sí. El Alumno DEBERA DEMOSTRARLO ya sea Analíticamente o Gráficamente (Circulo de Mohr)

$$\sigma_{\tau, \text{max}} := \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 0 \quad \text{MPa}$$

e)

Deformaciones Principales

$$E := 210000 \quad \text{MPa} \quad \mu := 0.30$$

$$\xi_1 := \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = 2.8352 \times 10^{-5}$$

$$\xi_2 := \frac{\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} = 0$$

$$\xi_3 := \frac{\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)}{E} = -2.8352 \times 10^{-5}$$

Las Direcciones Principales de Deformaciones se Obtienen de Forma Análoga a las Direcciones Principales de Tensiones. Siendo Ambas Coincidentes.  
El Alumno DEBERA DEMOSTRARLO EN AL MENOS 1 CASO

f)

Se puede observar que:  $\rightarrow$  Estado de Tension es Plano ( $I_3 = 0$  e  $I_2 \neq 0$ )

Estado de Deformación Doble o Plano  $\rightarrow \xi_1$  y  $\xi_3 \neq 0$   $\xi_2 = 0$

g)

Se verifica que:  $\rightarrow$  No Existe Cambio de Volúmen ( $T_E = 0$ )

Existe Cambio de Forma ( $T_D \neq 0$ )

h)

Energía Total de Deformación  $\mu_{Total}$

Energía Específica de Cambio de Forma  $\mu_{Forma}$

$$\mu_{Total} := \frac{I_1^2 - 2(1 + \mu) \cdot I_2}{2E} = 1.2985 \times 10^{-4} \text{ MPa}$$

$$\mu_{Forma} := \frac{1 + \mu}{3E} \cdot (I_1^2 - 3I_2) = 1.2985 \times 10^{-4} \text{ MPa}$$

### Punto 2

a)

$$\sigma_x := 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y := 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z := 117.735 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zy} := 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yz} := 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} := 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx} := 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} := 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{zx} := 0 \text{ MPa}$$

$$T_T := \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$T_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 117.735 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$I_1 := \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 117.735$$

$$I_2 := (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2) + (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2) + (\sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xz}^2) = 0$$

$$I_3 := |T_T| = 0$$

$$T_E := \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$T_E = \begin{pmatrix} 39.245 & 0 & 0 \\ 0 & 39.245 & 0 \\ 0 & 0 & 39.245 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$T_D := \begin{bmatrix} \left( \sigma_x - \frac{I_1}{3} \right) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \left( \sigma_y - \frac{I_1}{3} \right) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \left( \sigma_z - \frac{I_1}{3} \right) \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$T_D = \begin{pmatrix} -39.245 & 0 & 0 \\ 0 & -39.245 & 0 \\ 0 & 0 & 78.49 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

b) Ecuación de Lagrange

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Resolviendo la Ecuación Cúbica nos queda:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 \text{ resolver, } \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} 117.735 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 := 117.735 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 := 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 := 0 \text{ MPa}$$

Puede Observarse que los 3 Planos dados Resultan Principales, ya que en ninguno de ellos Existen Tensiones Tangenciales

**Dirección 1**  $n_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Dirección 2**  $n_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Dirección 3**  $n_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Los Planos cuyo eje sostén corresponde al Eje "z" se caracterizan por los siguientes cosenos directores

$\{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\} \rightarrow$  Haz de Planos cuyo eje sostén es el Eje "z"

$$\rho_{\alpha}(\alpha) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 117.735 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$\rightarrow$  Vector Tensión en la Dirección Normal a los Infinitos Planos que forman el Haz de Planos que tienen como eje sostén al Eje "z" Coincide con el Vector Tensión Nula

Entonces el Estado de Tensión Tiene Infinitos Planos Principales, 1 Coincidente con el Eje "z" e Infinitos otros que Corresponden al Haz de Planos que tienen como eje sostén al Eje "z", siendo Ortogonales entre sí

c)

Tensión Tangencial Octaédrica

$$\tau_{\text{oct}} := \frac{\sqrt{2(I_1^2 - 3 \cdot I_2)}}{3} = 55.5008 \text{ MPa}$$

d)

Máxima Tensión Tangencial

$$\tau_{\text{max}} := \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 58.8675 \text{ MPa}$$

El versor normal se encuentra a 45° de las Direcciones 1 y 3 y son 2 Planos Ortogonales entre sí. El Alumno DEBERA DEMOSTRARLO ya sea analíticamente o gráficamente (Círculo de Mohr)

$$\sigma_{\tau.\text{max}} := \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 58.8675 \text{ MPa}$$

e)  
Deformaciones Principales

$$E := 210000 \text{ MPa} \quad \mu := 0.30$$

$$\xi_1 := \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = 5.6064 \times 10^{-4}$$

$$\xi_2 := \frac{\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} = -1.6819 \times 10^{-4}$$

$$\xi_3 := \frac{\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)}{E} = -1.6819 \times 10^{-4}$$

Las Direcciones Principales de Deformaciones se Obtienen de Forma Análoga a las Direcciones Principales de Tensiones. Siendo Ambas Coincidentes.  
El Alumno DEBERA DEMOSTRARLO EN AL MENOS 1 CASO.

f)  
Se puede observar que: → Estado de Tension es Lineal o Simple ( $I_3 = 0$  e  $I_2 = 0$ )  
Estado de Deformación Triple y  $\xi_1, \xi_2$  y  $\xi_3 \neq 0$

g)  
Se verifica que: → Existe Cambio de Volúmen ( $T_E \neq 0$ )  
Existe Cambio de Forma ( $T_D \neq 0$ )

h)  
Energía Total de Deformación  $\mu_{\text{Total}}$   
Energí Específica de Cambio de Forma  $\mu_{\text{Forma}}$

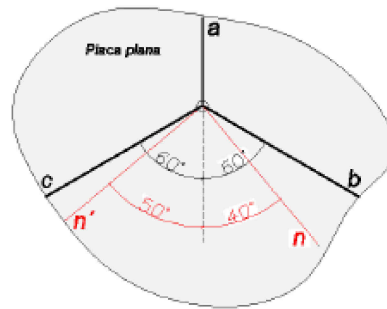
$$\mu_{\text{Total}} := \frac{I_1^2 - 2(1 + \mu) \cdot I_2}{2E} = 0.033 \quad \text{MPa}$$

$$\mu_{\text{Forma}} := \frac{1 + \mu}{3E} \cdot (I_1^2 - 3I_2) = 0.0286 \quad \text{MPa}$$

**Ej. N° 2** En laboratorio se ensaya una placa plana de acero cargada de forma que en sus infinitos puntos los estados tensionales resulten planos.

Se miden en el proceso, mediante roseta a 60° las deformaciones longitudinales que se indican:

$$\epsilon_a = 2 \times 10^{-3} \quad \epsilon_b = -1 \times 10^{-3} \quad \epsilon_c = 3 \times 10^{-3}$$



a-Determinar analíticamente las deformaciones específicas principales y las direcciones principales.

b-Determinar analíticamente las tensiones principales mediante la relación entre tensiones y deformaciones ( $E=210000\text{Mpa}$ ,  $\mu=0.30$  - material isótropo).

c-Calcular  $\epsilon^L_n$  (componente longitudinal de deformación) y  $\gamma_{nn'}$  ( $n$  y  $n'$  inicialmente en el plano de la placa).

a)

$$T_T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_D = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_a := 0.002$$

$$\epsilon_b := -0.001$$

$$\epsilon_c := 0.003$$

$$\epsilon_a = \epsilon_x \cdot \cos(270)^2 + \epsilon_y \cdot \sin(270)^2 + \epsilon_{yx} \cdot \sin(2 \cdot 270)$$

$$\epsilon_b = \epsilon_x \cdot \cos(30)^2 + \epsilon_y \cdot \sin(30)^2 + \epsilon_{yx} \cdot \sin(2 \cdot 30)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_x \cdot \cos(150)^2 + \epsilon_y \cdot \sin(150)^2 + \epsilon_{yx} \cdot \sin(2 \cdot 150)$$

Resolviendo el Sistema nos queda:

$$\epsilon_x := 0.0006667$$

$$\epsilon_y := 0.002$$

$$\epsilon_{yx} := -0.00231$$

$$\epsilon_{xy} := \epsilon_{yx}$$

Planteando la Ley de Hooke Generalizada se Despeja  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\epsilon_z$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y - \mu \cdot \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x - \mu \cdot \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z - \mu \cdot \sigma_x - \mu \cdot \sigma_y}{E}$$

Resolviendo el Sistema nos queda:

$$\sigma_x := 292.3077 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_y := 507.6923 \quad \text{MPa}$$

$$\epsilon_z := -0.001143$$

$$\sigma_z := 0$$

$$\epsilon_{zx} := 0$$

$$\epsilon_{zy} := 0$$

$$\epsilon_{xz} := \epsilon_{zx}$$

$$\epsilon_{yz} := \epsilon_{zy}$$

$$\tau_{zx} := 0 \quad \tau_{xz} := \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} := 0 \quad \tau_{zy} := \tau_{yz}$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = 8.0769 \times 10^4 \quad \text{MPa}$$

$$\gamma_{yx} := 2 \cdot \epsilon_{yx} = -4.62 \times 10^{-3}$$

$$\tau_{yx} := \gamma_{yx} \cdot G = -373.1538 \quad \text{MPa} \quad \tau_{xy} := \tau_{yx}$$

$$T_T := \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 292.3077 & -373.1538 & 0 \\ -373.1538 & 507.6923 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$T_D := \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.667 \times 10^{-4} & -2.31 \times 10^{-3} & 0 \\ -2.31 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -1.143 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$I_1 := \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 800$$

$$I_2 := (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{yx}^2) + (\sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2) + (\sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xz}^2) = 9.1586 \times 10^3$$

$$I_3 := |T_T| = 0$$

b) Ecuación de Lagrange

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Resolviendo la Ecuación Cúbica nos queda:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 \text{ resolver, } \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} 11.61691028225977202 \\ 788.38308971774022798 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 := 788.38309 \text{ MPa} \quad \sigma_2 := 11.616910 \text{ MPa} \quad \sigma_3 := 0 \text{ MPa}$$

### Dirección 1

$$\begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_1) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_1) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -496.0754 & -373.1538 & 0 \\ -373.1538 & -280.6908 & 0 \\ 0 & 0 & -788.3831 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-496,0754 \cdot a_1 - 373,1538 \cdot b_1 = 0$$

$$-373,1538 \cdot a_1 - 280,6908 \cdot b_1 = 0$$

$$-788,3831 \cdot c_1 = 0$$

Asignando valor "1" al coeficiente  $a_1$  se obtiene  $b_1 = -1.329412$  y  $c_1 = 0$

$$a_1 := 1$$

$$b_1 := -1.329412$$

$$c_1 := 0$$

$$l_1 := \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0.6011$$

$$m_1 := \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = -0.7992$$

$$n_1 := \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0$$

Dirección 1  $\rightarrow$  
$$n_1 := \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6011 \\ -0.7992 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que la Dirección 3 debe ser (0,0,1), dado que el sistema se presenta como Plano, la Dirección 2 Resulta ser (0,7992; 0,6011; 0) ya que debe ser Ortogonal a las 2 Anteriores

Dirección 2 → 
$$n_2 := \begin{pmatrix} 0.7992 \\ 0.6011 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dirección 3 → 
$$n_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\epsilon_1 := \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} = 3.7376 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_2 := \frac{\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} = -1.0709 \times 10^{-3}$$

Debido a que la Dirección Principal 3 Coincide con el Eje "z", Entonces la deformación 3 ( $\epsilon_3$ ) coincide con la deformación en "z" ( $\epsilon_z$ ) = -0,001143. A manera de Comprobación se puede calcular la deformación 3 ( $\epsilon_3$ ) de manera análoga a  $\epsilon_1$  y a  $\epsilon_2$ , por medio de la Ley Generalizada de Hooke.

$$\epsilon_3 := \frac{\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E} = -0,001143$$

Análogamente al Método usado para Tensiones, se Determina las Direcciones Principales

### Dirección 1

$$\begin{bmatrix} (\epsilon_x - \epsilon_1) & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & (\epsilon_y - \epsilon_1) & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & (\epsilon_z - \epsilon_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3.0709 \times 10^{-3} & -2.31 \times 10^{-3} & 0 \\ -2.31 \times 10^{-3} & -1.7376 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -4.8806 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Asignando valor "1" al coeficiente  $a_1$  se obtiene  $b_1 = -1.3299393$  y  $c_1 = 0$

$$a_1 := 1$$

$$b_1 := -1.329393$$

$$c_1 := 0$$

$$l_1 := \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0.6011$$

$$m_1 := \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = -0.7991$$

$$n_1 := \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 0$$

Dirección 1 → 
$$n_1 := \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6011 \\ -0.7991 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que la Dirección 3 debe ser (0,0,1), dado que el sistema se presenta como Plano, la Dirección 2 Resulta ser (0,7992; 0,6011; 0) ya que debe ser Ortogonal a las 2 Anteriores, lo que resulta consistente con los Resultados antes Obtenidos

Dirección 2 → 
$$n_2 := \begin{pmatrix} 0.7992 \\ 0.6011 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dirección 3 → 
$$n_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\alpha := 50^\circ$$

$$\epsilon_{nL} := \epsilon_x \cdot \cos(\alpha)^2 + \epsilon_y \cdot \sin(\alpha)^2 + \epsilon_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = -8.2579 \times 10^{-4}$$

$$\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_D = \begin{pmatrix} 6.667 \times 10^{-4} & -2.31 \times 10^{-3} & 0 \\ -2.31 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -1.143 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_n := T_D \cdot \alpha = \begin{pmatrix} -1.341 \times 10^{-3} \\ 4.725 \times 10^{-5} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\epsilon| = 1,3418 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_n := \sqrt{(\epsilon_{n1})^2 + (\epsilon_{n2})^2} = 1.3418 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_{nn'} := \sqrt{\epsilon_n^2 - \epsilon_{nL}^2} = 1.0576 \times 10^{-3}$$

$$\gamma_{nn'} := 2 \cdot \epsilon_{nn'} = 2.1153 \times 10^{-3}$$

Otra forma de cálculo es la siguiente:

$$\epsilon_a = 2 \times 10^{-3} \quad \epsilon_b = -1 \times 10^{-3} \quad \epsilon_c = 3 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_a = \epsilon_n \cdot \cos(220)^2 + \epsilon_n' \cdot \sin(220)^2 + \epsilon_{nn'} \cdot \sin(2 \cdot 220)$$

$$\epsilon_b = \epsilon_n \cdot \cos(340)^2 + \epsilon_n' \cdot \sin(340)^2 + \epsilon_{nn'} \cdot \sin(2 \cdot 340)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_n \cdot \cos(100)^2 + \epsilon_n' \cdot \sin(100)^2 + \epsilon_{nn'} \cdot \sin(2 \cdot 100)$$

$$\epsilon_n := -0.0008252 \quad \epsilon_n' := 0.0034918 \quad \epsilon_{nn'} := 0.0010576$$

$$\gamma_{nn'} := 2 \cdot \epsilon_{nn'} = 2.1152 \times 10^{-3}$$