

## Preguntas

### Parte teórica

1. Defina “Solución general (SG)” y “Solución particular (SP)” de una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$ . Dada la ecuación diferencial  $y' + 2y = 6$ , halle la SP que pasa por el punto  $(0, 2)$ .
2. Defina continuidad de una función en un punto. Dada

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 2y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

analice si puede definir  $f(0, 0)$  para que la función resulte continua en  $(0, 0)$ .

### Parte práctica

1. Dado el cuerpo  $D$  definido por  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $z \leq 16 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ <sup>1</sup>, calcule la masa de  $D$  sabiendo que –en cada punto– su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al eje  $z$ .
2. Calcule la circulación de  $\vec{f}(x, y) = (2xe^y - xy, x^2e^y)$  a lo largo de la curva frontera de la región plana definida por  $x^2 \leq y \leq 2 - x$ , recorrida en sentido positivo.
3. Dado  $\vec{f}(x, y, z) = (z, z, z - x - y)$ , calcule el flujo de  $\vec{f}$  a través del trozo de superficie esférica  $\Sigma$  de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  con  $y \geq x$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ . Indique gráficamente cómo decidió orientar a  $\Sigma$ .
4. Dada la superficie  $S$  de ecuación  $z = x^2 + xy + 2$ , analice si la recta normal a  $S$  en  $A = (1, 2, z_0)$  interseca en algún punto a la recta de ecuación  $\vec{X} = (5t + 4, 6t - 2, 3)$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>1</sup>Faltó agregar esta condición al enunciado.

# Respuestas

## Parte teórica

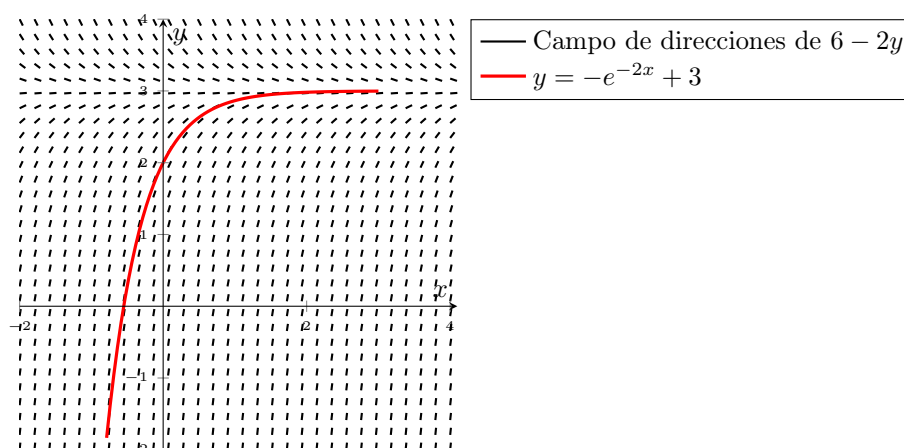
1. Sea la siguiente EDO de orden  $n$ :  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , en donde  $y$  representa una función de variable real  $x$ , e  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  las sucesivas derivadas.

**Definición** (SG de una EDO). Una *solución general* (comúnmente abreviada SG) de una EDO de orden  $n$  es una solución de la forma  $\varphi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ , siendo  $C_1, C_2, \dots, C_n$  constantes arbitrarias.

**Definición** (SP de una EDO). Una *solución particular* (comúnmente abreviada SP) de una EDO de orden  $n$  es la obtenida dando valores particulares a las constantes, usualmente elegidas para cumplir una serie de condiciones iniciales.

Sea la EDO  $y' + 2y = 6$ . Una forma para hallar la SP que pasa por  $(0, 2)$  es escribirla de la forma  $y' = 6 - 2y$ , entonces  $y' = 2(3 - y)$ , de donde  $y \equiv 3$  es solución, y si  $y \neq 3$  entonces dividiendo por  $3 - y$  obtenemos  $y'/(3 - y) = 2$ . Si integramos miembro a miembro obtenemos  $-\ln|3 - y| = 2x + C$ , de donde  $3 - y = ke^{-2x}$ , por tanto  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y(x) = Ke^{-2x} + 3$ . Si  $y(0) = 2$ , entonces  $Ke^0 + 3 = 2$ , entonces  $K = -1$ , por tanto la SP buscada es  $y(x) = -e^{-2x} + 3$ .

Nota. Otra forma de resolver la EDO es primero resolver la ecuación homogénea  $y' + 2y = 0$ , entonces  $y' = -2y$ , de donde  $y \equiv 0$  es solución, y si  $y \neq 0$  podemos dividir a ambos lados por  $y$ , entonces  $y'/y = -2$ . Integrando miembro a miembro obtenemos que  $\ln|y| = -2x + C$ , de donde  $y_H = Ke^{-2x}$ . Propongamos  $y_P(x) = K(x)e^{-2x}$ . Entonces  $y'_P(x) = K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x}$ . Si insertamos ambas expresiones en la ecuación original llegamos a  $K'(x) = 6e^{2x}$ , de donde integrando miembro a miembro y eligiendo un sólo valor para la constante de integración tenemos que  $K(x) = 3e^{2x}$ , entonces  $y_P(x) = 3e^{2x}e^{-2x} = 3$ , y como  $y = y_H + y_P$  entonces  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $y(x) = Ke^{-2x} + 3$ , que es lo mismo que antes. De manera análoga se halla la SP.



2. Una función escalar de dos variables  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *continua en un punto*  $(x, y) = (x_0, y_0) \in D$  si  $f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ .

Sea  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$ . Para que  $f$  sea continua en  $(0, 0)$  debemos estudiar la existencia de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ . Si ese límite existe y es finito, será el valor de  $f(0, 0)$  y resultará continua. Si no lo es no será continua allí.

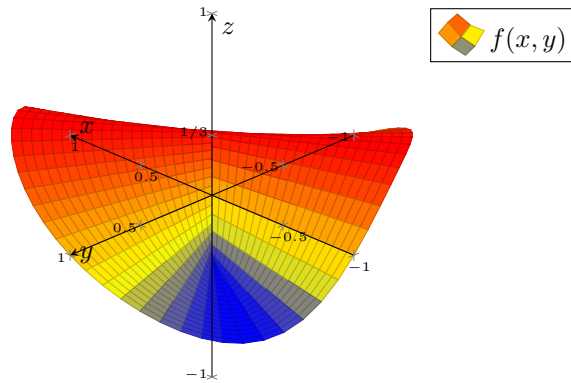
Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + 2y^2} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ \text{con } x = y}} \frac{y^2}{3y^2} = \frac{1}{3},$$

pero

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + 2y^2} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ \text{con } x = 0}} \frac{0}{0 + 2y^2} = 0.$$

Como por dos caminos nos dio un resultado distinto concluimos que el límite no existe y así no se puede definir  $f(0, 0)$  para que  $f$  resulte continua en  $(0, 0)$ .



## Parte práctica

1. Debemos resolver

$$\iiint_D \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

con  $\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ . Para ello utilizemos coordenadas cilíndricas de la siguiente manera:

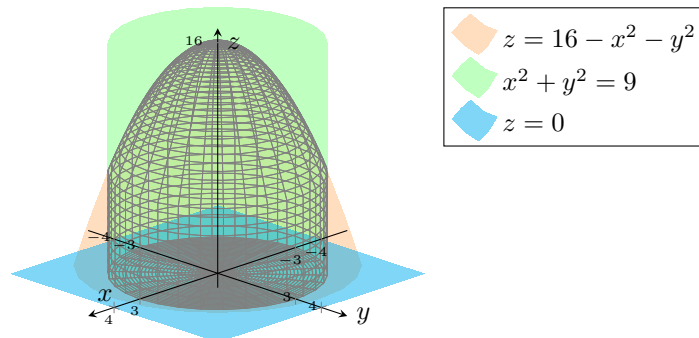
$$\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \vec{F}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Como la curva intersección de ambas superficies viene dada por las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 16 - (x^2 + y^2) \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 7 \end{cases}$$

y la proyección de la curva intersección sobre el plano  $xy$  es  $x^2 + y^2 = 9$ , o sea una circunferencia de centro 0 y radio 3 entonces la región de integración  $D$  en el sistema de coordenadas cilíndricas será  $\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 16 - \rho^2\}$ . La integral triple es entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 d\rho \int_0^{16-\rho^2} \rho \cdot (k\rho) \, dz &= k \cdot 2\pi \int_0^3 \rho^2(16 - \rho^2) \, d\rho \\ &= 2k\pi \int_0^3 (-\rho^4 + 16\rho^2) \, d\rho \\ &= 2k\pi \left[ -\frac{1}{5}\rho^5 + \frac{16}{3}\rho^3 \right]_0^3 \\ &= 2k\pi \left[ \frac{477}{5} \right] \\ &= \frac{954k\pi}{5}. \end{aligned}$$



2. Debemos hallar

$$\oint_{C=C_1 \cup C_2} \vec{f}(x, y) \, d\vec{s} = \oint_{C_1} \vec{f}(x, y) \, d\vec{s} + \oint_{C_2} \vec{f}(x, y) \, d\vec{s},$$

donde  $C_1$  es la curva definida por  $y = x^2$ , y  $C_2$  es la curva definida por  $y = 2 - x$ . Los extremos de cada parametrización pueden ser encontrados resolviendo la ecuación  $x^2 = 2 - x$ , lo que significa que  $x = -2$  o bien  $x = 1$ . La primera curva puede ser parametrizada por

$$\vec{\sigma}_1 : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \vec{\sigma}_1(t) = (t, t^2) \implies \vec{\sigma}'_1(t) = (1, 2t).$$

Entonces

$$\oint_{C_1^+} \vec{f}(x, y) d\vec{s} = \int_{-2}^1 (2te^{t^2} - tt^2, t^2e^{t^2}) \cdot (1, 2t) dt = \int_{-2}^1 (2te^{t^2} - t^3 + 2t^3e^{t^2}) dt = \frac{15}{4} + e - 4e^4.$$

Similarmemente, la segunda puede ser parametrizada por

$$\vec{\sigma}_2 : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \vec{\sigma}_2(t) = (t, 2 - t) \implies \vec{\sigma}'_2(t) = (1, -1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \oint_{C_2^-} \vec{f}(x, y) d\vec{s} &= - \oint_{C_2^+} \vec{f}(x, y) d\vec{s} = - \int_{-2}^1 (2te^{2-t} - t(2-t), t^2e^{2-t}) \cdot (1, -1) dt \\ &= - \int_{-2}^1 (2te^{2-t} - 2t + t^2 - t^2e^{2-t}) dt = -(6 + e - 4e^4). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\oint_{C=C_1 \cup C_2} \vec{f}(x, y) d\vec{s} = \frac{15}{4} + e - 4e^4 - (6 + e - 4e^4) = \frac{15}{4} - 6 = -\frac{9}{4}.$$

Nota. Lo resolveremos utilizando dos métodos más.

**Método** (Campo conservativo). Podemos preguntarnos si  $\vec{f}$  es conservativo para poder determinar si la circulación a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en su dominio es igual a cero.

Para ello debemos ver en primer lugar si la matriz jacobiana es simétrica. Entonces

$$D_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} 2e^y - y & 2xe^y - x \\ 2xe^y & x^2e^y \end{pmatrix},$$

la cual no es simétrica, pero podemos considerar escribir

$$\vec{f}(x, y) = \vec{h}(x, y) + \vec{g}(x, y) = (2xe^y, x^2e^y) + (-xy, 0),$$

donde  $\vec{g}, \vec{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde ahora  $\vec{h}(x, y)$  admite matriz jacobiana simétrica. Además, admite función potencial, puesto que existe un campo escalar  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\text{dom } \vec{f})$  ya que del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \varphi'_x(x, y) = 2xe^y \\ \varphi'_y(x, y) = x^2e^y \end{cases}$$

podemos integrar la primera ecuación con respecto a  $x$ , por lo que  $\varphi(x, y) = x^2e^y + m(y)$ . Si derivamos con respecto a  $y$ , entonces  $\varphi'_y(x, y) = x^2e^y + m'(y)$ , y comparando términos con nuestra segunda expresión, resulta que  $m'(y) = 0$ , o sea que  $m(y) = C$ , por lo que  $\varphi(x, y) = x^2e^y + C$ . Por tanto  $\oint_C \vec{h}(x, y) d\vec{s} = 0$ .

Para hallar  $\oint_C \vec{g}(x, y) d\vec{s}$  consideremos  $C$  como la unión de las curvas  $C_1$  y  $C_2$ , y definámoslas como antes. Volviendo a realizar las parametrizaciones  $\vec{\sigma}_1(t) = (t, t^2)$  y  $\vec{\sigma}_2(t) = (t, 2 - t)$  respectivamente para ambas curvas, se tiene que

$$\oint_{C_1^+} \vec{g}(x, y) d\vec{s} = \int_{-2}^1 (-tt^2, 0) \cdot (1, 2t) dt = - \int_{-2}^1 t^3 dt = \frac{15}{4}$$

y

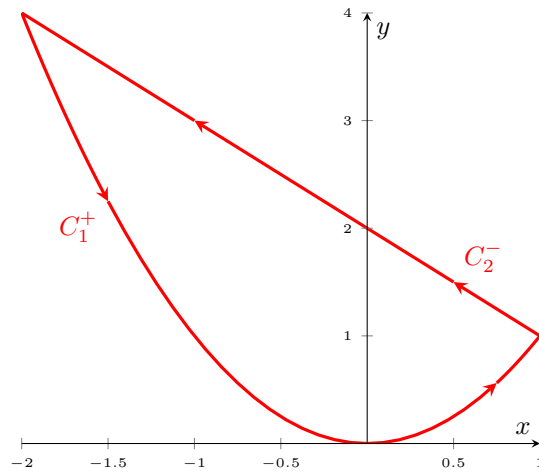
$$\oint_{C_2^-} \vec{g}(x, y) d\vec{s} = - \oint_{C_2^+} \vec{g}(x, y) d\vec{s} = - \int_{-2}^1 (-t(2-t), 0) \cdot (1, -1) dt = - \int_{-2}^1 (t^2 - 2t) dt = -6.$$

Finalmente,

$$\oint_C \vec{f}(x, y) d\vec{s} = \oint_C \vec{h}(x, y) d\vec{s} + \oint_C \vec{g}(x, y) d\vec{s} = 0 + \left( \frac{15}{4} - 6 \right) = -\frac{9}{4}.$$

**Método** (Teorema de Green).  $D$  es una región del plano, acotada, que tiene como frontera una curva simple, cerrada, suave a trozos, orientada en sentido como pide el enunciado (y de hecho el teorema de Green). Como se cumplen las hipótesis del teorema de Green tenemos que

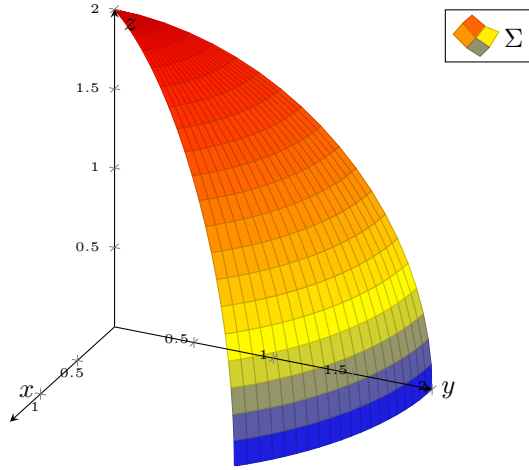
$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{f} d\vec{s} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_D (2xe^y - (2xe^y - x)) dx dy \\
 &= \iint_D x dx dy \\
 &= \int_{-2}^1 x dx \int_{x^2}^{2-x} dy \\
 &= \int_{-2}^1 x(2 - x - x^2) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-2}^1 \\
 &= -\left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 - \left( -\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 \right) \right) \\
 &= -\frac{9}{4}.
 \end{aligned}$$



3. Nos piden calcular el flujo de un campo vectorial a través de un trozo de esfera, o sea que debemos hallar  $\iint_{\Sigma} \vec{f} d\vec{\Sigma}$ . Para ello podemos utilizar una parametrización de la superficie. Utilizando coordenadas esféricas, tenemos que

$$\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \vec{F}(\theta, \varphi) = (2 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta),$$

$$D = \left\{ (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$



Entonces

$$\vec{f} \circ \vec{F} = (2 \cos \theta, 2 \cos \theta, 2 \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \varphi - 2 \sin \theta \sin \varphi)$$

y además

$$\vec{F}'_{\theta} \times \vec{F}'_{\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 \cos \theta \cos \varphi & 2 \cos \theta \sin \varphi & -2 \sin \theta \\ -2 \sin \theta \sin \varphi & 2 \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = (4 \sin^2 \theta \cos \varphi, 4 \sin^2 \theta \sin \varphi, 4 \cos \theta \sin \theta).$$

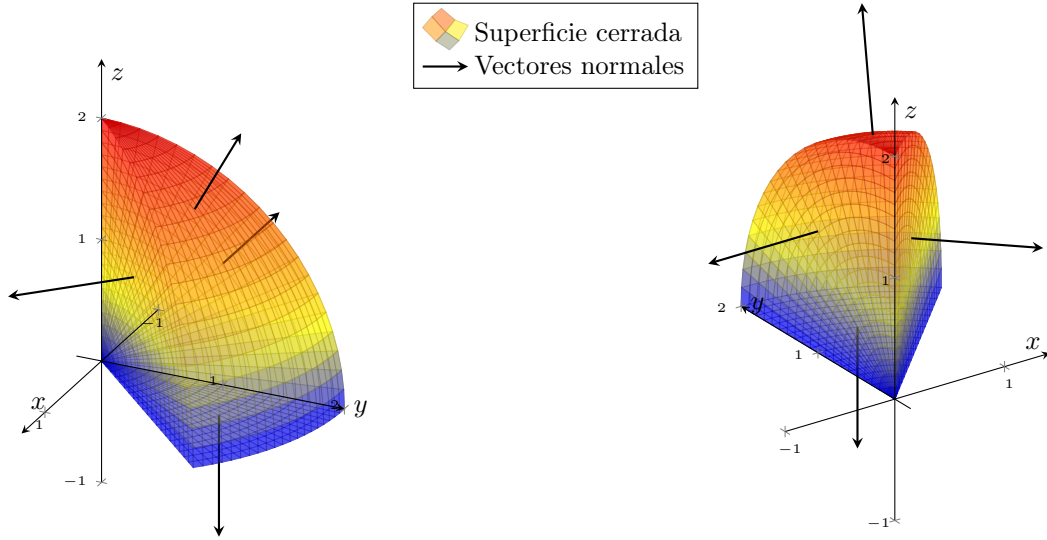
Entonces el producto escalar resulta

$$\begin{aligned} (2 \cos \theta, 2 \cos \theta, 2 \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \varphi - 2 \sin \theta \sin \varphi) \cdot (4 \sin^2 \theta \cos \varphi, 4 \sin^2 \theta \sin \varphi, 4 \cos \theta \sin \theta) = \\ 8 \cos \theta \sin^2 \theta \cos \varphi + 8 \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi + 8 \cos^2 \theta \sin \theta \\ - 8 \cos \theta \sin^2 \theta \cos \varphi - 8 \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi = 8 \cos^2 \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Por tanto la integral resulta

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{f} d\vec{\Sigma} &= \iint_D (\vec{f} \circ \vec{F})(\theta, \varphi) d\vec{D} \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} 8 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} [\cos^3 \theta]_0^{\pi/2} d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \\ &= \frac{8}{3} [\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Nota. Otra forma de probarlo es hacer uso del teorema de la divergencia. Para ello, debemos considerar una superficie cerrada:



Debemos hallar

$$\iint_{\Sigma} \vec{f} d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{f} d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{f} d\vec{\Sigma}_2 + \iint_{\Sigma_3} \vec{f} d\vec{\Sigma}_3 + \iint_{\Sigma_4} \vec{f} d\vec{\Sigma}_4 = \iiint_M \operatorname{div} \vec{f} dx dy dz.$$

La divergencia es  $\partial f_1/\partial x + \partial f_2/\partial y + \partial f_3/\partial z = 0 + 0 + 1 = 1$ , entonces

$$\iiint_M \operatorname{div} \vec{f} dx dy dz = V(M),$$

y como el sólido es la dieciseisava parte de una esfera de radio 2,

$$V(M) = \frac{1}{16} \frac{4\pi 2^3}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

También se puede hacer uso de coordenadas esféricas, las cuales son muy parecidas a las anteriores pero con el radio variando de 0 a 2. Entonces sea

$$\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \vec{F}(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta),$$

$$D = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Como la divergencia es 1, bastará hallar el valor absoluto del jacobiano del cambio de coordenadas, el cual es

$$\left| \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Desarrollando por la tercera columna,

$$\begin{aligned} & \left| \cos \theta \det \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} - (-\rho \sin \theta) \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \right| \\ &= |\cos \theta (\rho^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) + \rho \sin \theta (\rho \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)| \\ &= |\rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \sin \theta| = |\rho^2 \sin \theta|, \end{aligned}$$

y como  $\theta \in [0, \pi/2]$  el seno es positivo en ese intervalo, así que finalmente el jacobiano es  $\rho^2 \sin \theta$ .

Por tanto la integral triple se convierte en

$$\begin{aligned}
\iiint_M \operatorname{div} \vec{f} \, dx \, dy \, dz &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \int_0^2 \rho^2 \, d\rho \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{8}{3} 1 \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando coordenadas esféricas resolveremos las tres parametrizaciones faltantes.

Una parametrización de la superficie 2 es

$$\begin{aligned}
\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \vec{F}(\rho, \theta) &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta, \rho \sin \theta \right), \\
D &= \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},
\end{aligned}$$

entonces

$$\vec{F}'_\rho \times \vec{F}'_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \theta & -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \rho, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho, 0 \right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} \vec{f} \, d\vec{\Sigma}_2 &= \iint_D \left( \rho \sin \theta, \rho \sin \theta, \rho \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \rho, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho, 0 \right) d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 0 \, d\rho \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Una parametrización de la superficie 3 es

$$\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \vec{F}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0), \quad D = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

entonces

$$\vec{F}'_\rho \times \vec{F}'_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \rho).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_3} \vec{f} \, d\vec{\Sigma}_3 &= \iint_D (0, 0, 0 - \rho \cos \theta - \rho \sin \theta) \cdot (0, 0, \rho) \, d\rho \, d\theta \\
&= - \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^2 \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, d\rho \\
&= -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Una parametrización de la superficie 4 es

$$\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \vec{F}(\rho, \theta) = (0, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad D = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

entonces

$$\vec{F}'_\rho \times \vec{F}'_\theta = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = (\rho, 0, 0).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_4} \vec{f} d\vec{\Sigma}_4 &= \iint_D (\rho \sin \theta, \rho \sin \theta, \rho \sin \theta - 0 - \rho \cos \theta) \cdot (\rho, 0, 0) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin \theta d\rho \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\iint_{\Sigma} \vec{f} d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{f} d\vec{\Sigma}_1 + 0 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{2\pi}{3} \implies \iint_{\Sigma} \vec{f} d\vec{\Sigma} = \frac{2\pi}{3},$$

como era de esperarse.

4. En primer lugar hallamos la recta normal. El punto a considerar es  $A = (1, 2, z_0)$ , donde  $z_0 = 1 + 2 + 2 = 5$ . Tenemos la función

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid F(x, y, z) = x^2 + xy + 2 - z,$$

entonces

$$\vec{\nabla} F(x, y, z) = (2x + y, x, -1) \implies \vec{\nabla} F(A) = (4, 1, -1).$$

Entonces la recta normal a  $S$  en el punto  $A$  viene dada por la ecuación paramétrica

$$r \equiv (x, y, z) = A + \lambda \vec{\nabla} F(A) = (1, 2, 5) + \lambda(4, 1, -1) \implies \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$$

Para ver si  $r$  interseca a la recta  $\vec{X}$  debemos resolver el siguiente sistema para  $t$  y que nos de compatible:

$$\begin{cases} 1 + 4\lambda = 5t + 4 \\ 2 + \lambda = 6t - 2 \\ 5 - \lambda = 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} 1 + 4\lambda = 5t + 4 \\ 2 + 2 = 6t - 2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 1 + 4\lambda = 5t + 4 \\ t = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 1 + 4(2) = 5(1) + 4 \\ t = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

por tanto es cierto que las rectas se intersecan (en el punto  $\vec{X}(t = 1) = (9, 4, 3)$ ).

