Segundo Parcial Análisis Matemático II - UTN

13-07-2018

Preguntas

Parte Práctica

1. Halle los extremos absolutos de $f(x,y) = yx^2 - y$ en el círculo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Calcule el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (y, -x, z+3)$ a través de la superficie definida por la ecuación $z = 3x^2 + 3y^3 - 3$, con $z \leq 0$. Oriente la normal hacia las z positivas.

3. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z)$ cuyo rotor es $\nabla \times \vec{f} = (-y, 1, zx)$ a lo largo de la curva borde de superficie $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \geq 1$. Indique en un gráfico en qué sentido orientó la curva. ¿Es $\vec{f}$ conservativo? Fundamente su respuesta.

4. Halle la solución de la ecuación $y'' - 9y = 1$ que verifica $y(0) = -1$, $y(0) = 1$.

Parte Teórica

1.

a) Indique cómo puede usarse el teorema de Green para calcular áreas planas.

b) Calcule el área de la porción de círculo $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 \leq 4,\ y \leq 0\right\}$ mediante esta aplicación del teorema.

2.

a) Indique una condición necesaria y una suficiente para que un campo $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que sea $\mathcal{C}^1$ en su dominio, resulte conservativo. Defina "función potencial".

b) Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$ entre los puntos extremos del arco de elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ con $x \geq 1$, orientado en sentido antihorario.

Respuestas

Parte Práctica

1. Hallamos el gradiente

$$\nabla f(x,y) \quad = \quad \big(2xy, x^2-1\big)$$

y buscamos sus puntos críticos:

$$\nabla f(x,y) \quad = \quad (0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2xy & = 0 \\ x^2-1 & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1, \quad y = 0.$$

Luego los puntos $(\pm 1, 0)$, ambos interiores a D, son críticos, y también son los puntos frontera de D.

Para clasificarlos hallamos la matriz hessiana:

$$\Delta H_f(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

e introducimos los puntos:

$$\Delta H_f(\pm 1, 0) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\Delta H_f(\pm 1, 0)| \quad = \quad -4 \quad < \quad 0,$$

luego ambos puntos críticos son puntos de ensilladura.

Sobre la frontera del círculo la ecuación es

$$x^2 \quad = \quad 4 - y^2, \quad y \in [-2, 2].$$

Reemplazando en la función se obtiene

$$f\left(4-y^2, y\right) \quad = \quad g(y) \quad = \quad y\left(4-y^2\right) - y \quad = \quad -y^3 + 3y \quad \text{para} \quad y \in [-2,2].$$

Tratando a g como función de una variable se buscan los máximos y mínimos:

$$g'(y) \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad -3y^2 + 3 \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad y \quad = \quad \pm 1 \quad \Rightarrow \quad g''(x) \quad = \quad -6y$$

de modo que como para $y = 1$ es $g''(1) < 0$ entonces se produce un máximo de valor $g(1) = 2$, y como para $y = -1$ es $g''(-1) > 0$ entonces se produce un mínimo de valor $g(-1) = -2$.

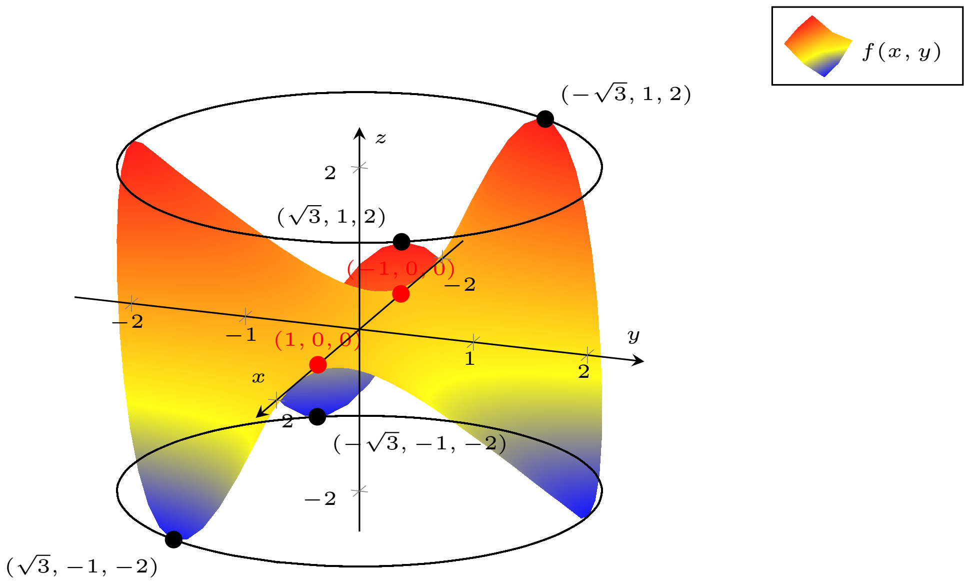
Ahora bien, sobre la curva borde se tiene que si $y = 1$ entonces $x = \sqrt{3}$ o $x = -\sqrt{3}$, y lo mismo ocurre si $y = -1$.

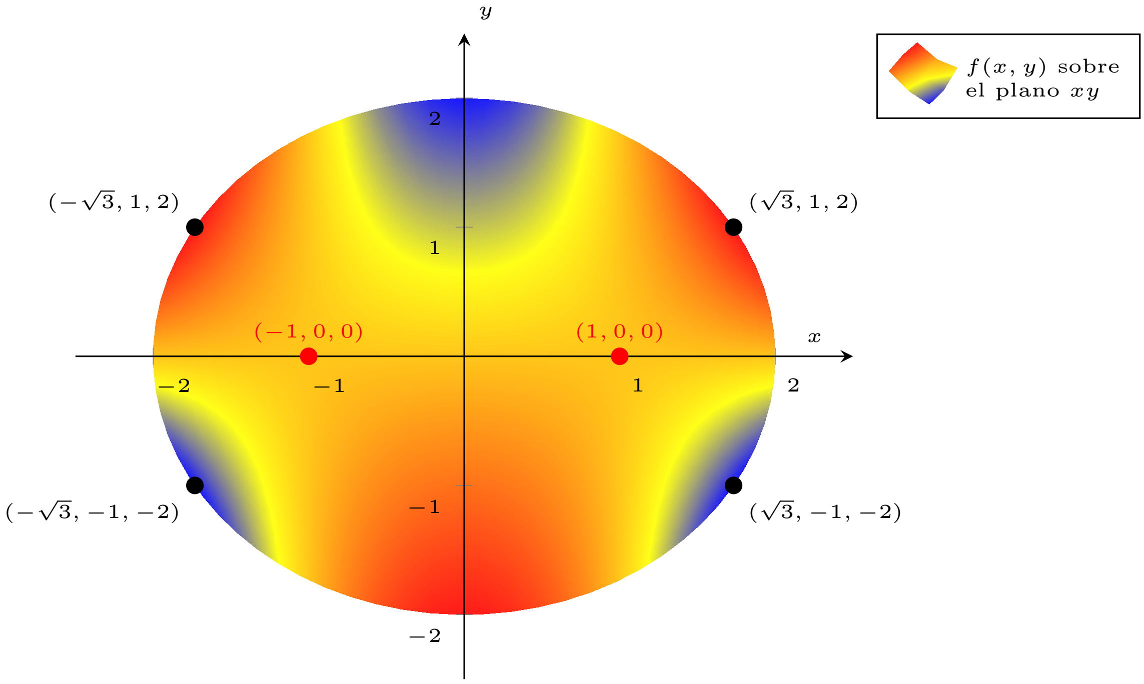
Pero además hay que analizar los extremos del intervalo de $y \in [-2, 2]$; para $g(-2) = 2$ y $g(2) = -2$, y para estos valores el valor de x es 0.

Por tanto

en los puntos $\big(1, \pm\sqrt{3}\big)$ se produce un máximo absoluto donde la función toma el valor 2;

en los puntos $\big(-1, \pm\sqrt{3}\big)$ se produce un mínimo absoluto donde la función toma el valor -2.





2. La divergencia es

$$\operatorname{div}(f) \quad = \quad 0+0+1 \quad = \quad 1$$

y la integral sobre el sólido que encierra al agregarse la tapa circular plana $z = 0$ es

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho \, \mathrm{d}\rho \int_{3\rho^2-3}^0 \mathrm{d}z \quad = \quad \frac{3}{2}\pi.$$

Si integramos sobre la tapa plana orientada hacia las z positivas resulta

$$3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho \, \mathrm{d}\rho \quad = \quad 3\pi.$$

Por el teorema de la divergencia

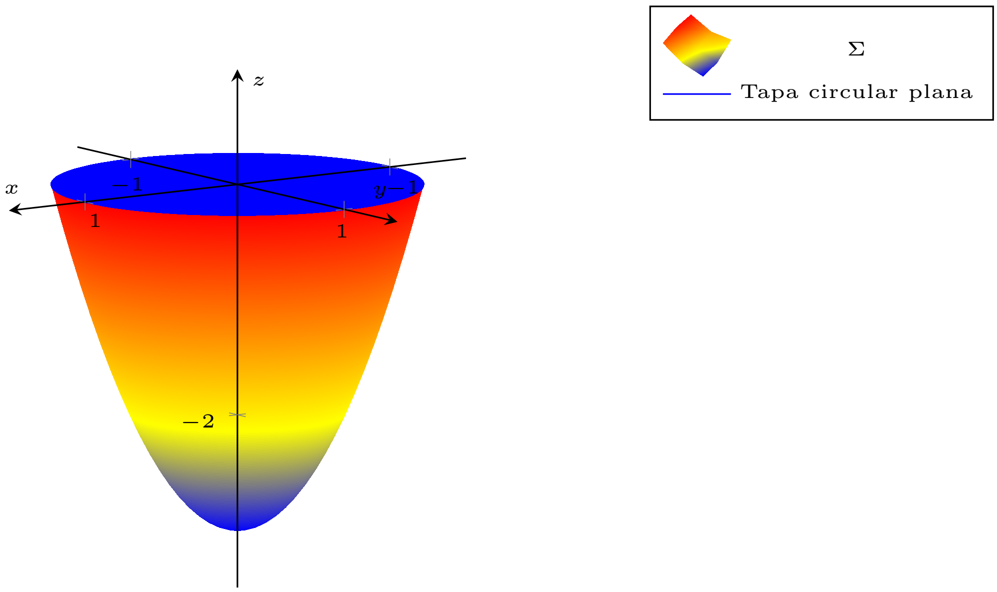
$$\frac{3}{2}\pi \quad = \quad 3\pi + \iint_{\Sigma} \vec{f} \, \mathrm{d}\vec{s},$$

de donde

$$\iint_\Sigma \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{s} \quad = \quad \frac{3}{2}\pi - 3\pi \quad = \quad -\frac{3}{2}\pi \quad \text{(orientado hacia } z^-\text{)}.$$

Para que resulte saliente el sólido cambiamos este signo y por tanto

$$\text{el flujo pedido es} \quad \frac{3}{2}\pi.$$

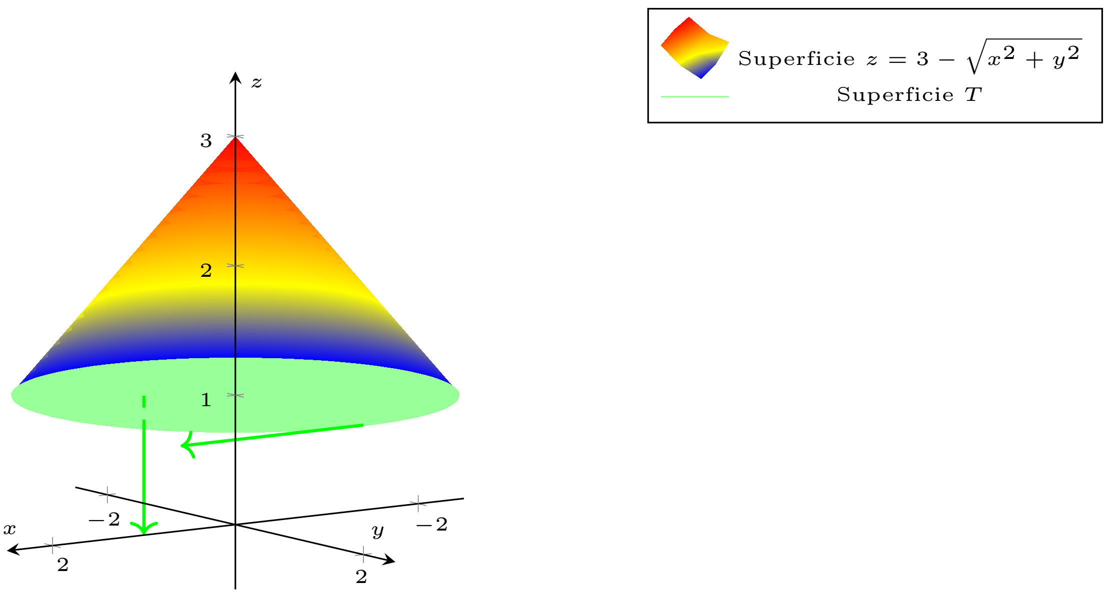


3. En primer lugar $\vec{f}$ no es conservativo pues tiene rotor no nulo. Para aplicar el teorema del rotor sea T la superficie plana $z = 1$ con $x^2 + y^2 \leq 4$ orientada hacia las cotas negativas.

Por el mismo teorema la circulación pedida es

$$\iint_T \nabla \times \vec{f}\Big|_T \,\mathrm{d}\vec{\sigma} \quad = \quad \iint_{P_{xy}(T)} (-y, 1, 1 \cdot x) \cdot (0, 0, -1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad = \quad -\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \int_0^2 \rho^2\,\mathrm{d}\rho \quad = \quad 0.$$

A pesar de que la circulación sobre esta curva cerrada dio cero el campo no es conservativo. Si buscamos tiene que haber una curva cerrada sobre la cual la circulación sea no nula.



4. La ecuación característica de la homogénea es

$$k^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3,$$

cuya base de soluciones es $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$ pues

$$W_{\{e^{3x},e^{-3x}\}} = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3-3 = -6 \neq 0,$$

por tanto la solución general de la homogénea es

$$y_{\mathrm{H}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

Para hallar la solución particular proponemos

$$\begin{array}{rcccccl} -9 & \cdot & (& y_{\mathrm{P}} & = & A &) \\ 0 & \cdot & (& y'_{\mathrm{P}} & = & 0 &) \\ 1 & \cdot & (& y''_{\mathrm{P}} & = & 0 &) \\ \hline 1 & & & & = & -9A & \end{array} \Rightarrow A = -\frac{1}{9} \therefore y_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{9}.$$

Por tanto la solución general de la no homogénea es $y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}$, o sea

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{9}.$$

Para hallar la solución particular hay que resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{9} = -1 \\ 3C_1 - 3C_2 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} C_1 = -\frac{5}{18} \\ C_2 = -\frac{11}{18}, \end{cases}$$

por tanto la solución particular buscada es

$$y = -\frac{5}{18}e^{3x} - \frac{11}{18}e^{-3x} - \frac{1}{9}.$$

Parte Teórica

1.

a) Recordemos qué dice el teorema de Green. Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo $\mathcal{C}^1(D)$ y $S = P_{xy}$ una región plana contenida en D con borde $\partial S = C$ orientado de manera de dejar el interior de P_{xy} a izquierda, entonces

$$\int_C \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{s} = \iint_{P_{xy}} \left(Q'_x - P'_y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

donde

$$\vec{f} = (P(x,y), Q(x,y), 0), \quad \nabla \times \vec{f} = \left(0, 0, Q'_x - P'_y\right).$$

Para calcular un área plana es suficiente que se cumpla

$$Q'_x - P'_y = 1,$$

de tal manera que

$$\iint_{P_{xy}} \underbrace{\left(Q'_x - P'_y\right)}_{1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{P_{xy}} 1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \cdot \text{Área}(P_{xy}).$$

b) Analicemos la intersección de ambas curvas:

$$\begin{cases} x^2+(y+1)^2 &= 4 \\ y &= 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+1 &= 4 \\ y &= 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x &= \pm\sqrt{3} \\ y &= 0. \end{cases}$$

Al triángulo formado por los vértices

$$(0,-1), \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (\sqrt{3},0)$$

subámoslo una unidad hacia arriba, es decir,

$$(0,0), \quad (0,1) \quad \text{y} \quad (\sqrt{3},1).$$

Versorizando $\frac{(\sqrt{3},1)}{2}$ vemos que el ángulo varía entre $-\frac{7}{6}\pi$ y $\frac{\pi}{6}$.
A continuación parametrizamos el arco de circunferencia con

$$\vec{g}(t) \quad = \quad (2\cos(t), 2\sin(t)+1) \quad \text{con} \quad t \in \left[-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

Definamos un campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) \quad = \quad (-(y-1), x) \quad \Rightarrow \quad Q'_x - P'_y \quad = \quad 1+1 \quad = \quad 2.$$

Se calcula la circulación sobre $\vec{g}$:

$$\begin{aligned} & \int_{-7\pi/6}^{\pi/6} (-2\sin(t), 2\cos(t)) \cdot (-2\sin(t), 2\cos(t))\, \mathrm{d}t \\ = & \int_{-7\pi/6}^{\pi/6} \left(4\sin^2(t) + 4\cos^2(t)\right)\, \mathrm{d}t \\ = & \; 4\int_{-7\pi/6}^{\pi/6} \mathrm{d}t \\ = & \; \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ahora se parametriza el segmento de recta:

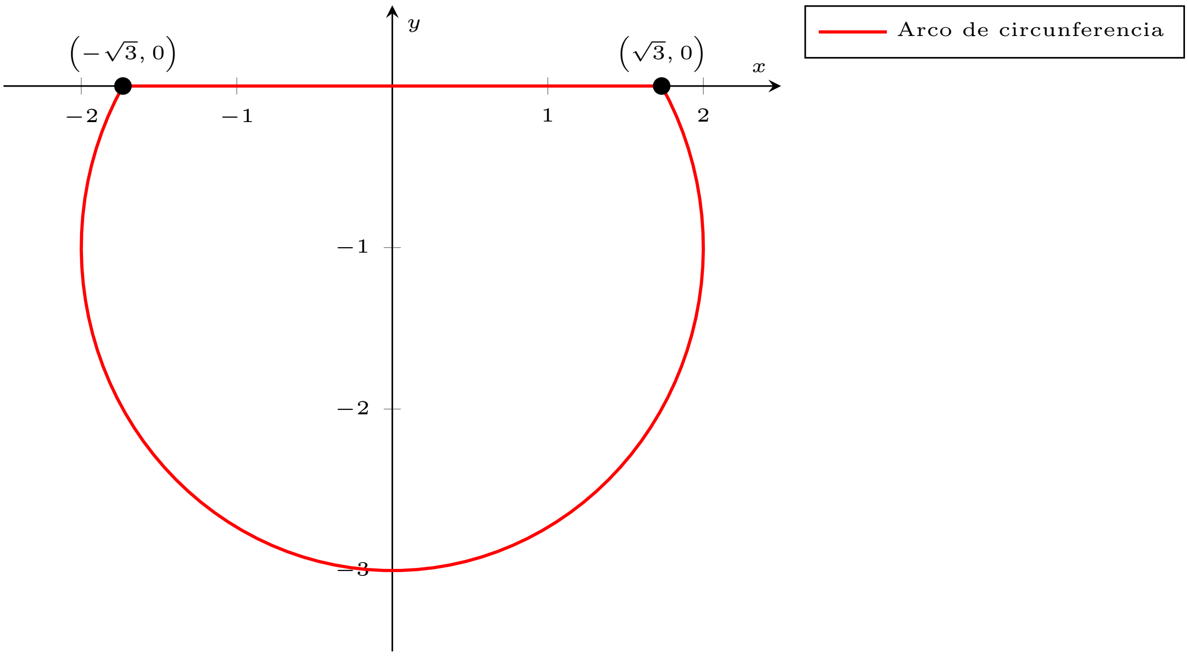
$$\vec{w}(t) \quad = \quad (t,0) \quad \text{con} \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}.$$

La circulación sobre la recta es

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1,t)\cdot(1,0)\, \mathrm{d}t \quad = \quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \mathrm{d}t \quad = \quad 2\sqrt{3}.$$

Por el teorema de Green (observando que la orientación es antihoraria):

$$\begin{aligned} \iint_S \left(Q'_x - P'_y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \oint_C \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{s} \\ \Rightarrow \quad \iint_S 2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\vec{g}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\vec{w}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{s} \\ \Rightarrow \quad \text{Área}(S) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\vec{g}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\vec{w}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{s}\right) \\ \Rightarrow \quad \text{Área}(S) &= \frac{1}{2}\left(\frac{16\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) \\ \Rightarrow \quad \text{Área}(S) &= \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$



Se puede verificar el resultado realizando esta integral doble:

$$\int_{-3}^{0} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-(y+1)^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}} \mathrm{d}x \;=\; 2\int_{-3}^{0} \sqrt{4-(y+1)^2}\,\mathrm{d}y \;=\; \frac{3\sqrt{3}+8\pi}{3} \;=\; \frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

2.

a) Con $\vec{f}=(f_1,f_2)$ una condición necesaria es que la matriz jacobiana de $\vec{f}$ debe ser simétrica. Una condición suficiente es que debe existir una $\varphi : D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ función escalar $\mathcal{C}^2(D)$ tal que $\vec{f}=\nabla\varphi$, donde φ se la denomina "función potencial".

b) Se determina si existe función potencial:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi'_x &=& \dfrac{2x}{x^2+y^2} \quad \xrightarrow{(1)} \quad \varphi \;=\; \ln\left(x^2+y^2\right)+g(y) \\ & & \qquad\qquad\qquad \downarrow (2) \qquad\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{(4)} \; g'(y) \;=\; 0 \; \xrightarrow{(5)} \; g(y) \;=\; C, \\ \varphi'_y &=& \dfrac{2y}{x^2+y^2} \quad \overset{(3)}{\longleftrightarrow} \quad \varphi'_y \;=\; \dfrac{2y}{x^2+y^2}+g'(y) \end{array}\right.$$

por tanto existe y es

$$\varphi(x,y) \;=\; \ln\left(x^2+y^2\right)+C \;\Rightarrow\; \nabla\varphi(x,y) \;=\; \left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2}\right) \;=\; \vec{f}(x,y),$$

por tanto $\vec{f}$ es conservativo y φ es una función potencial de $\vec{f}$.
Calculamos los puntos de intersección entre el arco de elipse y la recta:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{x^2}{4}+y^2 &=& 1 \\ x &=& 1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{1}{4}+y^2 &=& 1 \\ x &=& 1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x &=& 1\,, \end{array}\right.$$

por tanto los puntos de intersección son

$$\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Como el arco de elipse es una curva abierta no tiene sentido hablar de orientado en sentido horario. Luego es indistinto elegir la orientación; tomemos por ejemplo ir de $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ hacia $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ que es de A hacia B.
Así que la circulación pedida es

$$\int_C \vec{f} \mathrm{d}\vec{s} \quad = \quad \varphi\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \varphi\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad = \quad \ln\left(1 + \frac{3}{4}\right) + C - \left(\ln\left(1 + \frac{3}{4}\right) + C\right) \quad = \quad 0.$$