Ecuaciones Diferenciales 1ra Parte

1

a) $\cancel{(y'')^2} - y''' = y - (y')^2$ y''' determina orden = 3 grado = 1

b) $y''' + x(y')^4 = 0$ orden = 3 grado = 1

c) $(1+x)(y'')^4 + 3y''' + 5x^2y = 0$ orden = 3 grado = 1

d) $y'' - 3\,\text{sen}(y') + y = x^3$ orden = 2 grado = ?

e) $3x\,dy - y\,dx = 0$ orden = 1 grado = 1 lineal

f) $xy'' - 4y' + x - 1 = 0$ orden = 2 grado = 1 lineal

2 a) $y = e^{-x} + x - 1$ es solución de $y' + y = x$ ∴ $y(0) = 0$

$y' = -e^{-x} + 1$ $\quad (\cancel{e^{-x}} + x \cancel{-1}) + (\cancel{-e^{-x}} \cancel{+1}) = x$

$x = x$ verifica es solución

b) $y = (2 - \ln(x))\sqrt{x}$ solución de $4x^2y'' + y = 0 \; \forall x / x > 0$ tg $y = 2$ en $p(1,2)$

$y' = -\frac{1}{x}\sqrt{x} + (2 - \ln(x))\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$y'' = \frac{1}{x}\sqrt{x} + \frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + (-$

c) $y^2 = C_1x + C_2$ SG de $yy'^2 + y^2y'' = 0$ Halla S.P $(1, y_0)$ tg $= 2x - 1$

$2yy' = C_1$

$\cancel{2}y'y' + \cancel{2}yy'' = 0 \Rightarrow y'^2 + yy'' = 0 \; * y \quad yy'^2 + y^2y'' = 0$ ED asociada a $y^2 = C_1x + C_2$

$y(1) = y_T(1) = y_0 = 1 \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 2 \Rightarrow 2yy' = C_1 \; \boxed{C_1 = 4}$

$y^2 = 4x + C_2 \quad 1 = 4 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -3} \quad y^2 = 4x - 3$ SP de $yy'^2 + y^2y'' = 0$

d) $y = x$ sol de $yy'^2 + y^2y'' = x$

$y' = 1$ $\quad x + x^2 \cdot 0 = x$ $\quad$ **si es solución**

$y'' = 0$ $\quad x = x$

e) $y = Cx + C^2$ SG $\quad y = -\frac{x^2}{4}$ SS de $y' = xy' + (y')^2$ Hallar soluciones que pasan $p(2;-1)$

$y' = \frac{-8x}{16} = -\frac{x}{2}$ $\quad y(-1) = 2$

$C^2 - 1C - 2 = 0$ $\quad y = 1 - x$ $\quad$ Soluciones: $-\frac{x^2}{4} = y$; $y = 1 - x$

$C = 2 \vee C = -1$ $\quad \cancel{y = 4 + 2x}$

f) $x^2 + 4y^2 = C$ SG de $4yy' = -x$ Halla SP que pasa por $(-2; 1)$

$2x + 8yy' = 0$ $\quad y(-2) = 1$ reemplazo y obtengo C

$2(x + 4yy') = 0$ $\quad$ SP $\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 8$

$4yy' = -x$ $\quad y' = \frac{-x}{4y} = \cancel{\frac{1}{2}}$

ED asociada

③ ⓐ $y^2 = 4ax$ $\qquad y^2 = 2yy'x$

$2yy' = 4a$ $\qquad \boxed{y = 2y'x}$

ⓑ $x^2 + y^2 = r^2$

$2x + 2yy' = 2r$ $\qquad \boxed{x + yy' = 0}$

$x + yy' = r$

ⓒ $y = \text{sen}(ax+b)$

$y'^2 = (\cos(ax+b)\, a)^2 \Rightarrow y'^2 = \cos^2(ax+b)\, a^2 \Rightarrow y'^2 = (1 - \underbrace{\text{sen}^2(ax+b)}_{y})a^2 \Rightarrow$

$y'^2 = (1-y^2)a^2$

$y'' = -\underbrace{\text{sen}(ax+b)}_{y}a^2$

$\begin{cases} y'^2 = (1-y^2)a^2 \\ y'' = -(a^2 y) \Rightarrow -\dfrac{y''}{y} = a^2 \end{cases}$

$y'^2 = (1-y^2)\left(-\dfrac{y''}{y}\right) \Rightarrow \boxed{yy'^2 = (y^2-1)y''} \Rightarrow yy'^2 + (1-y^2)y'' = 0$

ⓓ $y = ae^x + bxe^x$

$y' = ae^x + be^x + bxe^x \Rightarrow y' = y + be^x$

$y'' = ae^x + be^x + be^x + bxe^x \Rightarrow y'' = y' + be^x$

$\begin{array}{r} y' = y + \cancel{be^x} \\ - \quad y'' = y' + \cancel{be^x} \\ \hline y' - y'' = y - y' \end{array}$

$\boxed{y'' - 2y' + y = 0}$

ⓔ $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3$ $\qquad \dfrac{C_2}{x} \cdot -\dfrac{C_2}{x^2} \cdot \dfrac{2C_2 \cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}$

$y' = C_1 - \dfrac{C_2}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2C_2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6C_2}{x^4}$

ⓕ $y = ba^x$ $\qquad a^x = \dfrac{y}{b}$ $\qquad \boxed{yy'' = y'^2}$

$y' = a^x$ $\qquad y' = \dfrac{y}{b}$

$y'' = a^x$ $\qquad y'' = \dfrac{y}{b}$

⑤

$f(x) = e^{x^3+2x}$ $\qquad (fg)' = f'g'$

6 $y = \frac{1}{(c-x)}$ $y' = y^2$

$y' = \frac{+1}{(c-x)^2}$ $\frac{1}{(c-x)^2} = \left(\frac{1}{(c-x)}\right)^2$ verifico es solución.

Existe otra solución es $\boxed{y=0}$

7 a) $y' = \frac{(x^2+1)}{2-y}$ con $y(-3) = 4$

$y'(2-y) = x^2+1$ $y(-3) = 4$

$\int(2-y)dy = \int(x^2+1)dx$ $8-8 = -9-3+C$

$\boxed{2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + C}$ SG $\boxed{C = 12}$ $\boxed{SP = 2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + 12}$

b) $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y$ y'

$xy' = 2x^2y + y$

$\int y' \cdot \frac{1}{y} = \int \frac{2x^2+1}{x} = \int (2x + \frac{1}{x}) dx$

$\ln|y| = x^2 + \ln|x| + C$ SG $|y| = e^{x^2 + \ln|x| + C}$ $y = \pm e^{x^2}|x| e^C$ A

$\boxed{y = Axe^{x^2}}$

c) $y' = 2x\sqrt{y-1}$

$y'^2 = 2x^2(y-1)^{1/2}$

$y'^2 \frac{1}{(y-1)^{1/2}} = 2x$ $\int \underbrace{(y-1)}_{u}^{-1/2} = \int 2x\,dx$

$2u^{1/2} = x^2 + C$

$\boxed{2(y-1)^{1/2} = x^2 + C}$ SG

d) $x^2dy = \frac{(x^2+1)}{(3y^2+1)}dx$ $y(1) = 2$

$x^2y' = \frac{(x^2+1)}{(3y^2+1)}$

$y'(3y^2+1) = \frac{(x^2+1)}{x^2}$ $\Rightarrow \int(3y^2+1)dy = \int \frac{(x^2+1)}{x^2} = \int \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x + \int x^{-2}$

$x + \frac{x^{-1}}{-1}$

$y^3 + y = x - x^{-1} + C$

$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + C = \frac{x^2-1}{x}$

$xy^3 + xy - x^2 + 1 + Cx = 0$

$8 + 2 - \cancel{1} + \cancel{1} + C = 0$ $\boxed{xy^3 + xy - x^2 + 10x + 1}$

$C = 10x$

8 pto (x,y) pendiente $\frac{x}{y}$

$y' = \frac{x}{y}$ $yy' = x$

$\int y\,dy = \int x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

$\boxed{y^2 - x^2 = C}$

⑨ $y' - xy$ $\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$

$y = \pm e^{\frac{x^2}{2}} \overset{A}{e^{C}}$ $y = \pm A e^{x^2/2}$

$y(0) = A = -2$ $\boxed{y = -2e^{x^2/2}}$

⑩ ⓐ pase por $(0,0)$

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow 0 - y_0 = y'(0 - x_0) \Rightarrow \boxed{y = y'x}$

ⓑ horizontal $\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = y_0$

ⓒ $(0 ; x_0 + y_0) \Rightarrow (x_0 + y_0) - \cancel{y_0} = y'(0 - x_0)$

$\int y' = \int -1 \Rightarrow \boxed{y = -x + C}$

ⓔ $y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0) \Rightarrow -y_0 = -\frac{1}{y'}(-x_0) \Rightarrow y = -\frac{1}{y'}x$

$y\,y' = -x \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{y^2 + x^2 = 2C}$

⑪ $y = kx^2$ $y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0)$ $(0;1)$ $y - 1 = -\frac{1}{2kx}$

⑫ $y - 5 = -\frac{1}{y'}(x) \Rightarrow \int (y-5)\,dy = \int -x\,dx \Rightarrow \boxed{(y-5)^2 + x^2 = 2C = C}$

⑬ ⓐ $xy' - y - x^3 = 0$

$xy' - y = x^3$

$y' - \frac{1}{x}y = x^2$

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + \left(-\frac{1}{x}\right)(uv) = x^2$

$uv' + v\left(u' - \frac{1}{x}u\right) = x^2$

$\begin{cases} u' - \frac{1}{x}u = 0 \ (1) \\ uv' = x^2 \ (2) \end{cases}$

$u' - \frac{1}{x}u = 0$

$u' = \frac{1}{x}u$ $\frac{1}{u}u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln|u| = \ln|x| + C$

$|u| = e^{\ln|x| + C} \Rightarrow |u| = e^C|x|$ $u = \overset{A}{e^{C}}x$

$u = Ax$

para $A = 1$

$u = x$

En (2) $\Rightarrow$ $x v' = x^2$

$\int v' = \int x$ $v = \frac{x^2}{2} + C$ $y = uv = ((x)(\frac{x^2}{2} + C)) = \boxed{\frac{x^3}{2} + xC = y}$

ⓑ $y' + y\cos(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + uv\cos x = \cos x \,\mathrm{sen}\, x$

$uv' + v(u' + u\cos x) = \cos x \,\mathrm{sen}\, x$

$$\begin{cases} u' + u\cos x = 0 \ (1) \\ uv' = \cos x \,\mathrm{sen}\, x \ (2) \end{cases}$$

$u' = -u\cos x$

$\int \frac{1}{u} u' = \int -\cos x \Rightarrow \ln|u| = -\mathrm{sen}\, x + C \quad |u| = e^{-\mathrm{sen}\,x + C} = e^{-\mathrm{sen}\,x} \overset{A}{e^{C}}$

$u = \overset{1}{A} e^{-\mathrm{sen}\,x}$

$e^{-\mathrm{sen}\,x} v' = \cos x \,\mathrm{sen}\, x$

$\int v' = \int e^{\mathrm{sen}\,x} \cos x \,\mathrm{sen}\, x \, dx \qquad \mathrm{sen}\, x = w \quad \cos x = dw$

$v = \int e^{w} w \, dw \Rightarrow v = e^{w}(w-1) + C \quad v = e^{\mathrm{sen}\,x}(\mathrm{sen}\, x - 1) + C$

$y = (e^{-\mathrm{sen}\,x})((e^{\mathrm{sen}\,x})(\mathrm{sen}\,x - 1) + C) \Rightarrow \boxed{y = (\mathrm{sen}\,x - 1) + Ce^{-\mathrm{sen}\,x}}$

c) $(x^2+4)y' - 3xy = x \qquad y = uv \quad y' = u'v + uv'$

$(x^2+4)(u'v + uv') - 3x(uv) = x$

$(x^2+4)(u'v) + (x^2+4)(u'v) - 3x(uv) = x$

$(x^2+4)(uv') + v((x^2+4)u' - 3xu) = x$

$(x^2+4)u' - 3xu = 0$

$(x^2+4)(uv') = x$

$(x^2+4)u' = 3xu$

$\frac{1}{u} u' = \frac{3x}{x^2+4}$

13 d) $\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = x^2 \,\mathrm{sen}(3x)$

(14) $y' + 2xy = 6x$

$6x - y' = 2xy$

(15) $y' + \frac{y}{(x+1)} = sen(x)$

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + \frac{uv}{(x+1)} = sen(x)$

$u' + \frac{u}{x+1} = 0$

$uv' + v\left(u' + \frac{u}{x+1}\right) = sen(x)$

$uv' = sen(x)$

$u' + \frac{u}{x+1} = 0$

$u' = -\frac{u}{x+1}$ $\quad u'\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+1}$ $\quad \int \frac{1}{u}du = -\int \frac{1}{x+1}dx$

$z = x+1$

$dz = 1dx$

$\int v' = \int \underbrace{sen(x)}_{v'} \underbrace{(x+1)}_{u}$

$u = (x+1)$

$u' = du$

$v' = sen(x)$

$v = -cos(x)$

$ln|u| = -ln|x+1| + C$

$v = (x+1)(-cos(x)) + \int \cdot cos(x)\, du$

$|u| = e^{-ln|x+1|+C} = e^C \frac{1}{x+1}$

$(x+1) - cos(x) + sen(x) + C$

$y = uv = \frac{1}{x+1} \quad (x+1) - cos(x)) + sen(x) + C = -\frac{cos(x)}{x+1} + \frac{senx}{x+1}$

$P(\pi/2, 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi/2 + senx}{x+1} - cos(x)}$

(16) $y' + y = 2 sen(x)$

$\frac{y'}{2} + \frac{y}{2} = sen(x)$

$\frac{uv' + u'v}{2} + \frac{uv}{2} = senx$

$\frac{u'}{2} + \frac{u}{2} = 0$

$\frac{u'}{2} = -\frac{u}{2}$

$\frac{uv'}{2} + v\left(\frac{u'}{2} + \frac{u}{2}\right) = senx$

$u' \cdot \frac{1}{u} = -1$ $\quad ln|u| = -x + C$

$|u| = e^{-x} e^C$ $\quad \boxed{u = e^{-x}}$

$\frac{e^{-x} v'}{2} = sen\, x$

$v' = 2 sen(x)\, e^x$

$v = 2\int sen(x)\, e^x = 2\left(sen(x)\, e^x - \int e^x cos(x)\, dx\right)$

$u = sen(x)$

$u' = cos(x)$

$v' = e^x$

$v = e^x$

$u = cosx$

$du = -sen\, x$

$dv = e^x$

$v = e^x$

$= 2\left(sen(x)\, e^x - (cosx\, e^x + \int e^x sen(x)\, dx\right)$

$I = 2 sen(x)\, e^x - 2 cosx\, e^x - 2I$

$3I = 2e^x\, (sen(x) - cos(x))$

$\left(e^{-x}\right)\left(\frac{2}{3}e^{x}\right)\left(\text{sen}(x)-\cos(x)+C\right)=y$ $\quad \boxed{y= \ \text{sen}\,x-\cos(x)+2e^{-x}}$ SP $y(0)=1$

17 ⓐ $V=x'$ $X(0)=X_0$ Ecuacion de posicion $\Rightarrow \boxed{X=X_0+vt}$

ⓑ $a=v'=x''$ $X(0)=X_0$ y $x'(0)=v_0$ $\Rightarrow \boxed{X=X_0+v_0t+\frac{1}{2}a\,t^2}$

19 ⓐ

$$\begin{cases} x^2+4y^2=C_1 \\ y=C_2x^4 \end{cases}$$

$X^2+4y^2=C_1$

$2X+8yy'=0$

$y'=\frac{-2x}{8y}=-\frac{X}{4y}$

$y=C_2x^4$ $\quad C_2=\frac{y}{X^4}$

$y'=4C_2x^3$

$y'=4\frac{y}{X^4}x^3=\frac{4y}{X}$

Para ser ortogonales pendientes opuestos ≠ signo (concepto entendido)

↳ pendientes inversos y cambiados de Sg Son ortogonales

20 ⓐ $y=2x+C$

$y'=2$ $\quad -\frac{1}{y'}=2$ $\quad y'=-\frac{1}{2}$ $\quad \int y'=\int -\frac{1}{2}\,dx$

ⓑ $y=Ce^{x}$ $\quad \boxed{y=-\frac{1}{2}x+C}$

$y'=e^{x}$ $\quad -\frac{1}{y'}=e^{x}$ $\quad y'=-e^{-x}$

ⓒ $y(cx+1)=x$

y'

2 Nociones de Topología - Funciones

① Sea $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{\sqrt{x(x+2)^4}}{x-1}$ y D dominio de f

$P_1, P_2, P_3 \in D$ y $P_4, P_5 \notin D$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x = -2 \vee 0 \leq x < 1 \vee x > 1\}$

$P_1 \Rightarrow$ Frontera pq $E^*(A)$ contiene ptos $\in D$ y ptos $\notin D$
Aislado pq pertenece a D y un $E^*(A)$ no posee ptos de D

$P_2 \Rightarrow$ Frontera (idem P_1)
Acumulación pq como $P_2 \in D \Rightarrow \exists\, E^*_{(A)}$ que en todo su entorno posee ptos de D

$P_3 \Rightarrow$ Interior (ptos esta "adentro" de D)
Acumulación (idem P_2)

$P_4 \Rightarrow$ Frontera y de acumulación

$P_5 \Rightarrow$ Exterior pq $\exists\, E^*(A)$ que no tiene puntos de D.

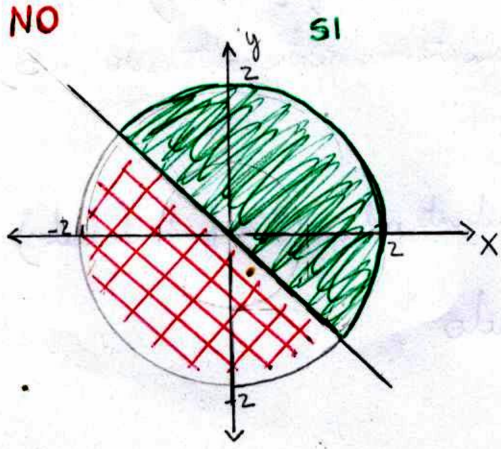
② ⓐ Frontera serán todos los ptos en los cuales el $E^*_{(A)}$ contenga ptos de D como no.
$\Rightarrow$ Todos los ptos que conforman el perímetro de la circunferencia $x^2+y^2=4$
El pto $(0,0)$ y el $(2,2)$ que si se le da un radio lo suficientemente grande puede contener ptos de D
$\partial S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 4 \vee (0;0) \vee (2;2)\}$ se aplica el $\vee$ y no $\wedge$ pq las condiciones no dependen de los otros para ser frontera.

ⓑ Ptos interiores serán todos los ptos que pertenecen al Dom ("que están pintados")
$\mathring{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2+y^2 < 4\}$

ⓒ Ptos de acumulación serán:
$S' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 4\}$ $\leq$ para que sea de acumulación el intervalo debe ser cerrado

ⓓ No es cerrado pq no contiene a todos sus ptos de acumulación (circunferencia rayada)
No es abierto pq no todos sus ptos son interiores (Ej: $A(2,2)$)
Es acotado pq existe un r lo suficientemente grande $/ S \subset E(0,r)$

③ ⓐ



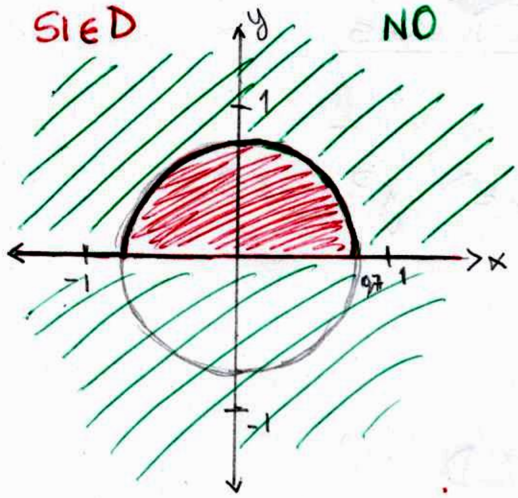
$\mathring{S} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 4 \wedge x+y > 1\}$

$\partial S = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 4 \wedge x+y \geq 1\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 4 \wedge x+y = 1$

$E_{xt} = \{(x;y) \in \mathbb{R} / x^2+y^2 > 4\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x+y < 1\}$

Es cerrado ■ Es compacto (cerrado y acotado)
No es abierto Es conexo.

(b)



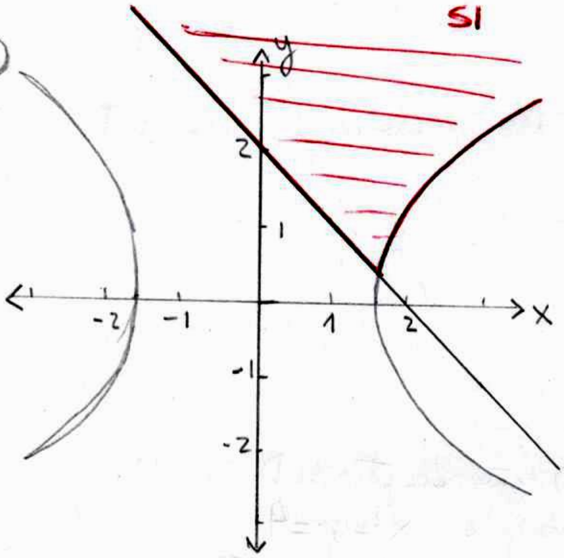
$\mathring{S} = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / 4x^2+7y^2<2 \wedge x>0\}$

$\partial S = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / 4x^2+7y^2=2 \wedge x\geq 0\} \cup$
$\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / 4x^2+7y^2<2 \wedge x=0\}$

$Ext = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / 4x^2+7y^2>2\} \cup \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x<0\}$

Es cerrado, compacto y conexo.

(c)



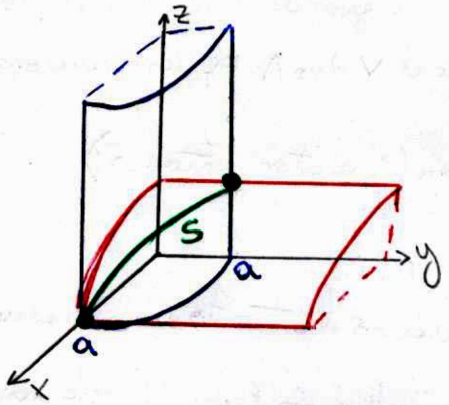
$\mathring{S} = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2<3 \wedge x+y>2\}$

$\partial S = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-y^2=3 \wedge x+y\geq 2\} \cup$
$\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x-y^2<3 \wedge x+y=2\}$

$Ext = \mathbb{R}^2 - \mathring{S} - \partial S$ (Notación valida, más "sencilla")

Es cerrado, no es compacto (no acotado), es conexo.

(d)



$\mathring{S} = \emptyset$ (siempre choco con algo exterior)

$Ext = \mathbb{R}^3 - S$

$\partial S =$ Conjunto S

no es abierto ($S_{int} \neq S$)

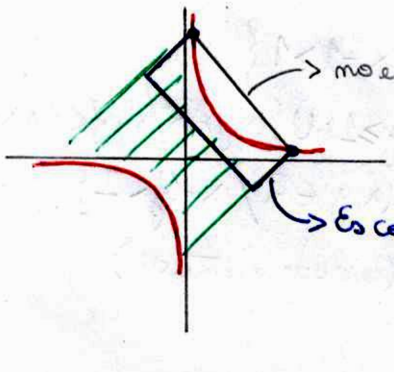
Es cerrado ($S' \subseteq S$) ⟶ compacto

Es acotado

Es conexo.

(4) $S = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / xy \leq 4\}$ $\Rightarrow xy = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$ Homográfica

$(0;0) \leq 4$ (Region que contiene al pto) (Verifico)



→ no es convexo (no se pueden unir mediante segmento contenido en S)

→ Es conexo (par de ptos se pueden unir mediante poligonal nº finito de lados)

$S' = S \Rightarrow$ es cerrado

∴ enunciado

⑤ ⓐ $f(x;y) = \ln((x+1)(y-2x))$

Restricciones de Dominio (Importante)

* Raices de indice par $\Rightarrow f(x) = \sqrt[m]{g(x)}$ m par $\text{Dom} f(x) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$
* Logaritmos $f(x) = \log_a(g(x))$ con $a>0$ y $a \neq 1$ $\text{Dom} f(x) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) > 0\}$
* Denominadores $\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ $\text{Dom} f(x) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \neq 0\}$

$(x+1)(y-2x) = z \quad z>0 \quad \ln(z)$ con $z>0$

$(x+1)>0 \wedge y-2x>0 \quad \vee \quad (x+1)<0 \wedge y-2x<0$

$x>-1 \wedge y>2x \quad \vee \quad x<-1 \wedge y<-2x$

$\text{Dom} f(\bar{x}) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x>-1 \wedge y>2x\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x<-1 \wedge y<-2x\}$

ⓑ $\bar{f}(x;y) = (\sqrt{1-x} \,;\, (x+1)^{-1/2} \,;\, \ln(y-x))$

obs Campos escalares: $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} / \underset{\text{nº real}}{z} = F\underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_m)}_{\text{Vectores m componentes}}$ $m>1$

Función vectorial: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m / \bar{f}(\underset{\text{nº real}}{t}) = \overbrace{(f_1(t); f_2(t); \dots; f_m(t))}^{\text{Vectores m componentes}}$ con $m>1$

$f_1(t)$ ↳ funcion componente (funcion escalar)

Campos vectoriales

$\bar{F}: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m / \bar{F}\underset{\text{Vector de m comp}}{(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \overbrace{(F_1(x_1, \dots, x_m), F_2(x_1, \dots, x_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m))}^{\text{Vector de m comp}}$ $m>1$ $m>1$

• Respecto al ⑤ⓑ el dominio de un campo vectorial se obtiene como la intersección de los dominios de cada componente.

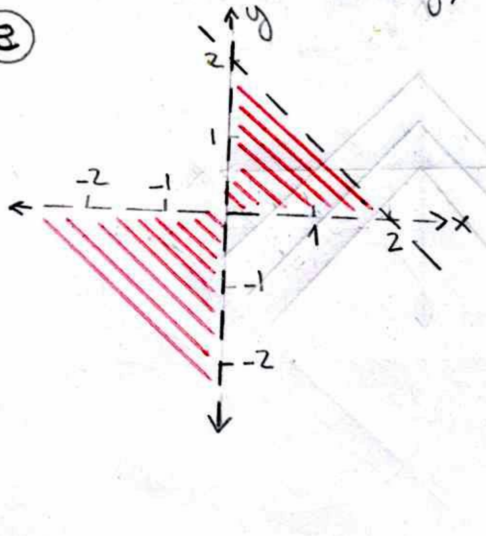
$\text{Dom} \bar{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1-x \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \wedge y-x>0 = \boxed{y>x \wedge -1<x \leq 1}\}$

ⓒ $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$

$1-(x^2+y)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1} \geq \sqrt{(x^2+y)^2} \Rightarrow \boxed{-1 \leq x^2+y \leq 1 = \text{Dom} f}$

ⓓ $f(x,y,z) = \sqrt{\ln(z-x-y)}$ $\quad z-x-y \geq 0 \quad \boxed{z \geq x+y = \text{Dom} f}$

ⓔ



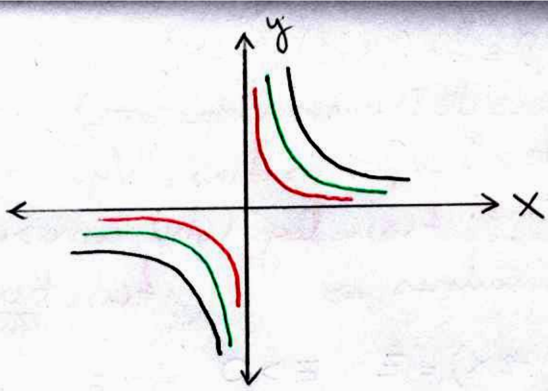
$f(x,y) = \dfrac{\ln(xy)}{\sqrt{2-x-y}}$

$\text{Dom} f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / xy>0 \wedge 2-x>0\}$ → 1er y 3er cuadrante

• Se excluye los ejes x e y

• Demos ejercicios más de lo mismo se mantiene el concepto.

⑥ ⓐ $f(x,y) = xy-2$ Dom f: $\mathbb{R}^2$



$C_K = \{(x,y) \in \text{Dom} f \,/\, f(x,y) = K \,;\, xy-2 = K$

$K=0 \Rightarrow xy = 2$ •

$K=1 \Rightarrow xy = 3$ •

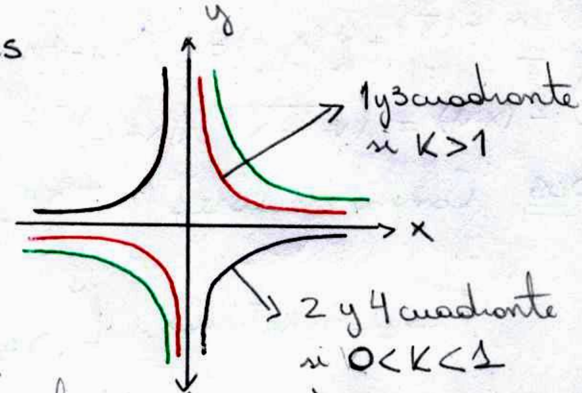
$C_K = xy = K+2$ • $\Longrightarrow$

Hiperbolas de ecuación $xy = K+2$ con $K \neq 2$

ⓑ $f(x,y) = e^{xy}$ Dom f: $\mathbb{R}^2$

$C_K = \{(x,y) \in \text{Dom} f \,/\, f(x,y) = K \,;\, e^{xy} = K\}$

$K=1 \Rightarrow e^{xy} = 1 \longrightarrow x.y = 0 < \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Big\}$ Los ejes



$K=2 \Rightarrow e^{xy} = 2 \Rightarrow xy = \ln 2 \quad y = \dfrac{\ln 2}{x}$ •

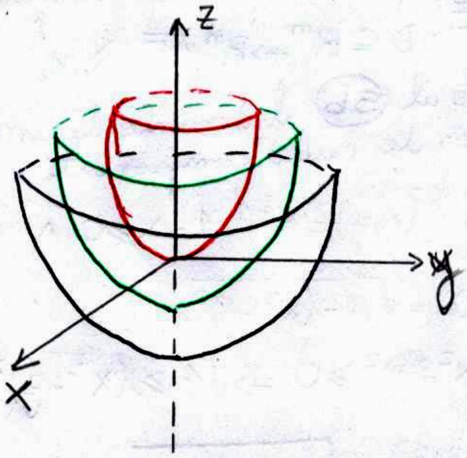
$K=e \Rightarrow e^{xy} = e \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ •

$C_K = e^{xy} = K \Rightarrow xy = \ln K \Rightarrow y = \dfrac{\ln K}{x}$

Hiperbolas equilateras $\Rightarrow xy = \ln(K)$ con $K>0$ y $K \neq 1$ (incluye ambos ejes)

ⓒ $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$ Dom: $\mathbb{R}^3$

$C_K = \{(x,y,z) \in \text{Dom} f \,/\, f(x,y,z) = K \,;\, x^2+y^2-z = K\}$



$K=0 \Rightarrow x^2+y^2 = z$ •

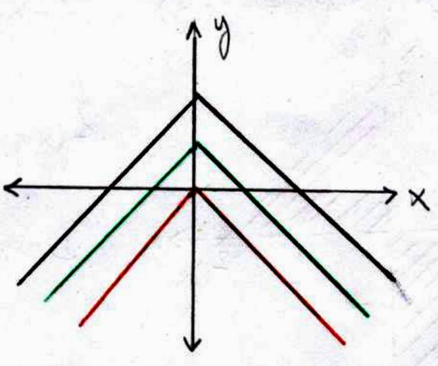
$K=1 \Rightarrow x^2+y^2 = z+1$ •

$C_K = x^2+y^2 = z+K$ •

Paraboloides de ecuación

ⓓ $f(x,y) = |x|+y$

$C_K = \{(x,y) \in \text{Dom} f \,/\, f(x,y) = K \,;\, |x|+y = K\}$



$K=0 \Rightarrow |x| = -y$ •

$K=1 \Rightarrow |x|-1 = -y$ •

$C_K = y = K-|x| \longrightarrow$ lineas •

(e) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$ Dom f: $x^2+y^2+z^2>0$

$C_K = \{(x,y,z) \in \text{Dom} f \,/\, f(x,y,z) = K \,,\, \ln(x^2+y^2+z^2) = K\}$

$K=0 \Rightarrow \ln(x^2+y^2+z^2) = 0$

$K=1 \Rightarrow (x^2+y^2+z^2 = e$

$C_K = x^2+y^2+z^2 = e^K \Rightarrow$ ptos en el espacio

(f) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ Dom f: $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -y^2$

$C_K = \{(x,y,z) \in \text{Dom} f \,/\, \frac{x}{x^2+y^2} = K\}$

$K=0 \Rightarrow x = 0$

Completo cuadrados

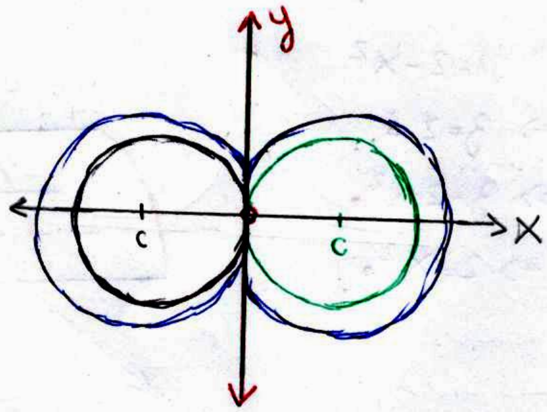
$K=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = x^2+y^2 \Rightarrow 1 = (x-1)^2+y^2$

$K=-\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = (x+1)^2+y^2$

$C_K = \frac{1}{K}x = x^2+y^2 \rightarrow \frac{1}{4K^2} = (x - \frac{1}{2K})^2 + y^2$

Circunferencias de ecuacion

Para $K=0$ el eje y $-(0;0)$



(7) (a) $f(x,y) = x^2+y^2$ Dom f: $\mathbb{R}^2$ Grafico $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in \text{Dom} f \wedge z = f(x,y)\}$

$x=0$ inters. $yz \Rightarrow z = y^2$

$y=0$ inters. $xz \Rightarrow z = x^2$

$z=0$ inter $xy \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow (0;0;0)$ Paraboloide

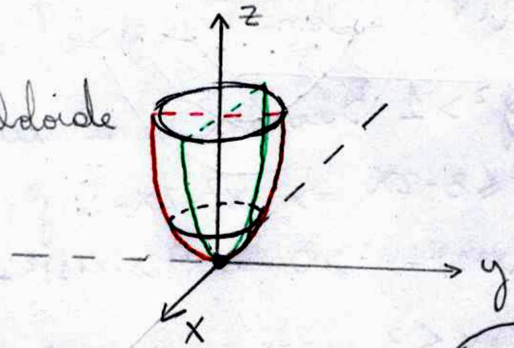
$z=1$ $x^2+y^2=1$

$z=4$ $x^2+y^2=4$

Im f: (Valores que toma z): $\mathbb{R}_0^+$

pos f: $\{(x,y) \in \text{Dom} f \,/\, f(x,y) > 0\}$

pos f: $\mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$



(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ Dom f: $x^2+y^2 \geq 0$

$x^2+y^2 = z^2$ $x=0 \Rightarrow y^2 = z^2$

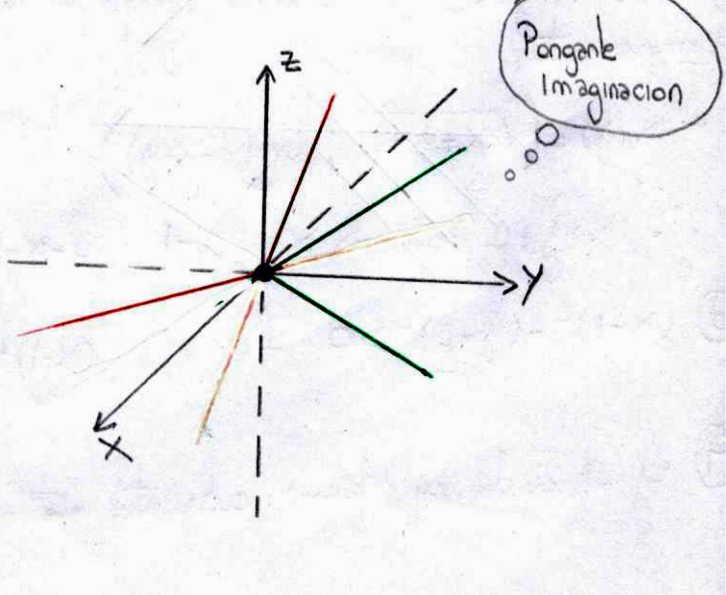
$y=0 \Rightarrow x^2 = z^2$ } Semirrectas

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2 = 0 \Rightarrow (0;0;0)$

$z=1 \wedge z=2$

Im f: $\mathbb{R}_0^+$

pos f: $\mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$



ⓒ $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ $9-x^2-y^2 \geq 0$

$x=0 \Rightarrow z=\sqrt{9-y^2}$ Semicircunf. $x^2+y^2 \geq 9$

$y=0 \Rightarrow z=\sqrt{9-x^2}$ Semicircunf

Imf: $0 \leq z \leq 3$

$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=9$ Circunf $R=3$

posf: $x^2+y^2<9$

ⓓ $f(x,y)=2-x-y \Rightarrow z=2-x-y$

$x=0 \Rightarrow z=2-y$
$y=0 \Rightarrow z=2-x$ } rectas
$z=0 \Rightarrow x-y=2$

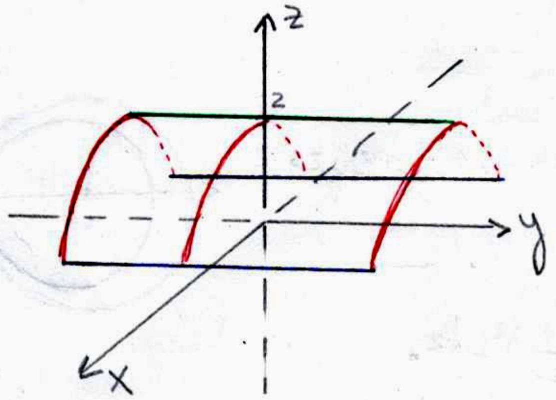
Imf: $\mathbb{R}$
posf = $x+y<2$

ⓔ $f(x,y)=2-x^2$

$zy \Rightarrow z=2$

$zx \Rightarrow z=2-x^2$

$xy \Rightarrow 2=x^2$



Imf: $z \leq 2 \Rightarrow (-\infty;2]$
posf: $2-x^2>0$

ⓕ $f(x,z)=x^2-2x+z^2$

$=x^2-2x+1-1+z^2$

$=\underbrace{(x-1)^2+z^2}_{\geq 0}-1 \geq -1 \Rightarrow \text{Imf } [-1;+\infty)$

posf: $\{(x,z)\in \text{Domf} \,/\, f(x,z)>0\} \Rightarrow$ posf: $(x-1)^2+z^2>1$

⑧ⓐ $x^2+y^2>1$ Basandose en restricción de dominio $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$

ⓑ $x^2+y^2\leq 8-2x \Rightarrow x^2-2x+1+y^2\leq 9 \Rightarrow (x+1)^2+y^2\leq 9$ $f(x,y)=\sqrt{9-(x+1)^2-y^2}$

$\therefore\ 9-(x+1)^2-y^2\geq 0 \Rightarrow 9\geq (x+1)^2+y^2 \rightarrow =$

ⓒ $-1\leq x+y<3$ puede ser un campo vectorial cuyo dominio sea la intersección de las componentes

$f(x,y)=\left(\sqrt{x+y+1}\,;\,\ln(3-x-y)\right)$

$\therefore\ x+y+1\geq 0 \Rightarrow x+y\geq -1$ $3-x-y>0$ $3>x+y$ $x^{1/2}=\sqrt{x}$

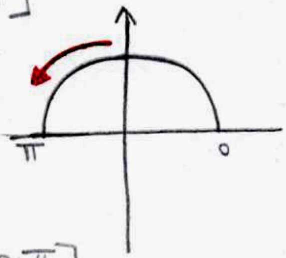
ⓓ $(x-1)^2+(y-2)^2>0$ $f(x;y)=\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$

⑨ Gráfico de superficies: adjunto material de algebra.

(10) a) $\bar{g}(u) = (\cos(u); \text{sen}(u))$ con $u \in [0;\pi]$

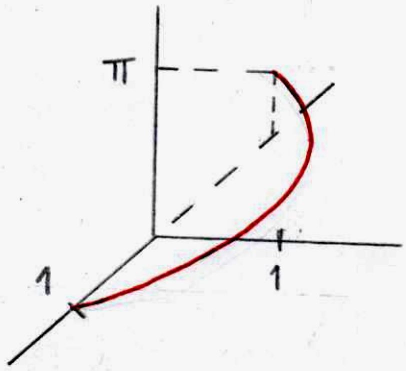
Si le damos valores a π el sentido es antihorario

$$\begin{cases} x = \cos(u) \\ y = \text{sen}(u) \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1 \text{ con } x \in [-1;1]$$



b) $\bar{g}(u) = (\cos(u); \text{sen}(u); u)$ con $u \in [0;\pi]$

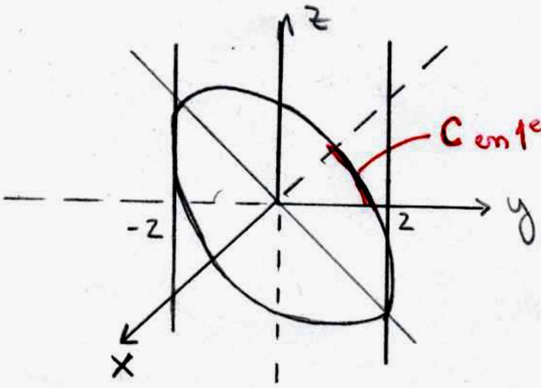
u	x	y	z
0	1	0	0
$\pi/2$	0	1	$\pi/2$
π	-1	0	π



Va a formar un espiral ya que $u = z$ y la altura va aumentando

(11) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z = x \end{cases}$ 1° OCTANTE $\begin{cases} x = 2\,\text{sen}\,t \\ y = 2\cos t \\ z = 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow x = z$

b) $\bar{f}(t) = (2\,\text{sen}\,t; 2\cos t; 2\,\text{sen}\,t)$ con $t \in [0;\pi/2]$



(12) Como todo lo optativo no se hace.

3 Limite y continuidad

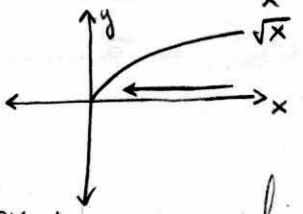
Dif de cuadrados

① ⓐ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2-1}}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = 2$

Limite fundamental

ⓑ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{\text{sen}(x)}{x} = -1 \end{cases}$ $\quad l^+ \neq l^- \Rightarrow \nexists \lim$

ⓒ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \Longrightarrow$



si $x\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$

ⓓ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} 2x-1 = -1 \quad \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 \quad l^+\neq l^- \Rightarrow \nexists \lim$

② $\lim\limits_{u\to 0} \left(\frac{\text{sen}(u)}{|u|}; u\ln(u) \right) \Rightarrow \text{Dom } f(u) = (0;+\infty)$

como solo entran los valores positivos el $\lim\limits_{u\to 0^-}$ no hace falta calcularlo

$\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\text{sen}(u)}{u} = 1$ y $\lim\limits_{u\to 0} u\ln(u) = 0 \Rightarrow L = (1;0)$ En cambio

$\lim\limits_{u\to 0} \left(\frac{\text{sen}(u)}{|u|}; u \right) \Rightarrow \text{Dom } f(u) = \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow$

$\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\text{sen}(u)}{u} = 1$ $\quad l^+ \neq l^- \Rightarrow \nexists \lim$ al no existir el limite de una componente ya no existe el lim de $f(u)$

$\lim\limits_{u\to 0^-} -\frac{\text{sen}(u)}{u} = -1$ • Conclusion: en uno existe y en otro no por la restricción del dominio.

③ $\lim\limits_{u\to 0} \left(\frac{1-\cos(u)}{u^2}; 1+2u; \frac{\text{sen}(u^2)}{u^3+u^2} \right)$

$\lim\limits_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2}$ aplico L'Hopital $\Rightarrow \lim\limits_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u)}{2u} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\text{sen}\, u}{u}}^{\to 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{u\to 0} 1+2u = \boxed{1}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{L = \left(\frac{1}{2};1;1\right)}$

$\lim\limits_{u\to 0} \frac{\text{sen}(u^2)}{u^3+u^2} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\cos(u^2)\,2u}{3u^2+2u} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\overbrace{-\text{sen}(u^2)4u^2}^{\to 0} + \overbrace{\cos(u^2)\,2}^{\to 2}}{\underbrace{\underbrace{6u}_{\to 0}+2}_{\to 2}} = \boxed{1}$

④ ⓐ $\bar{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \bar{g}(t) = (t, 2t)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Dom } \bar{g}: \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\text{conexo}} \\ \bar{g} \text{ es cont en } \mathbb{R} \text{ por poseer componentes continuas} \end{array}\right\}$ El conjunto de $\bar{g}$ representa una curva

$\text{Im } \bar{g} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 / \bar{x} = (t;2t) \text{ con } t\in\mathbb{R} \} \Rightarrow \bar{x} = (1;2)t + (0;0)$ Es una curva (recta) en $\mathbb{R}^2$

Importante: Curva:

Dada una función $\bar{f}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, si D es un conjunto conexo y $\bar{f}$ es continua en D entonces llamamos curva al conjunto imagen de $\bar{f}$

Conjunto conexo es un subconjunto $G \subset \mathbb{R}^m$ que no puede ser descrito como unión disjunta de 2 conjuntos abiertos

"Formado por una sola pieza que no se puede dividir".

ⓑ $\bar{g} : [-1;2] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \bar{g}(u) = (u;|u|)$

Dom $\bar{g}$: $\mathbb{R} \Rightarrow$ conexo
las componentes son continuas } $\bar{g}(u)$ representa una curva en $\mathbb{R}^2$

ⓒ $\bar{g} : [0;\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \bar{g}(\varphi) = (\cos(\varphi); \text{sen}(\varphi))$

$\cos(\varphi)$
$\text{sen}(\varphi)$ } son continuas en el periodo $[0;2\pi] \Rightarrow$ serán continuas en $[0;\pi]$

Dom $\bar{g}$: $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{conexo}}$ (tanto sen como cos no presentan restricciones) $\Rightarrow \bar{g}$ representa una curva en $\mathbb{R}^2$

ⓓ $\bar{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 / g(t) = (t; 2t; 1-t)$

Dom $\bar{g}$: $\mathbb{R} \Rightarrow$ conexo
cada componente es continua por ser polinomio

$\bar{X} = (1;2;-1)t + (0;0;1) \Rightarrow$ representa una curva recta en $\mathbb{R}^3$

ⓔ $\bar{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \bar{g}(x) = (x; x^2)$ con $D = \{x \in \mathbb{R} / |x| > 1\}$

$|x| > 1 \Rightarrow x > 1 \lor x < -1$ ////) -1 0 1 (////// es una unión de dos conjuntos abiertos $\Rightarrow$ no conexo
por incumplimiento de teorema NO REPRESENTA UNA CURVA.

ⓕ $\bar{g}(u) = \begin{cases} (u; u^2+1) & \text{si } u \geq 0 \\ (u; u^2) & \text{si } u < 0 \end{cases}$ obs: ejercicio mal escrito en la guía

Dom $\bar{g}(u) = \mathbb{R} \Rightarrow$ conexo. Analizo continuidad en $u = 0$

$\lim_{u \to 0^+} (u; u^2+1) = (0;1)$

$\Rightarrow l^+ \neq l^- \Rightarrow \nexists \lim$ no es continua en $u = 0 \Rightarrow$ Su imagen no define una curva

$\lim_{u \to 0^-} (u; u^2) = (0;0)$

⑤ ⓐ $\lim_{(x,y) \to (1,1)} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^4 - y^4} = \dfrac{xy\,\cancel{(x^2-y^2)}}{(x^2+y^2)\cancel{(x^2-y^2)}} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

ⓑ $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2(x-y) + y^2(x-y)}{x^2+y^2} = \dfrac{\cancel{(x^2+y^2)}(x-y)}{\cancel{(x^2+y^2)}} = \boxed{0}$

ⓒ $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} =$

$C_1 \quad y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x;0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$

$C_2 \quad y = x \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x;x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{(2x)^2}{2x^2} = \dfrac{4\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \boxed{2}$

$L_{C_1} \neq L_{C_2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x;y) \to (0;0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

ⓓ $\lim_{(x,y) \to (1,2)} \dfrac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \left(\lim_{y \to 2} \dfrac{xy - 2x - y + 2}{x^2+y^2-2x-4y+5} \right) = \lim_{x \to 1} \dfrac{\cancel{2x} - \cancel{2x} - \cancel{2} + \cancel{2}}{x^2 + 4 - 2x - 8 + 5} = \dfrac{0}{0}$

$1 + 4 - 2 - 8 + 5$

$y = mx \quad \lim_{x \to 1} \dfrac{\overset{\to 0}{x^2m - 2x - mx + 2}}{x^2 + m^2x^2 - 2x - 4mx + 5} = \boxed{0}$, No sale

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ Por definición (despues de comprobar por distintos medios supongo que $L=0$)

$\Rightarrow 0<\sqrt{x^2+y^2}<h \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right| = \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 \leqslant x^2+y^2 \to \frac{1}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$

$\therefore \frac{3|y|x^2}{x^2+y^2} \leqslant 3|y| \leqslant 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow h=\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \boxed{0}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow y=ax \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|+|ax|}{\sqrt{x^2+a^2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|(1+|a|)}{\cancel{\sqrt{x^2}}\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+|a|}{\sqrt{1+a^2}}$

$\Rightarrow$ El valor del lim depende de a $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \Rightarrow y=x \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+0} = \boxed{1}$

$y=0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{0+\underset{\to 0}{x^2}} = \boxed{0}$ no es indet porque x^2 tiende a 0 no es igual a 0

$\neq \; \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2} \quad y=ax \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+a^3x^3}{x^2+a^2x^2} = \frac{\cancel{x^2}(1+a^3x)}{\cancel{x^2}(1+a^2)} = \frac{1}{1+a^2}$ |depende de a $\nexists$ lim|

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad y=0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \boxed{0}$

$y=x \quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \neq \Rightarrow \nexists \lim$

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ si $x=0 \Rightarrow L=0$

$y=ax \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(ax)^3}{x^2+(ax)^6} = \frac{x^4a^3}{x^2+a^6x^6}$ NO

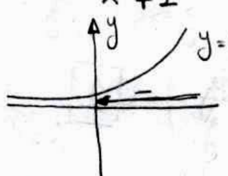
$x=y^3 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^3y^3}{y^6+y^6} = \frac{y^6}{2y^6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim$

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2+y^2} \quad y=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$y=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1} = 1 \quad \neq \nexists \lim$

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{\overset{\to -\infty}{-y/x^2}} = \boxed{0}$



(m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\text{no tiende a } 0}{(y^3+1)} \cos\left(\overset{\to\infty}{\frac{1}{x^2+y^2}}\right) \Rightarrow \nexists \lim$

(n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{\left[\underset{\to 0}{(x+y)}\ \underset{\text{acot}}{\operatorname{sen}(1/x)}\right]} \overset{\text{acot}}{\cos(1/y)} = 0$

(0) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-y^2} & \text{si } x^2-y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2-y^2 = 0 \end{cases}$ Dom f: $\mathbb{R}^2$

Supongo $\Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = x^2-x^3 \Rightarrow |y| = \sqrt{x^2-x^3}$ Verifico dominio $x^2-x^3 \geq 0$

$x^2(1-x) \geq 0 \begin{cases} x=0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Verifico pertenece

$\Rightarrow y = \sqrt{x^2-x^3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2-x^2+x^3} = \boxed{1}$

$x=0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{-y^2} = \boxed{0}$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim$

(9) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{(x+y)^2-xy}$ $\quad y=-x \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x}{(x-x)^2+x^2} = \boxed{0}$

$y=0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} = \infty \Rightarrow$ como $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(6) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\ln(1-x^2)}$

(a) $1-x^2 > 0 \Rightarrow 1 > x^2 \Rightarrow 1 > |x| \wedge x \neq 0$ Dom $f(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1 \wedge x \neq 0\}$

(b) Ptos críticos a analizar o frontera $x=0$ $x=1$ $x=-1$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{\ln(1-x^2)} \nexists$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(1,y_0)} \dfrac{\overset{\to 0}{\operatorname{sen}(xy)}}{\underbrace{\ln(1-\underbrace{x^2}_{\text{tiende a 1 mas 1}})}_{\text{tiende a algo } \neq 0}} = \boxed{0} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(-1,y_0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x,y)}{\ln(1-x^2)} = \boxed{0} \end{array}\right\} \exists$

(7)(a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x+y-z}{x+y+z}$

$\lim\limits_{z\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x+y-z}{x+y+z}\right)\right) = \lim\limits_{z\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-z}{x+z}\right) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{-z}{z} = \boxed{-1} \Rightarrow$ Vario el orden

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{x+y-z}{x+y+z}\right)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x+y}{x+y}\right) = \boxed{1}$ $\neq \nexists \lim$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x+y-2}{x-y}$ $\quad \cdot\, y=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x} = \boxed{-1}$

$L_1 = \lim\limits_{y\to 1}\left(\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+y-2}{x-y}\right) = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y-1}{1-y} = \dfrac{-(1-y)}{(1-y)} = \boxed{-1}$

$L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\left(\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{x+y-2}{x-y}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x-1} = \boxed{1}$

$L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim$

c) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{sen(4-xy)}{16-x^2y^2} \cdot \frac{4-xy}{4-xy} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{sen(4-xy)}{4-xy} \frac{\cancel{4-xy}}{16-x^2y^2} = \boxed{\frac{1}{8}}$

$(\cancel{4-xy})(4+xy)$

d) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

$\lim_{z\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}\right)\right) = 0$ No sirve

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\overset{①}{\frac{xy}{x^2+y^2}} , \overset{②}{\frac{e^{xy}-1}{xy}}\right)$ ejercicio 5i se comprueba que el lim de ① no existe por lo tanto el límite del campo vectorial tampoco existe

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\, sen(1/y) ; \frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{inf}{x}\ \overset{acot}{sen(1/y)} = \boxed{0}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{2\,sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) \Rightarrow$ si $x = \frac{x}{2}$ $\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$ si $1 = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$1-\cos(x) = 2\,sen^2(x/2)$

8) $S: z = x^2+y^2$

$C: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow$ Curva por intersección de superficies $C: \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow C: \begin{cases} x: \sqrt{5}\cos t \\ y: \sqrt{5}\,sen\,t \\ z: 5 \end{cases}$

$f: [0;2\pi] \to \mathbb{R}^3 / \bar{f}(t) = (\sqrt{5}\cos t; \sqrt{5}\,sen\,t; 5)$ $C: Im f$

Como f posee componentes continuas en su dominio (región conexa) $\Rightarrow \bar{f}$ es continua $\Rightarrow$ su imagen define una curva en $\mathbb{R}^3$

9) $C: \bar{X} = (t; t^2; 2t^2)$ $t \in \mathbb{R}$

a) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 2t^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 2y \end{cases}$ Ecuac cartesianas de C

b) La curva se está totalmente contenida en el plano $z = 2y \Rightarrow$ C es plana

c) $\bar{X} = (u+v; u-v; u^2+u+v^2-v+2uv)$

$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \\ z = \underbrace{u^2+v^2+2uv}_{(u+v)^2} + u - v \end{cases} \Rightarrow z = x^2+y \Rightarrow$ reemplazo $2t^2 = t^2+t^2$

$2t^2 = 2t^2$ $\forall t \Rightarrow$ C verifica la ecuación de S

$\Rightarrow$ C está contenida en S

10 a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(x^2+y)} & \text{si } x^2+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2+y = 0 \end{cases}$

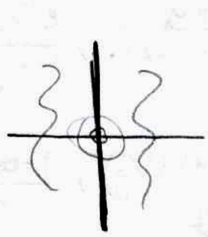
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y} \Rightarrow y=0 \quad \lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\cancel{x^2}} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $f(\bar{0}) = (0,0)$

$x = ay \quad \lim_{y\to 0} \dfrac{ay}{a^2y^2+y} = \dfrac{a\cancel{y}}{\cancel{y}(ay+1)} = a \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

f es discontinua esencial en $\bar{x} = (0,0)$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $f(\bar{0}) = (0,0)$

$\lim_{(x,y)\to\bar{0}} \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x} = \dfrac{\text{sen}(xy)}{1} = \boxed{0} \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f(x,y) = f(\bar{0})$ Es continua

c) $f(x,y) = \begin{cases} \underset{\to 0}{\text{sen}(y)}\,\underset{\text{acot}}{\text{sen}(\tfrac{1}{x})} & \text{si } (x,y) \neq (0,y) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,y) \end{cases}$ $x = 0 \Rightarrow$ 

$\lim_{(x,y)\to(\bar{0})} \begin{cases} \underset{\to 0}{\text{sen}(y)}\,\underset{\text{acot}}{\text{sen}(1/x)} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} = f(0,0) \Rightarrow f$ es continua

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $f(\bar{0}) = 0 \quad x = ay^3 \quad \lim_{x\to 0} \dfrac{ay^6}{a^2y^6+y^6} = \dfrac{a\cancel{y^6}}{\cancel{y^6}(a^2+1)} = \boxed{\dfrac{a}{a^2+1}}$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ es discontinua esencial en $\bar{x} = (0,0)$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2-4x^2}{y-2x} & \text{si } y \neq 2x \\ 1-x-y & \text{si } y = 2x \end{cases}$ $P_0(0,0)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2-4x^2}{y-2x} = \dfrac{(y+2x)\cancel{(y-2x)}}{\cancel{y-2x}} = \boxed{0}$

pasa por el origen $f(0,0) = 1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1-x-y = \boxed{1} \quad \neq \quad \Rightarrow \nexists \lim$ en $(0,0)$

f es discontinua esencial en $\bar{x} = (0,0)$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si } |y| \neq |x| \\ 0 & \text{si } |y| = |x| \end{cases}$ $f(\bar{0}) = 0$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2-y^2}$

$y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = \boxed{0}$

$y = ax \Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 a}{x^2 - a^2x^2} = \dfrac{\cancel{x^2}a}{\cancel{x^2}(1-a^2)} = \dfrac{a}{1-a^2}$

No existe el límite doble $\Rightarrow$ f es discontinua esencial en $\bar{x} = (0,0)$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(\bar{0}) = 0$

$y=0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = \boxed{0}$

$y=1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{\underbrace{x+1}_{\to 1}} = \boxed{1}$ $\} \neq \Rightarrow \nexists \lim$

f es discontinua escencial en $\bar{x} = (0;0)$

(h) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(2+x^2)\,\text{sen}(y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ $f(0;0) = 2$

$\lim_{(x,y) \to (0;0)} \frac{\overset{\to 2}{(2+x^2)}\overset{\to 1}{\text{sen}(y)}}{y} = \boxed{2}$

$\lim_{(x,y) \to (0;0)} 2 = \boxed{2}$ $\boxed{f \text{ es continua}}$

(11) (a) $f: \mathbb{R}^2 - \{\bar{0}\} \to \mathbb{R} / \bar{f}(x,y) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} ; \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right)$ $\nexists \lim$

$\lim_{(x;y) \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

$y=0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$ $\quad y=0 \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$y=x \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = 1/2$ $\quad y=x \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{2x^2} = 0$

La funcion no posee limite doble en el pto $\Rightarrow$ discontinua esencial $\Rightarrow$ NO SE PUEDE REDEFINIR

(b) $f(x,y) = \frac{x\,\text{sen}(xy)}{y}$ si $(x,y) \neq (x;0)$ $\quad$ Dom $f: \mathbb{R}^2 - \{(x,0)\}$ $\quad \nexists f(x,0)$

$\lim_{(x,y) \to (a;0)} x^2 \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = a^2$ $\forall a \neq 0 \Rightarrow f$ es discont evit $\forall (x,y) / (x;y) = (a;0)$

$f^*(x;y) = \begin{cases} x\frac{\text{sen}(xy)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

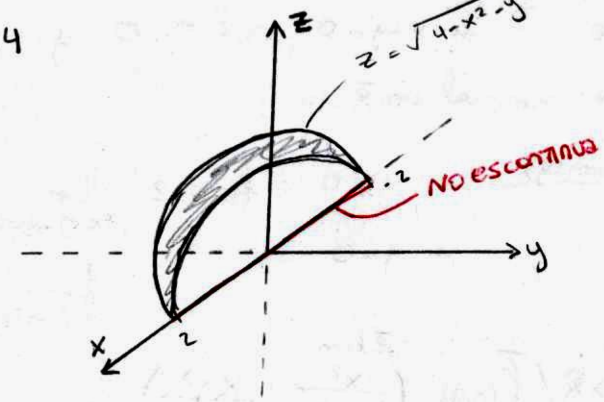
(c) $\bar{g}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3 / \bar{g}(t) = \left(\frac{t}{|t|} ; t \ln(t) ; \frac{1-\cos(t)}{t} \right)$

$\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t} = 1$ $\quad \lim_{t \to 0}$

$\lim_{t \to 0^-} \frac{t}{-t} = -1$

(12) ⓐ $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ si $y \leq 0 \wedge x^2+y^2 \leq 4$, $f(x,y)=0$ $\forall$ otro (x,y)

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2-y^2} & \text{si } y\leq 0 \wedge x^2+y^2\leq 4 \\ 0 & \forall \text{ otro } (x,y) \end{cases}$$



f no es continua sobre los ptos del eje x donde $-2 \leq x \leq 2$

• f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \text{ con } -2\leq x\leq 2\}$

ⓑ $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)}$ $\begin{cases} \dfrac{\overset{\to 1}{\text{sen}(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} = \boxed{1} \\ 1 = \boxed{1} \end{cases}$ $f(0,0)=1$ f es continua en $\mathbb{R}^2$ → se verifica continuidad

→ Si, no tengo idea de como graficar eso.

(13) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ $\quad f(0;0)=0$

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < h \Rightarrow \left| \dfrac{x^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon \qquad \left| \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \right| =$ ESTUDIAR por definicion