Matemática Superior - Fórmulas

www.utnianos.com.ar

Versión #	Fecha	Autor	Descripción
1.0	03/12/2013	sentey	Falta Transferencia, Transformada Z, Aproximación y Ecuaciones Diferenciales
1.1	03/12/2013	sentey	Correcciones varias
1.2	04/12/2013	sentey	Pasado a PDF, corregidas algunas cosas, agregadas fórmulas de pasaje binomial - polar
1.3	04/12/2013	sentey	Agregado Ecuaciones Diferenciales
1.4	05/08/2014	juliahn	Complejos, Laplace, Transferencia, Transformada Z, Métodos Múltiples

Contents

Primera Parte

Complejos

Formas

$z = a + bj$

BINOMIAL $z = a + bj$

POLAR $z = [\rho; \varphi]$

TRIGONOMETRICA $z = \rho(cos\ \varphi + j.sen\ \varphi)$

EXPONENCIAL $z = \rho.e^{j\varphi}$

Pasaje

Pasaje de binomial a polar:

$$\begin{cases} a = \rho.cos\varphi \\ b = \rho.sen\varphi \end{cases}$$

Pasaje de polar a binomial:

$$\begin{cases} \varphi = arctg(\frac{b}{a}) \\ \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Operaciones (forma binomial)

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\,j$$

(b>0 => signos iguales, b<0 => signos distintos)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Operaciones (forma polar)

$[z_1.z_2] = [\rho_1.\rho_2; \varphi_1 + \varphi_2]$

$[z_1/z_2] = [\rho_1/\rho_2; \varphi_1 - \varphi_2]$

$[z^n] = [\rho^n; n\varphi]$

$$[\sqrt[n]{z}] = [\sqrt[n]{\rho}; \frac{\varphi + 2k\pi}{n}] \ , \ k = 0, 1, 2, ..., n-2, n-1$$

W_0 es primitiva, W_1 no es primitiva. W_k es primitiva si y solo si w y k son coprimos

$$\ln(z) = \ln(\rho) + j(\varphi + 2k\pi)$$

Si K=0 entonces es valor principal

Fasores

$$f(t) = A_1.cos(wt + \varphi_1)$$

$$g(t) = A_2.cos(wt + \varphi_2)$$

$$F = A_1.e^{j\varphi_1}$$

$$G = A_2.e^{j\varphi_2}$$

Pasar F y G a forma binomial

$$H = F + G$$

Pasar H a forma exponencial, queda $H = A_3.e^{j\varphi_3}$

$$f(t) + g(t) = h(t) = A_3.cos(wt + \varphi_3)$$

Recordar: $cos(t) = sen(t + \frac{\pi}{2})$

Fourier

Serie Trigonométrica de Fourier

$$T = Periodo,\ L = \frac{T}{2},\ w = \frac{2\pi}{T}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ cos(nwx) + b_n\ sen(nwx)$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos(nwx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(nwx)dx$$

Si f es par => Simétrica al eje ‘Y’ y l*os coeficientes en exponencial son reales*

f_par · f_par = f_par
f_par · f_impar = f_impar
f_impar · f_impar = f_par

$$f(x) = f(-x)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)cos(nwx)dx$$

$$b_n = 0$$

Si f es impar => Simétrica al eje ‘X’ y l*os coeficientes en exponencial son imaginarios*

$$f(x) = -f(-x)$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)sen(nwx)dx$$

Si f tiene simetría de media onda => Sólo términos de frecuencias impares.

Función Periódica Alternada

$$f(x) = -f(x + \frac{T}{2})$$

$$a_0 = 0$$

$$a_{2k} = 0$$

$$b_{2k} = 0$$

1er paso: Reflejar sobre el eje 'x' (Multiplicando por -1)

2do paso: Trasladar 'L' unidades.

Serie Exponencial de Fourier

$$S(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{j(nwx)} c_n + e^{-j(nwx)} c_{-n}$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-j(nwx)} dx$$

C_0 *es el valor medio*

Transformada de Fourier

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jwt} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-jwt} dt$$

Laplace

Definición

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Tabla

f(t)	F(s)
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$sen(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\delta(t)$	1

Propiedades

$$L[f(t)] = F(s)$$

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

$$L[f'(t)] = s.F(s) - f(0)$$

$$L[f''(t)] = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0)$$

$$L[\int_0^t f(u)du] = \frac{F(s)}{s}$$

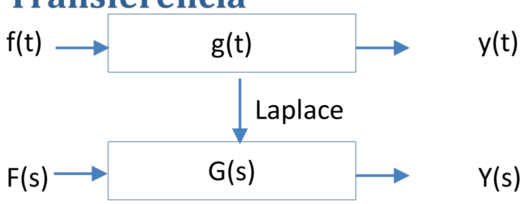
$$L[t^n.f(t)] = (-1)^n.F^{(n)}(s)$$

$$L[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty F(u)du$$

Convolución

$$L^{-1}[F(s).G(s)] = \int_0^t f(u).g(t-u)du$$

Transferencia



Sistema Estable

$\lim_{t\to\infty} y(t) = K$ (Todos sus polos a la izquierda del cero)

Transformada Z

Definición

$$X_{[z]} = \sum_{0}^{\infty} X_n . Z^{-n}$$

Tabla

X(n)	Z[X(n)]
$\delta(t)$	1
1	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$

$X_{[n]} = X_{[Z]}$

$X_{[n+1]} = ZX_{[Z]} - X_{[0]}$

$X_{[n+2]} = Z^2 X_{[Z]} - Z^2 X_{[0]} - ZX_{[1]}$

Segunda Parte

Error

COMPLETAR

Raíces de ecuaciones

Criterios de Paro

$$Si\ f'(x) \geq 1 => \ |f(x_n)| < \varepsilon$$

$$Si\ f'(x) < 1 => \ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

Bisección

Condiciones: f continua en [a;b] y f(a).f(b)<0

$$x_n = \frac{a+b}{2}$$

$$Si\ sg(f(x_n)) = sg(f(a)) => a = x_n \quad sino\ b = x_n$$

$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, n = número de iteraciones mínimas necesarias

Punto Fijo

Condiciones: f continua en [a;b] y -1 < g’(x) < 1, para [a,b]

$$f(x) = 0 => g(x) = x$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Regula Falsi

Condiciones: f continua en [a;b], f(a).f(b)<0 y f’(x) ≠0 en (a;b)

$$Si\ sg(f') \neq sg(f'') => x_{n+1} = b - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)}.f(b)\ ,\ x_0 = a$$

$$Si\ sg(f') = sg(f'') => x_{n+1} = a - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)}.f(a)\ ,\ x_0 = b$$

Newton-Raphson

Condiciones: f continua en [a;b], f(a).f(b)<0 y f’ continua en (a;b)

Newton Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Von Mises:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Raíces Múltiples:

$$x_{n+1} = x_n - m.\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\ m = orden\ de\ la\ raiz$$

Secantes

Condiciones: f continua en [a;b] y f(a).f(b)<0

$$x_0 = a\ ,\ x_1 = b$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.f(x_n)$$

Sistemas de ecuaciones

Norma

Norma 1: es el **máximo** de las **sumas** de los **módulos** de los **elementos** de las **<u>columnas</u>**.

Norma infinito: es el **máximo** de las **sumas** de los **módulos** de los **elementos** de las **<u>filas</u>**.

Jacobi

Condición: La matriz de coeficientes debe ser diagonalmente dominante

-Despejar “x” de la 1° ecuación, “y” de la 2° ecuación, etc. Queda un nuevo sistema.

X(0) = (a,b,c,...)   (vector inicial)

X(1) = (d,e,f,...)   (usando X(0) en el nuevo sistema)

X(2) = (g,h,i,...)   (usando X(1) en el nuevo sistema)

....

X(n) = (u,v,w,...)   (usando X(n-1) en el nuevo sistema)

Gauss-Seidel

Condición: La matriz de coeficientes debe ser diagonalmente dominante

-Despejar “x” de la 1° ecuación, “y” de la 2° ecuación, etc. Queda un nuevo sistema.

X(0) = (a,b,c,...)   (vector inicial)

X(1) = (d,e,f,...)   (usando X(0) en el nuevo sistema, pero a medida que hallo variables, usarlas para hallar las siguientes)

X(2) = (g,h,i,...)   (usando X(1) en el nuevo sistema, pero a medida que hallo variables, usarlas para hallar las siguientes)

....

X(n) = (u,v,w,...)   (usando X(n-1) en el nuevo sistema, pero a medida que hallo variables, usarlas para hallar las siguientes)

Aproximación

COMPLETAR

Interpolación

Lagrange

Dado un conjunto de n puntos: $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$,... $(x_n,f(x_n))$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f(x_i)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

Newton-Gregory

Dado un conjunto de n+1 puntos: $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$,... $(x_n,f(x_n))$

Progresivo:

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + ... + a_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$$

Los a_i se obtienen de la tabla de diferencias finitas.

Regresivo:

$$P(x) = b_0 + b_1(x-x_n) + b_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + ... + b_n(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1)$$

Los b_i se obtienen de la tabla de diferencias finitas.

Diferenciación

Hacia adelante

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Hacia atrás

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

Centrada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

Integración

Trapecios

h = longitud del subintervalo

n = número de subintervalos

i	0	1	2	...	n
x_i					
y_i					

$$A = \frac{1}{2}h(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i)$$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{12}.h^2.f''(\varphi)$$

Simpson

h = longitud del subintervalo

n = número de subintervalos

i	0	1	2	...	n
x_i					
y_i					

Para aplicar Simpson, "n" debe ser par

$$A = \frac{h}{3}.(E + 4I + 2P)$$

E = suma de extremos, I = suma de impares, P = suma de pares

$$\varepsilon = \frac{a-b}{180}.h^4.f^{IV}(\varphi)$$

Ecuaciones Diferenciales

$y' = f(t;y)$, $y(a) = y_0$, $y(b) = ?$

Se divide el intervalo [a;b] en "n" subintervalos de longitud "h"

Condición de Lipschitz

Verifica si y sólo si $\exists\, L > 0 \,/\, |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

Euler

$w_{i+1} = w_i + h.f(t_i; w_i)$, $w_0 = y_0$

Taylor

$$y_{i+1} = y_i + h.y'(t_i) + h^2.\frac{y''(t_i)}{2!} + h^3.\frac{y'''(t_i)}{3!} + \ldots$$

Heun

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i; w_i) + f(t_i + h; w_i + h.f(t_i; w_i))]$$

Runge-Kutta 2° Orden

$$w_{i+1} = w_i + h.f(t_i + \frac{h}{2}; w_i + \frac{h}{2}.f(t_i; w_i))$$

Runge-Kutta 4° Orden

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h.f(t_i; w_i)$$

$$k_2 = h.f(t_i + \frac{h}{2}; w_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h.f(t_i + \frac{h}{2}; w_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h.f(t_i + h; w_i + k_3)$$

Métodos Múltiples

Explicita: Cuando el miembro de la izquierda no aparece a la derecha.

Implícita: Cuando el miembro de la izquierda sí aparece a la derecha.

Si es explícita entonces es predictora