UTN.BA

UTN.BA
SECRETARÍA ACADÉMICA Y DE PLANEAMIENTO

CÁLCULO PROPOSICIONAL Y CÁLCULO DE PREDICADOS

Unidad 1

CÁLCULO PROPOSICIONAL Y CÁLCULO DE PREDICADOS

En esta primera unidad iniciamos el desarrollo de los contenidos de la asignatura haciendo una revisión de algunos conceptos que serán fundamentales para comprender luego otros temas propios de matemática discreta.
Algunos de esos conceptos provienen de la lógica y sirven de base para abordar los números enteros; otras nociones se refieren a los conjuntos, tema que resulta necesario para desarrollar muchos conceptos nuevos, propios de esta materia, por ejemplo, relaciones de orden, grupos y lenguajes.
Comenzamos, entonces, con el repaso de los conceptos de lógica.

La lógica estudia métodos de razonamiento que separan los razonamientos válidos de los no válidos. El interés por el análisis de los razonamientos se debe a que en las ciencias de la computación deben aplicarse para lograr que los programas realicen lo que se pretende.
Los razonamientos se basan en la enunciación de una secuencia proposiciones, que se conocen como premisas, para arribar a una conclusión.

Una **proposición** es todo enunciado al que se le puede asignar un valor de verdad.

Es decir que son afirmaciones que pueden resultar verdaderas o falsas. Para denotarlas se utilizan letras minúsculas como p, q, r.

e Por ejemplo:

p: 1 + 1 = 2
q: 1 + 1 = 3

La proposición p es verdadera con lo que se escribirá de la forma: V(p) = V
La proposición q es falsa y se escribe: V(q) = F

Por el contrario, no son proposiciones enunciados tales como:

"Hola", "¿cómo estás?",
dado que no puede decirse nada acerca de su verdad o falsedad.

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas.

Las **proposiciones simples** son las proposiciones p, q, r.

Las **proposiciones compuestas** se construyen con proposiciones simples y operadores que denominamos conectivos lógicos.

Representamos los conectivos en el cuadro que sigue, con su respectivo nombre y modo de leerlo

Conectivo	Se lee	Nombre
$\sim$	No	Negación
$\wedge$	Y	Producto lógico o conjunción
$\vee$	O (inclusivo)	Suma lógica o disyunción
$\Rightarrow$	Si ... entonces	Condicional
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si	Bicondicional
$\underline{\vee}$	O (exclusivo)	Disyunción excluyente

Para obtener el valor de verdad de una proposición compuesta se utilizan tablas de verdad teniendo en cuenta como actúan los conectivos lógicos, según las siguientes definiciones:

Negación:

La negación $\sim p$ de p se define por medio de la siguiente tabla de verdad:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Por ejemplo:

Sea **p:** hay un premio Nobel de ciencias de la computación.
~p: no hay un premio Nobel de ciencias de la computación.

Conjunción:

Sean p y q proposiciones, se llama conjunción de p y q, y se denota $p \wedge q$, a la proposición p y q, y le corresponde la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por ejemplo:

Sean las proposiciones simples:
p: $1 + 1 = 3$ y **q:** una década tiene 10 años.

Entonces la conjunción es:
$p \wedge q$: $1 + 1 = \mathbf{3}$ y una década tiene 10 años.

Disyunción:

Sean p y q proposiciones. Se llama disyunción de p y q, y se denota $p \vee q$, a la proposición p o q, y le corresponde la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por ejemplo:

Sean las proposiciones simples:
p: $1 + 1 = 3$ y **q:** una década tiene 10 años.
Entonces la disyunción es:
$p \vee q$: $1 + 1 = \mathbf{3}$ o una década tiene 10 años.

Condicional:

Sean p y q proposiciones, la proposición compuesta: si p, entonces q, se llama proposición condicional y se denota por $p \Rightarrow q$.
La proposición p se denomina hipótesis (o antecedente) y la proposición q, conclusión (o consecuente). La tabla de verdad que corresponde es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Por ejemplo:

Sean las proposiciones simples:
p: $1 + 1 = 3$ y **q:** una década tiene 10 años.
Entonces el condicional $p \Rightarrow q$ es:
$p \Rightarrow q$: Si $1 + 1 = \mathbf{3}$ entonces una década tiene 10 años.

¿Te convence el valor de verdad del condicional en los dos últimos renglones? Si no es así, considera el siguiente ejemplo:

María le dice a Juan: "si mañana llueve, salgo a pasear con vos"
Las cuatro situaciones que se pueden dar son las que corresponden a los cuatro renglones de la tabla de verdad. Analicemos uno por uno:

- en el primer caso, las dos proposiciones son verdaderas, lo cual en nuestro ejemplo significa que llueve y que María pasea con Juan. No hay duda de que la promesa de María era cierta.

- en el segundo caso, la primera proposición es verdadera, lo cual en nuestro ejemplo significa que llueve, pero como la segunda es falsa, significa que María no sale a pasear con Juan. No hay duda de que la promesa de María no se cumple.

- pero ¿qué ocurre en el tercer y cuarto caso? Ambos tienen el antecedente falso, o sea que en nuestro ejemplo significa que no llueve. En uno de los casos (el tercero), María sale a pasear con Juan, y en el otro caso (el cuarto) no pasean. ¿Qué podemos decir de la promesa efectuada? ¿Tenemos elementos para decir que no se cumplió? Por supuesto que no. Pues la promesa fue con la condición de que lloviera, María no prometió nada si no llovía. Así que como no tenemos evidencia suficiente para decir que María no cumple su promesa, la debemos considerar inocente (como en los juicios).

<u>Bicondicional:</u>

Sean p y q proposiciones, la proposición compuesta: **p si y sólo si q**, se llama proposición bicondicional y se denota por $p \Leftrightarrow q$.
El valor de veracidad de la proposición $p \Leftrightarrow q$ está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Por ejemplo:

Sean p: $1 + 1 = 3$ y q: una década tiene 10 años.
$p \Leftrightarrow q$: $1 + 1 = 3$ si y sólo si una década tiene 10 años.

<u>Disyunción excluyente:</u>

Sean p y q proposiciones, la proposición compuesta: p ó (excluyente) q, se llama proposición disyunción excluyente y se denota por $p \veebar q$.
El valor de veracidad de la proposición $p \veebar q$ está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por ejemplo:

Sean p: $1 + 1 = 3$ y q: una década tiene 10 años.
$p \Leftrightarrow q$: $1 + 1 = 3$ ó (excluyente) si una década tiene 10 años.

Un ejemplo de la vida cotidiana donde se utiliza la disyunción excluyente es el caso de una mamá que le dice a su hijo: "elegí el autito o el trencito, pero no ambos. Te voy a comprar uno solo".

O bien, otro ejemplo que viviste hace no mucho tiempo es en el recuperatorio del curso de ingreso. Los que pueden presentarse a dar recuperatorio de parcial son los que tienen aprobado uno solo. Entonces si consideramos las proposiciones simples:
p: "el alumno aprobó el primer parcial"
q: "el alumno aprobó el segundo parcial"
… debemos decir que para dar el recuperatorio se debe cumplir que: $p \veebar q$ ya que el que aprobó los dos parciales, no tiene nada que recuperar.

Algunas observaciones que vale la pena tener en cuenta.

Dada $p \Rightarrow q$:

** la proposición $q \Rightarrow p$ se dice **recíproca**
** la proposición $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice **contrarrecíproca**
** la proposición $\sim p \Rightarrow \sim q$ se dice **contraria**

Las tablas de verdad correspondientes a estas proposiciones son:

p	q	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Si una proposición compuesta tiene n proposiciones simples entonces el número de filas en la tabla de verdad es 2^n.

Para continuar, veamos algunos **tipos especiales de proposiciones compuestas.** Ellas son: la **tautología**, la **antitautología** y la **contingencia.**

Tautología

Llamamos **tautología** (V) a aquella proposición compuesta cuyo valor de verdad es siempre verdadero en forma independiente del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Por ejemplo:

p	q	$(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Antitautología o Contradicción (F)

Llamamos **antitautología** o **contradicción** a aquella proposición compuesta cuyo valor de verdad es siempre falso en forma independiente del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Por ejemplo:

p	q	$(p \vee q) \wedge \sim (p \vee q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Contingencia

Se denomina **contingencia** a aquella proposición compuesta cuyo valor de verdad depende del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

Por ejemplo:

p	q	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Hasta aquí, entonces, tenemos que:

- Una proposición es todo enunciado al que se le puede asignar un valor de verdad.
- Las proposiciones pueden ser simples o compuestas: las proposiciones simples son las proposiciones p, q, r. Las proposiciones compuestas se construyen con proposiciones simples y conectivos lógicos (negación; producto lógico o conjunción; suma lógica o disyunción; condicional; bicondicional; o excluyente)
- Para obtener el valor de verdad de una proposición compuesta se utilizan tablas de verdad teniendo en cuenta cómo actúan los conectivos lógicos.

Proposiciones Lógicamente Equivalentes

Estamos transitando un nuevo camino, el de la lógica; para ello, es necesario que conozcamos algunas reglas que nos permitirán saber si estamos avanzando correctamente. Estas reglas son las equivalencias lógicas entre proposiciones.

¿Cuándo decimos que son equivalentes las proposiciones o, lo que es lo mismo, que las proposiciones son lógicamente equivalentes?

Las proposiciones compuestas $P = P(p_1, \ldots.., p_n)$ y $Q = Q(p_1, \ldots.., p_n)$ son lógicamente equivalentes siempre que, dados cualesquiera valores de verdad de $p_1, \ldots.., p_n$, P y Q son ambas verdaderas o ambas falsas. Se cumple cuando: $P(p_1, \ldots.., p_n) \Leftrightarrow Q(p_1, \ldots.., p_n)$ es una tautología.

Lo denotamos $P \equiv Q$

Por ejemplo: $\sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$

Tengamos en cuenta, además, que si las equivalencias no nos convencen a priori podemos demostrarlas; para eso debemos usar las tablas de verdad.
A continuación presentamos los distintos tipos de equivalencias.

1. Involutiva: $\sim\sim p \equiv p$
2. Idempotencia: $(p \vee p) \Leftrightarrow p \Leftrightarrow (p \wedge p)$
3. Conmutatividad:
   $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

4. Absorción:
   $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$

5. Identidad:
   $p \wedge V \Leftrightarrow p$
   $p \wedge F \Leftrightarrow F$
   $p \vee V \Leftrightarrow V$
   $p \vee F \Leftrightarrow p$

6. Leyes de De Morgan:
   $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
   $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

7. Asociatividad:
   $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
   $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

8. Distributividad:
   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Ahora bien, **¿para qué utilizaremos las equivalencias lógicas?** Entre otras cosas para poder simplificar proposiciones compuestas y otorgarles un aspecto más amigable.

Veamos el siguiente caso:

$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r) \quad \Leftrightarrow$ utilizando equivalencia de proposiciones
$\sim(p \wedge \sim q) \vee (r \wedge \sim r) \quad \Leftrightarrow$ utilizando De Morgan
$(\sim p \vee \sim\sim q) \vee (r \wedge \sim r) \Leftrightarrow$ utilizando involución
$(\sim p \vee q) \vee (r \wedge \sim r) \quad \Leftrightarrow$ utilizando contradicción
$(\sim p \vee q) \vee f \quad \Leftrightarrow$ utilizando identidad
$\sim p \vee q \quad \Leftrightarrow$ utilizando equivalencia de proposiciones
$p \Rightarrow q$

Con lo cual $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)$ y $p \Rightarrow q$ son equivalentes. Esto podemos probarlo haciendo ambas tablas de verdad.

Les proponemos que las realicen antes de continuar. Si no lo logran, pueden consultar a los tutores.

Veamos otro ejemplo:

Dada la siguiente proposición:

$$p \Rightarrow \sim [(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim (\sim p \wedge r)]$$

Apliquemos equivalencia del condicional en $(\sim p \Rightarrow q)$ y al mismo tiempo apliquemos De Morgan en $\sim(\sim p \wedge r)$. Obtenemos:

$$p \Rightarrow \sim [\, (\sim(\sim p) \vee q) \wedge [\sim(\sim p) \vee (\sim r)]\,]$$

Ahora apliquemos la ley involutiva en $\sim(\sim p)$:

$$p \Rightarrow \sim [\, (p \vee q) \wedge [p \vee (\sim r)]\,]$$

Distributiva de $\vee$ respecto de $\wedge$:

$$p \Rightarrow \sim [\, p \vee (q \wedge \sim r)\,]$$

Equivalencia del condicional:

$$\sim p \vee \sim [\, p \vee (q \wedge \sim r)\,]$$

Apliquemos nuevamente De Morgan:

$$\sim p \vee [\, \sim p \wedge \sim(q \wedge \sim r)\,]$$

Finalmente, por absorción: $\sim p$

Consideremos la siguiente proposición: $p \Rightarrow q$ y el caso donde tanto p como q son verdaderas.
De acuerdo a la tabla de verdad del condicional $V(p \Rightarrow q) = V$
En ese caso el condicional se denomina implicación tautológica y es la base de los razonamientos válidos. Si el razonamiento no es válido suele denominarse falacia.

Las siguientes proposiciones son implicaciones tautológicas. ¿podés probarlo?

$p \Rightarrow (p \vee q)$ $\quad (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \Rightarrow q$

Cualquier duda consultá al tutor a través del aula virtual.

Podríamos preguntarnos ¿qué es un razonamiento?

Informalmente consiste en una sucesión de proposiciones simples, o compuestas, a partir de las cuales se deduce una conclusión. Lo indicaremos de la siguiente forma:

$P \Rightarrow Q$

donde P es el antecedente y Q el consecuente.

P es una conjunción de premisas. Cada premisa, a su vez, es una proposición simple o compuesta.

Q es una proposición simple o compuesta.

Simbólicamente: $P = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n$, donde cada una de las p_i es una premisa (recordar proposición simple o compuesta). Lo escribimos como se muestra a continuación:

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \Rightarrow Q$ o de la forma que se da a continuación :

p_1

p_2

.

.

.

P_n

Q

¡Nos interesan los razonamientos válidos!

Luego si observamos es evidente que para que $P = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n$ sea verdadera es necesario que cada premisa lo sea. .Luego hay que ver si Q es verdadera.

- La validez de un razonamiento depende de la forma de las proposiciones que intervienen.

- Un razonamiento se considera válido si de la hipótesis verdadera se deduce que la conclusión también lo es.

Consideremos los siguientes casos.

A) Si estudio entonces aprobaré. No estudio. Por lo tanto no voy a aprobar

Podemos formalizarlo así:
p= Estudio, q: Aprobaré
Una vez identificadas las proposiciones simples obtenemos las premisas
$p_1 = p \Rightarrow q$
$p_2 = \sim p$

Debemos ver si se deduce $Q = \sim q$
Lo indicamos $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim q$

Este razonamiento no es válido porque como $\sim p$ debe ser verdadera, p falsa. Por lo tanto no necesariamente debe ser verdadera la proposición $\sim q$

B) Si Susana estudia matemática discreta podrá ir al cine. Susana ha estudiado matemática discreta. Por lo tanto podrá ir al cine.

Simbólicamente
p=Susana estudia matemática discreta
q= Susana podrá ir al cine

Lo indicamos: $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow q$

Las premisas $p \Rightarrow q$, p deben ser verdaderas. Como q es verdadera necesariamente la conclusión lo es.
Por lo cual el razonamiento es válido.

A los argumentos y las formas en que se relacionan se los llama reglas de inferencia.

Las reglas de inferencia permiten relacionar dos o más proposiciones para obtener una tercera que es válida en una demostración.

e

Veamos, un ejemplo

Si estudio matemática discreta entonces firmaré los trabajos prácticos. Si firmo los trabajos prácticos podré rendir el final. Por lo tanto si estudio matemática discreta podré rendir el final

Las proposiciones son:

p = Estudio matemática discreta
q = Firmaré los trabajos prácticos
r = Podré rendir el final
Las premisas $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)]$
La conclusión $(p \Rightarrow r)$

Se parte de que las premisas son verdaderas. Son hipótesis y parte del enunciado para inferir que la conclusión también sea verdadera. Por lo tanto el razonamiento será válido.

Si hacemos la tabla de verdad se tiene:

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$\wedge$	$q\Rightarrow r$	$\Rightarrow$	$p\Rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Observamos que la implicación final $P\Rightarrow Q$ es tautológica que garantiza la validez del razonamiento.

Algunas reglas de derivación

1. Simplificación : $(p \wedge q) \Rightarrow p$, $(p \wedge q) \Rightarrow q$
2. Adición : $p \Rightarrow p \vee q$
3. Modus Ponens: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
4. Modus Tollens : $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p$
5. Silogismo hipotético: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow r)] \Rightarrow (p\Rightarrow r)$
6. Silogismo disyuntivo: $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$

¿Cómo analizo la validez de un razonamiento?

Se puede hacer de distintas formas:

1. Usando tablas de verdad
2. Método directo
3. Método por contradicción

Veamos a cada método.

1. Uso de tablas de verdad.

Este método fue explicado previamente. Para demostrar la validez de un razonamiento debe obtenerse una implicación tautológica.

2. Método directo.

En $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \Rightarrow Q$ donde p_1, p_2, …, p_n son la premisas (proposiciones compuestas o no) hay que analizar el valor de verdad de la proposiciones simples y ver si se verifica que Q es verdadera.
Para eso se recurre a las leyes tautologías, reglas de inferencia, equivalencias lógicas, etc. El camino no es único. Depende de cada persona, pero el razonamiento es válido o no lo es. Es independiente del camino y herramientas utilizadas para lograrlo.

Ejemplo

Si bailo o hago gimnasia, entonces estaré delgada. Si estoy delgada podré intervenir en el concurso. Por consiguiente, si no puedo intervenir en el concurso entonces no hago gimnasia.
Veremos la validez usando el método directo.

La siguiente es sólo una de las formas. ¡Es bueno que cada cual intente otra!

p= Bailo
q= Hago gimnasia
r= Estoy delgada
s= Intervenir en el concurso

En lenguaje simbólico lo expresamos $[(p \vee q) \Rightarrow r] \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim q)$

$[(p \vee q) \Rightarrow r] \wedge (r \Rightarrow s)]$, por silogismo hipotético, queda $(p \vee q) \Rightarrow s$.
De donde el enunciado se reduce a $[(p \vee q) \Rightarrow s] \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim q)$
Al mismo tiempo $[(p \vee q) \Rightarrow s]$ es equivalente a $[\sim s \Rightarrow \sim (p \vee q)]$

Si se tiene en cuenta la ley de De Morgan $\sim (p \vee q)$ queda $\sim p \wedge \sim q$.

Resulta $[\sim s \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)]$

Por lo tanto queda $[\sim s \Rightarrow \sim (p \vee q)] \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim q)$

Usando el resultado anterior se obtiene

$[\sim s \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim q)$
Como $[\sim s \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)]$ es equivalente a:
$(\sim s \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim s \Rightarrow \sim q)$ queda
$[(\sim s \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim s \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim q)$

Con lo cual el razonamiento es válido

3. Método indirecto o por contradicción

Suponiendo que la conclusión es falsa se trata de llegar a una contradicción en la hipótesis (se debe llegar a que es **falsa** y ahí está la contradicción buscada).

Lo haremos sobre el mismo ejemplo, que en forma simbólica es:
$[(p \vee q) \Rightarrow r] \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim q)$

Suponemos falsa $(\sim s \Rightarrow \sim q)$ que es lo mismo que decir que $(q \Rightarrow s)$ es falsa ya que son equivalentes.
En ese caso q es verdadera y s es falsa.

La hipótesis, como en el caso anterior se puede escribir
$[(p \vee q) \Rightarrow s]$

Como $V(q) = V$ y $V(s) = F$, queda ver el valor de verdad de $[(p \vee V) \Rightarrow F]$. Independientemente del valor de verdad de p, la proposición $(p \vee V)$ va a ser verdadera.

Por lo tanto queda $V (V \Rightarrow F) = F$.

Llegamos a un absurdo porque la hipótesis es verdadera.

Luego el razonamiento es válido

LÓGICA DE PRIMER ORDEN. PREDICADO O FUNCIÓN PROPOSICIONAL

La lógica proposicional, también llamada de orden cero, representa hechos acerca del mundo. La lógica de primer orden 1 ó más, de predicados consta de objetos y de las propiedades de esos objetos.
Se indica p(x), p(x;y), p(x;y;z), según el número de variables involucradas.

Comencemos analizando el siguiente enunciado:

x es un número impar

No podemos decir que es una proposición porque para que sea verdadera o falsa depende del valor que le asignemos a x.
Tenemos una expresión de la forma $p(x)$, en nuestro caso, $p(x)$: **x es un número impar.** Esta expresión será cierta para todos los números enteros impares y falsa para todos los pares.
Tengamos en cuenta que para asignarle un valor de verdad necesitamos recurrir a los elementos de un conjunto, en particular, en este caso, al de los números enteros.
Podemos, entonces, concluir en la siguiente definición

> Sea A un conjunto no vacío, llamamos predicado o función proposicional con dominio en A a toda expresión $p(x)$ tal que para cualquier elemento **a** del conjunto A se verifica que $p(a)$ es proposición.

e Por ejemplo:

Sea $A = N$ (números naturales)
$p(x)$: "$x > 3$"

Si $x = 1$ entonces $p(1)$: "$1 > 3$" entonces el valor de verdad de la proposición $p(1)$ es falso.
Si $x = 9$ entonces $p(9)$: "$9 > 3$" entonces el valor de verdad de la proposición $p(9)$ es verdadero.

Digamos ahora:

Todos los números naturales son impares.

Podemos dar un valor de verdad: el enunciado es falso y por lo tanto es una proposición. Ahora bien, ¿cómo convencemos a alguien de que esa afirmación es falsa?; debemos mostrar un caso, por lo menos uno, que asevere que realmente el enunciado es falso. Elegimos, por ejemplo,

el número 4 es par y solucionamos nuestro problema.

La situación que planteamos podemos escribirla utilizando los siguientes símbolos: $\forall$ y $\exists$, que se llaman **cuantificadores**. Debemos tener en cuenta que algunas veces para dar una proposición podemos usar cuantificadores.

- El **cuantificador universal** ($\forall$), significa para todo (es decir cualquiera).

  Si $p(x)$ es verdadera para todo x en A entonces decimos que $\forall x: p(x)$ es verdadera.
- **El cuantificador existencial** ($\exists$), significa que existe al menos un ...

  Así $\exists\, x \in A$ se lee "existe al menos un x en A".

Entonces, para el enunciado **"Todos los números naturales son impares"**

Se denota $\forall x \in N$: **x es impar**, su negación es la siguiente:

$\sim[\forall x \in N: x$ es impar$] \Leftrightarrow \exists\, x \in N: x$ no es impar]

Veamos otro ejemplo que resolveremos juntos. Para ello te pedimos que completes los puntos suspensivos.

Supongamos que María dice: "Todos los alumnos de este curso aprobaron el parcial"
Y Hernán le responde: "Eso no es verdad. Aquí hay un alumno que no aprobó"

¿Es suficiente la justificación que da Hernán? ....
....

En otra ocasión, María dice: "Algún alumno de este curso aprobó el parcial" y nuevamente Hernán está en desacuerdo.

¿Qué debería hacer ahora para justificar su posición?..
....

¿Podemos dar al siguiente resultado?

$$\sim[\forall\, x : p(x)] \equiv \exists\, x : \sim p(x) \qquad \sim[\exists\, x : p(x)] \equiv \forall\, x : \sim p(x)$$

Otro caso:
Supongamos que queremos expresar simbólicamente el siguiente enunciado:
"Para todo número entero existe otro número entero que lo divide". Vemos que hay dos variables: el número entero que es dividido y el que divide; podríamos escribirlo así:

$\forall x: \exists y: x|y$

Podemos preguntarnos, ¿será lo mismo escribir $\exists y: \forall x: x|y$?; en realidad, nos estamos haciendo la siguiente pregunta: ¿es lo mismo $\forall x : \exists y : p(x;y)$ que $\exists y : \forall x : p(x;y)$?

Analicemos algunos otros casos: en el conjunto de los números enteros sabemos que el número 0 es neutro para la suma. ¿Cómo puede escribirse que el neutro para la suma es el 0 usando los cuantificadores? Veamos las siguientes formas

1. $\exists\, 0 \in Z,\ \forall z \in Z: 0+z = z+0 = z$
2. $\forall z \in Z, \exists\, 0 \in Z:\ 0+z = z+0 = z$

La correcta es la 1, donde decimos que existe el 0 y que es el elemento neutro para la suma.
En la 2 estamos diciendo que cada entero tiene su neutro y nosotros sabemos que el neutro es único y es el 0.

Veamos otro ejemplo[©] a partir de las mismas expresiones:

Supongamos que x son las mujeres solteras, y son los varones solteros y la propiedad p(x;y) significa que x e y son novios. La primera proposición dice que para todas las mujeres solteras x existe un varón y, que es el novio. La segunda proposición, en cambio, dice que existe un varón y, tal que todas las mujeres x del mundo son sus novias. Son afirmaciones muy diferentes, ¿no?

Por lo tanto **los cuantificadores no conmutan**

Algunas actividades para repasar:

Consideremos el siguiente enunciado

p (x): x es un número par

¿Es una proposición lógica? ☐ SI ☐ NO ¿Por qué?
....

A este tipo de enunciados se los llama ....

Son enunciados con variables que pueden convertirse en proposiciones lógicas de las siguientes formas:

1) Asignando valores a las variables (ejemplo: 3 es un número par)

2) Cuantificándolas (ejemplo: todos los números son pares)

Ejemplos:

Sean: P(x): "x es múltiplo de 5" Q(x): "x es par" R(x): "x es impar"

$A = \{10, 15, 20\}$ $B = \{3, 6, 9, 12\}$

- Para decir que todos los elementos del conjunto A son múltiplos de 5 escribimos:
  $\forall\, x \in A : P(x)$

[©] Este ejemplo es un aporte de la Profesora Ana María Gómez

- Para decir que algunos elementos del conjunto B son pares escribimos: $\exists\ x \in B : Q(x)$
- Para decir que algunos elementos del conjunto A son pares y múltiplos de 5 escribimos: $x \in A : [\ P(x) \wedge Q(x)\ ]$

¿Existen elementos de B que sean impares y múltiplos de 5? .... ¿Cómo se escriben?

....

¿Es cierto que todos los múltiplos de 5 son impares? .... ¿Cómo se escriben?

....

Analiza el valor de verdad de las siguientes proposiciones con cuantificadores:

1. $\exists\ x \in Z: x \cdot 2 = 7$
2. $\forall\ x \in P : x^2 > -1$
3. $\forall\ x \in Z : \exists\ y \in Z :\ x + y = 5$
4. $\exists\ x \in P: \forall\ y \in P :\ x \cdot y = y$

Recordemos cómo negar los cuantificadores:

$\sim[\ \forall\ x: p(x)\ ] \Leftrightarrow [\ \exists\ x: \sim p(x)\ ]$
$\sim[\ \exists\ x: p(x)\ ] \Leftrightarrow [\ \forall\ x: \sim p(x)\ ]$

Niega cada una de las siguientes proposiciones:

p: $\forall\ x \in P:\ x^2 > 0$ **~ p:** ....

q: $\exists\ x \in Z : (\ x + 3 = 8\ \wedge\ x > 4\ )$ **~ q:** ....

r: $\exists\ x \in P: \forall\ y \in R : x \bullet y = y$ **~ r:** ....

s: $\forall\ x \in P: (\ x > 0 \Rightarrow\ x + 2 > 3\ )$ **~ s:** ....

Consideremos ahora los siguientes predicados definidos en el conjunto de los números naturales.

$p(x;y) : \forall x\ \forall y: x \geq y$

$q(x;y) : \forall x\ \exists y: x \geq y$

$r(x;y) : \exists x\ \forall y: x \geq y$

$t(x;y) : \exists x\ \exists y: x \geq y$

En cada caso la variable x y la variable y están afectadas por un cuantificador, universal o existencial; diremos entonces que son **variables acotadas**.

Si tuviéramos $p(x) : x-2 < 3$, la variable x no está afectada por un cuantificador; decimos que la variable no cuantificada es una **variable libre**.

Es decir que en el predicado $p(x)$ a la variable x la llamamos variable libre y en $\forall\ x$: $p(x)$, x es variable acotada.

¿Cómo analizamos el valor de verdad de una proposición dada por cuantificación con más de una variable?

Veamos el valor de verdad de $p(x;y) : \forall x: \forall y: x \geq y$ en el conjunto de los números reales. Consideremos primero $\forall y: x \geq y$, como la x no está cuantificada es una variable libre y la y es la variable acotada, sea $x = 5$ y en el enunciado original queda $\forall y: 5 \geq$ y que es falso para, por ejemplo $y = 8$. Por lo tanto $V(p(x;y))$ es falso.
Veamos ahora qué pasa con el valor de verdad de $t(x;y) : \exists x: \exists y: x \geq y$.
Si actuamos de la misma manera queda $\exists y: x \geq y$, donde x es libre e y está acotada, que es verdadera ya que podemos elegir siempre un x que sea mayor o igual que el y propuesto.

Algunas cuestiones importantes para trabajar con cuantificadores

$\exists x[p(x) \wedge q(x)]$	$\Rightarrow$	$[\exists p(x) \wedge \exists q(x)]$
$\exists x[p(x) \vee q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$[\exists p(x) \vee \exists q(x)]$
$\forall x[p(x) \wedge q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$[\forall p(x) \wedge \forall q(x)]$
$\forall x[p(x) \vee q(x)]$	$\Rightarrow$	$[\forall p(x) \vee \forall q(x)]$
$\forall x \neg[p(x) \vee q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$\forall (x)[\neg p(x) \wedge \neg q(x)]$
$\forall x \neg[p(x) \wedge q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$\forall x[\neg p(x) \vee \neg q(x)]$

¿Cómo negamos?

Proposición	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x : p(x)$	Para , al menos, un *a* del universo, p(*a*) es verdadera	Para cada *a* del universo, p(*a*) es falsa
$\forall x : p(x)$	Para cada reemplazo de *a* del universo, p(*a*) es verdadera	Existe , al menos, un reemplazo de *a* para el que p(*a*) es falsa
$\exists x : \neg p(x)$	Para , al menos, una elección de *a* del universo, p(*a*) es falso, de modo que la negación , ¬p(*a*), es verdadera	Para cada *a* del universo, p(*a*) es verdadera
$\forall x : \neg p(x)$	Para cada reemplazo de *a* del universo, p(*a*) es falsa, de modo que la negación , ¬p(*a*), es verdadera	Existe , al menos, un reemplazo de *a* para el que ¬p(*a*) es falsa y p(*a*) es verdadera

Antes de finalizar este punto, recordemos que:

- Decimos que dos proposiciones son lógicamente equivalentes siempre que dados cualesquiera valores de verdad, ambos son V o F. Se pueden demostrar usando las tablas de verdad.

- Sea A un conjunto no vacío, llamamos predicado o función proposicional con dominio en A a toda expresión p(x) tal que para cualquier elemento a del conjunto A se verifica que p(a) es proposición.

- En algunos casos, para dar una proposición podemos usar cuantificadores (universal *o* existencial); pero es importante recordar que los cuantificadores **no** conmutan.

- Cuando las variables x e y están afectadas por un cuantificador, se trata de variables acotadas; cuando una de las variables **no** está afectada por un cuantificador se denomina variable libre.

Hasta aquí nuestro repaso de las nociones de lógica que aplicaremos en las próximas unidades.