ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

NOTAS DE CURSO

Ana María Suardíaz y Julio A. Sewald

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA –UNS

2008

A Bibí Maccari, Laura Rueda y Sonia Savini, cuyos pertinentes comentarios permitieron las sucesivas mejoras de estas notas, ¡ gracias !

Índice General

1 Números Complejos

Es sabido que los números reales no son suficientes para resolver cualquier ecuación cuadrática con coeficientes reales. Como $a^2 \neq -1$; para todo $a \in \mathbb{R}$, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ carece de soluciones reales. El problema que se plantea es el de ampliar el sistema de los números reales de manera que la ecuación anterior tenga solución.
Utilizaremos para su construcción pares ordenados de números reales, por lo que el nuevo sistema numérico se representará por todos los puntos del Plano.

1.1 Forma binómica. Operaciones. Módulo y conjugado

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales y $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, donde $(a,b) = (a',b')$ si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$.
Definimos en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones:

1. **Suma:** Dados (a,b) y $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) + (c,d) = (a+c\ ,\ b+d)$.
2. **Producto:** Dados (a,b) y $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \cdot (c,d) = (a\,c - b\,d\ ,\ a\,d + b\,c)$.

El conjunto $\mathbb{R}^2$, algebrizado con las operaciones de suma y producto definidas anteriormente, se lo nota habitualmente $\mathbb{C}$ y recibe el nombre de conjunto de los números complejos.

Teniendo en cuenta las propiedades de la suma y el producto de números reales se prueba que $\mathbb{C}$ **es un cuerpo conmutativo**, pues se verifican las siguientes propiedades:

(S_1) $(z+u)+w = z+(u+w)$, para todo $z, u, w \in \mathbb{C}$.

(S_2) $z+w = w+z$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(S_3) Existe un único elemento $\mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{C}$, tal que $z + \mathbf{0} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(S_4) Para cada $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, existe un único elemento $-z = (-a,-b)$ tal que $z + (-z) = \mathbf{0}$.

(P_1) $(z \cdot u) \cdot w = z \cdot (u \cdot w)$, para todo $z, u, w \in \mathbb{C}$.

(P_2) $z \cdot w = w \cdot z$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(P_3) Existe un único elemento $\mathbf{1} = (1,0) \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot \mathbf{1} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(P_4) Para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe un único elemento $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\ ,\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} \right)$ tal que $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.

(D) $z \cdot (u+w) = z \cdot u + z \cdot w$, para todo $z, u, w \in \mathbb{C}$.

Cuando no haya lugar a dudas escribiremos $z\,w$ en lugar de $z \cdot w$.

Definimos la diferencia y el cociente de dos números complejos z y w de manera análoga al caso real: $z - w = z + (-w)$ y $\dfrac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$, $w \neq 0$. Es claro que $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$.

Sea $\mathbb{R}' = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ definida por $f(a) = (a, 0)$; para todo $a \in \mathbb{R}$. f es una función biyectiva y además verifica que $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$ y $f(a\,b) = (a\,b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$; para todo $a, b \in \mathbb{R}$, es decir, preserva las operaciones de suma y producto. Esto significa que los complejos de la forma $(a, 0)$ se comportan, respecto de las operaciones de suma y producto, como los números reales a. Esto permite identificar el complejo $(a, 0)$ con el número real a y podemos escribir $(a, 0) = a$.
Por lo tanto $\mathbb{C}$ contiene un subconjunto que se comporta como $\mathbb{R}$.

Veamos que $\mathbb{C}$, **contiene una solución de la ecuación** $x^2 + 1 = 0$.

Observemos que $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, y consideremos $x = (0, 1)$.

Entonces $x^2 + 1 = (0, 1) \cdot (0, 1) + (1, 0) = (-1, 0) + (1, 0) = (0, 0) = 0$.

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.

1. a se denomina la **parte real** y b la **parte imaginaria** de z. Los notamos $Re(z)$ e $Im(z)$, respectivamente.

2. Si $b = 0$, $(a, 0)$ se denomina un **complejo real**.
   Si $a = 0$ y $b \neq 0$, $(0, b)$ se denomina un complejo **imaginario puro**.

3. El complejo $i = (0, 1)$ se denomina **unidad imaginaria** y verifica $i^2 = -1$.
   Además $b\,i = (b, 0) \cdot (0, 1) = i\,b$ y $1\,i = (1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1) = i$.

Observaciones

1. Si z , $w \in \mathbb{C}$, entonces $z = w$ si, y sólo si $Re(z) = Re(w)$ e $Im(z) = Im(w)$.

2. Recordemos que cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

   (E_1) Se verifica una y sólo una de las siguientes condiciones:
   i) $a = b$ ii) $a < b$ iii) $b < a$

   (E_2) $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.

   (E_3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

   (E_4) $a < b$ y $0 < c \Rightarrow a\,c < b\,c$.

   Veamos que en $\mathbb{C}$ no se puede definir una relación $<$ que verifique las mismas propiedades. Si así fuese, como $i \neq 0$, debería ser $0 < i$ ó $i < 0$. Supongamos que $0 < i$. Entonces por (E_4), $0 \cdot i < i \cdot i$, o sea, $0 < i^2 = -1$, una contradicción. Análogamente se razona si suponemos que $i < 0$.

Forma binómica

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Como $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b\,i$ entonces $z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b\,i$, que se denomina **forma binómica** de z.
En lo que sigue escribiremos:

$z = 0$, en lugar de $z = 0 + 0\,i$.

$z = a$, en lugar de $z = a + 0\,i$.

$z = b\,i$, en lugar de $z = 0 + b\,i$.

La forma binómica permite aplicar las mismas propiedades que en el campo real para obtener la suma y el producto, operando como si i fuese real pero teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

En efecto:

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i$$
$$(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c)\,i$$

Ejemplo

Si $z = 3 + 5\,i$ y $z' = 2 - i$, entonces

a) $z + z' = (3 + 5\,i) + (2 - i) = 5 + 4\,i$.

b) $z - z' = (3 + 5\,i) - (2 - i) = 1 + 6\,i$.

c) $z \cdot z' = (3 + 5\,i) \cdot (2 - i) = 11 + 7\,i$.

Conjugado de un número complejo

Definición 1.1.1 *Dado el número complejo* $z = a + b\,i$, *llamaremos* **conjugado** *de* z *al número complejo* $\overline{z} = a - b\,i$.

Ejemplo

Si $z = 1 + i$, entonces $\overline{z} = 1 - i$.
Si $z = 3$, entonces $\overline{z} = 3$.
Si $z = -3\,i$, entonces $\overline{z} = 3\,i$.

Propiedades del conjugado

Sea $z = a + b\,i$. Entonces:

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$
3) $z - \overline{z} = 2\,i\,Im(z)$
4) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
5) $z = \overline{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0$
6) $\overline{z} = -z \Leftrightarrow Re(z) = 0$
7) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
8) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
9) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
10) Si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

Valor absoluto de un número real

Sea $x \in \mathbb{R}$. El valor absoluto de x (lo notamos $|x|$) se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

1) $|x| \geq 0$. Además, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $|-x| = |x|$.

3) Si $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$, entonces $|x| \leq d \quad \Leftrightarrow \quad -d \leq x \leq d$.

4) Si $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$, entonces $|x| \geq d \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -d$ ó $x \geq d$.

5) $-|x| \leq x \leq |x|$.

6) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

7) $|x - y| \geq | \, |x| - |y| \, |$.

8) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

9) $\left| \dfrac{x}{y} \right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

10) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Módulo de un número complejo

Definición 1.1.2 *Dado* $z = a + b\,i$, *se llama* **módulo** *de* z *al número real no negativo* $\sqrt{a^2 + b^2}$. *Notaremos* $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo

$\|2 + 3\,i\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; $\|-2 - i\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Observación

Si $z = a + 0\,i$, entonces $\|z\| = \sqrt{a^2} = |a|$, por lo que la noción de módulo generaliza la de valor absoluto.

Propiedades del módulo

1) $\|z\| \geq 0$. Además, $\|z\| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$.

2) $\|z\| = \|\overline{z}\| = \|-z\|$.

3) $z \cdot \overline{z} = \|z\|^2$.

4) $|Re(z)| \leq \|z\|$, $|Im(z)| \leq \|z\|$.

5) $\|z \cdot w\| = \|z\| \cdot \|w\|$.

6) Si $w \neq 0$, $\left\|\dfrac{z}{w}\right\| = \dfrac{\|z\|}{\|w\|}$.

7) $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$.

8) $|\|z\| - \|w\|| \leq \|z - w\|$.

Cociente de números complejos en forma binómica

Recordemos que para $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, $\dfrac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$. Entonces, si $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$, para hallar el cociente se puede proceder de la siguiente manera:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{1}{\|w\|^2}\, z \cdot \overline{w} = \frac{(a + b\,i)(c - d\,i)}{(c + d\,i)(c - d\,i)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

Ejemplo

$$\frac{3 + i}{2 - 5\,i} = \frac{(3 + i) \cdot (2 + 5\,i)}{(2 - 5\,i) \cdot (2 + 5\,i)} = \frac{1 + 17\,i}{29} = \frac{1}{29} + \frac{17}{29}\,i.$$

1.2 Representación geométrica de los números complejos

Teniendo en cuenta que los números complejos se han definido como pares ordenados de números reales, es natural representarlos en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales.

Sabemos que todo punto $P(a, b)$ del Plano está determinado por dos números reales a y b que son, respectivamente, la abscisa y la ordenada de P. Entonces a cada número complejo $z = (a, b)$ (ó $z = a + b\,i$), le corresponde un punto en el Plano de abscisa a y ordenada b, y recíprocamente, al punto $P(a, b)$ del Plano le corresponde el número complejo $z = a + b\,i$, de parte real a y de parte imaginaria b. El punto P correspondiente al número complejo z se llama **afijo** de z.

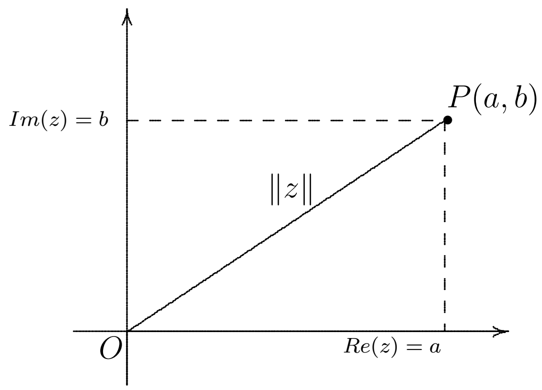


Figura 1

Teniendo en cuenta que $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, el módulo de z es la longitud del segmento $\overline{OP}$.
Si z es un complejo real, entonces su afijo está sobre el eje de abscisas, que por esta razón se

llama **eje real**. Si z es imaginario puro, entonces su afijo está sobre el eje de las ordenadas, que recibe el nombre de **eje imaginario**. El Plano cuyos puntos se identifican con números complejos se denomina **Plano complejo**.

Ejemplo

Representar el complejo $z = 2 + i$.

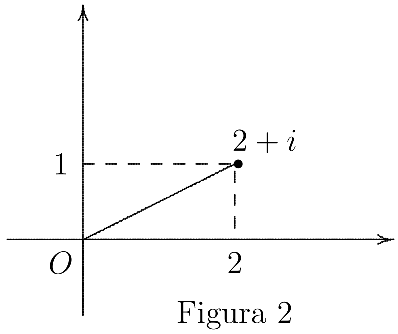


Figura 2

1.3 Forma polar. Operaciones. Potencia y radicación

Vimos que el complejo $z = a + b\,i$ queda determinado por su parte real y su parte imaginaria, es decir por la coordenadas de su afijo en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. También z queda determinado por sus coordenadas polares, es decir por la longitud $\rho = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ del segmento $\overline{OP}$ y la medida radial θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ del ángulo determinado por el semieje real positivo y la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ y considerando como sentido positivo de giro, el antihorario.

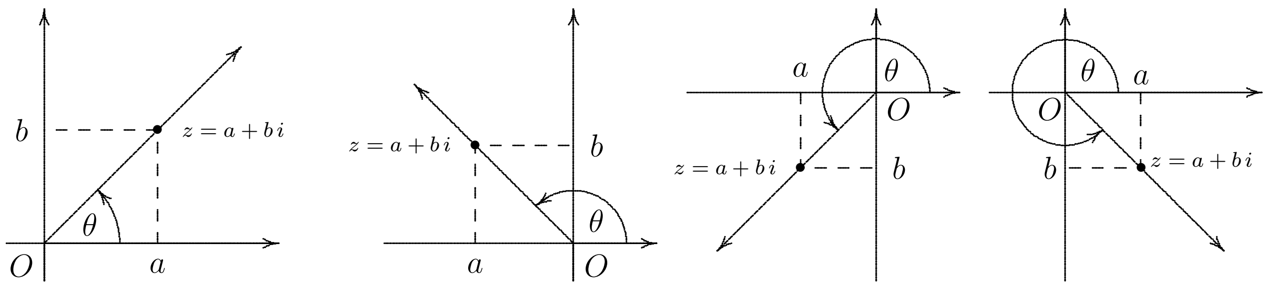


Figura 3

θ se denomina el **argumento principal** de z y se nota $\theta = Arg(z)$.

Observación
Si $z = 0$, entonces $Arg(z)$ no está definido y z queda caracterizado por su módulo.

Forma polar o trigonométrica de un número complejo

Sea $z = a + b\,i$, $z \neq 0$. Se tienen entonces las siguientes relaciones (Ver Figura 3):

$$\begin{cases} a = \rho\, cos\,\theta \\ b = \rho\, sen\,\theta \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{b}{a}\ , \ a \neq 0 \end{cases}$$

Entonces $z = a + b\,i = \rho(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)$, denominada la **forma polar** de z.
Si $\alpha = \theta + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\rho(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha) = \rho\,[cos(\theta + 2\,k\,\pi) + i\,sen(\theta + 2\,k\,\pi)] = \rho(cos\,\theta + i\,sen\,\theta) = z$. Es decir el complejo z queda determinado por su módulo y por cualquier número real que difiere de θ en un múltiplo entero de $2\,\pi$.
Todo elemento del conjunto $\{\theta + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ se denomina un **argumento** de z y se nota $arg(z)$. Entonces

$$arg(z) = Arg(z) + 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si $\alpha = arg(z)$, entonces abreviamos $z = \|z\|_{\alpha} = \rho_{\alpha}$.

Además si $z = \rho_{\theta}$ y $z' = \rho'_{\alpha}$, entonces $z = w$ si, y sólo si $\rho = \rho'$ y $\alpha = \theta + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos

a) Hallemos la forma polar de $z = \sqrt{3} + i$.
$\|z\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$.
Si θ es el argumento principal de z, entonces $tg\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, luego $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ó $\theta = \dfrac{\pi}{6} + \pi$.
Como z pertenece al primer cuadrante, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Por lo tanto, $z = 2_{\frac{\pi}{6}}$.

b) Si $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$, entonces $z = 2(cos\,\dfrac{\pi}{3} + i\,sen\,\dfrac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}\,i$. Por lo tanto la forma binómica de z es $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

Producto de números complejos en forma polar

Proposición 1.3.1 *Si* $z = \rho_{\theta}$ *y* $w = \rho'_{\Psi}$, *entonces* $z \cdot w = (\rho.\rho')_{\theta+\Psi}$.

Dem. $z \cdot w = (\rho_{\theta}) \cdot (\rho'_{\Psi}) = [\rho(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)] \cdot [\rho'(cos\,\Psi + i\,sen\,\Psi)] = \rho.\rho'[cos\,\theta\,cos\,\Psi - sen\,\theta\,sen\,\Psi] + i[cos\,\theta\,sen\,\Psi + sen\,\theta\,cos\,\Psi] = \rho.\rho'[cos(\theta + \Psi) + i\,sen(\theta + \Psi)] = (\rho.\rho')_{\theta+\Psi}$. □

Luego, el producto de dos números complejos expresados en forma polar es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y uno de sus argumentos es la suma de los argumentos de los complejos dados. Es decir

$$arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$$

Observación
$\theta + \Psi$ no necesariamente es el argumento principal de $z \cdot w$.

Ejemplo
Si $z = 2_{\frac{\pi}{6}}$ y $w = 3_{\frac{\pi}{4}}$, entonces $z \cdot w = 6_{(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = 6_{\frac{5}{12}\pi}$.

Cociente de números complejos en forma polar

Proposición 1.3.2 *Si* $z = \rho_\theta$ *y* $w = \rho'_\Psi$ *, entonces* $\dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\Psi}$.

Dem. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho_\theta}{\rho'_\Psi} = \dfrac{\rho(\cos\theta + i\,sen\,\theta)}{\rho'(\cos\Psi + i\,sen\,\Psi)} = \dfrac{\rho}{\rho'}\left[\dfrac{(\cos\theta + i\,sen\,\theta)(\cos\Psi - i\,sen\,\Psi)}{(\cos\Psi + i\,sen\,\Psi)(\cos\Psi - i\,sen\,\Psi)}\right] =$
$\dfrac{\rho}{\rho'}[(\cos\theta\cos\Psi + sen\,\theta sen\,\Psi) + i\,(sen\,\theta\cos\Psi - \cos\theta sen\,\Psi)] = \dfrac{\rho}{\rho'}[\cos(\theta-\Psi) + i\,sen\,(\theta-\Psi)] =$
$\left(\dfrac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\Psi}$. □

Luego el cociente de dos números complejos expresados en forma polar es un complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y uno de sus argumentos es la diferencia de los argumentos de los complejos dados. Es decir

$$arg\left(\frac{z}{w}\right) = arg(z) - arg(w)$$

Ejemplos

1. Si $z = 3_{\frac{\pi}{4}}$ y $w = 2_{\frac{\pi}{2}}$, entonces $\dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{-\frac{\pi}{4}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)_{\frac{7}{4}\pi}$.

2. Si $z = \rho_\theta$, entonces $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{\rho}\right)_{-\theta} = \left(\dfrac{1}{\rho}\right)_{2\pi-\theta}$.

Potencia de números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la potencia n-ésima de z por recurrencia como sigue:

$$\begin{cases} z^1 = z \\ z^{n+1} = z \cdot z^n \end{cases}$$

La definición anterior se extiende para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}, n \leq 0$ como sigue:

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ z^n = (z^{-n})^{-1} \end{cases}$$

Las propiedades de la potencia de exponente entero que valen para números reales, también valen en $\mathbb{C}$.

Ejemplos

1. **Potencias de** i

   $i^0 = 1$.
   $i^1 = i$.
   $i^2 = i \cdot i = -1$.

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$
$i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1.$

En general si $n \in \mathbb{N}$ y r es el resto de dividir n por 4, entonces $i^n = i^r$.

En efecto, como $n = 4q + r;\ 0 \leq r < 4,$ entonces $i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$.

2. $(1-i)^{-2} = \dfrac{1}{(1-i)^2} = \dfrac{1}{-2i} = -\dfrac{1}{2}\, i.$

Fórmula de De Moivre

La fórmula de De Moivre $(1667 - 1754)$ se usa para calcular la potencia entera de un complejo expresado en forma polar.
Teniendo en cuenta las propiedades del módulo y el argumento de un producto, y utilizando un proceso inductivo, se demuestra que si $n \in \mathbb{N}$ y $z = \rho_\theta$, entonces $z^n = (\rho^n)_{n\theta}$.
La fórmula anterior se verifica para $n = 0$.
Si $n \in \mathbb{Z},\ n < 0,$ entonces $z^n = (z^{-1})^{-n} = [(\rho^{-1})_{-\theta}]^{-n} = (\rho^n)_{n\theta}$.
Entonces

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\, sen\,(n\theta)], \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos

1. Calculemos $(-1-i)^{-78}$. Si $z = -1-i$, entonces $\|z\| = \sqrt{2}$ y $tg\,\theta = 1$, luego $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ó $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$. Como z pertenece al tercer cuadrante, $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$, luego $z = \sqrt{2}_{\frac{5}{4}\pi}$, y por la fórmula de De Moivre, $z^{78} = (\sqrt{2}^{78})_{78 \cdot \frac{5}{4}\pi} = (2^{39})_{39 \cdot \frac{5}{2}\pi}$.

   Como $39 \cdot \dfrac{5}{2} = \dfrac{195}{2}$, entonces se tiene que $195 = 2 \times 97 + 1$ por lo tanto $\dfrac{195}{2}\pi = 97\pi + \dfrac{1}{2}\pi = 48 \cdot 2\pi + \dfrac{3}{2}\pi$, luego $z^{78} = (2^{39})_{\frac{3}{2}\pi}$ y por consiguiente, $z^{-78} = \dfrac{1}{z^{78}} = \left(\dfrac{1}{2^{39}}\right)_{-\frac{3}{2}\pi} = (2^{-39})_{\frac{\pi}{2}} = 2^{-39} \cdot i.$

2. Calcular $(-\sqrt{3}+i)^{105}$.
   $z = -\sqrt{3} + i = (2)_{\frac{5}{6}\pi}$, luego $z^{105} = (2^{105})_{\frac{525}{6}\pi}$. Si deseamos hallar su argumento principal observamos que $\dfrac{525}{6}\pi = 87\pi + \dfrac{\pi}{2} = 86\pi + \pi + \dfrac{\pi}{2} = 86\pi + \dfrac{3}{2}\pi$, luego $z^{105} = (2^{105})_{\frac{3}{2}\pi} = -2^{105}\, i.$

Regiones del Plano complejo

Analicemos, a partir de algunos ejemplos, un par de problemas que se presentan al considerar subconjuntos de números complejos.

a) Hallar todos los complejos z que verifican una ó más condiciones, y graficar en el Plano complejo.

b) Dada una región del Plano complejo, hallar las condiciones mínimas que caracterizan a los complejos cuyos afijos pertenecen a la misma.

Ejemplos

1. Sea $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y $z_0 = x_0 + y_0\, i$. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ tal que $\|z - z_0\| < r$.

   Si $z = x + y\, i$, entonces $z - z_0 = (x - x_0) + (y - y_0)i$.
   Luego $\|z - z_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$. Luego los afijos de los complejos buscados pertenecen al interior del círculo de centro z_0 y radio r.

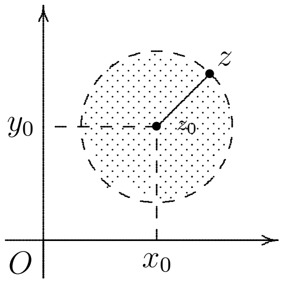


Figura 4

2. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $\|z - i\| \leq 1$ y $|Re(z)| \geq \frac{1}{2}$.

   Si $z = x + y\, i$, entonces $|Re(z)| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ ó $x \leq -\frac{1}{2}$. La condición $\|z - i\| \leq 1$ es un caso particular del Ejemplo 1, considerando $z_0 = i$ y $r = 1$. Luego los complejos que verifican ambas condiciones se hallan en la región indicada en la Figura 5.

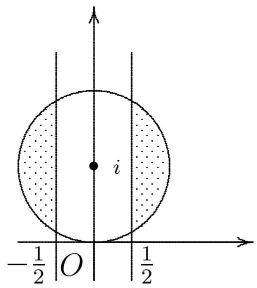


Figura 5

3. Hallar los complejos que verifican $\dfrac{\pi}{4} < arg(i\, z) \leq \dfrac{3}{4}\pi$ e $Im(z) \leq 1$.

   $arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$, en consecuencia $\dfrac{\pi}{4} < arg(i) + arg(z) \leq \dfrac{3}{4}\pi$.

Como $arg(i) = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z},$ analizando los distintos valores de k obtenemos que $-\dfrac{\pi}{4} < arg(z) \leq \dfrac{\pi}{4}$. Si $z = x + y\,i,$ entonces $Im(z) \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1.$

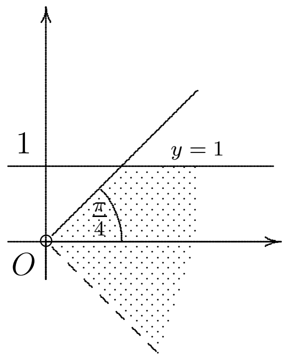
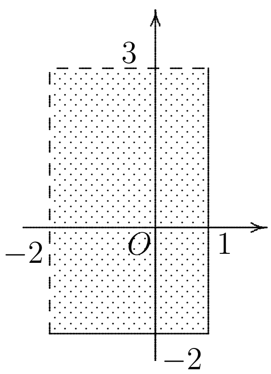
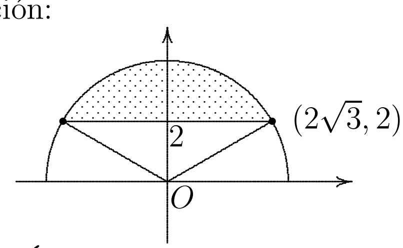


Figura 6

4. Caracterizar las regiones indicadas a continuación:



$$\begin{cases} -2 < Re(z) \leq 1 \\ -2 \leq Im(z) < 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \|z\| \leq 4 \\ Im(z) \geq 2 \end{cases}$$

Figura 7

Radicación de números complejos

Definición 1.3.1 *Sea* $z \in \mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. $w \in \mathbb{C}$ *se dice una* **raíz n-ésima** *de* z *si* $w^n = z$.

Si $n = 2$, w se dice una raíz cuadrada de z, si $n = 3$ una raíz cúbica, y así sucesivamente.

Ejemplos

1. Como $1^2 = (-1)^2 = 1$, entonces 1 y -1 son raíces cuadradas de 1.

2. Como $1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = 1$, entonces 1, -1, i y $-i$ son raíces cuartas de 1.

3. Si $w = x+y\,i$ es una raíz cuadrada de $3+4\,i$, entonces $w^2 = (x+y\,i)^2 = (x^2-y^2)+2\,x\,y\,i = 3 + 4\,i$. Por el criterio de igualdad de dos complejos en forma binómica se tiene que: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x\,y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2}{x}$. Reemplazando en la primera ecuación y operando se obtiene la ecuación bicuadrada $x^4 - 3\,x^2 - 4 = 0$. De la resolución de la misma resulta que $x = 2$ ó $x = -2$. Luego $y = 1$ ó $y = -1$ y entonces $w_0 = 2 + i$ ó $w_1 = -2 - i = -w_0$.

Cálculo de las raíces de un complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.
Si $z = 0$, la única raíz n-ésima de z es $w = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Si $z \neq 0$, entonces $z = \rho_\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Sea $w = \rho'_\alpha$ una raíz n-ésima de z. Como $w^n = z$, por De Moivre se tiene que $\rho'^n_{n\alpha} = \rho_\theta$. Entonces $\rho'^n = \rho$ y $n\alpha = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Concluimos que $\rho' = \sqrt[n]{\rho}$ y $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, obtenemos los argumentos $\dfrac{\theta}{n}$, $\dfrac{\theta + 2\pi}{n}$, ..., $\dfrac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$, los cuales no difieren, dos a dos, en un múltiplo entero de 2π.

Entonces $w_0 = (\sqrt[n]{\rho})_{\frac{\theta}{n}}$, $w_1 = (\sqrt[n]{\rho})_{\frac{\theta+2\pi}{n}}$, ..., $w_{n-1} = (\sqrt[n]{\rho})_{\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}}$ son n raíces n-ésimas distintas de z.

Si $k \neq 0, 1, \ldots, (n-1)$, como k y n son enteros, $k = qn + r$, con $0 \leq r < n$.

En consecuencia $\alpha = \dfrac{\theta + 2(qn + r)\pi}{n} = \dfrac{\theta + 2r\pi}{n} + 2q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$, $r = 0, 1, \ldots, (n-1)$.
Es decir, α difiere de alguno de los argumentos anteriores en un múltiplo entero de 2π.
Hemos probado que:

Teorema 1.3.1 *Todo complejo no nulo z posee exactamente n raíces n-ésimas distintas. Sus módulos son la raíz n-ésima aritmética del módulo de z y sus argumentos principales son* $\dfrac{\theta}{n}$, $\dfrac{\theta + 2\pi}{n}$, ..., $\dfrac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$.

Al conjunto de las raíces n-ésimas de z lo notamos $\sqrt[n]{((z))}$ y escribimos

$$\sqrt[n]{((z))} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]_{k=0,1,\ldots,(n-1)}$$

Ejemplos

1. Hallar las raíces cúbicas de $z = -1 + i$. De $z = -1 + i$ obtenemos que $\rho = \sqrt{2}$ y su argumento principal es $\dfrac{3}{4}\pi$, luego $z = (\sqrt{2})_{\frac{3}{4}\pi}$. Los elementos del conjunto $\sqrt[3]{((z))}$ son
$w_k = \left(\sqrt[6]{2}\right)_{\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$. Por lo tanto $w_0 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{\pi}{4}}$, $w_1 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{11}{12}\pi}$ y
$w_2 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{19}{12}\pi}$.

2. Hallar todos los valores de z que verifican $z^3 = \dfrac{3\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{2} + i}$.
Efectuando el cociente obtenemos que $z^3 = -3 = 3_\pi$. Luego los complejos buscados son

los elementos de $\sqrt[3]{((-3))} = \sqrt[3]{3}\left[cos\left(\frac{\pi + 2\,k\,\pi}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi + 2\,k\,\pi}{3}\right)\right]_{k=0,1,2}$.

Obtenemos $w_0 = (\sqrt[3]{3})_{\frac{\pi}{3}}$, $w_1 = (\sqrt[3]{3})_{\pi}$ y $w_2 = (\sqrt[3]{3})_{\frac{5}{3}\pi}$.

Representación geométrica de las raíces de un número complejo

Como todas las raíces n-ésimas de un complejo $z = \rho_\theta$ tienen módulo $\sqrt[n]{\rho}$, entonces sus afijos equidistan del origen de coordenadas, es decir se encuentran sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en el origen y radio $\sqrt[n]{\rho}$.

Como $Arg\,w_{j+1} - Arg\,w_j = \frac{2\,\pi}{n}$, el argumento principal de cada raíz se obtiene sumándole al argumento principal de la raíz anterior $\frac{2\,\pi}{n}$. Como $\frac{2\,\pi}{n}$ es la medida radial del ángulo central correspondiente a un arco obtenido al dividir la circunferencia en n arcos congruentes, entonces los afijos de las n raíces n-ésimas de z, $n \geq 3$, son los vértices de un polígono regular de n lados, inscripto en una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt[n]{\rho}$.

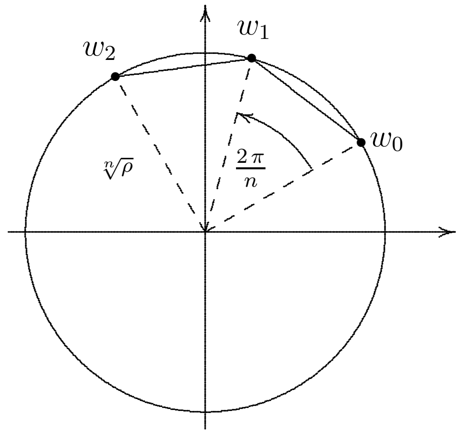


Figura 8

Ejemplo

Calculemos $\sqrt[4]{((-1 + \sqrt{3}\,i))}$. Como $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ se tiene que $z = 2_{\frac{2}{3}\pi}$, por lo tanto las raíces son:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{2}_{\frac{\pi}{6}} &&= \sqrt[4]{2}(cos\,\frac{\pi}{6} + i\,sen\,\frac{\pi}{6}) &&= \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i)\\
w_1 &= \sqrt[4]{2}_{\frac{2}{3}\pi} &&= \sqrt[4]{2}(cos\,\frac{2}{3}\pi + i\,sen\,\frac{2}{3}\pi) &&= \sqrt[4]{2}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)\\
w_2 &= \sqrt[4]{2}_{\frac{7}{6}\pi} &&= \sqrt[4]{2}(cos\,\frac{7}{6}\pi + i\,sen\,\frac{7}{6}\pi) &&= \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i)\\
w_3 &= \sqrt[4]{2}_{\frac{5}{3}\pi} &&= \sqrt[4]{2}(cos\,\frac{5}{3}\pi + i\,sen\,\frac{5}{3}\pi) &&= \sqrt[4]{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)
\end{aligned}
$$

Representemos en el plano complejo, las raíces halladas:

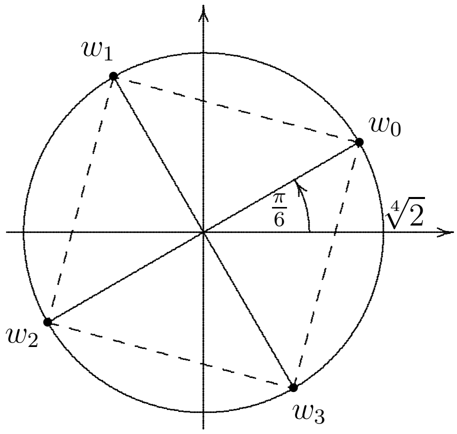


Figura 9

1.4 Ejercicios

1. a) Escribir en forma binómica los siguientes números complejos:

   $(0\,,\,\frac{1}{3})$, $\qquad(-\sqrt{2}\,,\,0)$, $\qquad(-3\,,\,2)$, $\qquad(0\,,\,0)$.

   b) Escribir como par ordenado a los siguientes números complejos:

   $-2+i$, $\qquad -4$, $\qquad -2\,i$, $\qquad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$

2. En cada uno de los siguientes casos hallar: $Re(z)$, $Im(z)$, $\|z\|$, $Re(z^{-1})$ e $Im(z^{-1})$.

   a) $z=(2+5\,i)+(3-i)+\frac{1}{2}\,i$ $\qquad$ b) $z=(3-5\,i)-(7-2\,i)+(1-3\,i)$

   c) $z=2\,i\cdot(\frac{1}{3}+7\,i)-(3+4\,i)$ $\qquad$ d) $z=(1+2\,i)+i\,(2+i)$

   e) $z=[(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)]^{-1}$ $\qquad$ f) $z=(1+i)\overline{(2+i)}$

   g) $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ $\qquad$ h) $z=\dfrac{1}{1-i}$

3. a) Hallar los módulos de los siguientes números complejos:

   $2 \qquad -2 \qquad i \qquad -i \qquad \sqrt{5}+2\,i \qquad \|1-i\|+i \qquad \|3+2\,i\|\cdot i$

   b) Hallar los conjugados de los siguientes números complejos:

   $0 \qquad 2 \qquad 2\,i \qquad \dfrac{1}{i} \qquad \overline{7+4\,i} \qquad \dfrac{4+i}{1-i}$

4. a) Dados $z=2-a\,i$ y $z'=3-b\,i$, hallar a y b de modo que $z\cdot z'=8+4\,i$.

   b) Hallar el valor de k de modo que $\dfrac{k+2\,i}{1-i}$ sea de módulo 2.

5. a) Hallar todos los $x\in\mathbb{R}$ y los correspondientes w sabiendo que $w=(x-i)(x+3-4\,i)$ es imaginario puro.

   b) Hallar a y $b\in\mathbb{R}$ tal que $\frac{5}{a}\,i+b\,i-2=3\,i-\frac{6}{a}+b.$

6. Hallar los complejos z tales que:

   a) $z\,(2+3\,i)$ es un complejo real.

   b) $\overline{z}\,(i-Im(z))=10\,i.$

   c) $z^2=\overline{z}.$

   d) $z^2+2=Re(z)\,z.$

   e) $z^2-2\,\overline{z}+1=0.$

   f) $Re(z)=\|z\|.$

7. Si $z=1+2\,i$ y $w=2+3\,i$, representar los siguientes números complejos:

   z , w, , $z+w$, $z-w$, $\overline{z}$, $z\cdot w$ y $4\,z$.

8. Hallar la forma binómica de:

   a) $z = 2_{\frac{\pi}{3}}$ b) $z = \frac{1}{2}(cos\,\frac{2}{3}\,\pi + i\,sen\,\frac{2}{3}\,\pi)$ c) $z = 1_{\frac{\pi}{4}}$

   d) $z = 2\,(cos\,\frac{7}{6}\,\pi + i\,sen\,\frac{7}{6}\,\pi)$ e) $z = \sqrt{3}_{-\frac{\pi}{2}}$

9. Hallar la forma polar de:

   a) $-1 + i$ b) $\frac{1}{2} - i\,sen\,\frac{\pi}{3}$ c) -17

   d) $(2 + 2\,i)^{-1}$ e) $-i$ f) $-3(cos\,\frac{3}{7}\,\pi + i\,sen\,\frac{3}{7}\,\pi)$

   g) $i^{15} - 1$ h) $\frac{1}{2}\,(cos\,\frac{11}{3}\pi - i\,sen\,\frac{13}{3}\,\pi)$ i) $sen\,\frac{\pi}{6} + i\,sen\,\frac{\pi}{3}$

10. Expresar en forma binómica los complejos:

    a) $i^{43} - i^{38}$ b) $\frac{i^{86}}{i^{165}}$

    c) $(1 + i)^{231}$ d) $(-3 - 3\,i)^{228}$

11. a) Calcular $\frac{(1+i)^{16}}{(1-i)^4}$, y expresar el resultado en forma binómica.

    b) Verificar que $(-1+i)^7 + \frac{2-i}{3+i} + (\frac{15}{2} + \frac{17}{2}\,i) = 0.$

12. a) Calcular el módulo y el argumento principal de $\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{20}$.

    b) Idem que a) para z^{23}, siendo $z = cos\,\frac{6}{7}\,\pi + i\,sen\,\frac{6}{7}\,\pi.$

    c) Mostrar que $\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{90} = -2^{45}\,i.$

13. Sea $z = cos\,\frac{\pi}{8} + i\,sen\,\frac{\pi}{8}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tal que $z^n = 1$. Idem para $z^n = -1$.

14. Hallar:

    a) Las raíces cuartas de 5.
    b) Las raíces quintas de -1.
    c) Las raíces cuadradas de a, con $a \in \mathbb{R}$.

d) Las raíces cúbicas de i.

15. Hallar los números complejos z que verifiquen:

a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^{16} z^3 - 8 - 28\,i^{21} = \left(\frac{3-2\,i}{-2+i}\right)5.$

b) $(2-i)z + (-1-i)^4 = 4\,i^{28} + \frac{1-3\,i}{1-i}z + z^3.$

c) $z^3 = \frac{1}{8}(-1+i)^{12}.$

d) $(1-i)^{10} + z^5 = 32 - 32\,i^{29}.$

e) $z^4 + i = 0.$

f) $(z+1)^3 = z^3.$

16. Representar en el Plano complejo la región determinada por los $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

a) $\|z - 2\,i\| \le 1$ y $|Re(z)| > \frac{1}{2}$.

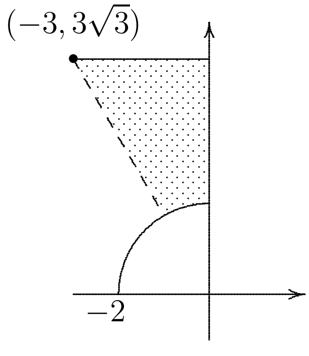
b) $4 < \|z\|^2 \le 9$ y $-\frac{\pi}{2} \le arg(z) \le \pi.$

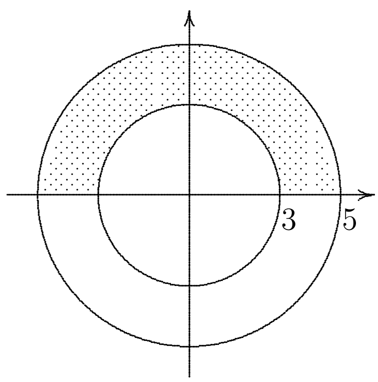
c) $Re(z^2 - i) \ge 0.$

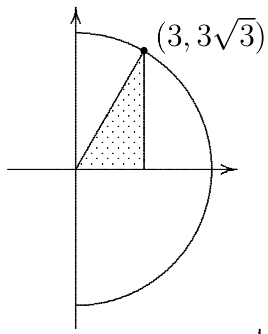
d) $4 \le 5\,\|z\|^2 - 1 \le 79$ y $Re(z) > 1.$

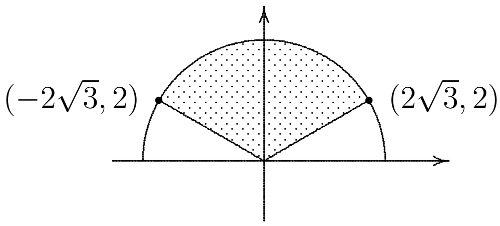
e) $\|z - 2\| \le 2$ y $Re(\overline{z} - i) \le 2.$

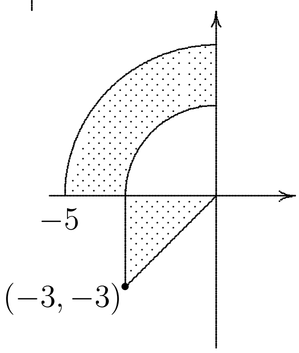
17. Caracterizar, por una o más condiciones, las siguientes regiones del plano complejo:

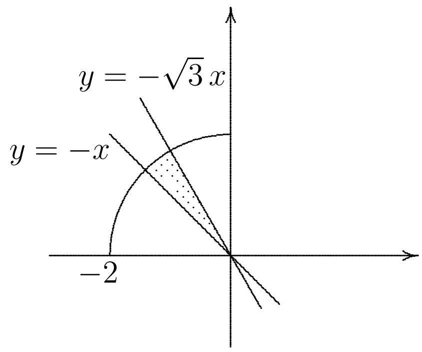


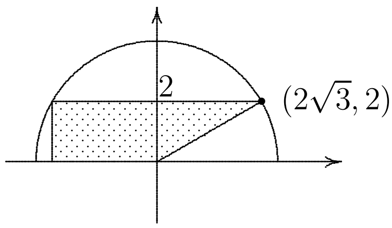


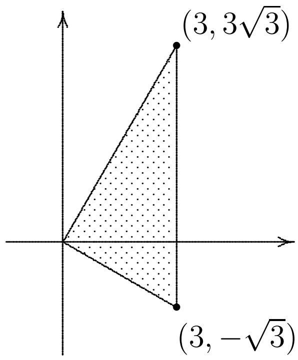

$(3, 3\sqrt{3})$

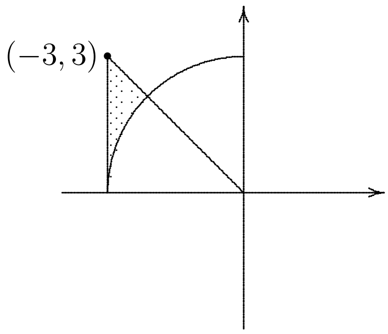

$(-2\sqrt{3}, 2)$
$(2\sqrt{3}, 2)$


-5
$(-3, -3)$


$y = -\sqrt{3}\,x$
$y = -x$
-2


2
$(2\sqrt{3}, 2)$


$(3, 3\sqrt{3})$
$(3, -\sqrt{3})$


$(-3, 3)$

2 Polinomios

2.1 Definición. Grado. Operaciones

La definición de polinomio no es sencilla de dar dentro de los niveles de este curso. Aquí adoptaremos la presentación del Dr. Enzo Gentile en su libro " Anillo de polinomios".
En esta sección, con $\mathbb{K}$ representamos al cuerpo de los números racionales, reales o complejos.

Definición 2.1.1 *Una* **sucesión** *de elementos de* $\mathbb{K}$ *es una función* $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{K}$.

Ejemplos

1. $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{K}, \quad f(n) = \dfrac{1}{n+1}$.
2. $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{K}, \quad f(n) = n^2 + 1$.

Una sucesión queda determinada por los valores $a_0 = f(0),\ a_1 = f(1),\ a_2 = f(2), \ldots,$
$a_n = f(n), \ldots$. Por lo tanto, dar una sucesión $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{K}$ es equivalente a dar ordenadamente los números $a_0 = f(0),\ a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \ldots, a_n = f(n), \ldots$.
Se escribe entonces $a = (a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.
Así por ejemplo dar la sucesión $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{K}, \quad f(n) = \dfrac{1}{n+1}$ es equivalente a dar la expresión $\left(1,\ \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n+1}, \ldots\right)$.
Los números a_i de la sucesión $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ se llaman los **coeficientes** de la sucesión.

Definición 2.1.2 *Sean* $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *y* $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$. *Diremos que* a *es igual a* b *y notaremos* $a = b$ *si, y sólo si* $a_i = b_i$ *para todo* $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observación

La sucesión $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ y $b = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ son iguales si, y sólo si $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Vamos a considerar ahora sólamente aquellas sucesiones tales que sus coeficientes son cero desde un índice en adelante. La notación utilizada para designar el siguiente conjunto se verá justificada más adelante.
Sea $\mathbb{K}[X] = \{a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), a_i \in \mathbb{K} :\ \text{existe}\ m \in \mathbb{N}\ \text{tal que}\ a_i = 0\ \text{si}\ i > m\}$.

Ejemplo
Son elementos de $\mathbb{K}[X]$

1. $a = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$; $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
2. $a = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$; $a_0 = 1,\ a_i = 0$ si $i > 1$.
3. $a = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$; $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_i = 0$ si $i > 2$.

Algebricemos a $\mathbb{K}[X]$.

Definición 2.1.3 *Sean* $a,\ b \in \mathbb{K}[X],\ a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *y* $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$. $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$. *Esto es,* $a + b$ *es la sucesión cuyo coeficiente i-ésimo es* $(a + b)_i = a_i + b_i$.

Observaciones

1. Es claro que si $a,\ b \in \mathbb{K}[X]$, entonces $a + b \in \mathbb{K}[X]$.
2. La suma definida en $\mathbb{K}[X]$ verifica las siguientes propiedades:
   a) Es asociativa. Si $a, b, c \in \mathbb{K}[X]$, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   b) Es conmutativa. Si $a, b \in \mathbb{K}[X]$, entonces $a + b = b + a$.
   c) Admite elemento neutro: $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.
   d) Todo elemento $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ admite un simétrico $-a = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n, \ldots)$.

Definiremos ahora un producto en $\mathbb{K}[X]$. Previamente vamos a definir el producto de un elemento de $\mathbb{K}$ por un elemento de $\mathbb{K}[X]$, para obtener una representación de los elementos de $\mathbb{K}[X]$ que nos permita operar con mayor sencillez.

Definición 2.1.4 *Sean* $k \in \mathbb{K}$ *y* $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{K}[X]$. $k.a = (k\,a_0, k\,a_1, k\,a_2, \ldots, k\,a_n, \ldots)$. *Esto es,* $k.a$ *es la sucesión cuyo coeficiente i-ésimo es* $(k.a)_i = k\,a_i$.

Observación
$0.a = 0 = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, para toda sucesión a.
Se prueba sin dificultad que este producto tiene las siguientes propiedades:

a) $k.(a + b) = k.a + k.b,\ a, b \in \mathbb{K}[X],\ k \in \mathbb{K}$.

b) $(k_1 + k_2).a = k_1.a + k_2.a,\ a \in \mathbb{K}[X],\ k_1, k_2 \in \mathbb{K}$.

c) $(k_1\,k_2).a = k_1.(k_2.a),\ a \in \mathbb{K}[X],\ k_1, k_2 \in \mathbb{K}$.

d) $1.a = a$, para todo $a \in \mathbb{K}[X]$.

Vamos a destacar ahora algunas sucesiones particulares de $\mathbb{K}[X]$:

$$\begin{aligned} X_0 &= (1, 0, 0, 0, \ldots) \\ X_1 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\ X_2 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\ &\vdots \qquad \vdots \\ X_i &= (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \end{aligned}$$

Es decir $x_i = 1,\ x_j = 0$ si $i \neq j$.
Si $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in \mathbb{K}[X]$ y suponemos que $a_i = 0$ para $i > n$, entonces a puede escribirse:
$a = a_0.(1,0,0,0,\ldots) + a_1.(0,1,0,0,\ldots) + a_2.(0,0,1,0,\ldots) + \cdots + a_n.(0,0,\ldots,0,\ldots,1,\ldots) = a_0.X_0 + a_1.X_1 + a_2.X_2 + \cdots + a_n.X_n$.
En particular $0 = a_0.X_0 + a_1.X_1 + a_2.X_2 + \cdots + a_n.X_n$ si, y sólo si $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
Entonces todo elemento $a \in \mathbb{K}[X]$ se puede representar como una combinación lineal finita de las sucesiones $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$, con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Para definir un producto en $\mathbb{K}[X]$, basta definirlo para los elementos $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$, y extenderlo a todos los elementos de $\mathbb{K}[X]$ por medio de la propiedad distributiva.

Definición 2.1.5 $X_i.X_j = X_{i+j}$.

Observaciones

1. El producto anterior es asociativo y conmutativo.
2. $X_0.X_i = X_i$, para todo i.
3. $X_1^2 = X_1.X_1 = X_2,\quad X_1^3 = X_1.X_1.X_1 = X_1^2.X_1 = X_2.X_1 = X_3, \ldots,\quad X_1^n = X_n$, para todo n.

Entonces, si convenimos en notar $X_1^0 = X_0 = 1$ (neutro del producto) y $X_1 = X_1^1 = X$, la expresión de un elemento cualquiera de $\mathbb{K}[X]$ es: $a_0.1 + a_1.X + a_2.X^2 + \cdots + a_n.X^n$.
Si consideramos la función $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}[X]$, definida por $\varphi(k) = k.X_0 = k.1$, φ es inyectiva y respeta las operaciones de suma y producto. En consecuencia, para cada $a \in \mathbb{K}$, podemos identificar a con $\varphi(a)$, es decir, podemos escribir $a = a \cdot X_0 = a \cdot 1$, y entonces la expresión de un elemento de $\mathbb{K}[X]$ es $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + \cdots + a_n.X^n$, $a_i \in \mathbb{K}$.
Con esta representación el producto de elementos de $\mathbb{K}[X]$ se efectúa teniendo en cuenta la propiedad distributiva y la siguiente definición.

Definición 2.1.6 $(a_i.X^i).(a_j.X^j) = (a_i\, a_j).X^{i+j}$.

Los elementos de $\mathbb{K}[X]$ se llaman **polinomios** con coeficientes en $\mathbb{K}$ en la **indeterminada** X.
En lo que sigue los notaremos, en forma simplificada, $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + \cdots + a_n\, X^n$.

Ejemplos

1. Si $A(X) = X^2 + X + 1$ y $B(X) = 2\,X^3 + 1$, entonces $A(X) + B(X) = 2\,X^3 + X^2 + X + 2$.
2. Si $A(X) = X^2 - 1$ y $B(X) = X^3 + 2$, entonces $A(X).B(X) = (X^2 - 1)(X^3 + 2) = X^5 - X^3 + 2\,X^2 - 2$.

Grado de un polinomio

Si $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + \cdots + a_n\, X^n \neq 0$, entonces $a_i \neq 0$, para algún i.

Definición 2.1.7 *Se llama* **grado** *de un polinomio no nulo* $P(X)$, *y se nota* $gr\, P(X)$, *al mayor índice* $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que* $a_i \neq 0$.

Observaciones

1. Al polinomio nulo no se le atribuye grado.
2. Si $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$, no necesariamente $gr\, P(X) = n$. Por ejemplo: $gr\,(1 + X + 0\, X^2) = 1$.
3. Si $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$, $a_n \neq 0$, entonces $gr\, P(X) = n$.
   a_n se denomina el **coeficiente principal** de $P(X)$. Si $a_n = 1$, $P(X)$ se dice **mónico**.
4. Al escribir un polinomio, por convención, los monomios de la forma $0\, X^j$, $j > 0$ son omitidos.

Propiedades del grado

Sean $A(X)$ y $B(X) \in \mathbb{K}[X]$.

a) Si $A(X).B(X) \neq 0$, entonces $gr(A(X).B(X)) = gr\, A(X) + gr\, B(X)$.

b) Si $A(X) + B(X) \neq 0$, $A(X) \neq 0$ y $B(X) \neq 0$, entonces $gr\,(A(X) + B(X)) \leq \max(gr\, A(X)\,,\, gr\, B(X))$.

c) $gr\, P(X) = 0$ si, y sólo si $P(X) = k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$. Esto es, los polinomios de grado cero son las constantes no nulas.

De las propiedades a) y c) obtenemos que los únicos polinomios que tienen inverso multiplicativo, es decir polinomios $A(X)$ para los cuales existe $B(X)$ tal que $A(X) \cdot B(X) = 1$, son las constantes no nulas.

Igualdad de Polinomios

Podemos dar ahora una nueva versión del criterio de igualdad para dos polinomios no nulos.
Si $A(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$, $a_n \neq 0$ y $B(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_m X^m$, $b_m \neq 0$, entonces $A(X) = B(X)$ si $gr\, A(X) = n = m = gr\, B(X)$ y $a_i = b_i$, para todo i, $0 \leq i \leq n$.

Funciones polinomiales

Dado un polinomio $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ la función $\varphi_P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definida por $\varphi_P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, se denomina **función polinomial** asociada a $P(X)$.
Si $\mathbb{K}$ es el cuerpo de los números racionales, reales o complejos, existe una correspondencia biunívoca entre funciones polinomiales y polinomios.
Este resultado no es, en general, válido. Basta considerar como $\mathbb{K}$ un cuerpo con un número finito de elementos.

Ejemplo
Sea $\mathbb{K} = \{0, 1\}$, con las operaciones de suma y producto definidas por las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

$(\mathbb{K}, +, .)$ es un cuerpo, es decir verifica para la suma y el producto las mismas propiedades que $\mathbb{R}$. Si consideramos $\mathbb{K}[X]$ y los polinomios $P(X) = X$ y $Q(X) = X^2$, es claro que $P(X) \neq Q(X)$ pues son de distinto grado. Sin embargo, si consideramos las funciones polinomiales, φ_P y φ_Q, asociadas a $P(X)$ y a $Q(X)$, respectivamente, tenemos que $\varphi_P(0) = \varphi_Q(0)$ y $\varphi_P(1) = \varphi_Q(1)$. Por lo tanto, $\varphi_P = \varphi_Q$.

División entera de polinomios

Como cuando trabajamos con números enteros, en $\mathbb{K}[X]$ existe un algoritmo de la división, que enunciamos sin demostración.

Proposición 2.1.1 *Dados* $A(X)$ *y* $B(X) \in \mathbb{K}[X]$, $B(X) \neq 0$, *existen polinomios* $q(X)$ *y* $r(X) \in \mathbb{K}[X]$, *unívocamente determinados, tales que:* $A(X) = B(X).q(X) + r(X)$; *con* $r(X) = 0$ *ó* $gr\,(r(X)) < gr\,B(X)$.

Si $r(X) = 0$ diremos que $B(X)$ **divide** a $A(X)$, que $A(X)$ es **divisible** por $B(X)$, o que $B(X)$ es un **factor** de $A(X)$.

Observación
Si $gr\,B(X) > gr\,A(X)$, entonces $q(X) = 0$ y $r(X) = A(X)$.

Ejemplos

1. Sean $A(X) = X^4 - 3\,X^2 + 1$ y $B(X) = X^2 - 2\,X$.

$$\begin{array}{llllll} X^4 + 0\,X^3 - 3\,X^2 + 0\,X + 1 & |\underline{X^2 - 2\,X} \\ \underline{X^4 - 2\,X^3} & X^2 + 2\,X + 1 \\ \quad\; 2\,X^3 - 3\,X^2 & \\ \quad\; \underline{2\,X^3 - 4\,X^2} & \\ \qquad\quad X^2 + 0\,X & \\ \qquad\quad \underline{X^2 - 2\,X} & \\ \qquad\qquad\; 2\,X + 1 & \end{array}$$

   Entonces $q(X) = X^2 + 2\,X + 1$ y $r(X) = 2\,X + 1$.

2. Determinar los valores $a \in \mathbb{R}$ de modo que $X^3 + 3X^2 + (a+3)X + (a^2 - 1)$ sea divisible por $X^2 + 1$.

   Efectuamos la división y obtenemos $r(X) = (a+2)X + (a^2 - 4)$, luego $a + 2 = 0$ y $a^2 - 4 = 0$. Entonces $a = -2$.

El algoritmo utilizado en los ejemplos anteriores se puede simplificar cuando se trata de dividir un polinomio $P(X)$ por uno de la forma $(X - a)$. Se utiliza entonces la conocida regla de Ruffini.

Ejemplo

Sea $A(X) = X^3 - 2X + 1$ y $B(X) = X - 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}$$

Entonces $q(X) = X^2 + 2X + 2$ y $r(X) = 5$.

2.2 Raíces de polinomios

Definición 2.2.1 *Sea* $c \in \mathbb{K}$ *y* $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.
Se llama **valor numérico** *de* P *en* c *al número* $P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$.
Es decir $P(c) = \varphi_P(c)$.

Si $P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0$, *diremos que* c *es* **raíz** *de* $P(X)$

Ejemplo
Sea $P(X) = X^2 + 2X - 1$. Entonces $P(2) = 7$, $P(-1) = -2$ y $P(0) = -1$.

Teorema 2.2.1 (Teorema del resto) *El resto de dividir un polinomio* $P(X)$ *por otro de la forma* $X - c$ *es* $P(c)$.

Dem. Sean $q(X)$ y $r(X)$ el cociente y el resto de dividir $P(X)$ por $X - c$. Entonces $P(X) = q(X)(X - c) + r(X)$, donde $r(X) = 0$ ó $gr\,(r(X)) < gr\,(X - c) = 1$. Luego $r(X) = r$ y entonces $P(c) = q(c)(c - c) + r = r = r(X)$. □

Corolario 2.2.1 *Un número* c *es raíz de un polinomio* $P(X)$ *si, y sólo si* $P(X)$ *es divisible por* $(X - c)$.

Dem. c es raíz de $P(X)$ si, y sólo si $P(c) = 0$. Como $P(c)$ es el resto de dividir $P(X)$ por $(X - c)$, entonces c es raíz de $P(X)$ si, y sólo si $P(X) = (X - c) \cdot q(X)$ lo que es equivalente a decir que $P(X)$ es divisible por $(X - c)$. □

Ejemplo
Verificar que 3 es raíz de $P(X) = X^3 - X^2 - 5X - 3$. Para ello basta ver que el resto de dividir $P(X)$ por $(X - 3)$ es el polinomio nulo. Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ 3 & & 3 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Observación
A partir del corolario del Teorema del resto, si $P(X)$ es un polinomio de grado n y conocemos una raíz c de $P(X)$, entonces existe un polinomio $q(X)$ tal que $P(X) = (X - c)q(X)$. Si b es raíz de $q(X)$, entonces $P(b) = (b - c).q(b) = (b - c).0 = 0$, es decir b también es raíz de $P(X)$. Esto es , las restantes raíces de $P(X)$ son las raíces de $q(X)$, que es un polinomio de un grado menor que el grado de $P(X)$.

Raíces múltiples

Definición 2.2.2 *Sea* $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ *y* c *una raíz de* $P(X)$. *Se dice que* c *es una* **raíz multiple** *de orden* k *de* $P(X)$ *ó que* c *es una raíz de* **orden de multiplicidad** k *de* $P(X)$ *si* $P(X) = (X - c)^k q(X)$, *con* $q(c) \neq 0$, *es decir si* k *es el mayor número natural tal que* $P(X)$ *es divisible por* $(X - c)^k$.

Si $k = 1$, c *se dice una* **raíz simple**.

Si $k > 1$, c *se dice una* **raíz múltiple**.

Observar que para hallar el orden de multiplicidad de una raíz de un polinomio basta aplicar reiteradamente la regla de Ruffini.

Ejemplo
Verificar que 2 es raíz del polinomio $P(X) = X^5 - 6\,X^4 + 11\,X^3 - 2\,X^2 - 12\,X + 8$ y hallar su orden de multiplicidad.
Debemos efectuar divisiones sucesivas por $(X - 2)$ hasta que el resto no dé el polinomio nulo.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -6 & 11 & -2 & -12 & 8 \\
2 & & 2 & -8 & 6 & 8 & -8 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & 4 & -4 & 0 \\
2 & & 2 & -4 & -2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & \\
2 & & 2 & 0 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & 0 & & \\
2 & & 2 & 4 & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & & &
\end{array}
$$

Entonces el orden de multiplicidad de la raíz es 3.

Si conocemos una raíz de $P(X)$ es conveniente calcular su orden de multiplicidad para obtener un polinomio de menor grado cuyas raíces son también raíces de $P(X)$. Así, en el ejemplo anterior, 2 es raíz múltiple de orden 3 de $P(X)$ y se tiene que $P(X) = (X - 2)^3 (X^2 - 1)$. Luego las restantes raíces son las de $X^2 - 1$, es decir 1 y -1.

Proposición 2.2.1 *Si* $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ *es un polinomio de grado* $n \geq 1$, *entonces* $P(X)$ *tiene a la sumo* n *raíces en* $\mathbb{K}$.

Observaciones

1. Cada raíz se cuenta tantas veces como su orden de multiplicidad.

2. $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$ y no poseen raíces reales.

La situación dada en la observación 2. no se da si consideramos a los polinomios en $\mathbb{C}[X]$, pues se verifica el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2 (Teorema Fundamental del Álgebra) *Todo polinomio no constante con coeficientes en* $\mathbb{C}$ *tiene por lo menos una raíz en* $\mathbb{C}$.

La primera demostración de este teorema fue hecha por Gauss a principios del siglo XIX, y escapa a los alcances del curso.
Veamos que el Teorema Fundamental del Álgebra es equivalente a decir que todo polinomio de grado n, $n > 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$, contando cada raíz tantas veces como su orden de multiplicidad.
En efecto, si $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X], a_n \neq 0$, por el teorema fundamental del Álgebra, $P(X)$ tiene una raíz c_1 en $\mathbb{C}$. Luego $P(X) = (X - c_1)q_1(X)$, con $gr\, q_1(X) = n - 1$. Pero por el Teorema Fundamental del Álgebra, $q_1(X)$ tiene una raíz c_2 en $\mathbb{C}$, luego $q_1(X) = (X - c_2)q_2(X)$, con $gr\, q_1(X) = n - 2$ y entonces $P(X) = (X - c_1)(X - c_2)q_2(X)$. Reiterando este procedimiento, luego de n pasos se tiene:
$P(X) = a_n(X - c_1)(X - c_2) \cdots (X - c_n)$ y $P(X)$ tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$.

Si con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ notamos a las raíces distintas de $P(X)$, entonces el polinomio admite una descomposición como producto de polinomios en $\mathbb{C}[X]$ de la forma:

$$P(X) = a_n(X - \alpha_1)^{n_1}(X - \alpha_2)^{n_2} \cdots (X - \alpha_t)^{n_t}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$$

Raíces complejas de polinomios con coeficientes reales

Sea $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Teniendo en cuenta que $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$ y que $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ es real, obtenemos que $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.
- El polinomio $\varphi(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) = X^2 - 2\, Re(\alpha)\, X + \|\alpha\|^2 = X^2 + p\, X + q \in \mathbb{R}[X]$.

Proposición 2.2.2 *Sea* $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ *y* $\alpha = a + b\, i$, $b \neq 0$, *una raíz compleja de* $P(X)$. *Entonces* α *es raíz de* $P(X)$ *si, y sólo si* $\overline{\alpha}$ *es raíz de* $P(X)$. *Además* α *y* $\overline{\alpha}$ *poseen el mismo orden de multiplicidad.*

Dem. Como $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$, basta demostrar una de las implicaciones. Si α es raíz de $P(X)$ entonces $P(\alpha) = 0$ y por lo tanto $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0$, luego $\overline{\alpha}$ es raíz de $P(X)$.
Veamos que α y $\overline{\alpha}$ tienen el mismo orden de multiplicidad.
Supongamos que α y $\overline{\alpha}$ son de orden k y l respectivamente y que $k \neq l$; podemos tomar, por ejemplo, $k > l$, es decir, $k - l > 0$.
Como α y $\overline{\alpha}$ son raíces de $P(X)$ de orden k y l respectivamente, entonces
$P(X) = (X - \alpha)^k(X - \overline{\alpha})^l q_1(X) = (X - \alpha)^l(X - \overline{\alpha})^l(X - \alpha)^{k-l}q_1(X) = \varphi(X)(X - \alpha)^{k-l}q_1(X)$, con $q_1(\overline{\alpha}) \neq 0$. Como $q(X) = (X - \alpha)^{k-l}q_1(X)$, es el cociente de dos polinomios de $\mathbb{R}[X]$, entonces $q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Se tiene entonces que $q(\alpha) = 0$ y $q(\overline{\alpha}) \neq 0$; pues $\overline{\alpha} - \alpha \neq 0$, lo que contradice la primera parte del teorema. Luego, $k = l$. □

Observaciones

1. Las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales aparecen de a pares conjugados.

2. Si $gr\ P(X) = n > 0$; $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_r$ son todas sus raíces reales y $\alpha_1,\ \overline{\alpha_1},\ \alpha_2,\ \overline{\alpha_2},\ \ldots,$ $\alpha_s,\ \overline{\alpha_s},$ son todas sus raíces complejas entonces $P(X)$ admite una descomposición en $\mathbb{R}[X]$ del tipo:

$$P(X) = a_n\,(X-c_1)(X-c_2)\cdots(X-c_r)(X^2+p_1\,X+q_1)(X^2+p_2\,X+q_2)\cdots(X^2+p_s\,X+q_s),$$

   con $r + 2\,s = n$.

3. Si $P(X) = X^2 - i\,X$ entonces sus raíces son 0 e i, lo que muestra que el teorema anterior deja de ser válido si el polinomio no tiene coeficientes reales.

Corolario 2.2.2 *Todo polinomio con coeficientes reales de grado impar admite por lo menos una raíz real.*

Ejemplo
Hallar todas las raíces del polinomio $X^7 + 5\,X^5 - 2\,X^4 - 33\,X^3 - 16\,X^2 + 27\,X + 18$, sabiendo que -1 y $-3\,i$ son raíces.

Aplicamos Ruffini y obtenemos:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 0 & 5 & -2 & -33 & -16 & 27 & 18 \\
-1 & & -1 & 1 & -6 & 8 & 25 & -9 & -18 \\
\hline
 & 1 & -1 & 6 & -8 & -25 & 9 & 18 & 0 \\
-1 & & -1 & 2 & -8 & 16 & 9 & -18 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 8 & -16 & -9 & 18 & 0 & \\
-1 & & -1 & 3 & -11 & 27 & -18 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & 11 & -27 & 18 & 0 & &
\end{array}$$

Al efectuar nuevamente la división por $X + 1$, el resto es no nulo, luego

$$P(X) = (X+1)^3\,(X^4 - 3\,X^3 + 11\,X^2 - 27\,X + 18).$$

Como $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ y $-3\,i$ es raíz , entonces $3\,i$ también lo es. Por lo tanto, $(X^2 + 9)$ divide a $X^4 - 3\,X^3 + 11\,X^2 - 27\,X + 18$.
Si efectuamos la división obtenemos como cociente $X^2 - 3\,X + 2$. Podemos escribir entonces

$$P(X) = (X+1)^3\,(X^2+9)\,(X^2 - 3\,X + 2).$$

Las restantes raíces son las del polinomio $X^2 - 3\,X + 2$. Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$. Luego las raíces de $P(X)$ son : -1 (triple), $3\,i, -3\,i$, 2 y 1 .

Cálculo de las raíces de un polinomio

Es muy simple calcular la única raíz $\alpha = -\dfrac{a_0}{a_1}$ de un polinomio de primer grado $a_1 X + a_0$.
Para polinomios de grado 2, $a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, es muy conocida la fórmula que permite calcular sus raíces. Las mismas están dadas por $\alpha_1 = \dfrac{-a_1 + t}{2\, a_2}$ y $\alpha_2 = \dfrac{-a_1 - t}{2\, a_2}$, donde t es un elemento de $\mathbb{K}$ que verifica $t^2 = a_1^2 - 4\, a_2\, a_0$.

A pesar de que los griegos ya conocían los métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas, el descubrimiento de las fórmulas para calcular las raíces de polinomios de tercer y cuarto grado pertenece al siglo XVI, aunque creemos razonable no incluirlas aquí.
Se dice que las ecuaciones algebraicas de grado menor que 5 admiten resolubilidad por radicales porque pueden resolverse mediante fórmulas que involucran las operaciones de suma, producto y radicación entre sus coeficientes.
El problema de la resolución general de la ecuación de grado n por radicales ha sido de gran importancia en la historia de la Matemática y su estudio ha sido el motivador de gran parte de la matemática actual. Se puede demostrar que no existe una fórmula general que involucre sólamente operaciones de suma, producto y extracción de raíces n-ésimas que permita calcular las raíces de un polinomio de grado mayor o igual que 5. La solución de este problema se debe a Evaristo Galois $(1811 - 1832)$.

Raíces racionales de polinomios en $\mathbb{Q}[X]$

Sea $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Sin perder generalidad, podemos considerar que $P(X)$ tiene coeficientes enteros, pues en caso contrario, si k es el producto de los denominadores de sus coeficientes, entonces $k\, P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ y tiene las mismas raíces que $P(X)$.

Proposición 2.2.3 *Sea* $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ *y* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *una fracción irreducible. Si* $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ *entonces* p *es divisor de* a_0 *y* q *es divisor de* a_n .

Observaciones

1. Si $a\,, b \in \mathbb{Z}$, recordar que b es un divisor de a si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot c$.
2. Si $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ es mónico, sus raíces racionales, en caso de existir, son enteras.

Ejemplo

Calcular todas las raíces racionales del polinomio $P(X) = X^3 + \dfrac{1}{2} X^2 - \dfrac{7}{2} X - 3$.
Las raíces del polinomio coinciden con las de $2\, X^3 + X^2 - 7\, X - 6$ que se obtiene del anterior multiplicándolo por 2. Si existen raíces racionales, son de la forma $\dfrac{p}{q}$, donde p divide a -6 y q divide a 2. Por lo tanto $p \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\ \}$ y $q \in \{\pm 1,\ \pm 2\}$.
Luego las posibles raíces racionales son: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{3}{2}$. Reemplazando en $P(X)$ o aplicando la regla de Ruffini, se ve que las raíces racionales son: $-1,\ -2$ y $-\dfrac{3}{2}$.

Búsqueda de raíces reales

Diversos problemas se reducen al cálculo de las raíces reales de un polinomio a coeficientes reales. Como no existen métodos para calcularlas con exactitud se plantean los siguientes problemas:

1. Acotar las raíces reales. Esto es, determinar un intervalo real que las contenga a todas.
2. Separar las raíces. Es decir, determinar ciertos intervalos en cada uno de los cuales haya una única raíz.
3. Aproximar las raíces con cierta exactitud prefijada.

Acotación de las raíces reales de un polinomio con coeficientes reales

Dado un polinomio $P(X)$ con coeficientes reales, existen varios métodos que permiten encontrar un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ de modo que $[a, b]$ contenga a todas las raíces reales de $P(X)$. Como una aplicación del teorema del resto y la regla de Ruffini daremos la regla de Laguerre-Thibault.

Proposición 2.2.4 (Regla de Laguerre-Thibault) *Sea $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polinomio no constante a coeficientes reales tal que $a_n > 0$. Si al dividir $P(X)$ por $X - c$, $c \geq 0$, el resto y todos los coeficientes del cociente son no negativos, entonces c es una cota superior de las raíces reales de $P(X)$.*

Dem. Por el teorema del resto $P(X) = (X - c)(a_n X^{n-1} + q_{n-2} X^{n-2} + \cdots + q_0) + P(c)$. Como todos los coeficientes del cociente $q(X)$ y $P(c)$ son no negativos entonces, para todo s, $s > c \geq 0$, $P(s) = (s - c)(a_n s^{n-1} + q_{n-2} s^{n-2} + \cdots + q_0) + P(c) > 0$, por lo tanto $P(X)$ no posee raíces reales mayores que c. Luego c es una cota superior para las raíces reales de $P(X)$.

Para la cota inferior se tiene en cuenta que:

- α es raíz de $P(-X)$ si, y sólo si $-\alpha$ es raíz de $P(X)$.
- $\alpha \leq c$ si, y sólo si $-c \leq -\alpha$.

Entonces si l es una cota superior de las raíces reales de $P(-X)$, se tiene que $-l$ es cota inferior para las raíces reales de $P(X)$. $\square$

Observación

Si el coeficiente principal de $P(X)$ es negativo, basta considerar $-P(X)$, que posee las mismas raíces que el anterior.

Ejemplo

Hallar un intervalo $[a, b]$ en el cual se encuentren todas las raíces reales del polinomio $X^3 - X + 4$.

Aplicamos la regla de Laguerre-Thibault.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

Como todos los coeficientes son no negativos, 1 es cota superior, luego

tomamos $b = 1$. Calculamos $P(-X) = -X^3 + X + 4$, como $a_3 < 0$ consideremos $-P(-X)$ que posee las mismas raíces que $P(-X)$.
$-P(-X) = X^3 - X - 4$.
Hallemos una cota superior para las raíces reales de $-P(-X)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}$$

Luego 2 es cota superior y por lo tanto -2 es cota inferior de las raíces de $P(X)$ y entonces tomo $a = -2$. Las raíces reales de $P(X)$ se hallan en el intervalo $[-2, 1]$.

Raíces reales positivas y negativas de un polinomio con coeficientes reales

Existen métodos para calcular el número exacto de raíces reales positivas y negativas de un polinomio con coeficientes reales. Más aún, permiten conocer el número de raíces reales que existen en cualquier intervalo (a, b). El método más sencillo es el de Sturm $(1803 - 1855)$.
La regla de los signos de Descartes, que enunciaremos sin demostración, nos proporciona solamente una cota del número de raíces reales positivas y negativas de $P(X)$.

Sea $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ y $V(P(X)) = V(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$, el número de variaciones de signo de la sucesión finita $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$.

Proposición 2.2.5 *El número de raíces reales positivas de un polinomio* $P(X)$ *con coeficientes reales, contadas tantas veces como su orden de multiplicidad, es a lo sumo* $V(P(X))$ *. Si es menor, difiere de* $V(P(X))$ *en un número par. Análogamente, el número de raíces reales negativas de* $P(X)$ *, es a lo sumo* $V(P(-X))$ *. Si es menor, difiere de* $V(P(-X))$ *en un número par.*

Ejemplos

1. Si $P(X) = X^2 + 1$, como $V(P(X)) = V(P(-X)) = V(1, 0, 1) = 0$, la regla de Descartes nos asegura que $P(X)$ no tiene raíces reales.

2. Acotar el número de raíces reales positivas y negativas de $P(X) = -X^3 + 7X - 3$.
Como $V(P(X)) = V(-1, 0, 7, -3) = 2$, el número de raíces reales positivas de $P(X)$ es 0 ó 2 . Por otro lado $P(-X) = X^3 - 7X - 3$ y $V(P(-X)) = 1$. Entonces el número de raíces reales negativas es 1.

El siguiente teorema juega un papel importante en la localización y aproximación de las raíces reales de un polinomio con coeficientes reales. Dado $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ y teniendo en cuenta que la función polinómica asociada es continua en toda la recta, se tiene que:

Proposición 2.2.6 (Teorema de Bolzano) *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *. Si* $P(a) \cdot P(b) < 0$, *entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $P(c) = 0$.

Ejemplo
Usemos el teorema de Bolzano y localicemos, para el polinomio del ejemplo 2., los intervalos

en que se encuentran las raíces reales de $P(X)$.
Calculemos los valores de $P(a)$ para algunos enteros a.

$$\begin{array}{rcrl} P(0) & = & -3 & (Negativo) \\ P(1) & = & 3 & (Positivo) \\ P(3) & = & -9 & (Negativo) \\ P(-1) & = & -9 & (Negativo) \\ P(-2) & = & -9 & (Negativo) \\ P(-3) & = & 3 & (Positivo) \end{array}$$

Una raíz real positiva se halla en el intervalo $(0,1)$, la otra en el intervalo $(1,3)$, y la negativa en el intervalo $(-3,-2)$.

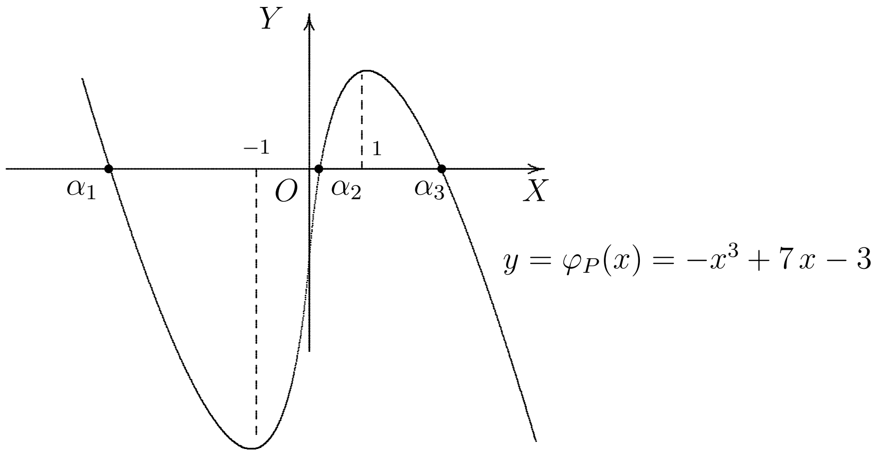


Figura 10

2.3 Ejercicios

1. Dados $P(X) = X^3 + 3\,X^2 - X + 2$ y $Q(X) = 2\,X^2 + 4\,X - 1$, calcular:

   a) El coeficiente principal de $P(X) \cdot Q(X)^5 - Q(X)^3$.

   b) El término independiente de $8\,P(X)^2 - Q(X)^3$.

   c) El coeficiente de X^3 en $P(X) \cdot Q(X)$.

2. Dados los polinomios $P(X) = X^{40} - 3\,X^{25} + 2\,X^4 - 5\,X + 3$ y $Q(X) = X^2 - 2$, calcular el grado de:

   a) $Q(X)^{25}$.

   b) $(Q(X) + 1) \cdot P(X)^2$.

   c) $X^{25} \cdot P(X) - Q(X)^{40}$.

3. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ de modo tal que $P(X) = Q(X)$.

   a) $P(X) = 6\,X^2 + a\,X + b\,, \quad Q(X) = (3\,X - 1)\,(2\,X + 1)$.

   b) $P(X) = a\,(X^2 - X - 2) + b\,(X - 1) + \dfrac{5}{2}\,(X^2 - 3\,X + 4)\,, \quad Q(X) = 3\,X^2 + 2\,X - 1$.

   c) $P(X) = a\,(X^2 + X + 3) + b\,(X^2 - 2\,X + 1) + \dfrac{7}{16}\,(X^2 - 3)\,, \quad Q(X) = 2\,X - 1$.

4. Hallar el cociente y el resto de dividir:

   a) $-5\,X^4 + 2\,i\,X^3 + X$ por $X^3 + X^2 + X$.

   b) $3\,X^5 + 3\,X + 2$ por $2\,X^2 + 1$.

   c) $-4\,X^3 + X^2$ por $2\,X^2 + X + 3$.

5. Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios, en los valores de a indicados:

   a) $P(X) = X^4 - 2\,X^3 + X + 1\,, \quad a = 0$.

   b) $P(X) = \sqrt{2}\,X^2 - \dfrac{\sqrt{8}}{5}\,X\,, \quad a = \sqrt{2}$.

   c) $P(X) = 2\,X^5 - 7\,X^3 - 10\,X^2 + 2\,X + 7\,, \quad a = -1$.

6. Aplicando la regla de Ruffini hallar:

   a) el cociente y el resto de dividir

      i) $-X^4 + 2\,X^3 - 3\,X^2 - 4\,X + 1$ por $X + 1$.

      ii) X^5 por $X - 2$.

      iii) $X^3 + X$ por $X + \dfrac{1}{2}$.

b) $P(-2)$, $Q\left(\dfrac{1}{3}\right)$ y $P(i)$, siendo $P(X) = 2\,X^5 - X^4 + 3\,X^3 - \dfrac{1}{3}$ y $Q(X) = 3\,X^7 - X^6 + 2\,X^2$.

7. Aplicar el teorema del resto y hallar las condiciones para que $X^n \pm a^n$ sea divisible por $X \pm a$, $a \neq 0$.

8. $P(X) = 5\,X^3 - 25\,X^2 + k\,X - 10$ es divisible por $X - 5$. Determinar cuál de los siguientes polinomios es factor de $P(X)$:

   i) $5\,X^2 + X - 2$ ii) $5\,X^2 - 2$ iii) $5\,X^2 + 2$

9. a) Dados $P(X) = X^5 + 2\,X^3 + 2\,X^2 + (a^2 - 4)X + 5 + a$ y $q(X) = X^2 + 3$, hallar el valor de a para el cual $P(X)$ es divisible por $q(X)$.

   b) Hallar los valores de p y q, sabiendo que $X^2 - 3\,X + 2$ divide a $X^4 + p\,X^2 + q$.

   c) Determinar $b \in \mathbb{R}$ de modo que el resto de la división de $X^5 + 2\,X^3 + b\,X + 1$ por $X^2 + 3$ sea $2\,X + 1$.

10. a) Hallar un polinomio $P(X)$ de grado 3, con coeficiente principal 2, tal que $P(0) = -3$ y que al dividirlo por $X^2 - 2$ tenga resto $X + 1$.

    b) Sea $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Sabiendo que $P(2) = 5$, $P(3) = -1$, hallar el resto de dividir $P(X)$ por $(X - 2)(X - 3)$.

11. Determinar la multiplicidad de α como raíz de $P(X)$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $\alpha = 1$, $P(X) = (X^2 + 1)(X^2 - 1)(X - 1)^3$.

    b) $\alpha = 2$, $P(X) = (X^2 - 4)(X^2 - 4\,X + 4)$.

    c) $\alpha = i$, $P(X) = (X^4 + 1)(X^2 + 1)(X^3 + i)$.

12. Sea $P(X) = X^5 - a\,X^4 - a\,X + 1$.

    a) Mostrar que -1 es raíz de $P(X)$.

    b) Hallar un valor de a de modo que -1 sea raíz múltiple. ¿ Cuál es la multiplicidad de -1 para el valor de a hallado anteriormente ?

13. Hallar las raíces racionales, en caso de existir, de los siguientes polinomios:

    a) $X^4 + X^3 - 8\,X^2 - 2\,X + 12$.

    b) $X^3 - X - 5$.

    c) $18\,X^5 - 3\,X^4 + 51\,X^3 - 9\,X^2 - 9\,X$.

    d) $X^4 - \dfrac{13}{6}\,X^3 - X^2 + \dfrac{13}{3}\,X - 2$.

14. Hallar las raíces de los siguientes polinomios indicando el correspondiente orden de multiplicidad.

    a) $X^3 - \dfrac{1}{3}X^2 - 2X + \dfrac{2}{3}$.

    b) $X^8 + \dfrac{1}{3}X^7 + 5X^6 + \dfrac{5}{3}X^5 - 8X^4 - \dfrac{8}{3}X^3 - 48X^2 - 16X$, sabiendo que $2i$ es raíz.

    c) $(X^3 - i)(X^5 + \dfrac{1}{2}X^4 + 7X^3 + \dfrac{7}{2}X^2 - 18X - 9)$, sabiendo que $3i$ es raíz.

    d) $X^8 - \dfrac{3}{2}X^7 + \dfrac{3}{4}X^6 - \dfrac{1}{8}X^5 + 16X^4 - 24X^3 + 12X^2 - 2X$.

    e) $X^5 + X^3 + (1-i)X^2 + (1-i)$, sabiendo que $X^2 + 1$ es un factor del mismo.

15. El polinomio $P(X) = 6(X-2i)^3(X^9 + 6iX^8 - 8X^7 + 16iX^6 - 49X^5 - 38iX^4 + 8X^3 - 16iX^2 + 48X + 32i) \in \mathbb{R}[X]$. Hallar todas sus raíces indicando el orden de multiplicidad de las mismas.

16. Hallar un intervalo $[a, b]$ en el cual se encuentren todas las raíces reales de los siguientes polinomios:

    a) $X^3 - X - 4$.

    b) $X^4 - 2X + 1$.

    c) $8X^5 + 4X^4 - 2X^3 + 7X^2 - 10X + 3$.

    d) $X^3 - X^2 - 7X + 6$.

17. a) Acotar, utilizando la regla de los signos de Descartes, el número de posibles raíces reales positivas y negativas de los siguientes polinomios:

        i) $X^4 - 8X + 6$.

        ii) $X^5 - 6X^2 + 3$.

        iii) $4X^3 - 24X^2 + 35X - 12$.

    b) Determinar exactamente el número de raíces reales (positivas y negativas) de los polinomios del inciso anterior, y los intervalos en que se encuentran.

18. Sea $P(X) = X^8 - 3X^5 - 6X^3 - X + 8$. Determinar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando convenientemente la respuesta.

    a) $P(X)$ no tiene raíces reales.

    b) $P(X)$ tiene exactamente dos raíces reales negativas.

    c) $P(X)$ tiene exactamente tres raíces complejas no reales.

    d) $P(X)$ no posee raíces reales negativas, pero posee al menos una raíz real positiva.

    e) $P(X)$ tiene por lo menos seis raíces complejas no reales.

3 Sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes

Los coeficientes numéricos utilizados en esta sección pertenecen al cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, o al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, que notaremos indistintamente con $\mathbb{K}$.

3.1 Matrices

Una **matriz** $m \times n$ (o de orden $m \times n$) es un cuadro de números con m filas (horizontales) y n columnas (verticales):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si $m = n$, A se dice una **matriz cuadrada** de orden n. El número a_{ij} es el elemento de la matriz que está en la fila i y en la columna j.

También usaremos la notación $A = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$, para designar una matriz de orden $m \times n$.

Si $n = 1$, la matriz tiene una sola columna y se llama **matriz columna**. De la misma manera, si $m = 1$, la matriz tiene una sola fila y se llama **matriz fila**.

Si A es una matriz $m \times n$, la **diagonal principal** de A está formada por los elementos a_{ii}, $1 \leq i \leq min\{n, m\}$.

Igualdad de matrices

Dos matrices $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, son **iguales** si $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los valores posibles de los subíndices i y j.

Operaciones con matrices

Suma de matrices y multiplicación de un número por una matriz

Definición 3.1.1 *La suma de dos matrices A y B de orden $m \times n$ es otra matriz $m \times n$ que se obtiene sumando los elementos correspondientes de A y B. En símbolos, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces*

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

.

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} -2+6 & 1+3 & 4+0 \\ 2-2 & -3+0 & 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propiedades

Sean A, B, C matrices $m \times n$. Entonces :

$S_1)$ $(A+B)+C = A+(B+C)$.

$S_2)$ $A+B = B+A$.

$S_3)$ La matriz de orden $m \times n$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ es tal que $0+A = A+0 = A$ para toda matriz A de orden $m \times n$.

$S_4)$ Dada $A = (a_{ij})$, la matriz $B = (-a_{ij})$ es tal que $A+B = 0$.

Definición 3.1.2 *El producto de un número k y la matriz A es la matriz $k \cdot A$ que se obtiene multiplicando por el número k cada uno de los elementos de A. En símbolos,*

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (ka_{ij}).$$

En estos casos es costumbre llamar **escalares** a los elementos de $\mathbb{K}$, y la operación anterior se denomina **multiplicación por un escalar**.

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -15 \\ 6 & -9 & 6 \end{pmatrix}$.

Propiedades

Sean A, B matrices de orden $m \times n$ y λ , $\lambda' \in \mathbb{K}$. Entonces:

1) $\lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.

2) $(\lambda + \lambda') \cdot A = \lambda \cdot A + \lambda' \cdot A$.

3) $(\lambda\, \lambda') \cdot A = \lambda \cdot (\lambda' \cdot A)$.

4) $1 \cdot A = A$.

Producto de matrices

Definición 3.1.3 *Sea A una matriz $m \times n$, y sea B una matriz $n \times p$. El producto de A y B es la matriz $A \cdot B$ de orden $m \times p$ definida por:*

$$A \cdot B = (c_{ij}),$$

donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}.$$

Es decir, para obtener el elemento c_{ij} de $A \cdot B$ se multiplica cada elemento de la fila i de A por el correspondiente elemento de la columna j de B, y luego se suman esos productos.

Ejemplos

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ -15 & 7 & -13 \end{pmatrix}$.
   Observemos que en este ejemplo no es posible efectuar el producto $B \cdot A$.
2. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 27 & -3 \\ -19 & 13 \end{pmatrix}$
   y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -15 & 24 \end{pmatrix}$.
   En este ejemplo, los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ pueden efectuarse; sin embargo, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Propiedades

Siempre que el producto pueda efectuarse, se verifican

M_1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

M_2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $\quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

M_3) Se llama matriz identidad de orden n a una matriz cuadrada de orden n en la que $a_{ii} = 1$ para todo i, $1 \leq i \leq n$ y $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$. Se nota I ó I_n.

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ es tal que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, para toda matriz A de orden n.

M_4) $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observación

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De lo anterior se deduce que:
1. El producto de matrices no es, en general, conmutativo.
2. El producto puede ser nulo sin que ninguno de los factores lo sea.

Matriz traspuesta

Definición 3.1.4 *Se llama* **matriz traspuesta** *de la matriz A, y se nota A^T, a la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de A. Es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (b_{ij})$, con $b_{ij} = a_{ji}$.*

Observación

1. Si A es de orden $m \times n$, entonces A^T es de orden $n \times m$.
2. Si $A = A^T$, entonces A se dice **simétrica**.

Ejemplo

La matriz traspuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ es la matriz $A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

Propiedades

1) $(A^T)^T = A$.

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3) $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T; \;\; \lambda \in \mathbb{K}$.

4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, si el producto $A \cdot B$ está definido.

3.2 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = e \\ c\,x + d\,y = f \end{cases}$$

El nombre de lineales, que también se utiliza para mayor número de incógnitas, se debe a que las ecuaciones del tipo $a\,x + b\,y = e$ se representan en el Plano por una recta.

Un par ordenado de números (x_0, y_0) se llama **solución** del sistema si al reemplazar x por x_0 e y por y_0 se satisfacen ambas ecuaciones. Geométricamente, esto sucede cuando el punto (x_0, y_0) es el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2, donde r_1 y r_2 son los gráficos de $a\,x + b\,y = e$ y $c\,x + d\,y = f$, respectivamente.

Hay tres posibilidades para el conjunto de soluciones:

1. Puede ser vacío, es decir, las rectas r_1 y r_2 no se intersectan. Decimos entonces que el sistema es **incompatible**.
2. Contiene exactamente un punto. Geométricamente significa que las rectas se intersectan. Decimos que el sistema es **compatible determinado**.
3. Contiene infinitos puntos, es decir, r_1 y r_2 son coincidentes. En este caso decimos que el sistema es **compatible indeterminado**.

Ejemplos

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$$

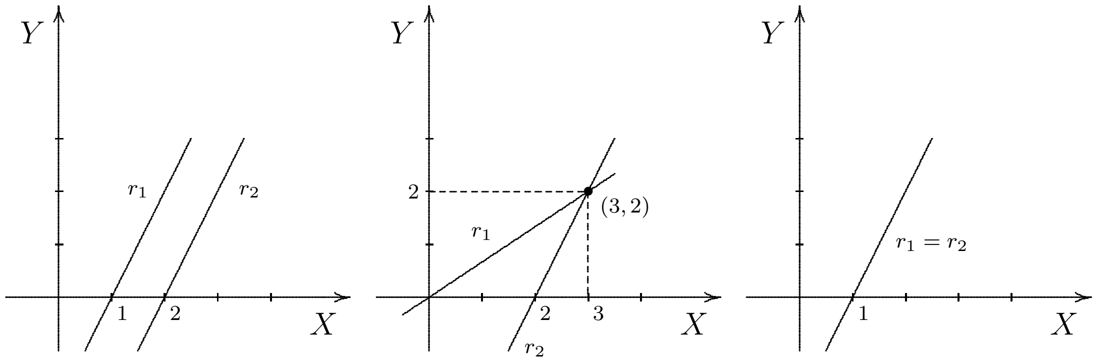


Figura 11

Las tres situaciones anteriores son las únicas posibles, es decir, no puede haber un sistema con exactamente dos soluciones, exactamente tres soluciones, etc. Esto es claro en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, porque dos puntos determinan una recta, pero también es válido para un número mayor de ecuaciones y de incógnitas.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se acostumbra usar alguno de estos tres métodos: 1. Sustitución. 2. Igualación. 3. Eliminación.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 50 \\ 2x + 4y = 140 \end{cases}$$

Sustitución. Despejamos una de las incógnitas, por ejemplo y, en una de las ecuaciones y la reemplazamos en la otra. De la primera ecuación, $y = -25 + \frac{3}{2}x$.

Reemplazando en la segunda ecuación, $2x + 4(-25 + \frac{3}{2}x) = 140$.

Resolviendo obtenemos $x = 30$, y sustituyendo este valor en $y = -25 + \frac{3}{2}x$ resulta $y = -25 + 45 = 20$. Luego la solución es el par ordenado $(30, 20)$.

Igualación. Despejamos una misma incógnita de ambas ecuaciones e igualamos las expresiones obtenidas.
De la primera ecuación, $y = -25 + \frac{3}{2}x$, y de la segunda, $y = 35 - \frac{1}{2}x$. Luego $-25 + \frac{3}{2}x = 35 - \frac{1}{2}x$. De aquí se obtiene $x = 30$, y entonces $y = 35 - \frac{1}{2} \cdot 30 = 20$.

Eliminación. Se elimina una incógnita, multiplicando cada ecuación por el coeficiente de esa

incógnita en la otra ecuación, y luego restando ambas ecuaciones.
En el ejemplo, supongamos que queremos eliminar la incógnita x. Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 y luego restamos:

$$\begin{array}{rcrcr} 6\,x & - & 4\,y & = & 100 \\ 6\,x & + & 12\,y & = & 420 \\ \hline & & -16\,y & = & -320 \end{array}$$

Luego $y = 20$. Para determinar x se sustituye $y = 20$ en cualquiera de las ecuaciones, y se resuelve, obteniendo $x = 30$.

Método de eliminación de Gauss

Nos proponemos indicar un método que nos permita resolver sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, m y n arbitrarios. Tal sistema puede escribirse:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (1)$$

donde los números a_{ij}, $1 \le j \le n$, $1 \le i \le m$, son los coeficientes, y los números b_1, b_2, ..., b_m son los términos independientes.

Una n-upla de números $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, es una **solución** del sistema de ecuaciones lineales (1), si cada una de las ecuaciones del mismo se convierte en una identidad después de haber sustituido en ellas las incógnitas x_i por los correspondientes valores k_i , $i = 1, 2, \ldots, n$.

Las definiciones de sistema compatible (determinado e indeterminado) e incompatible vistas anteriormente se aplican también al caso general.

Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, entonces se denomina **incompatible**.

Si el sistema de ecuaciones lineales tiene solución se denomina **compatible**. Se dice que un sistema compatible es **determinado** si posee solución única, e **indeterminado** si tiene más de una solución.

Nota: Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ el sistema (1) se dice **homogéneo** y siempre es compatible, pues $(0, 0, \ldots, 0)$ es solución del mismo.

Un problema de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales consiste en la elaboración de métodos que permitan establecer si un sistema dado es compatible o no, y en caso de ser compatible, indicar el número de soluciones y señalar un método para hallarlas a todas.

Operaciones elementales y matriz asociada al sistema

Si se aplica a un sistema de ecuaciones lineales alguna de las tres operaciones que se indican a continuación, se obtiene un nuevo sistema **equivalente** al dado, en el sentido que ambos sistemas tienen las mismas soluciones:

(I) Intercambiar dos ecuaciones entre sí.

(II) Reemplazar una ecuación por la que se obtiene multiplicándola por una constante distinta de cero.

(III) Reemplazar una ecuación por la que se obtiene sumando a dicha ecuación otra ecuación multiplicada por una constante.

En el sistema (1) podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_{11} \neq 0$.
Por ejemplo, dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & 4y & - & z & = & 4 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 5 \end{array} \right. ,$$

si intercambiamos la primera y segunda ecuación, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 5 \end{array} \right. .$$

Si ahora reemplazamos:

- la segunda ecuación por la suma de la segunda y la primera multiplicada por (-2), y
- la tercera ecuación por la suma de la tercera mas la primera multiplicada por (-3),

obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 4 \\ & & -5y & + & z & = & -7 \\ & & -11y & + & 5z & = & -7 \end{array} \right. .$$

Multiplicando ahora la segunda ecuación por $-\dfrac{1}{5}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 4 \\ & & y & - & \dfrac{1}{5}z & = & \dfrac{7}{5} \\ & & -11y & + & 5z & = & -7 \end{array} \right. .$$

Reemplazando la tercera ecuación por la suma de la tercera y 11 veces la segunda:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 4 \\ & & y & - & \dfrac{1}{5}z & = & \dfrac{7}{5} \\ & & & & \dfrac{14}{5}z & = & \dfrac{42}{5} \end{array} \right. .$$

Este último sistema es equivalente al primero y puede resolverse en forma muy sencilla.
El resultado es $z = 3$, $y = 2$ y $x = -1$; esto es, la solución es el conjunto $S = \{(-1, 2, 3)\}$.

La matriz cuyos elementos son los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales dado, se llama **matriz de los coeficientes**. Se llama **matriz del sistema o matriz ampliada** a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Podemos aplicar a las filas de la matriz del sistema las mismas operaciones que se aplicaron a las ecuaciones. Aplicadas a la matriz reciben el nombre de **operaciones elementales**.

Traducidas en términos de la matriz del sistema, estas operaciones son:

1. Intercambiar dos filas de la matriz.
2. Reemplazar una fila por la que se obtiene al multiplicarla por un número distinto de cero.
3. Reemplazar una fila por la que se obtiene al sumarle a esa fila otra fila previamente multiplicada por un número.

Estas operaciones elementales transforman la matriz del sistema en otra matriz que corresponde a un sistema de ecuaciones equivalente al dado.

La aplicación de las operaciones elementales tiene por objetivo obtener una matriz que tenga:

- Ceros debajo de la diagonal principal.
- Unos en la diagonal principal (eventualmente puede aparecer algún cero).

Este procedimiento se llama el **método de eliminación de Gauss** (Karl Friedrich Gauss, 1777–1855).

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 1 \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

Comenzamos considerando la matriz del sistema. Las operaciones elementales que se efectúan se indican usando F_i para indicar la fila i.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1\ :\ F_2;\ F_3-3F_1\ :\ F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/3)F_2\ :\ F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+4F_2\ :\ F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & -11/3 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(3/11)F_3\ :\ F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz representa el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & (1/3)z & = & -1 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}\right.$$

cuya solución es $(1, -2, 3)$

Si durante la aplicación del método de eliminación de Gauss alguna de las matrices intermedias tiene una fila con todos los elementos nulos excepto el último, es decir, una fila de la forma

$$0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad b, \quad \text{con} \ \ b \neq 0,$$

entonces el sistema es **incompatible**, ya que esa fila corresponde a una ecuación

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n = b$$

que no tiene solución.

Si alguna de las matrices tiene una fila con todos los elementos nulos (incluyendo el último), esa fila simplemente se elimina.

Si en la última matriz el número de filas r es igual al número de incógnitas n, entonces el sistema es **compatible determinado**. Si $r < n$, hay $n - r$ incógnitas a las cuales se les puede dar valores arbitrarios y calcular en función de ellos los valores de las otras incógnitas. En ese caso el sistema es **compatible indeterminado**.

Ejemplos

1. Resolver

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 10 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & z & = & 8 \\ 5\,x & - & 9\,y & + & 8\,z & = & 20 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 2 & -3 & -1 & 8 \\ 5 & -9 & 8 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & -12 \\ 0 & 1 & -7 & -30 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible.

2. Resolver

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & + & 3\,z & = & 10 \\ 2\,x & - & 3\,y & - & z & = & 8 \\ 4\,x & - & 7\,y & + & 5\,z & = & 28 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 2 & -3 & -1 & 8 \\ 4 & -7 & 5 & 28 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & -12 \\ 0 & 1 & -7 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado es

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ \quad y - 7z = -12 \end{cases}$$

Resolviendo la segunda ecuación y reemplazando en la primera se obtiene $x = 11z - 14$, $y = 7z - 12$, z arbitrario. El sistema es **compatible indeterminado** y la **solución general** del mismo es

$$S = \{(11k - 14,\ 7k - 12,\ k),\ \text{con } k \in \mathbb{R}\}.$$

3. Resolver

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 7y + z - u = -1 \\ 3x - 2y + 4u = 8 \\ -x + y - 3z - u = -6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -11 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado es

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ \quad y - z - u = -3 \\ \quad z + \frac{1}{2}u = 2 \\ \quad 2u = 3 \end{cases}$$

Entonces, $u = \dfrac{3}{2}$, $z = \dfrac{5}{4}$, $y = -\dfrac{1}{4}$ y $x = \dfrac{1}{2}$.

El sistema es **compatible determinado**, con única solución $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$.

3.3 Determinantes

Determinantes de segundo y tercer orden

Dada una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el valor de su determinante se define como

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $|A| = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 = 8$.

Consideremos ahora una matriz cuadrada de tercer orden

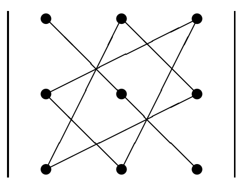
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces el determinante de A se define como

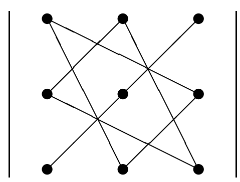
$$\det A = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

donde cada término consta de un producto de tres factores, uno de cada fila y uno de cada columna. Si a cada término le asociamos la permutación σ de $\{1, 2, 3\}$ determinada por los subíndices (por ejemplo, al término $a_{11}a_{23}a_{32}$ le asociamos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$) entonces se asigna a ese término el signo $(-1)^s$, donde s es el número de inversiones de la permutación σ.

Para obtener rápidamente el valor de $\det A$, puede aplicarse la siguiente regla práctica, llamada regla de Sarrus:



Signo +



Signo −

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot (-6) + (-4) \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-5) - ((-5) \cdot 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 \cdot (-6) + 4 \cdot 3 \cdot 2) = -95.$$

Determinantes de orden n

Sea dada una matriz cuadrada de orden n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Consideremos todos los productos posibles de n elementos de esta matriz de modo que en cada producto haya un factor de cada fila y uno de cada columna, o sea, productos de la forma

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

donde los subíndices α_1, α_2, ..., α_n forman una permutación de los números 1, 2 , ..., n. Hay $n!$ productos de esta forma.

A cada producto de este tipo se le adjunta un signo + ó un signo − según que la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

sea de clase par o impar, respectivamente, esto es, se considera el número

$$(-1)^s a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n},$$

donde s es el número de inversiones de σ.

Definición 3.3.1 *Se llama determinante de la matriz cuadrada A a la suma de los $n!$ productos de la forma $(-1)^s a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$. Se nota* $\det A$ *ó* $|A|$.

$$\det A = |A| = \sum (-1)^s a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

$\det A$ *se dice un determinante de orden n.*

Ejemplo

Calcular

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Los productos que no se anulan son: $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$ y $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42}$, además el número de inversiones de 1324 es 1 y el número de inversiones de 1342 es 2, luego,

$$\det A = (-1)^1 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44} + (-1)^2 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42} = -(-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 2 + 1 = 3.$$

Para $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Para $n = 3$, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} +$

$+(-1)^2 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^2 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} =$ $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$, resultado que puede obtenerse aplicando la regla de Sarrus para el cálculo de determinantes de orden 3.

Es fácil convencerse de que la definición de determinante es completamente ineficiente para calcular determinantes de orden n, incluso para valores de n no muy grandes, por lo que es necesario establecer algunas propiedades de los determinantes que faciliten su cálculo.

El caso más simple de cálculo de un determinante es el caso del determinante de una matriz **triangular** ($A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$; es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ cuando $i < j$ y triangular, si es triangular superior o triangular inferior):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Todos los términos del determinante se anulan excepto el formado por el producto de los elementos de la diagonal principal, luego

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Propiedades

Vamos a ver ahora algunas propiedades elementales de los determinantes que serán de utilidad para hallar métodos para calcularlos.

Propiedad 1 *El determinante de una matriz coincide con el determinante de su traspuesta. Es decir,* $\det A = \det A^T$.

De la Propiedad 1 se deduce que a toda propiedad de un determinante relativa a las columnas le corresponde una análoga para las filas, y recíprocamente, puesto que las columnas (filas) de una matriz son las filas (columnas) de la matriz traspuesta. En lo que sigue indicaremos las propiedades de los determinantes únicamente para las columnas pero sabemos, por lo anterior, que para las filas valen propiedades análogas.

Propiedad 2 *Si una de las columnas de la matriz A está constituida por ceros, entonces* $\det A = 0$.

Propiedad 3 *Si A' es la matriz que se obtiene de la matriz A intercambiando dos columnas, entonces* $\det A' = -\det A$.

Propiedad 4 *Si A es una matriz con dos columnas iguales, entonces* $\det A = 0$.

Propiedad 5 *Si A' es la matriz que se obtiene multiplicando todos los elementos de una columna de la matriz A por un número k, entonces* $\det A' = k \cdot \det A$.

Propiedad 6 *Si A es una matriz que tiene dos columnas proporcionales, entonces* $\det A = 0$.

Propiedad 7 *Si $A = (a_{ij})$ y la columna r-ésima se puede expresar $a_{ir} = b_{ir} + c_{ir}$, $1 \leq i \leq n$, entonces* $\det A = \det B + \det C$ *donde B y C coinciden con A salvo en la columna r-ésima, en la que B tiene los elementos b_{ir} y C tiene los elementos c_{ir}, $1 \leq i \leq n$.*

Sea A una matriz de orden $m \times n$, si indicamos con $C_1, C_2, \ldots, C_n$ las columnas de A, diremos que la columna C_i es combinación lineal de las columnas C_j y C_k, con $1 \leq j, k \leq n$, si existen números α, β tales que $C_i = \alpha \cdot C_j + \beta \cdot C_k$.

Ejemplo

(a) En $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C_3 = 2 \cdot C_1 + C_2$. (b) En $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = 0 \cdot C_1$.

(c) En $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$, $C_3 = -2 \cdot C_1$.

Propiedad 8 *Si en una matriz A una columna es combinación lineal de otras, entonces* $\det A = 0$.

Propiedad 9 *Si A' es la matriz que se obtiene al sumar a una columna de una matriz A una combinación lineal de otras columnas de A, entonces* $\det A' = \det A$.

Cálculo de determinantes

De las propiedades anteriores resulta que si se pasa de una matriz A a otra matriz por medio de una operación elemental, entonces

(I) El determinante cambia de signo si se intercambian dos columnas (filas).

(II) El determinante queda multiplicado por un escalar no nulo si se reemplaza una columna (fila) por un múltiplo no nulo de esa columna (fila).

(III) El determinante no varía si a una columna (fila) se le suma un múltiplo de otra.

Por consiguiente, un método para calcular el determinante de una matriz A consiste en transformar A en una matriz A' triangular, cuyo determinante es de cálculo inmediato. Según lo anterior, $\det A$ y $\det A'$ diferirán a lo sumo en un escalar.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \qquad C_1 \leftrightarrow C_2 \qquad - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \frac{1}{3}.C_1 \to C_1$$

$$= -3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \quad -2.C_1 + C_3 \to C_3 \quad -3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \quad -10.C_2 + C_3 \to C_3$$

$$= -3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{vmatrix} = \quad (-3) \cdot (-55) = 165$$

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (fila o columna).

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} y se nota M_{ij} al determinante de la matriz que se obtiene a partir de A suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna.
Se llama **complemento algebraico, cofactor o adjunto** del elemento a_{ij} de A al número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Teorema 3.3.1 *El determinante de una matriz $A = (a_{ij})$ es igual a la suma de los elementos de una línea (fila o columna) multiplicados cada uno de ellos por sus respectivos complementos algebraicos.*

Así, $\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$ es el desarrollo de $\det A$ por los elementos de la i-ésima fila y $\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ es el desarrollo de $\det A$ por los elementos de la j-ésima columna.

Corolario 3.3.1 *Si $A = (a_{ij})$, la suma de los elementos de una fila (columna) multiplicados cada uno de ellos por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de otra fila (columna) distinta, es cero.*

Es decir, $a_{s1} \cdot A_{t1} + a_{s2} \cdot A_{t2} + \cdots + a_{sn} \cdot A_{tn} = 0$ y $a_{1s} \cdot A_{1t} + a_{2s} \cdot A_{2t} + \cdots + a_{ns} \cdot A_{nt} = 0$, si $s \neq t$.

Dem. En efecto, $a_{s1} \cdot A_{t1} + a_{s2} \cdot A_{t2} + \cdots + a_{sn} \cdot A_{tn}$ es el desarrollo del determinante de la matriz que se obtiene reemplazando en A la fila t por la fila s. Esta matriz tiene dos filas iguales, y por consiguiente, su determinante es cero. □

Ejemplo

Calculemos el siguiente determinante **desarrollándolo por los elementos de una línea**. Para aplicar este método resulta conveniente que la fila o columna elegida tenga la mayor cantidad de ceros posible.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 13 + 0 + 0 + (-5)\cdot 3 = 11.$$

Si una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n tiene iguales a cero los elementos de una línea, excepto uno de ellos, el cálculo de su determinante se reduce, desarrollando por los elementos de esa línea al cálculo de un determinante de orden $n-1$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} -3\cdot F_2 + F_1 \to F_1 \\ -2\cdot F_2 + F_3 \to F_3 \\ -3\cdot F_2 + F_4 \to F_4 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$F_1 + F_3 \to F_1 = -\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{3+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -18.$$

Algunas propiedades más de los determinantes

Propiedad 10 *Si A es una matriz de orden n y α es un número entonces* $\det(\alpha\cdot A) = \alpha^n\cdot \det A$.

Propiedad 11 *El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de ellas, es decir, si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces* $\det(A\cdot B) = \det A\cdot \det B$.

3.4 Matriz Inversa

Si A es una matriz de orden n y si existe una matriz B tal que $A\cdot B = B\cdot A = I_n$, donde I_n es la matriz unidad de orden n, entonces A se dice **inversible** y B se llama la **inversa** de A. Se escribe $B = A^{-1}$.

No toda matriz tiene inversa. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ no existe ninguna matriz B tal que $A\cdot B = B\cdot A = I_n$.

En efecto, sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$. Entonces si fuese $A\cdot B = I_n$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, o sea,

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+u \\ 2x+z & 2y+u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde resulta

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ 2y + u = 0 \\ 2y + u = 1 \end{cases}$$

que es un sistema incompatible.

Propiedades

a) Si A es inversible, también lo es A^{-1} y $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) Si A es inversible, también lo es $\lambda \cdot A$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $(\lambda \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$.

c) Si A y B son matrices inversibles, entonces $A \cdot B$ también lo es y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

d) Si A es inversible, entonces $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Definición 3.4.1 *Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden n, definimos la* **matriz adjunta** *de A, y la notamos $Adj A$, de la siguiente manera: $Adj A = (A_{ij})$ donde A_{ij} es el complemento algebraico del elemento a_{ij}.*

$$Adj A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 3.4.1 *Sea A una matriz de orden n. Entonces A es inversible si y sólo si $\det A \neq 0$. En ese caso,*

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^T}{\det A}.$$

Dem. Veamos que $A \cdot (Adj\ A)^T = (Adj\ A)^T \cdot A = \det A \cdot I_n$. Si $A \cdot (Adj A)^T = (c_{ij})$ entonces $c_{ij} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn}$, donde A_{jk} es el complemento algebraico del elemento a_{jk}. Por lo tanto, según el teorema 3.3.1 y su corolario, resulta:

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Luego, $A \cdot (AdjA)^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I_n.$

Análogamente se prueba que $(AdjA)^T \cdot A = \det A \cdot I_n$. Por lo tanto, si $\det A \neq 0$,

$$A \cdot \frac{(AdjA)^T}{\det A} = \frac{(AdjA)^T}{\det A} \cdot A = I_n$$

y, por consiguiente,

$$A^{-1} = \frac{(AdjA)^T}{\det A}.$$

Recíprocamente, supongamos que A es inversible. Entonces existe una matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$. Por la Propiedad 11,

$$\det A \cdot \det (A^{-1}) = \det I_n.$$

Pero $\det I_n = 1$. Luego $\det A \cdot \det (A^{-1}) \neq 0$. De donde $\det A \neq 0$. □

Ejemplo

Averiguar si la matriz A es inversible. En caso afirmativo hallar su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det A = -2 \neq 0$, A es inversible. Su inversa es

$$A^{-1} = \frac{(AdjA)^T}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & 5/2 \\ -3/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa de una matriz aplicando operaciones elementales

Dada una matriz A de orden n, si aplicando un número finito de operaciones elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sobre sus filas se puede obtener la matriz unidad de orden n, entonces la matriz A es inversible y para calcular su inversa basta aplicar a la matriz unidad de orden n las mismas operaciones elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ y en el mismo orden. Si al aplicar operaciones elementales por filas a la matriz A, tratando de obtener la matriz unidad, se obtiene una fila nula, entonces A no es inversible.

Ejemplo

Decir si la matriz A es o no inversible, y en caso afirmativo, hallar su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \quad\Bigg|\quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} -3F_1 + F_2 \to F_2 \\ -4F_1 + F_3 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \quad\Bigg|\quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(1/3)F_2 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \quad\Bigg|\quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} F_2 + F_1 \to F_1 \\ -3F_2 + F_3 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad\Bigg|\quad \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(1/2)F_3 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad\Bigg|\quad \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} -(1/3)F_3 + F_1 \to F_1 \\ (5/3)F_3 + F_2 \to F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad\Bigg|\quad \left(\begin{array}{rrr} 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ -11/6 & -1/2 & 5/6 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Verificación:

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{rrr} 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ -11/6 & -1/2 & 5/6 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Resolución de sistemas lineales por determinantes. Regla de Cramer

Como aplicación del Teorema 3.4.1, vamos a probar que si el determinante de la matriz de los coeficientes de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas es distinto de cero, entonces el sistema tiene una única solución. Además vamos a dar una fórmula que expresa la solución única del sistema en función de los coeficientes y de los términos independientes.
Un sistema de n ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

es decir, puede escribirse $A \cdot X = B$, donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de orden $n \times n$ de los coeficientes del sistema, $X = (x_i)$ es la matriz de orden $n \times 1$ de las incógnitas y $B = (b_i)$ es la matriz de orden $n \times 1$ de los términos independientes.

Teorema 3.4.2 (Regla de Cramer) *Si* $\det A \neq 0$*, el sistema* $A \cdot X = B$ *es compatible determinado, y la única solución del sistema está dada por*

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A},$$

donde b_1*,* b_2*, ...,* b_n *son los elementos de la i-ésima columna.*

Dem. Si $\det A \neq 0$, entonces A es inversible. Entonces una solución del sistema $A \cdot X = B$ es $X = A^{-1} \cdot B$, ya que

$$A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = B.$$

Además, esta solución es única, pues si Z es solución del sistema, se tiene $A \cdot Z = B$, de donde $A^{-1} \cdot A \cdot Z = A^{-1} \cdot B$, esto es, $Z = A^{-1} \cdot B$.

De $X = A^{-1} \cdot B$, y teniendo en cuenta que $A^{-1} = \dfrac{(Adj A)^T}{\det A}$, resulta:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}\, b_1 + A_{21}\, b_2 + \cdots + A_{n1}\, b_n \\ \\ A_{12}\, b_1 + A_{22}\, b_2 + \cdots + A_{n2}\, b_n \\ \vdots \\ A_{1n}\, b_1 + A_{2n}\, b_2 + \cdots + A_{nn}\, b_n \end{pmatrix}.$$

Luego, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se verifica $x_i = \dfrac{A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + \cdots + A_{ni} \cdot b_n}{\det A}$, es decir,

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}.$$

$\square$

Ejemplo

Verificar si los siguientes sistemas son compatibles determinados, y en caso afirmativo, hallar la solución aplicando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x - 6y = 3 \\ x - 3y + z = 2 \\ 2y - 3z = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + u = 0 \\ 2x - z + 3u = 4 \\ 5y - z - u = 1 \\ 3x + 4y - 2z + 3u = 5 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Como $\det A = -4 \neq 0$, el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{9}{4}\,, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1}{4}\,, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1}{2}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

En este caso, $\det A = 0$, luego el sistema no puede resolverse por la regla de Cramer.

La expresión matricial de la solución es útil para diversos fines. Sin embargo hay que enfatizar que, para un sistema genérico dado, el método de Gauss es más rápido a los efectos del cálculo numérico.

3.5 Ejercicios

1. Construir matrices que cumplan las siguientes condiciones:

   a) $A = (a_{ij})$ de orden 2 tal que $a_{ij} = i^2 - 2j + 1$.

   b) $B = (b_{ij})$ de orden 3 tal que $b_{ij} - b_{ji} = 0$ si $i \neq j$, $b_{ij} = 0$ si $i = j$.

   c) $C = (c_{ij})$ de orden 2 tal que $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j=3 \\ 2 & \text{si } i+j \neq 3 \end{cases}$.

   d) $D = (d_{ij})$ de orden 4 tal que $d_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{si } i>j \\ 0 & \text{si } i<j \\ -2j & \text{si } i=j \end{cases}$.

2. Resolver, si es posible, las siguientes ecuaciones matriciales:

   a) $\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & -c+1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

   b) $\begin{pmatrix} d & c \\ a-c & a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 2d & c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) $\begin{pmatrix} a-b & -1 & 2 \\ 1 & b & -a \\ 0 & c & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ -c & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Efectuar los siguientes productos entre matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calcular: $A \cdot B - B \cdot A$, $B \cdot C - C \cdot B$ y $A \cdot C - C \cdot A$.

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = (c_{ij})$ de orden 2×3, tal que $c_{ij} = i + j$.

   a) ¿ Es posible efectuar $A \cdot C$?

   b) Calcular $(C \cdot A)^T - 3 \cdot B$.

6. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice **diagonal** si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$ y **escalar** si $A = \lambda \cdot I_n$. Además, si A es una matriz cuadrada de orden n y $k \in \mathbb{N}$, definimos la **potencia natural** como sigue: $A^1 = A$, $A^{k+1} = A^k \cdot A$ para $k \geq 1$.

   Decidir la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones justificando su respuesta.

   Si A, B, C son matrices cuadradas de orden n se tiene:

   a) $[2 \cdot A^T \cdot (3 \cdot B) \cdot C]^T = 6 \cdot (B \cdot C)^T \cdot A$.
   b) $(2 \cdot A + B \cdot C)^T = 2 \cdot A^T + B \cdot C$, donde B y C son matrices diagonales.
   c) Si $A \cdot B = 0$, entonces $B \cdot A = 0$.
   d) $\left((A^T)^2\right)^T = A^2$.

7. a) Mostrar que:
      i) Si A es una matriz $m \times n$, entonces el producto $A \cdot A^T$ está definido y es una matriz simétrica .
      ii) La suma de matrices simétricas es una matriz simétrica.
      iii) El producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica, si las matrices conmutan.

   b) Hallar los valores de x , y , z de modo que la siguiente matriz sea simétrica:

$$\begin{pmatrix} x & x+y & x-z \\ x-y & y & y+z \\ y+z-2 & z-y & z \end{pmatrix}$$

8. Resolver y clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Si el sistema es compatible indeterminado, hallar una solución particular del mismo.

   a) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -5 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = -1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 4t = 3 \\ 2x + 3y + 6z + 8t = 5 \\ x - 6y - 9z - 20t = -11 \\ 4x + y + 4z + 2t = 2 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} 2x - y + 3z - t + u = 2 \\ 4x - 2y + 6z - 2t - 2u = 4 \\ 2x - y - z + 2t = 0 \\ \qquad\quad 4z - 3t + u = 2 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x + 3y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$

   f) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2u = -1 \\ 2x + 3y + 4z - 3u = -2 \\ 2x + 6y + 9z - 6u = -3 \\ -2x - 3y - 4z + 3u = 2 \end{cases}$

9. Hallar el valor de λ para el cual los siguientes sistemas son compatibles determinados, indeterminados ó incompatibles:

a) $\begin{cases} x + y - u = 2 \\ 3x + 2y + z - 8u = 3 \\ 5x - \lambda z = 1 \\ z - 5u = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y + 2z - t = 1 \\ 2x + 5y - z = 6 \\ x + y - 2z = 4 \\ 3x + 5y - 2z + \lambda t = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + \lambda y + \lambda z = 5 \\ 4x + \lambda y = 5 \end{cases}$

10. a) De una fiesta se van 21 chicas y quedan 2 varones por cada mujer. Más tarde se van 63 chicos y quedan 5 mujeres por cada varón. ¿ Cuántos chicos y cuántas chicas había al principio ?

    b) El dueño de una tienda, al hacer el inventario, en lugar de contar el número de bicicletas y triciclos existentes, cuenta los pedales y las ruedas. Contó 153 ruedas y 136 pedales.
    ¿ Cuántas bicicletas y triciclos tenía ?

    c) Un frasco de remedios con 20 tabletas iguales pesa 270 gramos. El mismo frasco, con 15 tabletas pesa 240 gramos. ¿ Cuánto pesa el frasco vacío ?

    d) Si Ana, Beatriz, César y Damián juntan todo el dinero que tienen, suman en total 32046 pesos. Si Ana tuviera seis pesos más de los que tiene y Beatriz tuviera seis pesos menos de los que tiene y César tuviera seis veces lo que tiene y Damián tuviera la sexta parte de lo que tiene entonces las cantidades de dinero que tendría cada uno serían iguales entre sí. ¿ Cuánto dinero tiene cada uno ?

    e) Alicia y Beatriz llevaban $50\,\$$ cada una. Alicia compró $3\,Kg.$ de helado y un postre. Para poder pagar tuvo que pedirle $4\,\$$ prestados a Beatriz.
    Beatriz compró $1\,Kg.$ de helado y un postre del mismo precio que el de Alicia; después de pagar y prestarle a Alicia los $4\,\$$, le quedaron $16\,\$$. ¿ Cuánto costaba el postre ?

11. Calcular:

    a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

12. Hallar los valores de x tales que $\det A = 0$.

    a) $A = \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ 1 & x-4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

13. Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix}$ y $\det A = 5$ decir, sin calcular los determinantes, por qué valen las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & m \\ a & b & c \end{vmatrix} = 5$ b) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2\,d & 2\,e & 2\,f \\ -g & -h & -m \end{vmatrix} = 10$

c) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix} = 5$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3\,a & e-3\,b & f-3\,c \\ 2g & 2h & 2m \end{vmatrix} = 10$

14. Calcular, triangulando previamente la matriz, los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

15. Calcular, desarrollando por los elementos de la fila ó columna con más ceros, el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

16. Calcular los siguientes determinantes haciendo previamente todos los elementos de una fila o columna cero excepto uno, y desarrollando luego por esa línea.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

17. Si A es una matriz de orden 3 y $\det A = 2$, hallar $\det\left(\frac{1}{2}\cdot A\right)$ y $\det\left(A \cdot A^T\right)$.

18. Calcular $A \cdot B$, $\det A$, $\det B$, $\det(A\cdot B)$ y $\det(A+B)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿ Es cierto que $\det(A+B) = \det A + \det B$? Justificar la respuesta.

19. Dadas las siguientes matrices decir si son o no inversibles, y en caso afirmativo, hallar su inversa:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

20. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,a & -1 \\ 2 & 2\,a & -(a+3) \\ 0 & -3\,a & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

    Hallar los valores de a, de modo que $A \cdot B$ no sea inversible. Para $a = 1$, calcular $A^{-1} \cdot B$.

21. a) Si A es una matriz de orden 4 y $\det A = 3$, hallar $\det\,[(3 \cdot A^2)^{-1} \cdot A^T]$.

    b) Sabiendo que A y B son matrices de orden cuatro; $\det A = 5$ y $\det B = 2$, calcular $\det\,[(5 \cdot A^{-1} \cdot B^T)^{-1}]$.

22. Hallar las inversas de las siguientes matrices utilizando operaciones elementales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

23. a) Determinar, usando la regla de Cramer, para qué valores de λ tiene soluciones no triviales el sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + \lambda y + z + t = 0 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 0 \end{cases}$$

    b) ¿ Para qué valores de $n \in \mathbb{Z}$, la solución del siguiente sistema satisface la condición $x > 0$ e $y < 0$?

$$\begin{cases} n\,x - y = 5 \\ 2\,x + 3\,n\,y = 7 \end{cases}$$

4 Vectores

4.1 Segmentos orientados. Vectores libres

Consideremos A y B dos puntos del Plano o del Espacio y sea $\overline{AB}$ el segmento determinado por ellos. Si A y B están dados en cierto orden, A el origen y B el extremo, decimos que $\overline{AB}$ está **orientado**. (Ver Figura 12)

Definición 4.1.1 *Se llama* **vector** *a todo segmento orientado. Lo notaremos* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

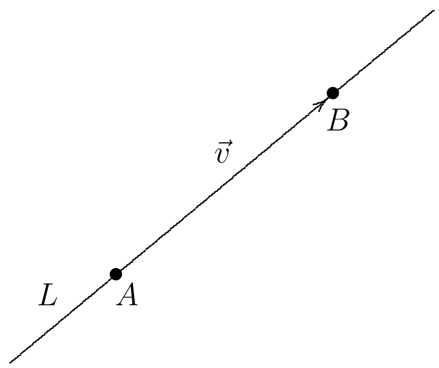


Figura 12

Si $A \neq B$, la recta que contiene al vector, y todas sus paralelas, determinan la **dirección** del mismo; y la orientación sobre la recta, definida por la semirrecta con origen A que contiene a B, el **sentido** del vector. Todos los vectores situados sobre una misma recta o rectas paralelas tienen igual dirección y se dicen **paralelos**.
A la longitud del segmento $\overline{AB}$ que define al vector $\overrightarrow{AB}$ se la denomina el **módulo** de $\overrightarrow{AB}$ y lo notamos $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ vectores paralelos no contenidos en la misma recta y L la recta determinada por A y B. Si el punto C que se obtiene al proyectar B' sobre L en forma paralela al segmento $\overline{A'A}$, pertenece a la semirrecta con origen A que contiene a B, diremos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ tienen el mismo sentido. En caso contrario diremos que tienen sentidos opuestos.
Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ están contenidos en L, el caso se reduce al anterior por traslación de $\overrightarrow{A'B'}$ a una recta L', paralela a L. Ver Figura 13.

Observación
Si $A = B$, entonces el segmento se reduce a un punto. En este caso no puede hablarse de vector pues no está determinada su dirección. A pesar de ello, llamaremos a $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ **vector nulo** y lo notaremos $\vec{0}$.

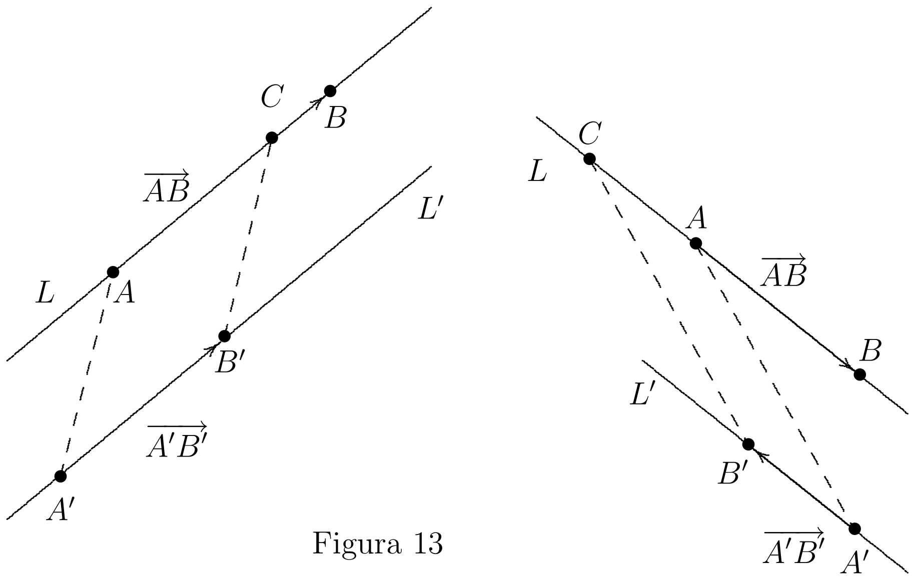


Figura 13

Observaciones

1. $\|\overrightarrow{AB}\| \geq 0$, para todo par de puntos A y B.
   Si $A = B$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AA}\| = \|\vec{0}\| = 0$, lo que caracteriza al vector nulo como aquel vector que tiene módulo cero.

2. Si $A \neq B$, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto.

Igualdad de vectores

Definición 4.1.2 *Diremos que dos vectores no nulos,* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *son* **iguales** *y notaremos* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ *si:*

1) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$,

2) $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *tienen la misma dirección,*

3) $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *tienen el mismo sentido.*

Con este criterio de igualdad todos los vectores pueden ser trasladados de modo que tengan un mismo origen O . De esta manera, cada vector y sus iguales tendrán un **único representante** entre los vectores con origen O. Se dice entonces que trabajamos con **vectores libres**.
Al conjunto de los vectores libres del Plano o del Espacio los notaremos E_2 y E_3, respectivamente. Si no es necesario distinguirlos los notaremos V.

Ejemplo
Si consideramos los segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A''B''}$, como muestra la Figura 14, entonces $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OS'}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OS}$ y $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{OS''}$.

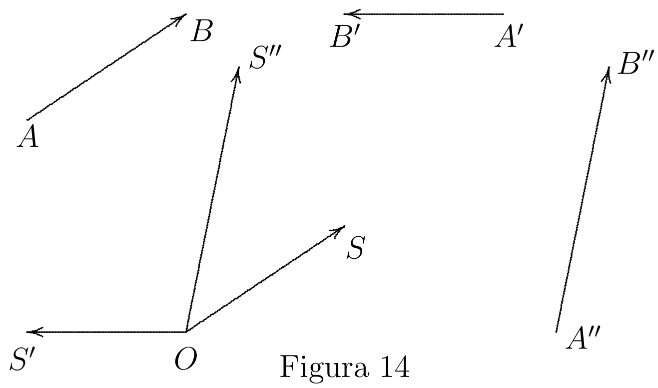


Figura 14

Operaciones con vectores

Suma de vectores

Definición 4.1.3 *Sean* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *vectores del Plano o del Espacio. Podemos suponer, al trabajar con vectores libres, que* $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ *y* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. *Se llama* **suma** *de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *y la notamos* $\vec{u} + \vec{v}$ *al vector* $\overrightarrow{OC}$.

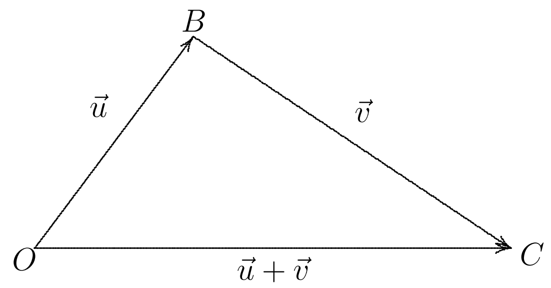


Figura 15

Propiedades

$V_1)$ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.

$V_2)$ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

$V_3)$ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, para todo $\vec{u} \in V$.

$V_4)$ Para cada $\vec{u} \in V$ existe un único $\vec{u'} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{0}$. Notaremos $\vec{u'} = -\vec{u}$.

Observaciones

1. Por definición escribiremos $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

2. Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, entonces $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

3. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se consideran con origen común O, es decir, $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ con O, A y B puntos distintos y no alineados, entonces $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$ de modo que O, A, B y C forman un paralelogramo. En tal caso decimos que para sumar vectores usamos la **regla del paralelogramo**.

4. Para efectuar geométricamente la suma de varios vectores, basta dibujar a los mismos de manera que el origen de cada uno coincida con el extremo del precedente. El vector que une el origen del primero con el extremo del último, es el vector suma.

Ejemplo

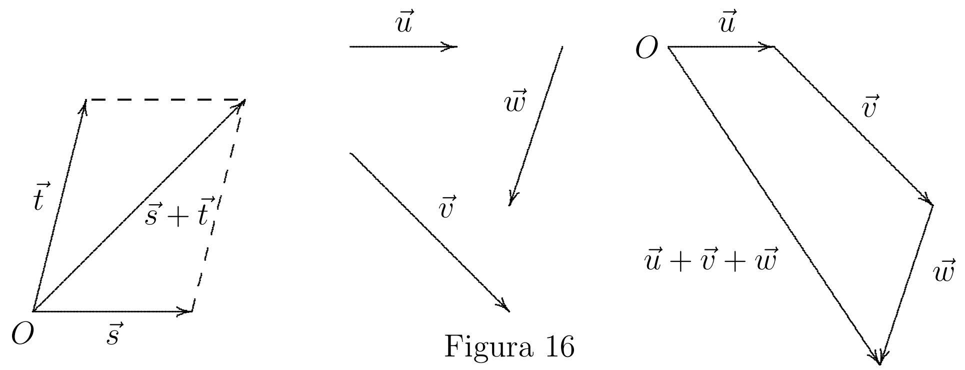


Figura 16

Producto de un escalar por un vector

Definición 4.1.4 *Sea* $\vec{v}$ *un vector y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *definimos* **el producto de** λ **por** $\vec{v}$ *y lo notamos* $\lambda.\vec{v}$ *como sigue:*

- *Si* $\lambda = 0$ *ó* $\vec{v} = \vec{0}$, *entonces* $\lambda.\vec{v} = \vec{0}$.
- *Si* $\lambda \neq 0$ *y* $\vec{v} \neq \vec{0}$, *entonces*

  a) $\lambda.\vec{v}$ *posee igual dirección que* $\vec{v}$,

  b) $\|\lambda.\vec{v}\| = |\lambda| \; \|\vec{v}\|$,

  c) $\lambda.\vec{v}$ *posee igual sentido que* $\vec{v}$, *si* $\lambda > 0$ *y sentido opuesto, si* $\lambda < 0$.

Ejemplo

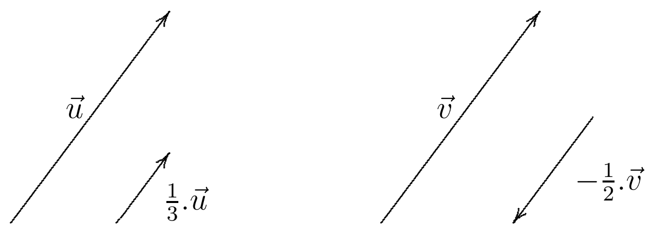


Figura 17

Propiedades

$V_5)$ $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

$V_6)$ $(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V$.

$V_7)$ $(\lambda\, \mu).\vec{v} = \lambda.(\mu.\vec{v})$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$.

$V_8)$ $1.\vec{v} = \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in V$.

Observaciones

1. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, el vector $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$, denominado **versor** $\vec{u}$, tiene igual dirección y sentido que $\vec{u}$ y módulo 1.
2. Dos vectores no nulos $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son **paralelos** si $\vec{v_1} = \lambda.\vec{v_2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $-(\lambda.\vec{u}) = (-\lambda).\vec{u} = \lambda.(-\vec{u})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{u} \in V$. En particular: $-\vec{u} = (-1).\vec{u}$.

Definición 4.1.5 *Un vector* $\vec{u} \in V$ *se dice una* **combinación lineal** *de los vectores* $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ *si existen escalares* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *tales que* $\vec{u} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_n}$.

Bases de E_2 y E_3

Si consideramos en el Plano dos vectores $\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$ no nulos ni paralelos (podemos suponerlos con origen común O), todo vector $\vec{u}$ del Plano se escribe en forma única como combinación lineal de $\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$. En tal caso diremos que $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ forma una **base** de E_2 .

En el Espacio, $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ es base si, y sólo si $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ y $\vec{b_3}$ son no nulos y no paralelos a un mismo plano. Si los pensamos con origen común $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ es base si, y sólo si $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ y $\vec{b_3}$ son no coplanares.
Si en V a los vectores de una base B los consideramos en cierto orden, diremos que B es una **base ordenada**.

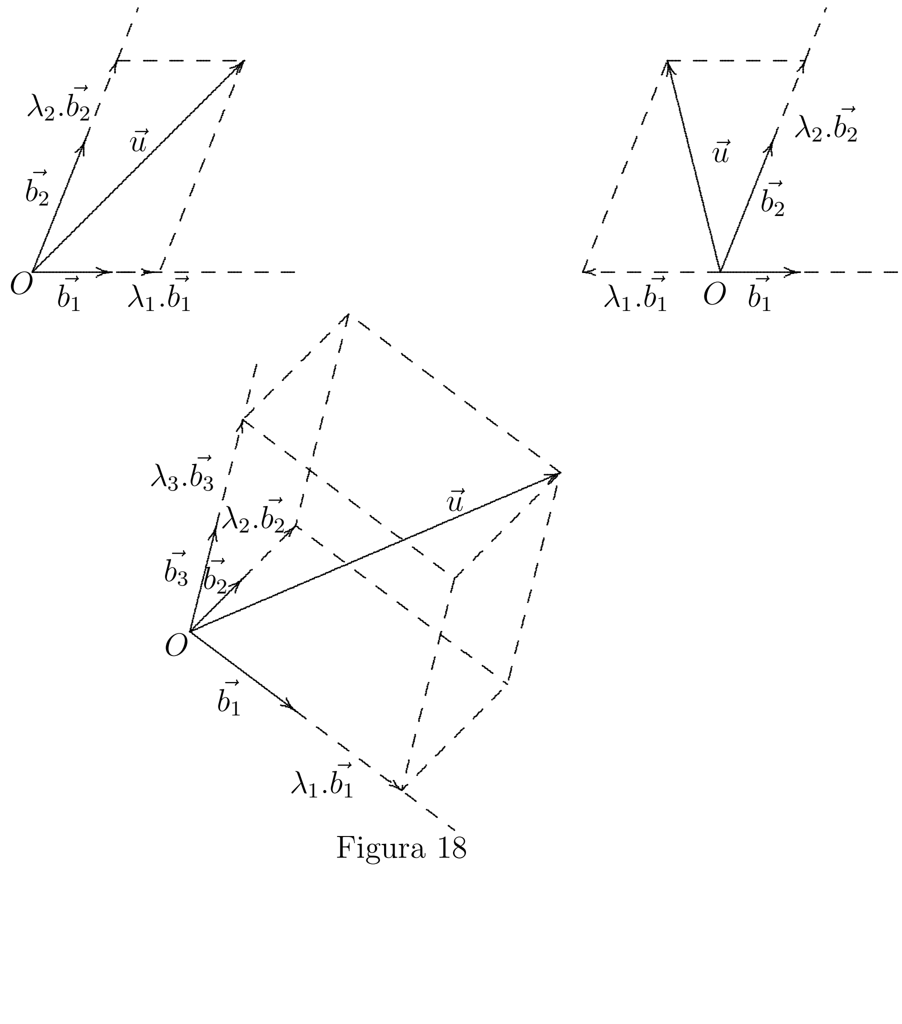


Figura 18

Los elementos de V son de naturaleza geométrica, queremos obtener una expresión numérica de los vectores a fin de efectuar con ellos cálculos en forma eficiente.
Si $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ es una base ordenada del Plano, todo vector $\vec{v}$ se escribe de manera única en la forma $\vec{v} = \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2}$. Entonces al vector $\vec{v}$ le podemos asociar el par ordenado (λ_1, λ_2). Los números reales λ_1, λ_2 se denominan las **componentes** del vector $\vec{v}$ en la base B. Notamos $(\vec{v})_B = (\lambda_1, \lambda_2)$ ó en forma matricial $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Sea O un punto del Plano y $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ una base ordenada de E_2. La base y O determinan, en el Plano, un sistema de coordenadas cartesianas (O, XY).

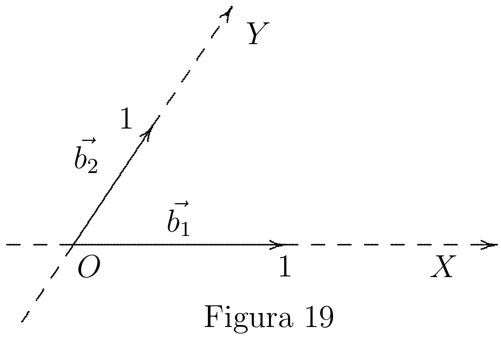


Figura 19

Recíprocamente, un sistema (O, XY) de coordenadas cartesianas en el Plano, determina una base ordenada $\{\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}\}$ de E_2.

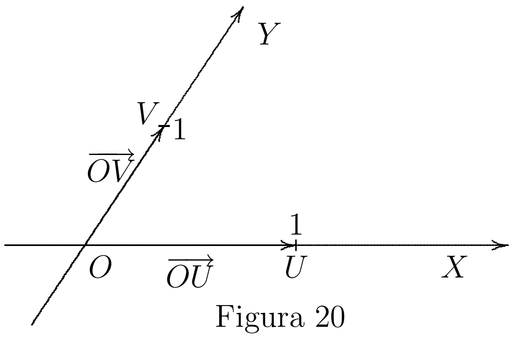


Figura 20

Dado un punto P del Plano veamos que relación existe entre sus coordenadas en el sistema (O, XY) y las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base B.
Sea P un punto de coordenadas (λ_1, λ_2) en el sistema (O, XY). Si $P_1(\lambda_1, 0)$, $P_2(0, \lambda_2)$ y consideramos los vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$, entonces se tiene que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2}$. Por lo tanto $(\overrightarrow{OP})_B = (\lambda_1, \lambda_2)$. Como también vale la recíproca concluimos que

$$P(\lambda_1, \lambda_2) \text{ en } (O, XY) \text{ si, y sólo si } (\overrightarrow{OP})_B = (\lambda_1, \lambda_2).$$

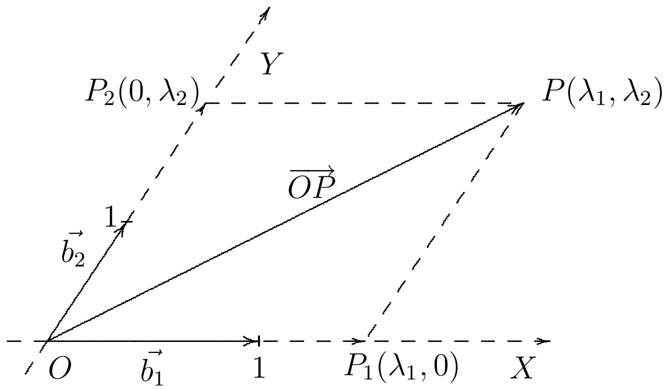


Figura 21

Veamos que fijados O y la base ordenada $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$, podemos identificar al vector $\vec{u} = \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2}$ con el par ordenado (λ_1, λ_2) y escribir $\vec{u} = (\lambda_1, \lambda_2)$.
Debemos definir una aplicación biyectiva de E_2 y $\mathbb{R}^2$ que respete las operaciones.

Si $\vec{u} = \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2}$, $\varphi : E_2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(\vec{u}) = (\lambda_1, \lambda_2)$, define una función biyectiva. Notemos que si $\vec{u} = \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2}$, $\vec{v} = \mu_1.\vec{b_1} + \mu_2.\vec{b_2}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2}) + (\mu_1.\vec{b_1} + \mu_2.\vec{b_2}) = (\lambda_1 + \mu_1).\vec{b_1} + (\lambda_2 + \mu_2).\vec{b_2}$ y $\lambda.\vec{u} = \lambda.(\lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2}) = (\lambda\,\lambda_1).\vec{b_1} + (\lambda\,\lambda_2).\vec{b_2}$. Luego $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ y $\varphi(\lambda.\vec{u}) = \lambda.\varphi(\vec{u})$, algebrizando a $\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$(\lambda_1, \lambda_2) + (\mu_1, \mu_2) = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2)$$

$$\lambda.(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda\,\lambda_1, \lambda\,\lambda_2)$$

En lo que sigue trabajaremos con **sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales**, es decir fijamos en el Plano y el Espacio un punto O y las bases ordenadas $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$; $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ respectivamente, cuyos vectores se representan por segmentos perpendiculares dos a dos y de módulo unitario.

Sea (O, XY) un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ puntos del Plano. Consideremos el vector $\overrightarrow{AB}$, queremos encontrar las componentes (λ_1, λ_2) del mismo, es decir las coordenadas del punto P de modo que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

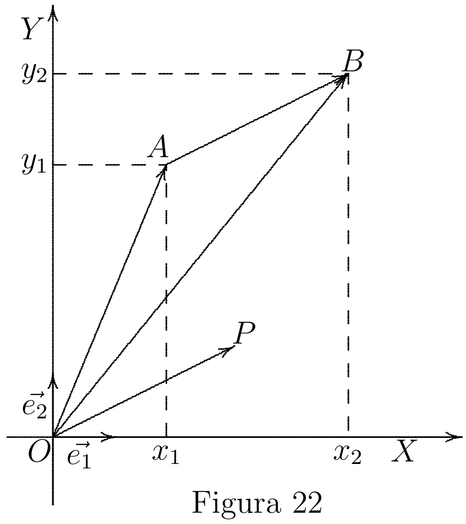


Figura 22

Como $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ se tiene que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB}$ y entonces $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
En función de las componentes este resultado se expresa como: $(\lambda_1, \lambda_2) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1\,,\, y_2 - y_1)$.
En forma análoga para el caso de E_3, el vector $\overrightarrow{OP}$ que representa a $\overrightarrow{AB}$ tiene componentes $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, donde $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$.

4.2 Proyección ortogonal y producto escalar

a) **Proyección ortogonal de un punto sobre una recta**

Sea L una recta y P un punto.
- Si $P \in L$, entonces $proy_L P = P$.
- Si $P \notin L$, entonces $proy_L P = L \cap L'$, donde L' es la única recta perpendicular a L que pasa por P e intersecta a L.

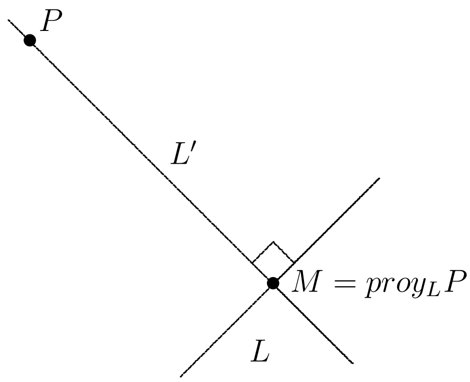


Figura 23

b) **Proyección ortogonal de un vector sobre otro**

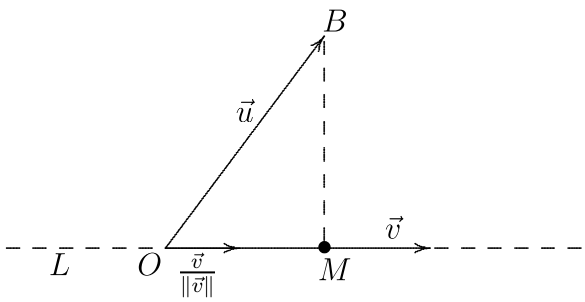


Figura 24

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores, $\vec{v} \neq \vec{0}$, (podemos suponerlos con origen común) y consideremos la recta L que contiene a $\vec{v}$. Fijemos sobre L, como unidad de medida y sentido positivo, el versor $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Ver Figura 24.

Si M es la proyección ortogonal de B sobre L, llamamos **proyección ortogonal** de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, y la notamos $proy_{\vec{v}}\,\vec{u}$, a la abscisa de M.

Observaciones

1. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos con origen común O y θ es la medida radial del ángulo por ellos formado, $0 \leq \theta \leq \pi$, se tiene que: $proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\cos\theta$.

2. La proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ puede ser positiva, negativa o nula, según la medida del ángulo θ, como lo indica la Figura 25.

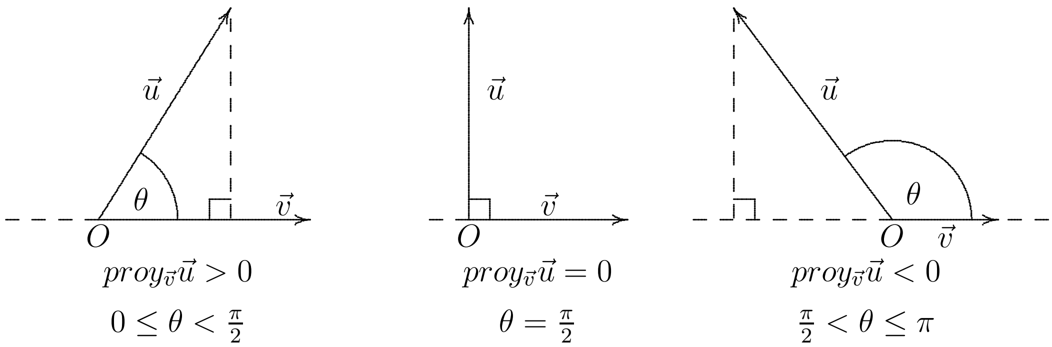


Figura 25

Propiedades

1) $proy_{\vec{v}}\,(\vec{u} + \vec{w}) = proy_{\vec{v}}\,\vec{u} + proy_{\vec{v}}\,\vec{w}$.

2) $proy_{\vec{v}}\,(\lambda.\vec{u}) = \lambda\, proy_{\vec{v}}\,\vec{u}\,;\quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 4.2.1 *Dados dos vectores* $\vec{u}$, $\vec{v}$; $\vec{v} \neq \vec{0}$, *llamaremos* **vector proyección** *de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v}$ *al vector* $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\,\vec{u}} = (proy_{\vec{v}}\,\vec{u}).\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. *En consecuencia llamaremos* **longitud de la proyección** *de* $\vec{u}$ *sobre* $\vec{v}$ *al número real* $\left\|\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\vec{u}}\right\|$.

Producto escalar

Definición 4.2.2 *Sean* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *vectores de* V. *Llamamos* **producto escalar** *de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *y lo notamos* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ *al número real definido como sigue:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0 & si\ \ \vec{u} = \vec{0}\ \ ó\ \ \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\theta & si\ \ \vec{u} \neq \vec{0}\ \ y\ \ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

θ *es la medida del ángulo comprendido entre* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

Propiedades

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces se verifican:

a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$,

b) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$,

c) $\langle \lambda.\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,

d) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$. Además $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$.

De la definición de producto escalar se deduce:

a) Si $\vec{u} = \vec{v}$, entonces $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$ y por lo tanto $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$.

b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ ó $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. En tal caso diremos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **ortogonales**.

c) Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, de la definición de proyección se obtiene:

i) $proy_{\vec{v}}\, \vec{u} = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|}$ ii) $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\, \vec{u}} = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}.\vec{v}$ iii) $\left\| \overrightarrow{proy_{\vec{v}} \vec{u}} \right\| = \dfrac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{v}\|}$

Producto escalar en término de las componentes de los vectores

Si trabajamos en E_3 y consideramos la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ entonces

$$\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

por lo tanto si $\vec{u} = x_1.\vec{e_1} + x_2.\vec{e_2} + x_3.\vec{e_3}$ y $\vec{v} = y_1.\vec{e_1} + y_2.\vec{e_2} + y_3.\vec{e_3}$ se tiene, aplicando sucesivamente las propiedades de producto escalar, que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Ejemplo

Si $\vec{u} = 2.\vec{e_1} - \vec{e_2} + 3.\vec{e_3}$ y $\vec{v} = 3.\vec{e_1} + 2.\vec{e_2} - \vec{e_3}$ entonces $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2.3 + (-1).2 + 3.(-1) = 1$.

Nota: En el caso de E_2 el producto escalar de dos vectores en término de sus componentes se obtiene a partir de la fórmula $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Observaciones

1. $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

2. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $proy_{\vec{v}}\, \vec{u} = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$.

3. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos entonces el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene a partir de $\cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|} = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$.

Sea $\vec{u} = x_1.\vec{e_1} + x_2.\vec{e_2} + x_3.\vec{e_3}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$. Se tiene que:

$x_1 = \langle \vec{u}, \vec{e_1} \rangle = \|\vec{u}\| \cos\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos\alpha$, α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{e_1}$.

$x_2 = \langle \vec{u}, \vec{e_2} \rangle = \|\vec{u}\| \cos\beta = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos\beta$, β es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{e_2}$.

$x_3 = \langle \vec{u}, \vec{e_3} \rangle = \|\vec{u}\| \cos\gamma = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cos\gamma$, γ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{e_3}$.

Por lo tanto tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$ se denominan los **cosenos directores** de $\vec{u}$. Ver Figura 26.

Observar que $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma)$, por lo que $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

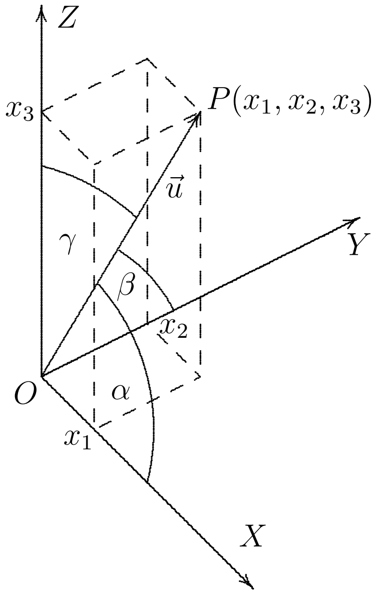


Figura 26

Ejemplos

1. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 1, 5)$ y $\vec{w} = (4, 7, -1)$. Hallar:

   a) $-\vec{u} + \vec{v} + 2.\vec{w}$.
   $-\vec{u} + \vec{v} + 2.\vec{w} = -(1, 2, -3) + (2, 1, 5) + 2.(4, 7, -1) = (-1, -2, 3) + (2, 1, 5) + (8, 14, -2) = (9, 13, 6)$.

   b) Un versor en la dirección de $\vec{v} + \vec{w}$, pero de sentido contrario.
   El versor buscado es $\vec{t} = -\dfrac{\vec{v} + \vec{w}}{\|\vec{v} + \vec{w}\|} = -(\dfrac{3}{\sqrt{29}}, \dfrac{4}{\sqrt{29}}, \dfrac{2}{\sqrt{29}})$.

   c) $\overrightarrow{proy_{\vec{w}}(\vec{u} + \vec{v})}$.
   $proy_{\vec{w}}(\vec{u} + \vec{v}) = \dfrac{\langle\, \vec{u} + \vec{v}\,,\, \vec{w}\,\rangle}{\|\vec{w}\|} = \dfrac{\langle\, (3, 3, 2)\,,\, (4, 7, -1)\,\rangle}{\sqrt{66}} = \dfrac{31}{\sqrt{66}}$. Por lo tanto
   $\overrightarrow{proy_{\vec{w}}(\vec{u} + \vec{v})} = \dfrac{31}{\sqrt{66}}.\dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

   d) Los cosenos directores de $\vec{u}$.
   Como $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (cos\,\alpha, \cos\,\beta, cos\,\gamma) = (\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{-3}{\sqrt{14}})$, entonces

$$cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad cos\,\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \text{ y } cos\,\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (1, t, -1)$ y $\vec{v} = (-1, t, 2)$, hallar $t \in \mathbb{R}$ para los cuales $|proy_{\vec{u}+\vec{v}}(\vec{u} - \vec{v})| = 1$.

   Como $\vec{u} - \vec{v} = (2, 0, -3)$, $\vec{u} + \vec{v} = (0, 2\,t, 1)$ y $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{4\,t^2 + 1}$ se tiene que

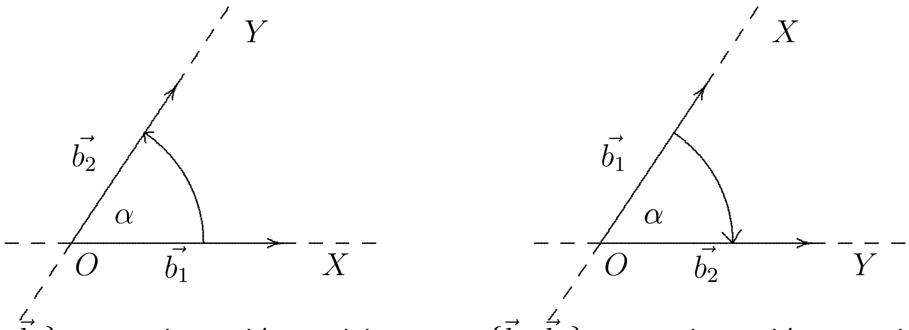
   $$|proy_{\vec{u}+\vec{v}}(\vec{u} - \vec{v})| = \left| \frac{\langle\, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\,\rangle}{\|\vec{u} + \vec{v}\|} \right| = \left| \frac{\langle\, (2, 0, -3), (0, 2\,t, 1)\,\rangle}{\sqrt{4\,t^2 + 1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{4\,t^2 + 1}} = 1.$$

   Elevando ambos miembros al cuadrado y operando se obtiene $t^2 = 2$, por lo que $t = \pm\sqrt{2}$.

4.3 Orientaciones del Plano y el Espacio

Dados en el Plano un punto O y una base ordenada $B = \{\vec{b_1}\,, \vec{b_2}\}$, queda determinado un ángulo convexo α. Diremos que $B = \{\vec{b_1}\,, \vec{b_2}\}$ tiene **orientación positiva** si el ángulo convexo que hay que "rotar" $\vec{b_1}$ para superponerlo a $\vec{b_2}$ es positivo. En caso contrario diremos que $B = \{\vec{b_1}\,, \vec{b_2}\}$, tiene **orientación negativa**. Ver Figura 27.

Ejemplo
Sea $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ una base ordenada del Plano.



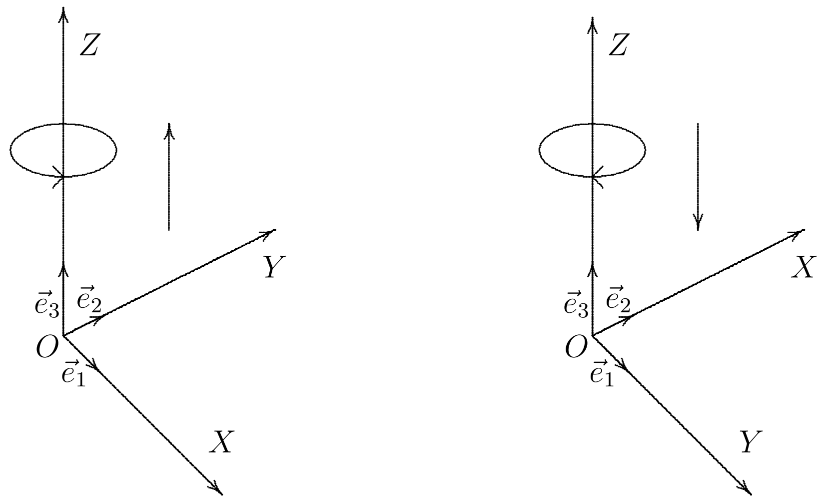
$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ con orientación positiva $\qquad$ $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ con orientación negativa

Figura 27

Observación
Si $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ tiene orientación positiva entonces $\{\vec{b_1}, -\vec{b_2}\}$ tiene orientación negativa.

Para el caso del Espacio, si considero un punto O y una base ordenada $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$, diremos que B tiene **orientación positiva**, es **destrógira** ó **directa**; si colocando un tornillo o tirabuzón en la dirección de $\vec{b_3}$ y girándolo el ángulo convexo que superpone $\vec{b_1}$ con $\vec{b_2}$, resulta que el tornillo avanza en el sentido de $\vec{b_3}$.
Si el tirabuzón avanza en sentido contrario al de $\vec{b_3}$, diremos que $B = \{\vec{b_1}\,, \vec{b_2}\,, \vec{b_3}\}$ tiene **orientación negativa**, es **levógira** ó **inversa**. Ver Figura 28

Ejemplo



$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es destrógira $\{\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$ es levógira

Figura 28

Cuando se da un sistema de coordenadas cartesianas fijo, al cual se refiere todo el Espacio (O y una base ordenada), se puede decir que queda determinada una orientación del mismo, siendo la orientación de dicho sistema de coordenadas la misma que la de la base.
Fijado O consideraremos el Espacio orientado positivamente conforme al sistema de coordenadas determinado por O y la base ordenada $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

4.4 Producto vectorial y producto mixto

Producto vectorial

Definición 4.4.1 *Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de E_3, se llama* **producto vectorial** *de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y lo notamos $\vec{u} \wedge \vec{v}$ al vector definido como sigue:*

- *Si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.*
- *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces:*

  a) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, sen\, \alpha$; α la medida del ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

  b) $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \rangle$.

  c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, el sistema de coordenadas determinado por $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ tiene orientación positiva.

Propiedades

1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.

2) $\lambda.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \lambda.\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda.\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$.

4) $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = (\vec{v} \wedge \vec{u}) + (\vec{w} \wedge \vec{u})$.

5) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{u}\|^2 \ \|\vec{v}\|^2$.

Interpretación geométrica

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de E_3, no nulos ni paralelos. Consideremos el paralelogramo por ellos determinado y notemos con A a su área.

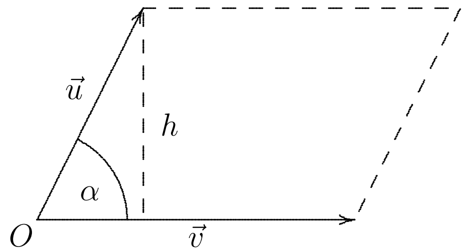


Figura 29

$A = b \cdot h = \|\vec{v}\| \cdot h = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \ \operatorname{sen} \alpha = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Componentes del producto vectorial

Supongamos el Espacio orientado positivamente de acuerdo a la base ordenada $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$. Se tiene entonces que :

$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_3} = \vec{0}.$$

$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3} = -(\vec{e_2} \wedge \vec{e_1}).$$

$$\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1} = -(\vec{e_3} \wedge \vec{e_2}).$$

$$\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2} = -(\vec{e_1} \wedge \vec{e_3}).$$

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores. Si $\vec{u} = u_1.\vec{e_1} + u_2.\vec{e_2} + u_3.\vec{e_3}$ y $\vec{v} = v_1.\vec{e_1} + v_2.\vec{e_2} + v_3.\vec{e_3}$, teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial y las identidades anteriores, obtenemos que:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2).\vec{e_1} - (u_1 v_3 - u_3 v_1).\vec{e_2} + (u_1 v_2 - u_2 v_1).\vec{e_3} \ .$$

Usamos la siguiente regla para recordar la fórmula:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

y desarrollamos, como si fuera un determinante, por la primera fila.

Ejemplo

Si $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$, $\quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2.\vec{e_1} - 4.\vec{e_2} + 2.\vec{e_3}) = (2, -4, 2)$.

Observaciones

1. Como $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1) \wedge \vec{e}_2 = \vec{0}$ y $\vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$, el producto vectorial no es asociativo y carece de sentido la expresión $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$.

2. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si, y sólo si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Producto Mixto

Definición 4.4.2 *Sean* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *vectores, se llama* **producto mixto** *de* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *al número real* $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Interpretación geométrica
Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, vectores no nulos ni coplanares de E_3, y consideremos el paralelepípedo por ellos determinado.

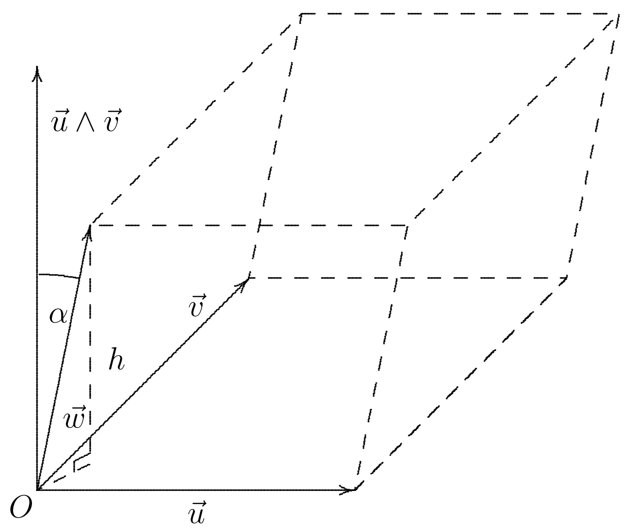


Figura 30

El volumen del mismo está determinado por: $V = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\ h = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\ \|\vec{w}\|\ \mid \cos\alpha \mid =$ $\mid \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle \mid$.

Observaciones

1. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos a un mismo plano(coplanares, si los pienso con origen común), entonces $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

2. $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ determinan un sistema de coordenadas cartesianas con orientación positiva si $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle > 0$.

Cálculo del producto mixto

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, teniendo en cuenta las expresiones del producto escalar y el producto vectorial en términos de las componentes de los vectores obtenemos que: $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = w_1(u_2v_3 - v_2u_3) - w_2(u_1v_3 - v_1u_3) + w_3(u_1v_2 - v_1u_2)$.

Por lo tanto se tiene que:

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Si $\vec{u} = (2, -1, 0)$, $\vec{v} = (3, 2, -1)$ y $\vec{w} = (-1, 4, 1)$, $\quad \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 14.$

4.5 Ejercicios

1. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (dibujar dos flechas), graficar los vectores:

   a) $\vec{u}+\vec{v}$ b) $\vec{u}-\vec{v}$ c) $\vec{v}-\vec{u}$ d) $-\vec{u}-\vec{v}$

   e) $3.\vec{u}$ f) $-\frac{1}{2}.\vec{v}$ g) $2.\vec{u}+\frac{1}{3}.\vec{v}$

2. Consideremos el paralelepípedo de la figura siguiente:

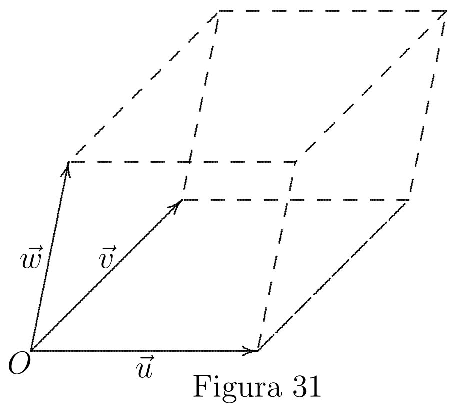


Figura 31

   Dibujar los siguientes vectores:

   a) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ b) $\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}.\vec{w}$ c) $\frac{1}{2}.\vec{u}+\frac{1}{2}.\vec{v}+\vec{w}$

   d) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ e) $-\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}.\vec{w}$

3. Consideremos el cuadrado $ABDC$ y el punto medio O de $\overline{AD}$.

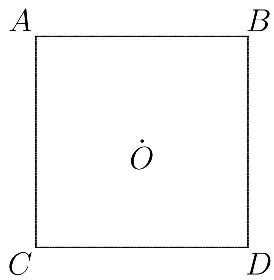


Figura 32

   a) Expresar al vector $\overrightarrow{AO}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AC}$.
   b) Expresar al vector $\overrightarrow{BO}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

4. a) Dados los puntos $A(3,-1,2)$ y $B(-1,2,1)$, hallar las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

b) Hallar las coordenadas del origen A del vector $\vec{u} = (3, -1, 4)$, si su extremo coincide con $B(1, 2, -3)$.

c) Hallar las coordenadas del extremo B del vector $\vec{u} = (3, -1, 2)$, si su origen es $A(1, 1, 1)$.

d) Dados $\vec{u} = (1, 3, -1)$ y $\vec{v} = (0, 5, 2)$, hallar $2.\vec{u} - 3.\vec{v}$.

5. a) Hallar un vector $\vec{u}$ de módulo 2, con igual dirección y sentido contrario a $\vec{v} = (1, 3)$.

   b) Hallar un vector $\vec{u}$ paralelo a $\vec{v} = (1, -2)$ y de módulo 5.

6. a) Calcular el módulo del vector $(6, 3, -2)$.

   b) Si $\vec{u} = (4, -12, z)$, hallar z, sabiendo que $\|\vec{u}\| = 13$.

7. Dados los puntos $A(-1, 3, -7)$, $B(2, -1, 5)$, $C(0, 1, -5)$ y los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$, calcular:

   a) $\langle\, 2.\vec{u} + \vec{w}\, ,\, 2.\vec{w} - \vec{u}\,\rangle$.

   b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ y $\|\vec{u} - \vec{w}\|^2$.

   c) $\langle\, \vec{u}\, ,\, \vec{v}\,\rangle.\vec{w}$ y $\langle\, \vec{v}\, ,\, \vec{w}\,\rangle.\vec{u}$.

8. a) Dados $\vec{u} = (5, 2, 5)$ y $\vec{v} = (2, -1, 2)$, calcular $proy_{\vec{v}}\, \vec{u}$.

   b) Dados $\vec{u} = (3, -6, -1)$, $\vec{v} = (1, 4, -5)$ y $\vec{w} = (3, -4, 12)$, calcular $\overrightarrow{proy_{\vec{w}}(\,\vec{u} + \vec{v})}$.

   c) Dados los puntos $M(-5, 7, -6)$, $N(7, -9, 9)$ y $\vec{u} = (1, -3, 1)$, calcular $|proy_{\vec{u}}\, \overrightarrow{MN}|$.

9. a) Un triángulo tiene como vértices a los puntos $A(1, 3)$, $B(4, -2)$ y $C(-3, 6)$. Encontrar el coseno de sus ángulos interiores.

   b) Dado el cuadrilátero de vértices $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$ y $D(-5, -5, 3)$, mostrar que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares. ¿ Es el cuadrilátero un paralelogramo ?

10. a) Calcular los cosenos directores del vector $\vec{u} = (12, -15, -16)$.

    b) Un vector $\vec{u} \in E_3$ forma con $\vec{e_1}$ y $\vec{e_2}$ ángulos que miden, respectivamente, $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{2}{3}\,\pi$. Calcular sus componentes si $\|\vec{u}\| = 2$.

11. a) Demostrar que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\,(\,\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\,)$, para todo $\vec{u}\, ,\, \vec{v} \in V$ e interpretar geométricamente.

    b) Mostrar que el vector $\vec{v} - \dfrac{\langle \vec{u}\, ,\, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$ es ortogonal a $\vec{u}$. Interpretar geométricamente.

    c) ¿ Qué condición deben satisfacer los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $\vec{u} + \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$?

d) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que verifican $\|\vec{u}+5.\vec{v}\|^2 - 10\,\|\vec{u}\|\,proy_{\vec{u}}\vec{v} = 26\,\|\vec{u}\|^2$, probar que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

12. a) Hallar $\langle\, 3.\vec{u}+2.\vec{x}\,,\,\vec{v}\,\rangle$, sabiendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $proy_{\vec{u}}\vec{v} = 4$ y $\vec{x}$ es ortogonal a $\vec{v}$.

    b) Sean $\vec{w} = (3,0,-1)$ y $\vec{v}$ un vector arbitrario perpendicular a $\vec{u}$. Hallar $proy_{\vec{w}}\vec{u}$, sabiendo que $\langle\, 3.\vec{v}+2.\vec{w}\,,\,\vec{u}\,\rangle = 14$.

13. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, vectores tales que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{w}$ y el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es de 30°. Hallar $\|\vec{w}\|$, sabiendo que $\vec{v} = (2,-2,2)$ y $\langle\, \vec{v}-\vec{u}\,,\,\vec{w}\,\rangle = 18$.

14. Hallar un vector $\vec{x}$, paralelo a $\vec{u} = (1,-2,3)$ tal que $\langle\,(0,1,-1)\,,\,\vec{x}\,\rangle = -3$.

15. Dados $\vec{u} = (3,-1,-2)$ y $\vec{v} = (1,-2,-1)$ calcular:

    a) $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

    b) $(2.\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{v}$.

    c) $(2.\vec{u}-\vec{v})\wedge(2.\vec{u}+\vec{v})$.

16. Sean $\vec{u} = (-1,3,2)$ y $\vec{w} = (1,1,-1)$. Hallar todos los vectores $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w}$.

17. Hallar las componentes de un vector $\vec{x}$ sabiendo que es perpendicular a $\vec{u} = (2,-3,1)$, $\vec{v} = (1,-2,3)$ y satisface $\langle\vec{x},(1,2,-7)\rangle = 1$.

18. a) Hallar el área del paralelogramo, dos de cuyos lados están determinados por $\vec{u} = (1,-1,2)$ y $\vec{v} = (3,0,-4)$.

    b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $V_1(1,5,-2)$, $V_2(0,0,0)$ y $V_3(3,5,1)$.

19. Sean $\vec{u} = (1,2,-3)$, $\vec{v} = (2,1,5)$ y $\vec{w} = (1,-2,1)$. Hallar los vectores $\vec{x}$, paralelos a $\vec{w}$, tales que el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{x}$ sea 40.

5 Rectas en el Plano. Rectas y planos en el Espacio

5.1 Ecuación de la recta en el Plano

Ecuación paramétrica de la recta en el Plano

Supongamos fijado en el Plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal.
Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vector no nulo y $P_0(x_0, y_0)$ un punto del Plano; L la recta que pasa por P_0 y es paralela a $\vec{u}$. Ver Figura 33.

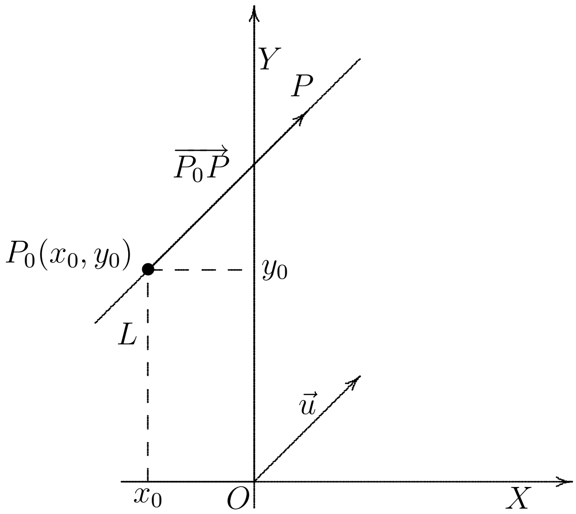


Figura 33

$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{u}$; $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) = \lambda \cdot (u_1, u_2) \Leftrightarrow x - x_0 = \lambda\, u_1$; $y - y_0 = \lambda\, u_2$. Por lo tanto

$$L : \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \end{cases} , \ \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

La ecuación anterior se denomina **ecuación paramétrica** de L; $\vec{u}$ se denomina un **vector director** de L y se nota $\vec{u} = \vec{d_L}$.

- Si $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$, a partir de (1) se obtiene $u_2\,(x - x_0) - u_1\,(y - y_0) = 0$ lo que implica que $u_2\, x - u_1\, y - u_2\, x_0 + u_1\, y_0 = 0$. Si $a = u_2$, $b = -u_1$ y $c = -u_2\, x_0 + u_1\, y_0$, obtenemos que L tiene ecuación $a\, x + b\, y + c = 0$, denominada la **ecuación implícita** de L.

- Si $u_1 = 0$ ó $u_2 = 0$, entonces $x = x_0$ ó $y = y_0$, las cuales son casos particulares de la ecuación anterior.

Observación
Si $L :\ a\, x + b\, y + c = 0$, con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, entonces el vector $\vec{n}_L = (a, b)$ es perpendicular a L, pues $\langle \overrightarrow{PQ}\, , (a, b) \rangle = 0$, con $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1) \in L$, y se denomina un **vector normal** a L.

Ejemplo
Escribir la ecuación paramétrica de la recta L de ecuación implícita $x - 2\,y + 3 = 0$.

Sean $P_1(-3, 0)$ y $P_2(-1, 1)$ $\in L$. Entonces $\vec{d_L} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1)$ y la ecuación paramétrica de L es $L : \begin{cases} x = -3 + 2\,\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ángulo entre rectas

Sean L y L' rectas del Plano, $L :$ $a\,x + b\,y + c = 0$ y $L' :$ $a'\,x + b'\,y + c' = 0$.

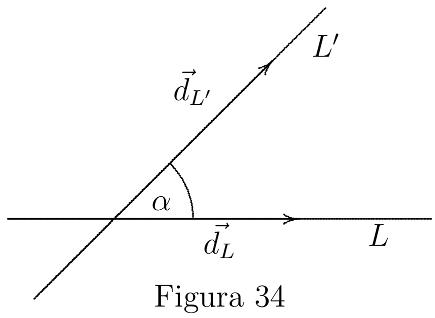


Figura 34

La medida del ángulo α que determinan L y L' se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$cos\ \alpha = \frac{\left|\langle \vec{d_L}, \vec{d_{L'}} \rangle\right|}{\|\vec{d_L}\|\ \|\vec{d_{L'}}\|} = \frac{|\langle \vec{n_L}, \vec{n_{L'}} \rangle|}{\|\vec{n_L}\|\ \|\vec{n_{L'}}\|}$$

Distancia de punto a recta en el Plano

Sean $P_0(x_0, y_0)$, $L :$ $a\,x + b\,y + c = 0$ y $P_1(x_1, y_1) \in L$. Ver Figura 35.

Consideremos el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\vec{u}$ un vector normal a L y con $d(P_0, L)$ notemos a la distancia de P_0 a L.

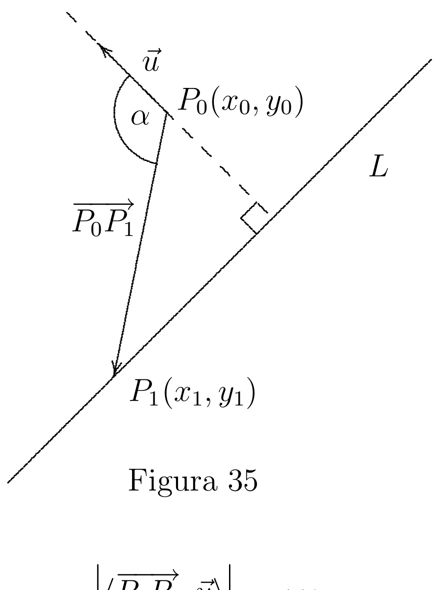


Figura 35

Se tiene entonces que:

$$d(P_0, L) \;=\; \left|proy_{\vec{u}}\ \overrightarrow{P_0P_1}\right| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u} \rangle\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\langle (x_1 - x_0, y_1 - y_0), (a, b) \rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|a\,x_1 + b\,y_1 - a\,x_0 - b\,y_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c - a\,x_0 - b\,y_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Luego $d(P_0, L) = \dfrac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ejemplo
Hallar los vértices de un triángulo isósceles sabiendo que la base está sobre la recta $L\ :\ \ y = x + 1$, un vértice es $P(-3, 4)$ y el área del triángulo es 6. Realizamos un gráfico de la situación. Ver Figura 36.

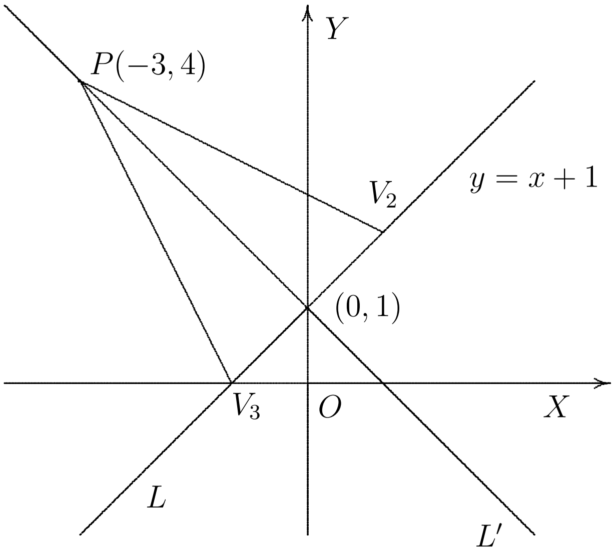


Figura 36

a) Hallamos la recta L' perpendicular a L que pasa por P. $L' : y = -x + c$. Como $(-3, 4) \in L'$ entonces $c = 1$. Luego $L' : y = -x + 1$.

b) $h = d(P, L) = \dfrac{|-3-4+1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. La base b del triángulo verifica que $6 = \dfrac{b \cdot 3\sqrt{2}}{2}$, luego $b = 2\sqrt{2}$.

Los restantes vértices del triángulo se encuentran sobre L a una distancia $\sqrt{2}$ del punto (0,1), luego $\sqrt{2} = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}\,|x|$. Entonces $x = 1$ ó $x = -1$ y por lo tanto $V_2(1, 2)$ y $V_3(-1, 0)$.

5.2 Rectas y planos en el Espacio

Ecuación paramétrica de la recta en el Espacio

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal en el Espacio, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vector no nulo y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto, razonando en forma análoga que para el caso del Plano, obtenemos que la ecuación paramétrica de la recta L que pasa por P_0 y es paralela a

$\vec{u} = \vec{d}_L$, es

$$L : \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \\ z = z_0 + \lambda\, u_3 \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

.

- Si $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ y $u_3 \neq 0$ despejando λ e igualando, obtenemos $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2} = \dfrac{z - z_0}{u_3}$, denominadas **ecuaciones simétricas** de la recta L.
- ¿ Qué sucede si $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$? ¿ Y si $u_1 = u_2 = 0$ y $u_3 \neq 0$?

Ejemplo
La ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto $P(1, 2, -3)$ y es paralela a $\vec{u} = (4, -3, 1)$, es $L : \begin{cases} x = \ \ 1 + 4\,\lambda \\ y = \ \ 2 - 3\,\lambda \\ z = -3 + \ \ \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Las ecuaciones simétricas de L son: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = z + 3$.

Ecuación del plano

Sea π un plano, $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ y $\vec{u} = (a, b, c)$ un vector perpendicular a π.
Ver Figura 37. $P \in \pi \ \Leftrightarrow \ \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{u} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0 \ \Leftrightarrow$
$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$. Luego $P \in \pi$ si verifica: $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ con $d = -a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0$. Esta ecuación se denomina la **ecuación cartesiana** de π y $\vec{u} = (a, b, c)$ un **vector normal del plano**, que notaremos $\vec{n_\pi} = (a, b, c)$.

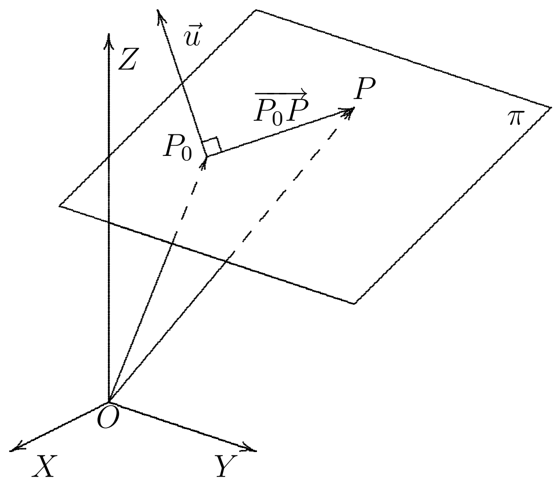


Figura 37

Ejemplo
Hallar la ecuación del plano π que pase por $P_0(2, 1, 3)$ y sea perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 5)$.
π tiene ecuación $2\,x - y + 5\,z + d = 0$. Como $P_0 \in \pi$ se tiene que $18 + d = 0$, luego $d = -18$ y por lo tanto $\pi : \ 2\,x - y + 5\,z - 18 = 0$.

Definición 5.2.1 *Sean* $\pi : \; a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ *y* $\pi' : \; a'\,x+b'\,y+c'\,z+d'=0$. π *y* π' *se dicen* **paralelos** *si* $\vec{n}_\pi = \lambda.\vec{n}_{\pi'}$, *es decir si* $a=\lambda\,a'$, $b=\lambda\,b'$ *y* $c=\lambda\,c'$. *Si además* $d=\lambda\,d'$ *los planos son* **coincidentes**.

Definición 5.2.2 *Dadas* L_1 *y* L_2 *rectas en el Espacio, si* L_1 *y* L_2 *están contenidas en un plano se dicen* **coplanares,** *si no,* L_1 *y* L_2 *se dicen* **alabeadas**.

El siguiente resultado permite decidir si un par de rectas son coplanares o alabeadas.

Proposición 5.2.1 *Sean* L_1 *y* L_2 *rectas en el Espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) L_1 *y* L_2 *son coplanares.*

b) $\langle \vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}} \, , \, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = 0;$ *para todo* $P_1 \in L_1$, $P_2 \in L_2$.

c) $\langle \vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}} \, , \, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = 0;$ *para algún* $P_1 \in L_1$ *y* $P_2 \in L_2$.

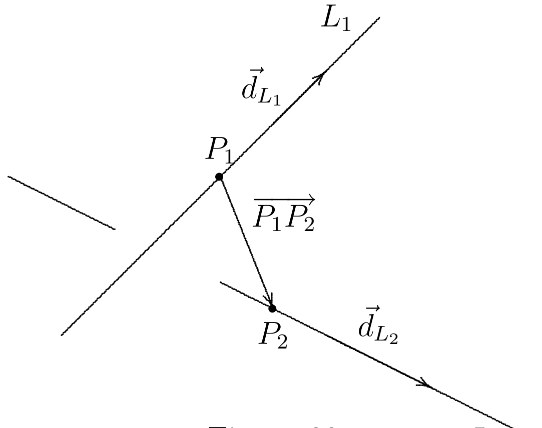


Figura 38

Ejemplo

Consideremos las rectas $L_1 : \begin{cases} x=-3+2\,\lambda \\ y=-2+3\,\lambda \\ z=6-4\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $L_2 : \begin{cases} x=5+\mu \\ y=-1-4\,\mu \\ z=-4+\mu \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Veamos que L_1 y L_2 son coplanares.

En efecto: $\vec{d_{L_1}}=(2,3,-4)$, $\vec{d_{L_2}}=(1,-4,1)$, $P_1(-3,-2,6)\in L_1$ y $P_2(5,-1,-4)\in L_2$.

Si tomamos $\overrightarrow{P_1P_2}=(8,1,-10)$ se tiene que $\langle \vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}}, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \end{vmatrix} = 0.$

Veamos que L_1 y L_2 se intersectan. Si $P(x_0,y_0,z_0)\in L_1\cap L_2$ existen λ y $\mu \in \mathbb{R}$ tal que: $-3+2\,\lambda=5+\mu$; $-2+3\,\lambda=-1-4\,\mu$ y $6-4\,\lambda=-4+\mu$, lo que es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \mu-2\,\lambda=-8 \\ -4\,\mu-3\,\lambda=-1 \\ \mu+4\,\lambda=10 \end{cases}$. Aplicando el método de eliminación de Gauss obtenemos que $\lambda = 3$ y $\mu = -2$ de donde L_1 y L_2 se intersectan en $P(3, 7, -6)$.

Distancia de punto a plano

Sea π un plano de ecuación $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ y $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Sea $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$ y consideremos el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$.

$$\begin{aligned} d(P_0,\pi) &= d(P_0,Q) = \left| proy_{\vec{n}_\pi}\ \overrightarrow{P_0P_1} \right| = \frac{\left| \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{n}_\pi \rangle \right|}{\|\vec{n}_\pi\|} = \frac{|\langle (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (a, b, c) \rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(P_0,\pi) = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

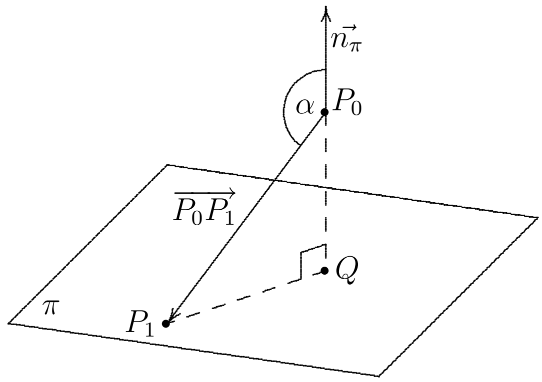


Figura 39

Ejemplo

Si $P_0(0, 1, 3)$ y $\pi :\ 3\,x + 4\,y - 1 = 0$, $d(P_0,\pi) = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}$.

Ecuación de una recta como intersección de planos

Sean $\pi :\ a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ y $\pi' :\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$ dos planos **no paralelos**.

La intersección de los mismos determina la recta $L : \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0 \end{cases}$.

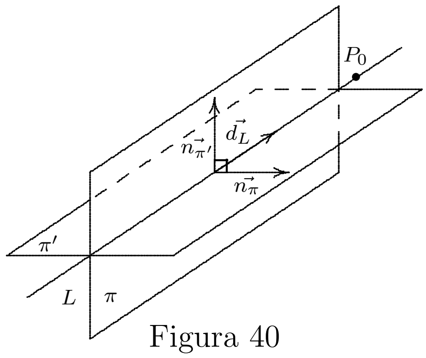


Figura 40

A partir del sistema que determina L, podemos obtener su ecuación parámetrica, de la siguiente manera:

Las coordenadas de los puntos de L son las soluciones del sistema de ecuaciones y como L está contenida en los planos π y π' es perpendicular a los vectores $\vec{n}_\pi$ y $\vec{n}_{\pi'}$, por lo tanto, $\vec{d_L} = \vec{n}_\pi \wedge \vec{n}_{\pi'}$.

Si $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ satisface el sistema y si $\vec{d_L} = (u_1, u_2, u_3)$ entonces L tiene ecuación paramétrica,

$$L: \begin{cases} x = x_0 + u_1\,\lambda \\ y = y_0 + u_2\,\lambda \\ z = z_0 + u_3\,\lambda \end{cases} ,\quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Recíprocamente, toda recta L del Espacio se expresa como intersección de dos planos.

Ejemplos

1. Dada la recta $L: \begin{cases} 2\,x - y + z = 1 \\ x + z = -2 \end{cases}$, hallar su ecuación paramétrica.

   $P(0, -3, -2) \in L$, pues satisface el sistema y $\vec{d_L} = (2, -1, 1) \wedge (1, 0, 1) = (-1, -1, 1)$.

   Luego la ecuación paramétrica de L es $L: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases} ,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

2. Escribir a las rectas $L: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\,\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} ;\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad L': \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 - 2\,\lambda \end{cases} ;\ \lambda \in \mathbb{R}$ y al eje Y, como intersección de planos.

   Consideremos la recta L , despejamos λ de cada una de las ecuaciones y obtenemos $x - 2 = \dfrac{y+1}{3} = 2 - z$, luego $L: \begin{cases} 3\,x - y - 7 = 0 \\ y + 3\,z - 5 = 0 \end{cases}$.

   Para L', por un procedimiento análogo obtenemos $L': \begin{cases} x = 3 \\ 2\,y + z = 0 \end{cases}$.

   El eje Y es intersección de los planos XY e YZ luego queda representado por $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Si $L: \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0 \end{cases}$, existen infinitos planos que contienen a L.

En efecto, cualquier plano de la forma $\alpha(a\,x + b\,y + c\,z + d) + \beta(a'\,x + b'\,y + c'\,z + d') = 0$, con α y β no simultáneamente nulos, contiene a L. Dando valores a α y a β obtenemos todos los planos que contienen a L. Esta familia se denomina **haz de planos** que contienen a L.

Ejemplo

Dada la recta $L: \begin{cases} x - y + \ \ z = 1 \\ \qquad y + 5\,z = 0 \end{cases}$, hallar la ecuación del plano que contiene a L y es paralelo al vector $\vec{v} = (-1, 2, 0)$.

Si el plano π contiene a L, es uno de los de la familia $\alpha(x-y+z-1)+\beta(y+5\,z)=0$, entonces $\alpha\,x+(\beta-\alpha)y+(\alpha+5\beta)z-\alpha=0$. Como π es paralelo al vector $\vec{v}=(-1,2,0)$ se tiene que $\langle\vec{n}_\pi,\vec{v}\rangle=0=\langle(\alpha,\beta-\alpha,\alpha+5\beta),(-1,2,0)\rangle=-\alpha+2(\beta-\alpha)=-3\alpha+2\beta$ luego $\beta=\dfrac{3}{2}\alpha$. Entonces $\alpha\,(x-y+z-1)+\frac{3}{2}\,\alpha\,(y+5\,z)=0$. Como α y β no son simultáneamente nulos, $\alpha\neq 0$ y por lo tanto $\pi:\ \ 2\,x+y+17\,z-2=0$.

Ángulos entre rectas y planos

Ángulo entre dos rectas

Sean L y L' dos rectas con directores $\vec{d_L}$ y $\vec{d_{L'}}$ respectivamente, la medida α del ángulo que ellas determinan está dada por:

$$cos\ \alpha=\frac{\left|\langle\vec{d_L},\vec{d_{L'}}\rangle\right|}{\|\vec{d_L}\|\,\|\vec{d_{L'}}\|}$$

Ángulo entre dos planos

El ángulo α entre dos planos π_1 y π_2 es el que se obtiene a partir de:

$$cos\ \alpha=\frac{|\langle\vec{n}_{\pi_1},\vec{n}_{\pi_2}\rangle|}{\|\vec{n}_{\pi_1}\|\,\|\vec{n}_{\pi_2}\|}$$

Ángulo entre recta y plano

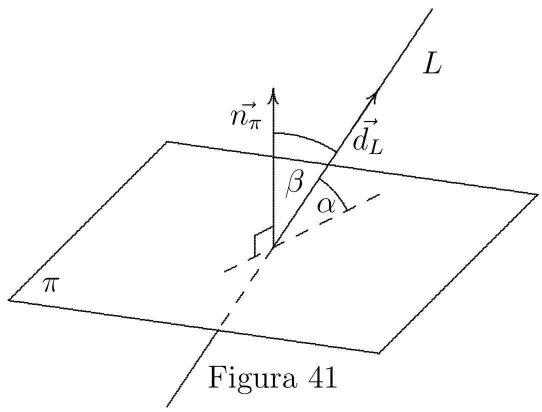


Figura 41

Si α es la medida del ángulo entre L y π, la misma se obtiene como sigue: $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ donde

$$cos\ \beta=\frac{\left|\langle\vec{n}_\pi,\vec{d_L}\rangle\right|}{\|\vec{n}_\pi\|\,\|\vec{d_L}\|}$$

Ejemplo

Sean $\pi_1:\ x-y-4\,z-5=0$ y $\pi_2:\ 2\,x+y-2\,z-4=0$. Como $\vec{n_{\pi_1}}=(1,-1,-4)$ y $\vec{n_{\pi_2}}=(2,1,-2)$ se tiene que el coseno del ángulo que forma π_1 y π_2 está dado por

$cos\ \alpha = \dfrac{|\langle(1,-1,-4)\ ,\ (2,1,-2)\rangle|}{\sqrt{18}\ \sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, lo que implica que π_1 y π_2 forman un ángulo que mide $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

Distancias

Distancia de un punto a una recta

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y L una recta en el Espacio.
A diferencia de lo que ocurre en el Plano, existen **infinitas** rectas perpendiculares a L que pasan por P_0, todas se hallan contenidas en el **único** plano π que pasa por P_0 y es perpendicular a L. π intersecta a L en un único punto Q. Definimos la distancia de P_0 a L, y la notamos $d(P_0, L)$, como la distancia entre P_0 y Q.

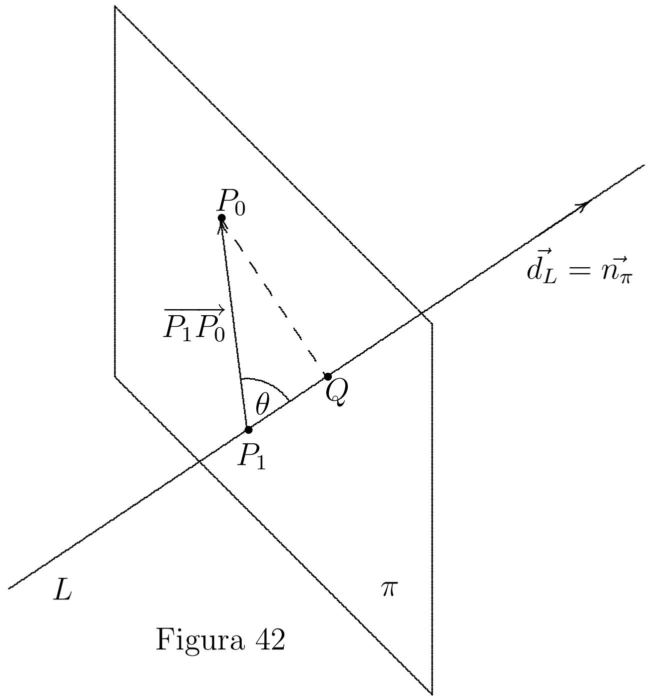


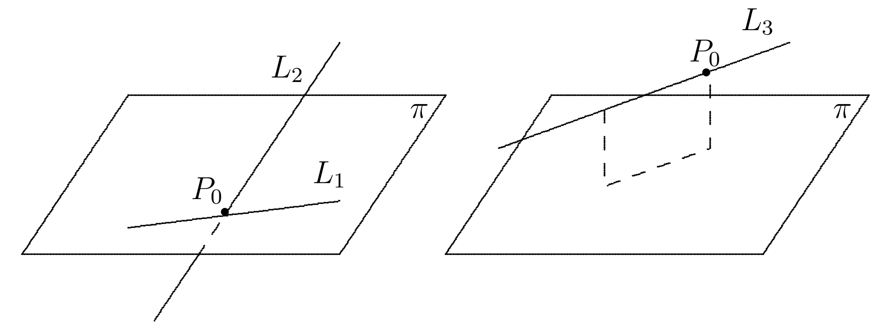
Figura 42

Sea $P_1 \in L$ y consideremos el vector $\overrightarrow{P_1P_0}$. Si θ es el ángulo entre $\overrightarrow{P_1P_0}$ y $\vec{d_L}$ entonces
$d(P_0, L) = d(P_0, Q) = \|\overrightarrow{P_1P_0}\|\ sen\,\theta = \dfrac{\|\overrightarrow{P_1P_0}\|\ sen\,\theta\ \|\vec{d_L}\|}{\|\vec{d_L}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{d_L}\|}{\|\vec{d_L}\|}$.

Distancia de recta a plano

Sea L una recta y π un plano.

- Si $L \cap \pi \neq \emptyset$, entonces $d(L, \pi) = 0$.
- Si $L \cap \pi = \emptyset$, entonces L es paralela a π, luego $d(L, \pi) = d(P_0, \pi)$, con $P_0 \in L$.



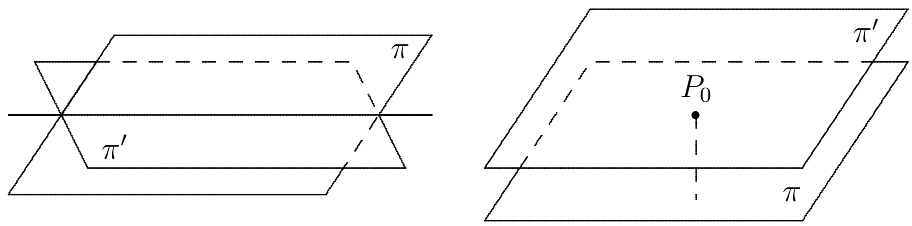
$L \cap \pi \neq \emptyset$ $\qquad$ $L \cap \pi = \emptyset$

Figura 43

Distancia entre planos

Consideremos los planos π y π'.

- Si $\pi \cap \pi' \neq \emptyset$, entonces $d(\pi, \pi') = 0$.
- Si $\pi \cap \pi' = \emptyset$, entonces π es paralelo a π', luego $d(\pi, \pi') = d(\pi, P_0)$, $P_0 \in \pi'$.



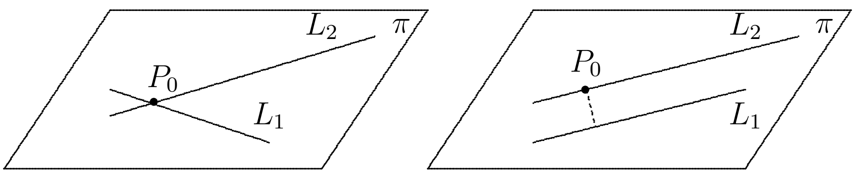
$\pi \cap \pi' \neq \emptyset$ $\qquad$ $\pi \cap \pi' = \emptyset$

Figura 44

Distancia entre rectas

Sean L_1 y L_2 rectas en el Espacio.

1. Si L_1 y L_2 son coplanares, puede suceder que:



$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ $\qquad$ $L_1 \parallel L_2$

Figura 45

- L_1 y L_2 se corten en un punto, luego $d(L_1, L_2) = 0$.
- L_1 y L_2 sean paralelas y entonces $d(L_1, L_2) = d(L_1, P_0)$, $P_0 \in L_2$.

2. Si L_1 y L_2 son alabeadas, existe una **única** recta L perpendicular a ambas y que las corta. Es claro que $\vec{d_L} = \vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}}$. Sean P y Q los respectivos puntos de intersección de L con L_1 y L_2.

   Definimos la distancia entre L_1 y L_2 como la distancia entre P y Q, es decir $d(L_1, L_2) = d(P, Q)$.

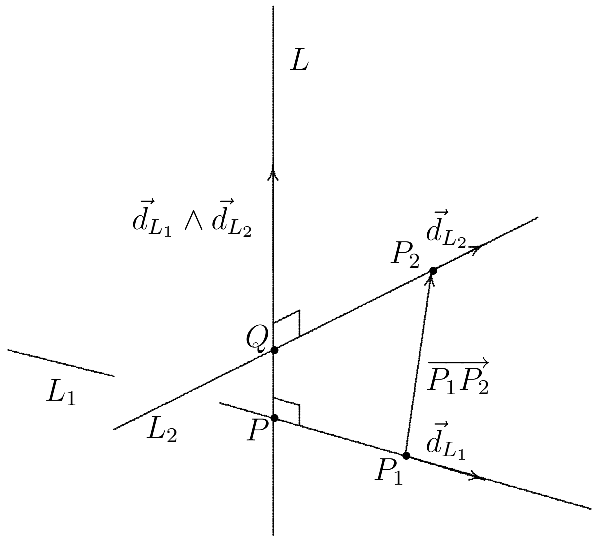


Figura 46

$d(L_1, L_2) = d(P, Q) = \left| proy_{\vec{d}_{L_1} \wedge \vec{d}_{L_2}} \overrightarrow{P_1P_2} \right|$; $P_1 \in L_1$, $P_2 \in L_2$. Obtenemos entonces que:

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left| \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{d}_{L_1} \wedge \vec{d}_{L_2} \rangle \right|}{\| \vec{d}_{L_1} \wedge \vec{d}_{L_2} \|} \text{ , donde } P_1 \in L_1 \text{ , } P_2 \in L_2.$$

Para hallar las coordenadas de los puntos P y Q que realizan la distancia se procede de la siguiente manera:

Por un punto $P_1 \in L_1$ trazamos la recta L' perpendicular a L_1 y a L_2. Es claro que $\vec{d_{L'}} = \vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}}$.
L' y L_1 son coplanares y el plano π que las contiene, intersecta a L_2 en Q, en caso contrario L_1 y L_2 serían coplanares. Por Q trazamos la recta L paralela a L' y hallamos P intersectando L con L_1.

Ejemplo

Sean $L_1 : \begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ y $L_2 : \begin{cases} x = -5 + 4\mu \\ y = 5 - 3\mu \\ z = 5 - 5\mu \end{cases}$; $\mu \in \mathbb{R}$, rectas alabeadas.

Queremos calcular la distancia entre L_1 y L_2 y hallar las coordenadas de los puntos P y Q que la realizan. Sea $P_1(-4, 4, -1) \in L_1$, hallemos la ecuación de la recta L' que pasa por

P_1 y es perpendicular a L_1 y a L_2.

Como $\vec{d_{L'}} = \vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}} = (-1, 2, -2)$, tenemos que $L' : \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$

Como L_1 y L' son coplanares, la ecuación del plano π que pasa por P_1 y contiene a L_1 y a L' está dada por $\pi : 2x + 2y + z + 1 = 0$, pues $\vec{n}_\pi = \vec{d_{L_1}} \wedge (\vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}})$.

Si hallamos $\pi \cap L_2$, obtenemos $Q(3, -1, -5)$. Sea $L : \begin{cases} x = 3 - \lambda' \\ y = -1 + 2\lambda' \\ z = -5 - 2\lambda' \end{cases} ; \lambda' \in \mathbb{R}$, la recta que pasa por Q y tal que $\vec{d_L} = \vec{d_{L'}}$. Al calcular $L_1 \cap L$ obtenemos $P(2, 1, -7)$, por lo tanto $d(L_1, L_2) = d(P, Q) = \sqrt{9} = 3$.

Verifiquemos el resultado aplicando la fórmula:

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}} \rangle\right|}{\|\vec{d_{L_1}} \wedge \vec{d_{L_2}}\|} = \frac{|\langle(-1, 1, 6), (-1, 2, -2)\rangle|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

5.3 Ejercicios

En los ejercicios correspondientes al Plano sugerimos hacer todos los gráficos.

1. Hallar la ecuación paramétrica de la recta,

   a) que pasa por $P_0(1,2)$ y es paralela al vector $\vec{u} = (-1,4)$.

   b) que pasa por $P_0(1,2)$ y $P_1(3,5)$.

2. a) Escribir la ecuación paramétrica y cartesiana del eje Y.

   b) Dada la recta L de ecuación $-5\,x + 3\,y = 1$ y el punto $P(0,2)$, hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por P y es perpendicular a L. Encontrar su ecuación implícita.

3. Dadas las rectas de ecuación:

   $L_1:\ 2\,x - y = 2$; $L_2:\ x - 3\,y = 0$; $L_3:\ \begin{cases} x = -1 + 2\,\lambda \\ y = -1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $L_4:\ \begin{cases} x = 3\,\lambda \\ y = 6\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Hallar analíticamente: $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_4$ y $L_1 \cap L_4$. En caso de intersectarse, averiguar si son perpendiculares.

4. Hallar el coseno del ángulo determinado por las rectas:

   a) $L:\ \begin{cases} x = \mu \\ y = 2\,\mu \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$; $L':\ \begin{cases} x = 1 + 6\,\lambda \\ y = 2 - 8\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   b) $L:\ 2\,x - y = 0$; $L':\ -x + 2\,y - 1 = 0$.

   c) $L:\ 3\,x - y = 0$; $L':\ \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. a) Dada la recta $L:\ x + 3\,y + 2 = 0$ y $Q(0,1)$, hallar $d(Q,L)$ y el punto Q' de L que la realiza.

   b) Calcular el área del triángulo que determina la recta de ecuación $3\,x - 4\,y - 12 = 0$, con los ejes coordenados.

6. Sea L la recta que pasa por los puntos $M(-1,-5)$ y $N(5,-\frac{1}{2})$.

   a) Hallar en L el punto P cuya abscisa es 3.

   b) Hallar la ecuación de la recta L', perpendicular a L y que pase por P.

   c) Hallar el área del triángulo determinado por L, L' y el eje Y.

7. Sean $A(-1,5)$ y $B(1,1)$ dos vértices de un triángulo rectángulo en B. Hallar el restante vértice y las ecuaciones de las rectas que contienen a sus tres lados, sabiendo que el área del triángulo es 10. ¿ Cuántos triángulos puedo obtener ?

8. El punto $A(-1,8)$ es el vértice de un rombo cuya diagonal menor se encuentra en la recta $L: \begin{cases} x = 3\,\mu \\ y = 1 + 4\,\mu \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Hallar las coordenadas de los restantes vértices sabiendo que su área es 30. Recordar que $A_{Rombo} = \dfrac{D \times d}{2}$.

9. Hallar la ecuación de las siguientes rectas:

   a) Que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (-1,6,5)$.

   b) Que pasa por el punto $P_0(-5,0,1)$ y es paralela a $L: \begin{cases} x = \ \ 1 + 2\,\lambda \\ y = 0 \\ z = -1 + \ \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

   c) Que pasa por los puntos $A(1,-3,2)$ y $B(4,-2,6)$.

   d) Que pasa por el punto $Q(2,-1,2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $\pi: \ 7\,x + 6\,y + 5\,z = -4$.

10. Escribir la ecuación de los siguientes planos:

    a) Perpendicular al vector $\vec{v} = (-1,0,1)$ que pase por el punto $P(4,2,0)$.

    b) Paralelo al plano $\pi: \ 5\,x - y + 3\,z - 1 = 0$ y pasa por el origen de coordenadas.

    c) Que contenga los puntos $P_0(-7,1,0)$, $P_1(2,-1,3)$ y $P_2(1,-1,0)$.

11. Escribir, como intersección de planos,

    a) El eje Y.

    b) La recta paralela al eje X que pasa por el punto $P(1,5,0)$.

    c) Las rectas del ejercicio 9.

12. Escribir las ecuaciones de los siguientes planos:

    a) Paralelo a $\pi: \ 6\,x - 2\,y + 3\,z - 7 = 0$ que diste 3 unidades del origen. ¿ Es único ?

    b) Normal al vector $\vec{v} = (0,2,1)$ que diste dos unidades del punto $P(-1,3,5)$.

    c) El plano XZ.

    d) Paralelo al plano YZ, que pase por el punto $P(1,2,3)$.

13. Dada $L: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + 5\,z = 0 \end{cases}$, hallar las ecuaciones de los siguientes planos:

    a) Paralelo a L que pasa por el origen de coordenadas. ¿ Es único ?

    b) Perpendicular a L que pasa por el punto $P(-1,3,0)$.

    c) Que contenga a L y pase por el punto $P(1,2,3)$.

14. Dadas $L_1 : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $L_2 : \begin{cases} x - y + z = -2 \\ 6\,x - 2\,y + 3\,z = -4 \end{cases}$ y el punto $P(1,1,2)$, hallar:

    a) La ecuación del plano π que pasa por P y es paralelo a L_1 y L_2.

    b) La ecuación de un plano π' paralelo a π, tal que $d(\pi', L_2) = 2\sqrt{3}$.

    c) La distancia de P a L_1 y las coordenadas del punto Q que la realiza.

15. Sea π el plano de ecuación $6\,x - 3\,y - 2\,z + 12 = 0$. ¿ Para qué valores de α y β la recta $\dfrac{x+\alpha}{2} = \dfrac{y-1}{\beta} = \dfrac{z-4}{3}$ está contenida en π ?

16. Sean $L_1 : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y + 2\,z - 1 = 0 \end{cases}$, $L_2 : \dfrac{x}{2} = z - 2 = \dfrac{y}{-2}$ y $L_3 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = a\,\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

    a) Verificar que L_1 y L_2 son paralelas, y hallar la ecuación del plano que las contiene.

    b) Hallar la ecuación de una recta perpendicular a L_1 y L_2 que corte a ambas. ¿ Existe una recta en estas condiciones que pase por $P(1,1,1)$?

    c) Determinar todos los valores de a para los cuales L_1 y L_3 son alabeadas.

17. Dado el haz de planos $\pi_\lambda : (1 + 2\,\lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 + 3\,\lambda)z + (2\,\lambda - 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

    a) Hallar la recta L_1 determinada por π_λ.

    b) Estudiar la posición relativa de las rectas L_1 y L_2, siendo L_2 la recta dada por: $L_2 : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$.

    c) Calcular la distancia entre ambas rectas.

18. a) Los planos $x + 2\,y + a\,z = 1$, $2\,x + y + a\,z = 0$ y $3\,x + 3\,y - 2\,z = 1$, se intersectan en una recta, ¿ cuánto vale a ?

    b) Determinar el simétrico del punto $P(1,0,1)$ respecto a la recta determinada por los planos del inciso anterior.

19. Dadas las rectas: $L_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ -2\,x + z = 0 \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -4 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

    a) Hallar la ecuación de una recta que corte a L_1 y L_2, y sea paralela al vector $\vec{u} = (-1,-1,-1)$.

    b) Hallar la ecuación de una recta perpendicular a L_1 que pase por $P(1,-1,0)$ y corte a L_2.

    c) Hallar la ecuación de un plano paralelo a L_1 y L_2 que diste $\sqrt{21}$ de la recta L_2.

20. Sea $P(2,1,3)$ y la recta $L: \begin{cases} x-y-5=0 \\ z-1=0 \end{cases}$.

    a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a L.

    b) Hallar dos puntos A y B de L de modo que el triángulo $\overset{\triangle}{PAB}$ sea equilátero.

21. Sean $L: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-7}{-4} = \dfrac{z-2}{4}$ y $L': \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+2}{4} = z+1$.

    a) Encontrar la distancia al origen de la recta que pasa por $Q(2,3,4)$ y es perpendicular a L y L'.

    b) Hallar la distancia entre L y L'.

6 Espacios vectoriales

6.1 Definición. Propiedades

Definición 6.1.1 *Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ consiste en: un conjunto no vacío V (cuyos elementos se denominan* **vectores***) provisto de dos operaciones, una de ellas interna, llamada* **suma** *que indicaremos $\vec{u} + \vec{v}\,;\ \vec{u}, \vec{v} \in V$ y otra externa llamada* **producto por escalares** *que indicaremos $\lambda.\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{u} \in V$, para las cuales se verifican los siguientes axiomas:*

$V_1)$ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, *para todo* $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V$.

$V_2)$ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, *para todo* $\vec{u},\ \vec{v} \in V$.

$V_3)$ *Existe un elemento* $\vec{0} \in V$ *tal que* $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$, *para todo* $\vec{u} \in V$.

$V_4)$ *Para cada* $\vec{u} \in V$ *existe* $\vec{u'} \in V$ *tal que* $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{0}$.

$V_5)$ $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R};\ \vec{u}, \vec{v} \in V$.

$V_6)$ $(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$, *para todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{u} \in V$.

$V_7)$ $(\lambda\,\mu).\vec{v} = \lambda.(\mu.\vec{v})$, *para todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \vec{v} \in V$.

$V_8)$ $1.\vec{v} = \vec{v}$, *para todo* $\vec{v} \in V$.

Propiedades

1) El vector $\vec{0}$, denominado **vector nulo**, es único.

2) Dado $\vec{u} \in V$, existe un único $\vec{u'} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{0}$. Lo notaremos $\vec{u'} = -\vec{u}$ y lo denominaremos el **simétrico** de $\vec{u}$.
Además, por definición, escribiremos: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

3) $0.\vec{u} = \vec{0}$, para todo $\vec{u} \in V$.

4) $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) $\lambda.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$.

6) $-(\lambda.\vec{u}) = (-\lambda).\vec{u} = \lambda.(-\vec{u})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}\,;\ \vec{u} \in V$. En particular, $-\vec{u} = (-1).\vec{u}$.

Ejemplos
Son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:

1. E_2 y E_3 con la suma y el producto por escalares definidos previamente.

2. $\mathbb{R}$, con la suma y el producto usuales.

3. $\mathbb{C}$, el conjunto de los números complejos, con la suma y el producto de un número real por un complejo, habituales.

4. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbb{R}\}$, definiendo

   $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \qquad ; \qquad \lambda.(x,y) = (\lambda\, x, \lambda\, y),\ \lambda \in \mathbb{R}.$

5. $\mathbb{R}^n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n):\ x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\big\}$, definiendo

   $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$
   $\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n),\ \lambda \in \mathbb{R}.$

6. $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, con la suma de matrices y el producto de un número real por una matriz, habituales.

7. $\mathbb{R}[X]$, con la suma de polinomios y el producto de un número real por un polinomio, usuales.

8. El conjunto de todas las funciones reales de dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, definiendo

   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, y $(\lambda.f)(x) = \lambda\, f(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R},\ x \in D.$

Definición 6.1.2 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un vector $\vec{u} \in V$ se dice una* **combinación lineal** *de los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{u} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_n}$.*

Ejemplos

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Expresar, si es posible, a los vectores $\vec{u} = (-1,-8,2)$ y $\vec{v} = (0,0,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1} = (1,-1,1)$ y $\vec{v_2} = (3,6,0)$.

   $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ si, y sólo si existen λ_1 y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2}$. Entonces $(-1,-8,2) = \lambda_1.(1,-1,1) + \lambda_2.(3,6,0)$.

   La combinación lineal anterior es posible si, y sólo si el sistema $\begin{cases} \lambda_1 + 3\,\lambda_2 = -1 \\ -\lambda_1 + 6\,\lambda_2 = -8 \\ \lambda_1 = 2 \end{cases}$ es compatible. En este caso $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$ por lo que $\vec{u} = 2.\vec{v_1} + (-1).\vec{v_2}$.
   Si consideramos $\vec{v} = (0,0,1)$ y realizamos el mismo planteo el sistema resultante es incompatible, por lo que $\vec{v}$ no es combinación lineal de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$.

2. Dados $\vec{u} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (6,4,2)$ y $\vec{w} = (9,2,k)$, hallar el valor de k para el cual $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si, y sólo si $\lambda_1.(1,2,-1) + \lambda_2.(6,4,2) = (9,2,k)$ con λ_1 y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Es decir debo hallar el valor de k para el cual el sistema $\begin{cases} \lambda_1 + 6\,\lambda_2 = 9 \\ 2\,\lambda_1 + 4\,\lambda_2 = 2 \\ -\lambda_1 + 2\,\lambda_2 = k \end{cases}$ sea compatible. Aplicando el método de eliminación de Gauss se obtiene $k = 7$.

6.2 Subespacios

Definición 6.2.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un subconjunto no vacío $S \subseteq V$ se dice un* **subespacio** *de V si con las operaciones que hereda de V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

Proposición 6.2.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) S es un subespacio de V.

2) S_1) $\vec{0} \in S$.

S_2) Si $\vec{u}$, $\vec{v} \in S$, entonces $\vec{u} + \vec{v} \in S$.

S_3) Si $\vec{u} \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda.\vec{u} \in S$.

Dem.

1) $\Rightarrow$ 2) Como $S \neq \emptyset$ existe $\vec{v} \in S$, esto implica que $-\vec{v} \in S$ y entonces $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0} \in S$, luego se verifica S_1). S_2) y S_3) se verifican trivialmente pues vale *1)*.

2) $\Rightarrow$ 1) Como $\vec{0} \in S$ entonces $S \neq \emptyset$. S verifica S_2) y S_3), entonces es cerrado respecto a la suma y al producto por escalares definido en V y se verifican claramente los axiomas $V_1, V_2, \ldots, V_8$.

$\square$

Observación

Las condiciones S_1), S_2) y S_3) son las usadas habitualmente para probar que un subconjunto S de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es un subespacio de V.

Ejemplos

1. $\{\vec{0}\}$ y V son subespacios del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, denominados los **subespacios triviales** de V.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$. El conjunto S, de las soluciones del sistema anterior, es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   $S = \{(-2\,z, z, z) : \ z \in \mathbb{R}\}$. Verifiquemos S_1), S_2) y S_3).

   Si $z = 0$, entonces $(0, 0, 0) \in S$ y vale S_1).

   Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2} \in S$, luego $\vec{v_1} = (-2\,z_o, z_o, z_o)$, $z_o \in \mathbb{R}$ y $\vec{v_2} = (-2\,z_1, z_1, z_1)$, $z_1 \in \mathbb{R}$ entonces $\vec{v_1} + \vec{v_2} = (-2\,z_o,\ z_o,\ z_o) + (-2\,z_1,\ z_1,\ z_1) = (-2(z_o + z_1),\ z_o + z_1,\ z_o + z_1) \in S$, por lo tanto vale S_2).

   Si $\vec{v} \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\lambda.\vec{v} = \lambda.(-2\,z_o,\ z_o,\ z_o) = (-2\,\lambda\,z_o, \lambda\,z_o, \lambda\,z_o) \in S$, luego se verifica S_3) y por lo tanto S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   Observemos que el sistema representa una recta de $\mathbb{R}^3$, que pasa por el origen de coordenadas.

3. Sea $V = M_3(\mathbb{R})$. $S = \{(a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R}) : a_{11} = 0\}$ es un subespacio de V.
4. $S = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : P(X) = 0 \text{ ó } grP(X) \leq n\}$ es un subespacio de $V = \mathbb{R}[X]$.
5. Sea $V = \mathbb{R}^2$. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ no es un subespacio de V.

   En efecto, $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (1, -1)$ pertenecen a S. Sin embargo $\vec{u} + \vec{v} = (2, 0) \notin S$.

Proposición 6.2.2 *Si S y T son subespacios de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $S \cap T$ es un subespacio de V.*

Dem. Veamos que $S \cap T$ verifica las condiciones S_1), S_2) y S_3).

S_1) Como S y T son subespacios $\vec{0} \in S$ y $\vec{0} \in T$, luego $\vec{0} \in S \cap T$.

S_2) Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in S \cap T$, entonces $\vec{u} \in S, \vec{u} \in T, \vec{v} \in S$ y $\vec{v} \in T$, por lo tanto $\vec{u} + \vec{v} \in S$ y $\vec{u} + \vec{v} \in T$, de donde resulta $\vec{u} + \vec{v} \in S \cap T$.

S_3) Si $\vec{u} \in S \cap T$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\vec{u} \in S$, $\vec{u} \in T$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego $\lambda.\vec{u} \in S$ y $\lambda.\vec{u} \in T$, es decir $\lambda.\vec{u} \in S \cap T$.

$\square$

Ejemplo

Sean $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - y + 3z = 0\}$.

$S \cap T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0; \ 2x - y + 3z = 0\}$ y por lo tanto el subespacio de soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = 3y \Longrightarrow x = -y - z = -y - 3y = -4y,$$

entonces $S \cap T = \{(-4y, y, 3y) : y \in \mathbb{R}\}$.

$S \cap T$ es la recta que pasa por el origen, intersección de los planos S y T.

Observaciones

1. La proposición anterior es válida para una familia arbitraria (finita o no) de subespacios.
2. Si S y T son subespacios de un $\mathbb{R}$- espacio vectorial V, entonces $S \cup T$ **no es** necesariamente un subespacio de V, como lo muestra el siguiente contraejemplo:

   Sean $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(x, y) : x = 0\}$ y $T = \{(x, y) : y = 0\}$. Entonces $(0, 1)$ y $(1, 0)$ pertenecen a $S \cup T = \{(x, y) : x = 0 \text{ ó } y = 0\}$, pero $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin S \cup T$.

Subespacio generado

Definición 6.2.2 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $M \subseteq V$, llamaremos* **subespacio generado** *por M en V y notaremos $\overline{M}$, a la intersección de todos los subespacios de V que contienen a M. Es decir, respecto a la inclusión de conjuntos, $\overline{M}$ es el menor subespacio de V que contiene a M. Entonces $\overline{M}$ verifica:*

a) $\overline{M}$ *es subespacio.*

b) $M \subseteq \overline{M}$.

c) Si S' *es un subespacio tal que* $M \subseteq S'$ *entonces* $\overline{M} \subseteq S'$.

Estas condiciones caracterizan a $\overline{M}$. Es decir: Si un subconjunto S de V verifica a), b) y c), entonces $S = \overline{M}$.

Observaciones

1. Si $M = \emptyset$, entonces $\overline{M} = \{\vec{0}\}$.

2. S es subespacio de V si, y sólo si $S = \overline{S}$.

Teorema 6.2.1 *Sea* V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y* $M = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}\} \subseteq V$. *Entonces*

$$\overline{M} = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_t.\vec{v_t}, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R}, \;\; 1 \leq i \leq t\}.$$

Dem. Sea $C = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_t.\vec{v_t}, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R}, \;\; 1 \leq i \leq t\}$.
Probemos que

a) C es subespacio de V.

b) $M \subseteq C$.

c) Si S' es un subespacio de V tal que $M \subseteq S'$, entonces $C \subseteq S'$.

Dem a) Es claro que $\vec{0} = 0.\vec{v_1} + 0.\vec{v_2} + \cdots + 0.\vec{v_t} \in C$.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v} \in C$. Entonces $\vec{u} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \lambda_3.\vec{v_3} + \cdots + \lambda_t.\vec{v_t}$ y $\vec{v} = \mu_1.\vec{v_1} + \mu_2.\vec{v_2} + \cdots + \mu_t.\vec{v_t}$, luego $\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 + \mu_1).\vec{v_1} + (\lambda_2 + \mu_2).\vec{v_2} + \cdots + (\lambda_t + \mu_t).\vec{v_t} \in C$ y $\lambda.\vec{u} = (\lambda\,\lambda_1).\vec{v_1} + (\lambda\,\lambda_2).\vec{v_2} + \cdots + (\lambda\,\lambda_t).\vec{v_t} \in C$. Por lo tanto C es un subespacio de V.

Dem b) Sea $\vec{v_i} \in M$, $1 \leq i \leq t$. Como $\vec{v_i} = 1.\vec{v_i}$ resulta que $\vec{v_i} \in C$ y por lo tanto $M \subseteq C$.

Dem c) Sea $S' \subseteq V$, S' subespacio de V tal que $M \subseteq S'$.

Si $\vec{v} \in C$, entonces $\vec{v} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_t}$, y como $\vec{v_i} \in M \subset S'$, entonces $\vec{v_i} \in S'$ para todo $1 \leq i \leq t$. Como S' es subespacio, $\vec{v} \in S'$ y por lo tanto $C \subseteq S'$.

□

Definición 6.2.3 *Si* V *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y* $G \subseteq V$ *es tal que* $\overline{G} = V$, *entonces* G *se dice un* **sistema de generadores** *de* V.

Si existe un conjunto finito G *de generadores,* V *se dice* **finitamente generado ó de dimensión finita.**

Ejemplos

1. Sea $M = \{(1,2,0),(0,-1,1),(3,5,1),(-2,-4,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Si $(x,y,z) \in \overline{M}$ entonces $(x,y,z) = \lambda_1.(1,2,0) + \lambda_2.(0,-1,1) + \lambda_3.(3,5,1) + \lambda_4.(-2,-4,0)$, luego el sistema $\begin{cases} \lambda_1 + 3\,\lambda_3 - 2\,\lambda_4 = x \\ 2\,\lambda_1 - \lambda_2 + 5\,\lambda_3 - 4\,\lambda_4 = y \\ \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases}$ es compatible.

   $\begin{cases} \lambda_1 + 3\,\lambda_3 - 2\,\lambda_4 = x \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = y - 2\,x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\,\lambda_3 - 2\,\lambda_4 = x \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = y - 2\,x \\ 0 = y - 2\,x + z \end{cases}$ y como el sistema es compatible se verifica que $-2\,x + y + z = 0$, luego $\overline{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2\,x + y + z = 0\}$.

2. Si $V = \mathbb{R}[X]$, entonces $M = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ es tal que $\overline{M} = \mathbb{R}[X]$, pero V no es finitamente generado.

3. Si $V = M_3(\mathbb{R})$ y $S = D_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} ;\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$, como

   $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

   $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es tal que $\overline{M} = S$.

Proposición 6.2.3 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t} \in V$. Entonces si $\vec{u} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_t.\vec{v_t}$ se tiene que $\overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}, \vec{u}\}} = \overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}\}}$.*

Dem. Si $\vec{v} \in \overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}, \vec{u}\}}$, entonces $\vec{v} = \mu_1.\vec{v_1} + \mu_2.\vec{v_2} + \cdots + \mu_t.\vec{v_t} + \mu.\vec{u} = \mu_1.\vec{v_1} + \mu_2.\vec{v_2} + \cdots + \mu_t.\vec{v_t} + \mu.(\lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_t.\vec{v_t}) = (\mu_1 + \lambda_1\,\mu).\vec{v_1} + (\mu_2 + \lambda_2\,\mu).\vec{v_2} + \cdots + (\mu_t + \lambda_t\,\mu).\vec{v_t} \in \overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}\}}$.

Recíprocamente, si $\vec{v} \in \overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}\}}$, entonces $\vec{v} = \mu_1.\vec{v_1} + \mu_2.\vec{v_2} + \cdots + \mu_t.\vec{v_t} = \mu_1.\vec{v_1} + \mu_2.\vec{v_2} + \cdots + \mu_t.\vec{v_t} + 0.\vec{u} \in \overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}, \vec{u}\}}$. Por doble inclusión se obtiene la igualdad de los subespacios. $\square$

El resultado anterior nos permite calcular subespacios generados eliminando generadores supérfluos.

En lo que sigue trabajaremos con $\mathbb{R}$- espacios vectoriales finitamente generados, si bien los resultados que se obtienen son, en general, para espacios vectoriales arbitrarios.

6.3 Dependencia lineal y bases

Dado un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V y $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t} \in V$ siempre es posible escribir al vector $\vec{0}$ como combinación lineal de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}$; basta tomar todos los coeficientes de la combinación lineal iguales a 0. Así: $\vec{0} = 0.\vec{v_1} + 0.\vec{v_2} + \cdots + 0.\vec{v_t}$.

Definición 6.3.1 *Si la única forma de escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}$ es tomando todos los coeficientes 0, se dice que los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}$ son* **linealmente independientes** *o que el conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}\}$ es* **linealmente independiente**.
Es decir: $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}\}$ es linealmente independiente si $\lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_t} = \vec{0}$ implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_t = 0$.
Se dice que los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}$ son **linealmente dependientes** *si no son linealmente independientes, es decir, si es posible escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}$ con alguno de los coeficientes distinto de 0. También se dice que el conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_t}\}$ es* **linealmente dependiente**.

Ejemplos

1. Sea $V = \mathbb{R}^2$. $M = \{(2,3), (1,-1)\}$ es linealmente independiente pues si

   $\lambda_1.(2,3) + \lambda_2.(1,-1) = (0,0)$ entonces $\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$, lo que implica $5\lambda_1 = 0$ y por lo tanto $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$.

2. Si $V = \mathbb{R}[X]$, $M = \{1, X, X^2, X^2 + X + 1\}$ es linealmente dependiente pues $1 + X + X^2 + (-1)(X^2 + X + 1) = 0$.

3. Sea $V = M_3(\mathbb{R})$ y $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   Supongamos que:
   $$\lambda_1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
   $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$ por lo tanto M es linealmente independiente.

Observaciones

1. $\{\vec{v}\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ $\vec{v} \neq \vec{0}$.

2. Dado $M = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \subseteq V$, si $\vec{v_i} = \vec{0}$, para algún $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces M es linealmente dependiente.

3. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ entonces, $\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es linealmente dependiente $\Leftrightarrow$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$.

4. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $M = \{(x_1, y_1, z_1)\,,\,(x_2, y_2, z_2)\,,\,(x_3, y_3, z_3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   Entonces: M es linealmente dependiente $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

   Generalizar el resultado para n vectores de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dem. Ejercicio a cargo del lector. $\square$

Teorema 6.3.1 *Dados* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in V$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ *es linealmente independiente.*

2) Si $\lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_n} = \mu_1.\vec{v_1} + \mu_2.\vec{v_2} + \cdots + \mu_n.\vec{v_n}$, *entonces* $\lambda_i = \mu_i$, $1 \leq i \leq n$.

3) Ningún $\vec{v_i}$ *es combinación lineal de los restantes.*

4) $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ *y ningún* $\vec{v}_i$, $2 \leq i \leq n$ *es combinación lineal de los precedentes.*

Dem.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $\lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_n} = \mu_1.\vec{v_1} + \mu_2.\vec{v_2} + \cdots + \mu_n.\vec{v_n}$, entonces $(\lambda_1 - \mu_1).\vec{v_1} + \cdots + (\lambda_n - \mu_n).\vec{v_n} = \vec{0}$ luego por *1)*, $\lambda_i - \mu_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, por lo tanto $\lambda_i = \mu_i$, $1 \leq i \leq n$.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $\vec{v_i} = \lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_{i-1}.\vec{v_{i-1}} + \lambda_{i+1}.\vec{v_{i+1}} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_n}$ entonces $\lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_{i-1}.\vec{v_{i-1}} - \vec{v_i} + \lambda_{i+1}.\vec{v_{i+1}} + \cdots + \lambda_n.\vec{v_n} = \vec{0} = 0.\vec{v_1} + 0.\vec{v_2} + \cdots + 0.\vec{v_i} + \cdots + 0.\vec{v_n}$ y como $-1 \neq 0$, se contradice *2)*.

3) $\Rightarrow$ 4) Si $\vec{v}_1 = \vec{0} = 0.\vec{v}_2 + \cdots + 0.\vec{v}_n$ contradice 3), por lo tanto, $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$.
Supongamos que algún $\vec{v_i}$, $2 \leq i \leq n$ es tal que $\vec{v}_i = \lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_{i-1}.\vec{v}_{i-1}$, esto implica que $\vec{v}_i = \lambda_1.\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}.\vec{v}_{i-1} + 0.\vec{v}_{i+1} + \cdots + 0.\vec{v}_n$, que contradice *3)*.

4) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n.\vec{v}_n = \vec{0}$, debemos probar que $\lambda_i = 0\,; 1 \leq i \leq n$. Supongamos que existe i, $1 \leq i \leq n$ tal que $\lambda_i \neq 0$. Sea t el mayor subíndice tal que $\lambda_t \neq 0$; $t > 1$, ya que si $t = 1$, $\lambda_1.\vec{v}_1 = \vec{0}$ con $\lambda_1 \neq 0$ entonces $\vec{v}_1 = \vec{0}$. Por lo tanto $\vec{0} = \lambda_1.\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_t.\vec{v}_t + 0.\vec{v}_{t+1} + \cdots + 0.\vec{v}_n$, de donde se deduce que $\vec{v}_t = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_t}.\vec{v}_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_t}.\vec{v}_2 - \cdots - \dfrac{\lambda_{t-1}}{\lambda_t}.\vec{v}_{t-1}$.

Luego $\vec{v}_t$ es combinación lineal de los precedentes, en contradicción con *4)*. Por lo tanto $\lambda_i = 0$, para todo i, $1 \leq i \leq n$, y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es linealmente independiente.

$\square$

Observaciones

1. Si $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente, la manera de expresar a un vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores de M es única.

2. Si $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente, todo subconjunto de M lo es.

3. Si $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente, entonces $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ para todo $i \neq j$.

4. Si $M = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente y $\vec{u}$ no es combinación lineal de ellos entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k, \vec{u}\}$ es linealmente independiente.

Dem. Ejercicio a cargo del lector. $\square$

Definición 6.3.2 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un subconjunto finito $B \subseteq V$ se dice una* **base** *de V si:*

B_1) *B es linealmente independiente.*

B_2) $V = \overline{B}$.

Es decir, una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independientes que genera a V, lo que es equivalente a decir, por el teorema 6.3.1, que todo vector de V se escribe en forma única como combinación lineal de los vectores de B.

Ejemplos

1. Si $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_n = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ llamada la **base canónica**.

2. Si $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. En efecto:
   B es linealmente independiente pues $\lambda_1.(1, -1, 0) + \lambda_2.(0, 1, 0) + \lambda_3.(2, 1, 3) = (0, 0, 0)$
   implica que $\begin{cases} \lambda_1 + 2\,\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\,\lambda_3 = 0 \end{cases}$ y por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Además si
   $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = (x - \frac{2}{3}z).(1, -1, 0) + (x + y - z).(0, 1, 0) + \frac{z}{3}.(2, 1, 3)$, por lo tanto B genera a V.

3. Si $V = \{\vec{0}\}$, $B = \emptyset$ es una base de V.

4. Si $V = E_2$, una base de V está formada por dos vectores no nulos ni paralelos. Si $V = E_3$, forman base de V tres vectores no nulos y no paralelos a un mismo plano (no coplanares si los pensamos con origen común).

5. Si $V = M_2(\mathbb{R})$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de V.

6. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^4$ el subespacio de soluciones del sistema: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, por lo tanto $S = \{(x_2 - 2\,x_4, x_2, x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \{x_2.(1,1,0,0) + x_4.(-2,0,1,1);\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \overline{\{(1,1,0,0),(-2,0,1,1)\}}$. Como $B = \{(1,1,0,0)\ ,\ (-2,0,1,1)\}$ es linealmente independiente, es una base de S.

Proposición 6.3.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $V = \overline{\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_s}\}}$ y $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}\} \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente. Entonces $r \leq s$.*

Dem. Como $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_s}\}$ genera V entonces $\vec{v_i} = a_{1i}.\vec{w_1} + a_{2i}.\vec{w_2} + \cdots + a_{si}.\vec{w_s}$; $1 \leq i \leq r$. Consideremos el sistema de s ecuaciones con r incógnitas homogéneo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sr}x_r = 0 \end{cases}.$$

Si $r > s$ el sistema es compatible indeterminado, y entonces existe una solución no trivial del mismo $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$. Entonces:
$\lambda_1.\vec{v_1} + \lambda_2.\vec{v_2} + \cdots + \lambda_r.\vec{v_r} = \lambda_1.(a_{11}.\vec{w_1} + a_{21}.\vec{w_2} + \cdots + a_{s1}.\vec{w_s}) + \lambda_2.(a_{12}.\vec{w_1} + a_{22}.\vec{w_2} + \cdots + a_{s2}.\vec{w_s}) + \cdots + \lambda_r.(a_{1r}.\vec{w_1} + a_{2r}.\vec{w_2} + \cdots + a_{sr}.\vec{w_s}) = (\lambda_1\, a_{11} + \lambda_2\, a_{12} + \cdots + \lambda_r\, a_{1r}).\vec{w_1} + (\lambda_1\, a_{21} + \lambda_2\, a_{22} + \cdots + \lambda_r\, a_{2r}).\vec{w_2} + \cdots + (\lambda_1\, a_{s1} + \lambda_2\, a_{s2} + \cdots + \lambda_r\, a_{sr}).\vec{w_s} = 0.\vec{w_1} + 0.\vec{w_2} + \cdots + 0.\vec{w_s} = \vec{0}$, con algún λ_i no nulo. Esto contradice la hipótesis de que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto $r \leq s$. □

Corolario 6.3.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}\}$ y $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_t}\}$, bases de V. Entonces $r = t$.*

Definición 6.3.3 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Diremos que V tiene* **dimensión** *n sobre $\mathbb{R}$ si posee una base con n vectores. Se nota $dim_{\mathbb{R}} V = n$.*

Proposición 6.3.2 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $S \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente. Entonces existe una base B de V que contiene a S.*

Dem. Si $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}\}$ genera V la proposición está probada. Caso contrario, existe $\vec{u_1} \in V$ tal que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}, \vec{u_1}\}$ es linealmente independiente. Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}, \vec{u_1}\}$ no genera V, reiteramos el procedimiento anterior y luego de un número finito de pasos, pues V es finitamente generado, obtenemos $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_s} \in V$ de modo que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_s}\}$ genera V. Por lo tanto $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_s}\}$ es base de V. □

Corolario 6.3.2 *Todo $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita tiene una base.*

Dem. Si $V = \{\vec{0}\}$, entonces $B = \emptyset$ es base. Si $V \neq \{\vec{0}\}$, existe $\vec{v_1} \in V$, $\vec{v_1} \neq \vec{0}$. Basta entonces considerar $S = \{\vec{v_1}\}$, y aplicar la proposición 6.3.2. □

Observaciones

1. Si S es un subespacio de V, entonces $dim_{\mathbb{R}} S \leq dim_{\mathbb{R}} V$.
2. Si $dim_{\mathbb{R}} V = n$, entonces:
   i) Todo conjunto de vectores con más de n elementos es linealmente dependiente.
   ii) $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ es base de $V \iff B$ es linealmente independiente.
3. Si $V = \overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}}$ entonces, $dim_{\mathbb{R}} V$ es el número máximo de vectores linealmente independientes existentes entre los k generadores.

Ejemplos

1. $dim_{\mathbb{R}} E_2 = 2$ y $dim_{\mathbb{R}} E_3 = 3$.
2. Si $V = \mathbb{R}^n$, $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.
3. Si $V = M_2(\mathbb{R})$, $dim_{\mathbb{R}} V = 4$.
4. $V = \mathbb{R}_n[X] = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : P(X) = 0 \text{ ó } grP(X) \leq n\}$, $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ es una base de V, por lo tanto $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

6.4 Componentes

Una de las características de una base B de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, de dimensión n, es que permite introducir componentes en V en forma análoga a las de un vector $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dada una base $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ y $\vec{u} \in V$, las componentes de $\vec{u}$ se obtienen a partir de la unicidad de la expresión de $\vec{u}$ como combinación lineal de los vectores de B. Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ se puede decir cuál es la i-ésima componente porque se tiene un orden natural, si B es una base arbitraria se lo debe fijar. Necesitamos entonces el concepto de **base ordenada**.

Definición 6.4.1 *Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, una* **base ordenada** *es una sucesión $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ de vectores linealmente independientes que generan V.*

Observación
Si $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ es base ordenada entonces $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ es base de V. Por abuso de notación escribiremos $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ para notar a la base ordenada B. Tener en cuenta que $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\} \neq B' = \{\vec{v_2}, \vec{v_3}, \dots, \vec{v_n}, \vec{v_1}\}$ como bases ordenadas, pero iguales como conjuntos.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ una base ordenada de V. Dado $\vec{u} \in V$ existe una **única** n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que
$\vec{u} = x_1.\vec{v_1} + x_2.\vec{v_2} + \cdots + x_n.\vec{v_n}$, x_i se denomina la i-ésima **componente** de $\vec{u}$ respecto a B. Recíprocamente si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces existe $\vec{u} = x_1.\vec{v_1} + x_2.\vec{v_2} + \cdots + x_n.\vec{v_n} \in V$, único, tal que sus componentes respecto a B son $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Fijada la base ordenada B hemos establecido una correspondencia biunívoca $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ definiendo $\varphi(\vec{u}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si $\vec{u} = x_1.\vec{v_1} + x_2.\vec{v_2} + \cdots + x_n.\vec{v_n}$.

Observemos que si $\vec{u} = x_1.\vec{v_1} + x_2.\vec{v_2} + \cdots + x_n.\vec{v_n}$, $\vec{v} = y_1.\vec{v_1} + y_2.\vec{v_2} + \cdots + y_n.\vec{v_n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1).\vec{v_1} + \cdots + (x_n + y_n).\vec{v_n}$; $\lambda.\vec{u} = (\lambda\, x_1).\vec{v_1} + \cdots + (\lambda\, x_n).\vec{v_n}$.

Por lo tanto $\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u})+\varphi(\vec{v})$ y $\varphi(\lambda.\vec{u}) = \lambda.\varphi(\vec{u})$. Por lo que φ respeta las operaciones, y entonces podemos identificar cada $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión n con $\mathbb{R}^n$.

6.5 Ejercicios

1. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales:

   a) $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones:
   $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$,
   $\lambda.(x, y, z) = (\lambda^2 x, \lambda^2 y, \lambda^2 z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones:
   $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$,
   $\lambda.(x, y, z) = (\lambda x, y, z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Hallar todos los valores de k para los cuales el vector $\vec{u}$ es combinación lineal de los vectores dados a continuación:

   a) $\vec{v_1} = (2, 3, 5)$; $\vec{v_2} = (3, 7, 8)$; $\vec{v_3} = (1, -6, 1)$ y $\vec{u} = (7, -2, k)$.

   b) $\vec{v_1} = (3, 4, 2)$; $\vec{v_2} = (6, 8, 7)$ y $\vec{u} = (9, 12, k)$.

   c) $\vec{v_1} = (4, 4, 3)$; $\vec{v_2} = (7, 2, 1)$; $\vec{v_3} = (4, 1, 6)$ y $\vec{u} = (5, 9, k)$.

   d) $\vec{v_1} = (1, 2, -1)$; $\vec{v_2} = (2, 4, -2)$ y $\vec{u} = (4, 5, 2k)$.

3. a) Sea $V = \mathbb{R}^3$. Dado $\vec{u} = (1, -2, 3)$, escribirlo, si es posible, como combinación lineal de los vectores pertenecientes a los siguientes conjuntos, indicando si la expresión es única:
   $\{(-1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$; $\{(-1, 1, 1), (0, 0, 1), (2, -2, 1)\}$;
   $\{(1, 2, 0), (0, 0, -1)\}$.

   b) Sea $V = M_2(\mathbb{R})$. Verificar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 18 & 13/6 \\ 8 & -18 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 5 & 1/2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

   c) Sea $V = \mathbb{R}[X]$. Expresar,si es posible, al polinomio $4X^2 + 4X + 5$ como combinación lineal de los polinomios $2X^2 + 3X + 4$ y $X^2 - 2X + 3$.

4. Determinar cuales de los siguientes subconjuntos son subespacios del correspondiente $\mathbb{R}$-espacio vectorial V:

   a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 0\}$; $V = \mathbb{R}^2$.

   c) $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$; $V = M_n(\mathbb{R})$.

   d) $S = \mathbb{R}_n[X] = \{P(X) : P(X) = 0 \text{ ó } gr(P(X)) \leq n\}$; $V = \mathbb{R}[X]$.

   e) $S = \{P(X) \in \mathbb{R}[X] : P(X) = a X^3 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$; $V = \mathbb{R}[X]$.

5. a) Verificar que $\overline{\{(0, 1, 1), (0, 2, -1)\}} = \overline{\{(0, 1, 2), (0, 2, 3), (0, 3, 1)\}}$.

b) Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, hallar los subespacios por ellos generados:

i) $\{(1,0,-2)\,,\,(-1,0,2)\,,\,(3,0,-1)\,,\,(-1,0,3)\}$,

ii) $\{(1,2,-1)\,,\,(-1,4,1)\,,\,(0,1,0)\}$,

iii) $\{(1,1,2)\,,\,(0,0,1)\}$.

c) Determinar el valor de los escalares p y q para los cuales el vector $(2,p,3,-q)$ pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(2,3,1,-5)$ y $(0,2,-1,3)$.

6. Indicar cuales de los siguientes subconjuntos generan V:

a) $V=\mathbb{R}^2$.

i) $\{(2,-5)\,,\,(-1,5/2)\,\}$,

ii) $\{(1,2)\,,\,(-1,1)\,,\,(2,3)\}$,

iii) $\{(1,2)\}$.

b) $V=\overline{\{(1,0,-1)\,,\,(1,1,0)\,,\,(0,1,1)\}}$.

i) $\{(2,1,-1)\,,\,(1,2,1)\}$,

ii) $\{(2,1,-1)\,,\,(1,-1,0)\}$.

7. Determinar si los conjuntos de vectores indicados a continuación son linealmente independientes:

a) $\{(1,-2,1)\,,\,(2,1,-1)\,,\,(7,-4,1)\}$,

b) $\{(1,1,1)\,,\,(0,1,0)\}$,

c) $\{(1,-3,7)\,,\,(2,0,-6)\,,\,(3,-1,-1)\,,\,(2,4,-5)\}$,

d) $\{(1,1)\,,\,(2,-1)\,,\,(0,0)\}$.

8. Determinar en cada caso los valores de k para los cuales el conjunto de vectores que se indica es linealmente independiente:

a) $\{(k,1,0)\,,\,(1,0,0)\,,\,(k,k,0)\}$,

b) $\{(1,k,2\,k)\,,\,(1,0,0)\,,\,(1,-1,1)\}$,

c) $\{(1,k,-3\,k)\,,\,(k,1,-1)\}$,

d) $\{(1,k)\,,\,(1+k,0)\}$.

9. Sea $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ un conjunto de vectores de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Indicar, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\,,\,\vec{v}_3\}$ es linealmente independiente, entonces:

i) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\,,\,\vec{v}_3\,,\,\vec{w}\}$ es linealmente dependiente si, y sólo si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$.

iii) $\{\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_1-\vec{v}_2\,,\,\vec{v}_1-2.\vec{v}_2+\vec{v}_3\}$ es linealmente independiente.

iv) $\{\vec{v}_1\,,\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2\,,\ 2.\vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$ es linealmente independiente.

b) Si $\{\vec{v}_1\,,\ \vec{v}_2\,,\ \vec{v}_3\}$ es linealmente dependiente y $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, $1 \leq i \leq 3$, entonces:

i) $\{\vec{v}_1\,,\ \vec{v}_2\}$ es linealmente dependiente.

ii) $\{\vec{v}_1\}$ es linealmente independiente.

iii) $\{\vec{v}_1\,,\ \vec{v}_2\,,\ \vec{v}_3\,,\ \vec{w}\}$ es linealmente dependiente, para todo $\vec{w} \in V$.

10. Hallar una base y la dimensión de los subespacios siguientes:

a) $\overline{\{(1,0,-2)\,,\ (0,1,0)\,,\ (1,1,-2)\}}$.

b) $\overline{\{(1,2)\,,\ (2,1)\}}$.

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$,

d) $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x \ = \ t - 7z\}$,

e) $S = \{(a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) : a_{12} = a_{21}\}$.

11. a) Verificar que los vectores $\vec{u} = (1,1,0,2)$ y $\vec{v} = (1,-1,2,0)$ forman un conjunto linealmente independiente y extenderlo a una base de $\mathbb{R}^4$.

b) Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga al vector $(1,2,-1,1)$.

c) ¿ Existe una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $(1,-1,2)$ y $(2,-2,4)$?

12. Sean $S = \{(x,y,z) : 2\,x + y = 0\}$ y $T = \overline{\{(1,-1,1)\,,\ (1,3,0)\}}$, subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar bases para S y T.

b) Hallar un subconjunto linealmente independiente de S, que no sea base de S.

c) Hallar un conjunto de generadores de T, que no sea base de T.

13. Sean T y S subespacios de $\mathbb{R}^4$, $T = \overline{\{(1,2,-1,0), (1,0,0,-1), (2,2,-1,-1)\}}$ y $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y + z\,,\ t = 0\}$.

a) Hallar una base de S y extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$.

b) Escribir el subespacio T utilizando ecuaciones.

c) Hallar $S \cap T$ y su dimensión.

7 Cambio de base. Bases ortonormales

7.1 Cambio de base

Recordemos que si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ es una base ordenada de V, todo vector $\vec{v} \in V$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de los vectores de la base B. Es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, unívocamente determinados, tales que $\vec{v} = \alpha_1.\vec{b_1} + \alpha_2.\vec{b_2} + \cdots + \alpha_n.\vec{b_n}$. Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, se denominan las **componentes** del vector $\vec{v}$ con respecto a la base ordenada B. Usaremos, de acuerdo a las circunstancias, las siguientes notaciones:

$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, matriz de orden $n \times 1$ ó $(\vec{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. En este último caso, si $V = \mathbb{R}^n$ y B es la base canónica, escribiremos simplemente $\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Sean $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ y $B' = \{\vec{b'_1}, \vec{b'_2}, \ldots, \vec{b'_n}\}$, bases ordenadas de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Dado $\vec{v} \in V$, queremos hallar sus componentes en la base B', conocidas las mismas en la base B.

Supongamos que $(\vec{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; $\vec{b_1} = a_{11}.\vec{b'_1} + a_{21}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{n1}.\vec{b'_n}$,

$\vec{b_2} = a_{12}.\vec{b'_1} + a_{22}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{n2}.\vec{b'_n}$, ... , $\vec{b_n} = a_{1n}.\vec{b'_1} + a_{2n}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{nn}.\vec{b'_n}$.

Entonces $\vec{v} = \alpha_1.(a_{11}.\vec{b'_1} + a_{21}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{n1}.\vec{b'_n}) + \alpha_2.(a_{12}.\vec{b'_1} + a_{22}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{n2}.\vec{b'_n}) + \cdots +$ $\alpha_n.(a_{1n}.\vec{b'_1} + a_{2n}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{nn}.\vec{b'_n}) = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n).\vec{b'_1} + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots +$ $a_{2n}\alpha_n).\vec{b'_2} + \cdots + (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n).\vec{b'_n}$.

Es decir, $[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$,

luego, $[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot [\vec{v}]_B$.

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vec{b_1}]_{B'} & [\vec{b_2}]_{B'} & \cdots & [\vec{b_n}]_{B'} \end{pmatrix}$, cuyas columnas están formadas por las componentes de los vectores de la base B respecto a la base B', se denomina la **matriz de cambio de base** de la base B a la base B' y la notaremos $[B]_{B'}$. Obtenemos entonces que:

$$[\vec{v}]_{B'} = [B]_{B'} \cdot [\vec{v}]_B$$

igualdad que nos permite hallar las componentes de cualquier vector $\vec{v}$ respecto a la base B', conociendo sus componentes respecto a la base B. Análogamente $[\vec{v}]_B = [B']_B \cdot [\vec{v}]_{B'}$ permite obtener las componentes de cualquier vector $\vec{v}$ respecto a la base B, conociendo sus componentes respecto a la base B'.

Proposición 7.1.1 *Si B y B' son bases ordenadas de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión n, entonces $[B']_B = [B]_{B'}^{-1}$.*

Dem. $[\vec{v}]_{B'} = [B]_{B'} \cdot [\vec{v}]_B = [B]_{B'} \cdot ([B']_B \cdot [\vec{v}]_{B'}) = ([B]_{B'} \cdot [B']_B) \cdot [\vec{v}]_{B'}$, para todo $\vec{v} \in V$.

Sea $[B]_{B'} \cdot [B']_B = (c_{ij})$. Tomemos $\vec{v} = \vec{b'_1}$, entonces como $[\vec{b'_1}]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ resulta

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}$. Repitiendo el procedimiento para cada uno de los vectores de la base B' obtenemos que $(c_{ij}) = I_n$, de donde resulta la proposición. $\square$

Ejemplo
Sean $B = \{(1,-1,2),(1,0,1),(2,-1,1)\}$ y $B' = \{(3,0,1),(-1,2,0),(2,2,3)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. Si las componentes de un vector $\vec{v}$ en la base B son $(1,2,-1)$ queremos hallar sus componentes en la base B'.

Para hallar $[B]_{B'}$, debemos escribir cada vector de la base B como combinación lineal de los vectores de la base B'. Para ello planteamos, $(1,-1,2) = \alpha\cdot(3,0,1)+\beta\cdot(-1,2,0)+\gamma\cdot(2,2,3)$,

obteniendo el sistema $\begin{cases} 3\alpha - \beta + 2\gamma = 1 \\ 2\beta + 2\gamma = -1 \\ \alpha + 3\gamma = 2 \end{cases}$, cuya solución es $\alpha = -\frac{3}{4}$, $\beta = -\frac{17}{12}$ y $\gamma = \frac{11}{12}$.

Por lo tanto, $(1,-1,2) = (-\frac{3}{4})\cdot(3,0,1) + (-\frac{17}{12})\cdot(-1,2,0) + \frac{11}{12}\cdot(2,2,3)$. Haciendo lo mismo para los otros dos vectores de B, se obtiene: $(1,0,1) = (-\frac{1}{3})\cdot(-1,2,0) + \frac{1}{3}\cdot(2,2,3)$ y $(2,-1,1) = \frac{1}{4}\cdot(3,0,1) + (-\frac{3}{4})\cdot(-1,2,0) + \frac{1}{4}\cdot(2,2,3)$ luego,

$$[\vec{v}]_{B'} = [B]_{B'} \cdot [\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 1/4 \\ -17/12 & -1/3 & -3/4 \\ 11/12 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Proposición 7.1.2 *Sean* B , B' *y* B'' *bases ordenadas de un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* V *de dimensión* n*. Entonces*

$$[B]_{B''} = [B']_{B''} \cdot [B]_{B'}$$

Dem. Siguiendo un razonamiento análogo al de la proposición anterior, basta probar que $[B]_{B''} \cdot [\vec{v}]_B = ([B']_{B''} \cdot [B]_{B'}) \cdot [\vec{v}]_B$, para todo $\vec{v} \in V$.

En efecto, $[B]_{B''} \cdot [\vec{v}]_B = [\vec{v}]_{B''} = [B']_{B''} \cdot [\vec{v}]_{B'} = [B']_{B''} \cdot ([B]_{B'} \cdot [\vec{v}]_B) = ([B']_{B''} \cdot [B]_{B'}) \cdot [\vec{v}]_B$.□

Corolario 7.1.1 *Si* $V = \mathbb{R}^n$ *y* $\mathcal{C}$ *es la base canónica, se tiene que* $[B]_{B'} = [\mathcal{C}]_{B'} \cdot [B]_{\mathcal{C}} = [B']_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [B]_{\mathcal{C}}$.

Ejemplo

Resolvamos el ejemplo anterior utilizando el corolario 7.1.1. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Como $A = [B']_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\det A = 12$, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 2 & 7 & -6 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Luego $[B]_{B'} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 2 & 7 & -6 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ -17 & -4 & -9 \\ 11 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $[\vec{v}]_{B'} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ -17 & -4 & -9 \\ 11 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.

Interpretación geométrica de un cambio de base

Recordemos que si $V = E_2$ ó E_3 , al fijar un punto O y una base ordenada B del Plano o del Espacio, queda determinado un sistema de coordenadas cartesianas. Si cambiamos la base B por otra B' obtenemos, en forma análoga, un sistema de coordenadas cartesianas distinto al anterior. Si P tiene coordenadas (x, y) en el sistema (O, XY) entonces $[\overrightarrow{OP}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Al cambiar la base, si queremos hallar las coordenadas $\langle x', y' \rangle$ de P en el sistema $(O, X'Y')$ usamos que:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = [\overrightarrow{OP}]_{B'} = [B]_{B'} \cdot [\overrightarrow{OP}]_B = [B]_{B'} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De aquí resultan las fórmulas que nos permiten efectuar los correspondientes cambios de coordenadas en E_2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = [B]_{B'} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [B]_{B'}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Para E_3 las fórmulas son análogas.

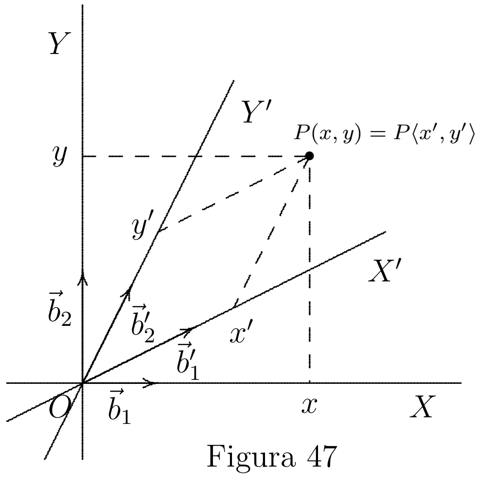


Figura 47

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^3$, (O, XYZ) el sistema de coordenadas asociado a la base canónica y $(O, X'Y'Z')$ el sistema asociado a la base $B = \{(1,0,0)\,,\ (0,-1,2)\,,\ (0,1,1)\}$.

Se tiene entonces que $[B]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $[B]_{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, por lo que

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' + z' \\ z = 2\,y' + z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = -\dfrac{1}{3}\,y + \dfrac{1}{3}\,z \\ z' = \dfrac{2}{3}\,y + \dfrac{1}{3}\,z \end{cases}$$

a) Si $P\langle 1, 0, -2\rangle$ en $(O, X'Y'Z')$, hallar sus coordenadas en (O, XYZ).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$ Por lo tanto $P(1, -2, -2)$.

b) Si $\pi : x' + 3\,y' + 3\,z' + 2 = 0$, en el sistema $(O, X'Y'Z')$, hallar su ecuación en (O, XYZ).

Reemplazando obtenemos $x + 3\left(-\dfrac{1}{3}\,y + \dfrac{1}{3}\,z\right) + 3\left(\dfrac{2}{3}\,y + \dfrac{1}{3}\,z\right) + 2 = x + y + 2\,z + 2 = 0$.

Luego $\pi :\ x + y + 2\,z + 2 = 0$ en (O, XYZ).

Observaciones

1. Si $\pi :\ a\,x' + b\,y' + c\,z' + d = 0$, en $(O, X'Y'Z')$ asociado a una base B que no es la canónica de $\mathbb{R}^3$, en general $(\vec{v})_B = (a, b, c)$ no es perpendicular a π.

2. Si $L : \begin{cases} a\,x' + b\,y' + c\,z' + d = 0 \\ a'\,x' + b'\,y' + c'\,z' + d' = 0 \end{cases}$ en $(O, X'Y'Z')$ asociado a $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_2\}$, entonces la ecuación paramétrica de L es: $L : \begin{cases} x' = x_0 + \Delta_1\,t \\ y' = y_0 + \Delta_2\,t \\ z' = z_0 + \Delta_3\,t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$, donde (x_0, y_0, z_0)

es una solución particular del sistema y $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$, como si fuera un producto vectorial.

Traslaciones

Supongamos que trasladamos el origen O de coordenadas a otro punto O', es decir a los vectores de B los pensamos con origen en O'. Obtenemos nuevos ejes X' e Y', distintos, paralelos a los anteriores y con las mismas unidades de medida.

Sean (x_0, y_0) las coordenadas de O' en el sistema (O, XY) y P un punto del Plano que en el sistema (O, XY) tiene coordenadas (x, y).
Si con $\langle x', y' \rangle$ notamos las coordenadas de P en el sistema $(O', X'Y')$ entonces se obtiene:
$\overrightarrow{OO'} = x_0.\vec{b_1} + y_0.\vec{b_2}$, $\overrightarrow{OP} = x.\vec{b_1} + y.\vec{b_2}$ y $\overrightarrow{O'P} = x'.\vec{b_1} + y'.\vec{b_2}$.

Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, entonces obtenemos $x.\vec{b_1} + y.\vec{b_2} = x_0.\vec{b_1} + y_0.\vec{b_2} + x'.\vec{b_1} + y'.\vec{b_2} = (x_0 + x').\vec{b_1} + (y_0 + y').\vec{b_2}$. Por lo tanto,

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + x' \\ y &= y_0 + y' \end{aligned} \qquad\qquad (2) \quad \begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned}$$

(1) y (2) son las fórmulas que nos permiten pasar del sistema (O, XY) al $(O', X'Y')$ y recíprocamente. En forma matricial (1) y (2) se expresan, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

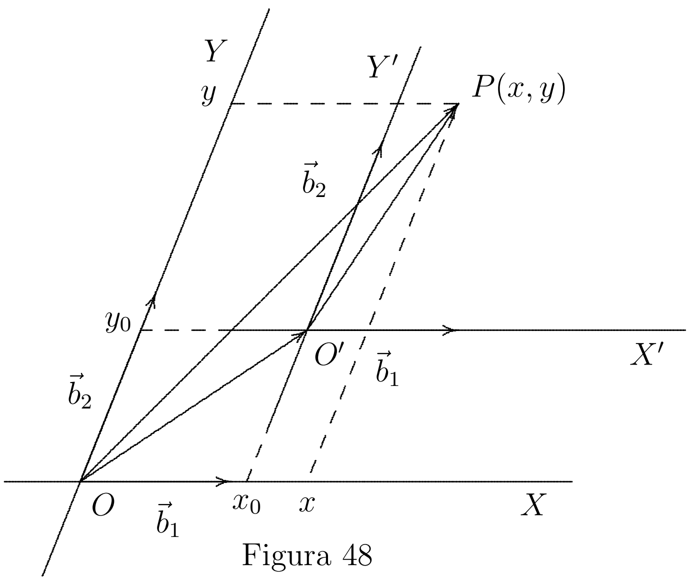


Figura 48

Ejemplo

Consideremos la base $\mathcal{C} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ y (O, XY) el sistema de coordenadas asociado. Sea $(O', X'Y')$ el sistema que se obtiene trasladando paralelamente los ejes X e Y al nuevo origen O' de coordenadas $(-1, 6)$.

a) Si P tiene coordenadas $(2, 5)$ en el sistema (O, XY), ¿ cuáles son sus coordenadas en el $(O', X'Y')$?

$x' = x - x_0 = x + 1$; $y' = y - y_0 = y - 6$. Si $x = 2$ entonces $x' = 3$, y si $y = 5$ entonces $y' = -1$, luego P tiene coordenadas $\langle 3, -1\rangle$ en el sistema $(O', X'Y')$.

b) Si Q tiene coordenadas $\langle -3, 2\rangle$ en el sistema $(O', X'Y')$, ¿ cuáles son sus coordenadas en el (O, XY) ?

$x = x' + x_0 = x' - 1$, $y = y' + y_0 = y' + 6$. Si $x' = -3$ entonces $x = -4$; si $y' = 2$ entonces $y = 8$, luego Q tiene coordenadas $(-4, 8)$ en el sistema (O, XY).

c) Si $3\,x + y - 2 = 0$ es la ecuación de una recta L en el sistema (O, XY), ¿ cuál es la ecuación de L en el $(O', X'Y')$?

Como L tiene ecuación $3\,x + y - 2 = 0$, $x = x' - 1$ e $y = y' + 6$ tenemos que: $3(x' - 1) + y' + 6 - 2 = 0$, lo que implica que $3\,x' + y' + 1 = 0$. Luego L tiene ecuación $3\,x' + y' + 1 = 0$ en el sistema $(O', X'Y')$.

Traslación y cambio de base

Supongamos ahora que trasladamos el sistema y además cambiamos la base.

Sea $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$, una base ordenada y (O, XY) el sistema de coordenadas asociado a la base B. Sea $O'(x_0, y_0)$ el nuevo origen y consideremos la base ordenada $B' = \{\vec{b'_1}, \vec{b'_2}\}$. El sistema $(O', X''Y'')$ es el que se obtiene trasladando el (O, XY) al punto O' y luego cambiando la base. Si un punto P tiene coordenadas (x, y) en el sistema (O, XY) escribiremos $\langle x', y'\rangle$ para representar las coordenadas de P en el sistema $(O', X'Y')$ y $\langle\langle x'', y''\rangle\rangle$ para representar las coordenadas de P en el sistema $(O', X''Y'')$. Veamos la relación que existe entre las mismas.

Trabajando en forma matricial tenemos que: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = [B]_{B'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

de donde,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = [B]_{B'} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Recíprocamente tenemos que:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = [B']_B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = [B']_B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

de donde,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [B']_B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

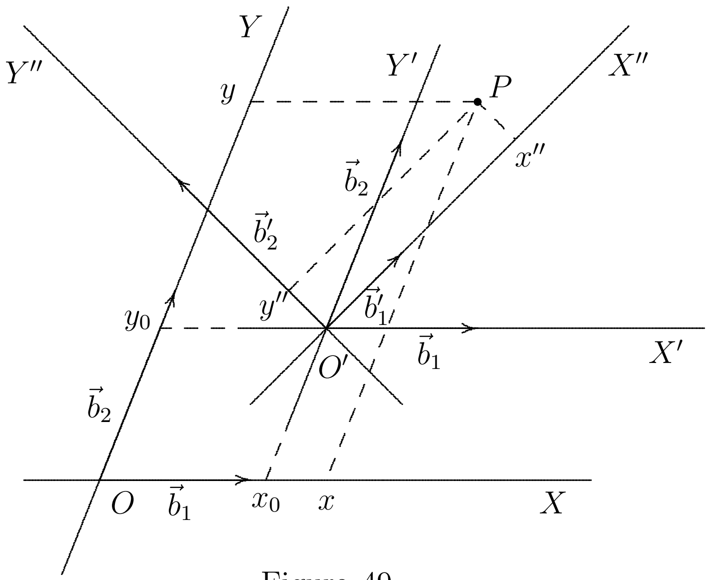


Figura 49

En lo que sigue trabajaremos con sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales.

Ejemplos

1. Sea (O, XY) el sistema de coordenadas asociado a la base $\mathcal{C} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, $(O, X'Y')$ el sistema obtenido rotando el sistema (O, XY) un ángulo α y $(O', X''Y'')$ el sistema obtenido trasladando los ejes X' e Y' al nuevo origen O' de coordenadas (x_0, y_0) en el sistema (O, XY). Si $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ es la base asociada al sistema $(O, X'Y')$ entonces, $\vec{b_1} = cos\,\alpha.\vec{e_1} + sen\,\alpha.\vec{e_2}$ y $\vec{b_2} = -sen\,\alpha.\vec{e_1} + cos\,\alpha.\vec{e_2}$, por lo tanto $[B]_C = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$ y $[B]_C^{-1} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$. Las fórmulas de cambio de coordenadas son:
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

2. Sea $(O', X''Y'')$ el sistema que se obtiene rotando el sistema (O, XY) en un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes y trasladando el origen del sistema al punto O' de coordenadas $(1, 1)$ en el sistema (O, XY).

   a) Hallar las coordenadas, en el sistema $(O', X''Y'')$, del punto A que en el sistema (O, XY) tiene coordenadas $(2, 1)$.

   $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$, remplazando x por 2 e y por 1 se obtiene $x'' = \dfrac{1}{2}$ e $y'' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, que son las coordenadas del punto A en el sistema $(O', X''Y'')$.

b) Hallar la ecuación, en el sistema $(O', X''Y'')$, de la recta L cuya ecuación en el sistema (O, XY) es $y - 2\,x = 0$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto $x = \dfrac{1}{2}\,x'' - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y'' + 1$ e $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x'' + \dfrac{1}{2}\,y'' + 1$, luego la ecuación de la recta L en el sistema $(O', X''Y'')$ es $(\sqrt{3} - 2)\,x'' + (1 + 2\sqrt{3})\,y'' - 2 = 0$.

En forma análoga al caso del Plano, si O es un punto del Espacio y $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ es una base ordenada del mismo, queda determinado un sistema de coordenadas cartesianas (O, XYZ).
Cualquier punto P del Espacio tendrá, en el sistema (O, XYZ), coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ que son las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base B.
Sea (O, XYZ) el sistema asociado a una base ordenada $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$, $(O, X'Y'Z')$ el sistema asociado a una base ordenada $B' = \{\vec{b_1'}, \vec{b_2'}, \vec{b_3'}\}$ y $(O', X''Y''Z'')$ el sistema que se obtiene trasladando paralelamente los ejes X', Y' y Z' a un nuevo origen O' que en el sistema (O, XYZ) tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0).
Las fórmulas del cambio de coordenadas son:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = [B]_{B'} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [B']_B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo
Sea (O, XYZ) el sistema de coordenadas asociado a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la base $B = \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})\}$ con sistema asociado $(O, X'Y'Z')$ y $(O', X''Y''Z'')$ el sistema obtenido del $(O, X'Y'Z')$ trasladando los ejes al nuevo origen O', cuyas coordenadas en el sistema (O, XYZ) son $(0, -1, 3)$.

Dada la recta L de ecuación $\begin{cases} x'' = \sqrt{12} + \sqrt{3}\,\lambda \\ y'' = -\sqrt{8} \\ z'' = 3\sqrt{6}\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, en el sistema $(O', X''Y''Z'')$,

hallemos su ecuación en el (O, XYZ).

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = [C]_B \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = [B]_C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y + 1 \\ z - 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [B]_C \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Un vector director de L es $\vec{d_L} = \langle\langle\sqrt{3}, 0, 3\sqrt{6}\rangle\rangle$ y un punto perteneciente a L es $P_0\langle\langle\sqrt{12}, -\sqrt{8}, 0\rangle\rangle$.

Observación
Cuando se realiza una traslación del sistema de coordenadas las componentes de los vectores no cambian por la misma, sí las coordenadas de los puntos. De acuerdo con la observación, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 3\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto, } \vec{d_L} = (7, -2, -2).$$

Las coordenadas de P_0 se ven afectadas por la traslación y por el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{12} \\ -\sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Como } P_0(2, 3, 3),$$

entonces la ecuación de L en el sistema (O, XYZ) es: $\begin{cases} x = 2 + 7\,\lambda \\ y = 3 - 2\,\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2\,\lambda \end{cases}$

7.2 Espacios con producto interno

Definición 7.2.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Un* **producto interno** *sobre V es una función $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada par ordenado de vectores $(\vec{u}, \vec{v})$ un número real $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$ de tal modo que para cualquier $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ y todos los escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifiquen:*

a) $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle$.

b) $\langle\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle\vec{u}, \vec{w}\rangle + \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle$.

c) $\langle\lambda.\vec{u}, \vec{v}\rangle = \lambda\,\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$.

d) $\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle \geq 0$. *Además,* $\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Definición 7.2.2 *Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial que tiene definido un producto interno se denomina* **espacio vectorial con producto interno o espacio euclídeo.**

Ejemplos

1. $V = E_2$ ó E_3 donde $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ó } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$,

   donde θ es la medida del ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2. $V = \mathbb{R}^n$, $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$, $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ define un producto interno llamado producto interno o **producto escalar canónico**.

3. $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{u} = (x_1, x_2)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2) \in V$, $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ define un producto interno en V, distinto al considerado en 2.

Definición 7.2.3 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno* $\langle\, ,\, \rangle$ *, llamaremos* **norma** *de* $\vec{v} \in V$ *y la notaremos* $\|\vec{v}\|$ *al número real* $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

Ejemplo

Si $V = \mathbb{R}^n$, con el producto interno canónico y $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, la norma posee las siguientes propiedades, cualquiera sean $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $\|\lambda.\vec{v}\| = |\lambda| \; \|\vec{v}\|$.

2) $\|\vec{v}\| \geq 0$. Además, $\|\vec{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

4) $| \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle | \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.

Bases ortonormales

Definición 7.2.4 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno.* $\vec{u}$ *y* $\vec{v} \in V$ *se dicen* **ortogonales** *si* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Definición 7.2.5 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y* $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ *una base de V. B se dice* **ortonormal** *si*

$$\langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = \begin{cases} 1 & si \;\; i = j \\ 0 & si \;\; i \neq j \end{cases}$$

Ejemplos

1. En E_2 y E_3 las bases $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ y $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ son bases ortonormales.
2. En $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \right\}$ son bases ortonormales.
3. En $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}), (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}), (0,1,0) \right\}$ son bases ortonormales.

Nota: El producto interno considerado en los ejemplos anteriores es el canónico.

La propiedad 4) de la norma implica que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no nulos $-1 \leq \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \leq 1$, lo que permite definir la noción de **ángulo** entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a partir de la igualdad

$$cos\ \alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

Proposición 7.2.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno y $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ una base ortonormal de V. Si $\vec{u} = \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{b_n}$ y $\vec{v} = \mu_1.\vec{b_1} + \mu_2.\vec{b_2} + \cdots + \mu_n.\vec{b_n}$, entonces $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots + \lambda_n\mu_n$.*

Dem. $\langle \vec{u}\,, \vec{v}\,\rangle = \langle\, \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2} + \cdots + \lambda_n.\vec{b_n}\,,\ \mu_1.\vec{b_1} + \mu_2.\vec{b_2} + \cdots + \mu_n.\vec{b_n}\,\rangle = \lambda_1\mu_1 \langle\, \vec{b_1}\,, \vec{b_1}\,\rangle +$ $\lambda_2\mu_2 \langle\, \vec{b_2}\,, \vec{b_2}\,\rangle + \cdots + \lambda_n\mu_n \langle\, \vec{b_n}\,, \vec{b_n}\,\rangle = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots + \lambda_n\mu_n.$ $\square$

Proposición 7.2.2 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, y $M = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_r}\}$ un conjunto de vectores no nulos ortogonales dos a dos de V. Entonces M es linealmente independiente.*

Dem. Supongamos que $\lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2} + \cdots + \lambda_r.\vec{b_r} = \vec{0}$. Si $\vec{b_i} \in M$, entonces $0 = \langle\, \vec{b_i}\,, \vec{0}\rangle =$ $\langle\, \vec{b_i}\,, \lambda_1.\vec{b_1} + \lambda_2.\vec{b_2} + \cdots + \lambda_r.\vec{b_r}\,\rangle = \lambda_1 \langle\, \vec{b_i}\,, \vec{b_1}\,\rangle + \lambda_2 \langle\, \vec{b_i}\,, \vec{b_2}\,\rangle + \cdots + \lambda_i \langle\, \vec{b_i}\,, \vec{b_i}\,\rangle + \cdots + \lambda_r \langle\, \vec{b_i}\,, \vec{b_r}\,\rangle =$ $\lambda_i \langle\, \vec{b_i}\,, \vec{b_i}\,\rangle = \lambda_i\, \|\vec{b_i}\|^2$, lo que implica $\lambda_i = 0$ pues $\|\vec{b_i}\| \neq 0$. $\square$

Cálculo de una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

Sea $\vec{v_1} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v_1} \neq \vec{0}$ y consideremos $\vec{b_1} = \dfrac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}$. Si $\vec{b_1} = (x_1, x_2, x_3)$, sea $\vec{b} = (0, -x_3, x_2)$. Como $\langle\, \vec{b_1}\,, \vec{b}\rangle = x_2x_3 - x_3x_2 = 0$, tomemos $\vec{b_2} = \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ y $\vec{b_3} = \vec{b_1} \wedge \vec{b_2}$. Es claro que $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ es un base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo

Construyamos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de $\vec{v_1} = (1, 1, 1)$.

Sea $\vec{b_1} = \dfrac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$ y $\vec{b} = (0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$. Luego $\vec{b_2} = (0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$, entonces $\vec{b_3} = \vec{b_1} \wedge \vec{b_2} = (\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}})$.

Por lo tanto $B = \left\{ (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})\,, (0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})\,, (\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}) \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, (podemos suponer $V = \mathbb{R}^n$), S un subespacio de V y B una base de S. Queremos hallar, a partir de B, una base ortonormal de S.

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea $V = \mathbb{R}^n$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio y $B = \{\vec{b_1}\,, \vec{b_2}\,, \ldots, \vec{b_r}\}$ una base de S.

Sea $\vec{v_1} = \dfrac{\vec{b_1}}{\|\vec{b_1}\|}$, y consideremos $\vec{v_2'} = \vec{b_2} - (\overrightarrow{proy_{\vec{v_1}} \vec{b_2}}) = \vec{b_2} - \langle\, \vec{b_2}\,, \vec{v_1}\,\rangle.\vec{v_1}$.

Se tiene entonces que $\langle\, \vec{v_2'}\,, \vec{v_1}\,\rangle = \langle\, \vec{b_2} - \langle\, \vec{b_2}\,, \vec{v_1}\,\rangle \cdot \vec{v_1}\,, \vec{v_1}\,\rangle = \langle\, \vec{b_2}\,, \vec{v_1}\,\rangle - \langle\, \vec{b_2}\,, \vec{v_1}\,\rangle \cdot \|\vec{v_1}\|^2 = 0.$

Si $\vec{v_2} = \dfrac{\vec{v_2'}}{\|\vec{v_2'}\|}$ entonces $\langle\, \vec{v_1}\,, \vec{v_2}\,\rangle = 0$ y además $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ pertenecen a S, pues son

combinación lineal de $\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$.
Supongamos conocidos $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_s}$ tales que:

1) $\langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq s.$

2) Cada $\vec{v_i}$ es combinación lineal de $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_s}$.

Entonces, $\overrightarrow{v_{s+1}} = \dfrac{\overrightarrow{v'_{s+1}}}{\|\overrightarrow{v'_{s+1}}\|}$, donde $\overrightarrow{v'_{s+1}} = \overrightarrow{b_{s+1}} - (\langle \overrightarrow{b_{s+1}}, \vec{v_1} \rangle . \vec{v_1} + \cdots + \langle \overrightarrow{b_{s+1}}, \vec{v_s} \rangle . \vec{v_s})$.

Se verifica además que $\langle \overrightarrow{v'_{s+1}}, \vec{v_i} \rangle = 0$, $1 \leq i \leq s$ y $\overrightarrow{v'_{s+1}} \in S$.
Sea $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}\}$, donde cada $\vec{v_i}$, $1 \leq i \leq r$, se obtiene aplicando el método anterior.
Como $dim_{\mathbb{R}} S = r$ y B es linealmente independiente, entonces B es base ortonormal de S.

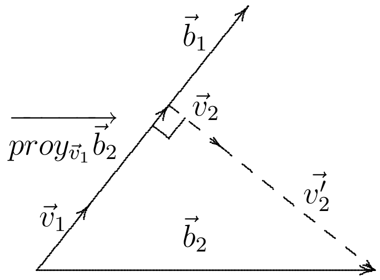


Figura 50

Ejemplo
Sea $S = \overline{\{(1,0,0,0)\,,\,(1,1,0,0)\,,\,(0,1,1,1)\}} \subseteq \mathbb{R}^4$. $B = \{(1,0,0,0)\,,\,(1,1,0,0)\,,\,(0,1,1,1)\}$ es linealmente independiente, por lo tanto es base de S.
Sea $\vec{v_1} = (1,0,0,0)\,,\ \vec{v'_2} = (1,1,0,0) - \langle (1,1,0,0)\,,\,(1,0,0,0) \rangle .(1,0,0,0) =$
$(1,1,0,0) - (1,0,0,0) = (0,1,0,0)$.

Como $\|\vec{v'_2}\| = 1$, entonces $\vec{v_2} = (0,1,0,0)$.

$\vec{v'_3} = (0,1,1,1) - (\langle (0,1,1,1)\,,\,(1,0,0,0) \rangle .(1,0,0,0) + \langle (0,1,1,1)\,,\,(0,1,0,0) \rangle .(0,1,0,0)) =$
$(0,1,1,1) - (0,1,0,0) = (0,0,1,1)$.

Por lo tanto, $\vec{v_3} = \dfrac{\vec{v'_3}}{\|\vec{v'_3}\|} = (0,0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ y $B' = \left\{(1,0,0,0)\,,\,(0,1,0,0)\,,\,(0,0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})\right\}$ es una base ortonormal de S.

7.3 Ejercicios

1. Sean $B = \{(-1,1,0)\,,\,(1,2,3)\,,\,(-1,-2,-4)\}$ y $B' = \{(1,-1,1)\,,\,(1,2,3)\,,\,(1,3,4)\}$, bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) Hallar $[B]_{\mathcal{C}}$, $[\mathcal{C}]_B$, $[B']_{\mathcal{C}}$, $[\mathcal{C}]_{B'}$, $[B]_{B'}$ y $[B']_B$.

   b) Si $\vec{v} = (1\,,\,-1\,,\,1)$, hallar $(\vec{v})_B$ y $(\vec{v})_{B'}$.

2. Sean $B = \{\vec{b_1}\,,\,\vec{b_2}\,,\,\vec{b_3}\}$ y $B' = \{\vec{b'_1}\,,\,\vec{b'_2}\,,\,\vec{b'_3}\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{b_1} = 2.\vec{b'_1}$, $\vec{b_2} = \vec{b'_1} + \vec{b'_2} - \vec{b'_3}$ y $\vec{b_3} = -\vec{b'_2}$.

   a) Encontrar $[B]_{B'}$ y $[B']_B$.

   b) Sabiendo que $(\vec{v})_{B'} = (-2,0,3)$, hallar $(\vec{v})_B$.

3. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base que permite pasar de la base $B = \{(1,-1,0)\,,\,(1,0,1)\,,\,(0,2,-1)\}$ a una base B', encontrar B'.

4. Sea $B = \{\vec{v_1}\,,\,\vec{v_2}\,,\,\vec{v_3}\,,\,\vec{v_4}\}$ una base ordenada de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V.

   a) Probar que $B' = \{2.\vec{v_1}\,,\,-\vec{v_1} + \vec{v_2}\,,\,-\vec{v_2} + \vec{v_4}\,,\,\vec{v_1} + \vec{v_3}\}$ también es una base de V.

   b) Si un vector de V tiene componentes $(0,\alpha,0,\alpha)$ respecto de la base B, ¿ qué componentes tendrá respecto de la base B' ?

   c) Hallar los vectores $\vec{v} \in V$ tales que $(\vec{v})_B = (\vec{v})_{B'}$.

5. Sea $V = M_2(\mathbb{R})$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
   Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ es tal que $(A)_B = (1,2,-1,0)$, hallar $[A]_{B'}$.

6. Sea $V = \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{1\,,\,X\,,\,X^2\,,\,X^3\}$ y $B' = \{1\,,\,1 - X\,,\,X + X^2\,,\,X^2 + X^3\}$.
   Si $P(X) \in V$ es tal que $(P)_B = (-6,5,-3,2)$, hallar $(P)_{B'}$.

7. Sean $B = \{(1,3),(2,-1)\}$ y $B' = \{(-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})\,,\,(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$; $(O, X'Y')$ y $(O, X''Y'')$ los sistemas de coordenadas cartesianas asociados a B y a B', respectivamente.

   a) Si la recta L tiene ecuación implícita $2\,x + y - 5 = 0$ en el sistema asociado a la base canónica, hallar su ecuación en $(O, X'Y')$.

   b) Si $P\langle\sqrt{10}, -\sqrt{10}\rangle$, hallar las coordenadas de P en $(O, X''Y'')$.

8. Sea $B = \{(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})\}$, una base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Sea $(O, X'Y')$ el sistema de coordenadas asociado a la base B y (O, XY) el sistema asociado a la base canónica.

   a) Si $\langle 0, \sqrt{5}\rangle$ son las coordenadas de un punto en el sistema $(O, X'Y')$, hallar sus coordenadas en el sistema (O, XY).

   b) Hallar la ecuación del eje X en el sistema $(O, X'Y')$.

   c) Sea L la recta que en el sistema $(O, X'Y')$ tiene ecuación $\begin{cases} x' = 2 + 3\lambda \\ y' = -1 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Hallar su ecuación en el sistema (O, XY).

9. Sea (O, XYZ) el sistema de coordenadas asociado a $B = \{(2, 0, 1), (0, -1, 1), (1, 1, 0)\}$ y $(O, X'Y'Z')$ el sistema asociado a la base $B' = \{(1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, -1)\}$. Hallar, en el sistema de coordenadas (O, XYZ), la ecuación paramétrica de la recta L que, en el sistema $(O, X'Y'Z')$, tiene ecuación $\begin{cases} x' = 1 + \lambda \\ y' = 1 \\ z' = 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Sea (O, XY) el sistema de coordenadas asociado a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sea $(O', X'Y')$ el sistema que se obtiene trasladando paralelamente los ejes X e Y al nuevo origen O' de coordenadas $(-1, 4)$.

    a) Si P tiene coordenadas $(4, 3)$ en el sistema (O, XY), hallar sus coordenadas en el sistema $(O', X'Y')$.

    b) Si Q tiene coordenadas $\langle -3, 1\rangle$ en el sistema $(O', X'Y')$, hallar sus coordenadas en el sistema (O, XY).

    c) Sea L la recta que en el sistema $(O', X'Y')$ tiene ecuación, $\begin{cases} x' = 1 + 2\lambda \\ y' = -\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Hallar su ecuación en el sistema (O, XY).

    d) Verificar gráficamente los resultados anteriores.

11. Sea $(O', X''Y'')$ el sistema que se obtiene rotando el sistema (O, XY) en un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes y trasladando el origen del sistema al punto $O'(1, 2)$ en el sistema (O, XY). Hallar la ecuación paramétrica, en el sistema (O, XY), de la recta L cuya ecuación en el sistema $(O', X''Y'')$ es $\begin{cases} x'' = 1 + \sqrt{3}\lambda \\ y'' = \sqrt{3} + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Sea $(O', X''Y'')$ el sistema que se obtiene a partir del sistema (O, XY) trasladando el origen al punto $O'(-1, 1)$ y considerando la base $B = \{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$. Sean L_1 la recta que en el sistema (O, XY) tiene ecuación $L_1 : \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y L_2 la recta que en $(O', X''Y'')$ tiene ecuación $L_2 : \begin{cases} x'' = -\mu \\ y'' = 2\sqrt{2} + 5\mu \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

a) Averiguar si L_1 y L_2 son coincidentes.

b) Graficar los sistemas de coordenadas utilizados y la recta L_2.

13. Sea (O, XYZ) el sistema de coordenadas asociado a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $(O', X''Y''Z'')$ el sistema asociado a la base $B = \{(1,-1,0),(0,-1,1),(2,0,-1)\}$ con origen en el punto O' cuyas coordenadas en el sistema (O, XYZ) son $(1,0,1)$.

    a) Si el plano π tiene ecuación $x'' - 2\,y'' + z'' + 1 = 0$ en el sistema $(O', X''Y''Z'')$, hallar su ecuación en el sistema (O, XYZ).

    b) Si la recta L en (O, XYZ) está dada por $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + 2\,z = 0 \end{cases}$, verificar que el punto que tiene coordenadas $\langle\langle 4,-4,-3\rangle\rangle$ en el sistema $(O', X''Y''Z'')$ pertenece a L.

14. $B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0,0,1) \right\}$, $B' = \left\{ \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), (0,1,0) \right\}$ y $B'' = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\}$, son bases de $\mathbb{R}^3$.

    a) Averiguar si son bases ortonormales.

    b) Hallar $[B]_{B''}$ y $[B']_{B''}$.

15. Sea $T = \left\{ (1/\sqrt{6}, k, 0), (-k, 1/\sqrt{6}, 0) \right\}$. Hallar los valores de k para los cuales T pueda extenderse a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Indicar una de esas bases.

8 Transformaciones lineales

8.1 Definición y ejemplos

Definición 8.1.1 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Una aplicación $T : V \longrightarrow W$ se dice una* **transformación lineal** *si verifica:*

T_1) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, *para todo* $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

T_2) $T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u})$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{u} \in V$.

Consecuencias de la definición

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. De la definición se deduce que:

1) $T(\vec{0}) = \vec{0}'$. En lo que sigue notaremos al vector nulo de cualquier espacio vectorial con $\vec{0}$.

2) $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in V$.

3) $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

4) $T(\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n.\vec{v}_n) = \lambda_1.T(\vec{v}_1) + \lambda_2.T(\vec{v}_2) + \cdots + \lambda_n.T(\vec{v}_n)$, para todo $\vec{v}_i \in V$; $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

Ejemplos

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $c \in \mathbb{R}$, c fijo. $T : V \longrightarrow V$ definida por $T(\vec{v}) = c.\vec{v}$ es una transformación lineal denominada **homotecia de razón c**.
   - Si $c = 0$, $T(\vec{v}) = \vec{0}$, para todo $\vec{v} \in V$. T se denomina **transformación lineal nula** y se nota $T = \mathrm{O}$.
   - Si $c = 1$, $T(\vec{v}) = \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in V$. T se denomina **transformación lineal identidad** y se nota $T = Id_V$.
2. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x^2, y)$ no es una transformación lineal pues, $T(1, 0) + T(-1, 0) = (1, 0) + (1, 0) = (2, 0) \neq (0, 0) = T[(1, 0) + (-1, 0)]$.
3. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x, x + y, x - y)$ es una transformación lineal. En efecto, si $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ entonces $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

   $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) =$

   $(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

   Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.\vec{u} = \lambda.(x_1, y_1) = (\lambda\, x_1, \lambda\, y_1)$ entonces,

   $T(\lambda\, x_1, \lambda\, y_1) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_1 + \lambda\, y_1, \lambda\, x_1 - \lambda\, y_1) = \lambda.(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) = \lambda.T(x_1, y_1) =$

   $\lambda.T(\vec{u})$.

4. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x,y,0)$ es una transformación lineal que se interpreta geométricamente como la proyección ortogonal de un punto $P(x,y,z)$ sobre el plano XY.

5. $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada punto de coordenadas (x,y,z) le hace corresponder su simétrico respecto al eje X.
   Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera del Espacio y π un plano que contiene al punto P y es perpendicular al eje X.
   Si Q es el punto de intersección de π con el eje X, $T(P)$ es el punto que pertenece a la recta L, que pasa por P y Q, y que verifica $d(T(P), Q) = d(P, Q)$.

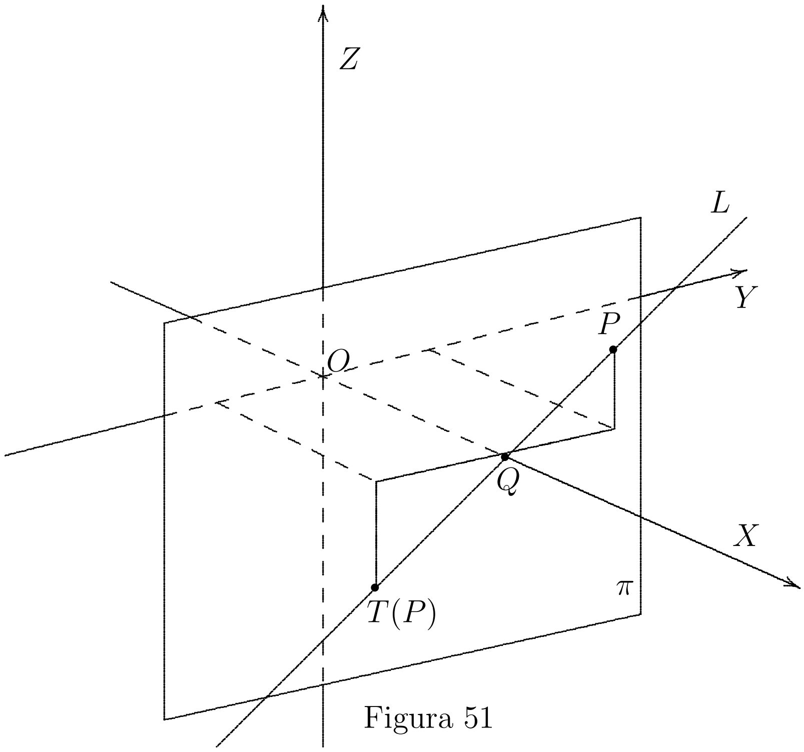


Figura 51

$$\pi : x - x_0 = 0, \quad Q(x_0, 0, 0), \quad L : \begin{cases} x = x_0 \\ y = \alpha\, y_0 \\ z = \alpha\, z_0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si $T(P)(x_0', y_0', z_0')$, entonces $x_0' = x_0$, $y_0' = \alpha\, y_0$ y $z_0' = \alpha\, z_0$.

Además $d(T(P), Q) = d(P, Q)$, es decir, $\alpha^2\, y_0^2 + \alpha^2\, z_0^2 = y_0^2 + z_0^2$, por lo tanto

$(\alpha^2 - 1)(y_0^2 + z_0^2) = 0$ lo que implica $\alpha^2 - 1 = 0$ ó $y_0 = z_0 = 0$.

Si $y_0 = z_0 = 0$, P está sobre el eje X y por lo tanto $T(P) = P$. Para $\alpha = 1$ obtenemos el punto P y para $\alpha = -1$ obtenemos $T(P)(x_0, -y_0, -z_0)$. Luego T está definida por $T(x,y,z) = (x, -y, -z)$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación que a cada punto de coordenadas (x, y) del Plano le hace corresponder el que se obtiene rotándolo un ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ alrededor del origen. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de $\mathbb{R}^2$, ϕ el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo de las abscisas y supongamos que $T(P)$ tiene coordenadas (x', y').

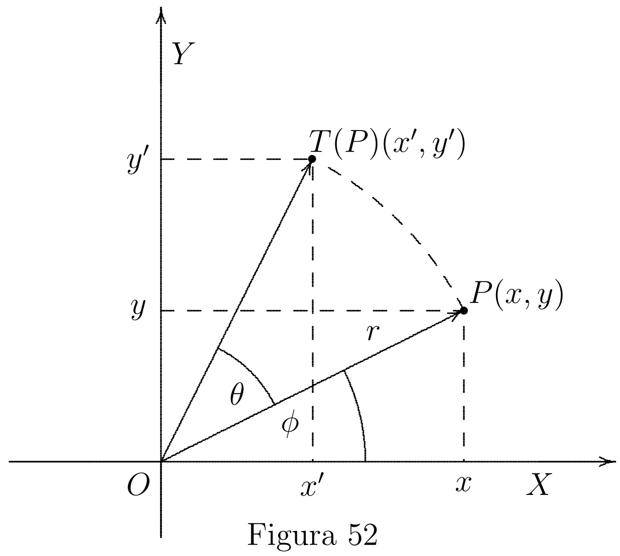


Figura 52

Observemos que $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OT(P)}\|$ y notemos a este número con r. Entonces $x = r\,cos\,\phi$, $y = r\,sen\,\phi$, $x' = r\,cos(\phi + \theta)$ e $y' = r\,sen(\phi + \theta)$. Es decir:

$$x' = r\,cos\,\phi\,cos\,\theta - r\,sen\,\phi\,sen\,\theta = x\,cos\,\theta - y\,sen\,\theta$$

$$y' = r\,sen\,\phi\,cos\,\theta + r\,cos\,\phi\,sen\,\theta = y\,cos\,\theta + x\,sen\,\theta$$

Luego $T(x, y) = (x\,cos\,\theta - y\,sen\,\theta\,,\ x\,sen\,\theta + y\,cos\,\theta)$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada punto de coordenadas (x, y, z) le hace corresponder el que se obtiene rotándolo un ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ alrededor del eje Z y en forma paralela al plano XY.
Es claro que $T(x, y, z) = (x', y', z)$, donde $x' = x\,cos\,\theta - y\,sen\,\theta$ e $y' = x\,sen\,\theta + y\,cos\,\theta$.
Luego $T(x, y, z) = (x\,cos\,\theta - y\,sen\,\theta\,,\ x\,sen\,\theta + y\,cos\,\theta\,,\ z)$.

El siguiente teorema es elemental, pero de gran importancia. Nos muestra que las transformaciones lineales son funciones, entre espacios vectoriales, con propiedades muy particulares.

Teorema 8.1.1 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ una base de V y $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in W$, entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(\vec{b}_i) = \vec{v}_i$, $1 \leq i \leq n$.*

Dem. Sea $\vec{v} \in V$, entonces $\vec{v} = \alpha_1.\vec{b}_1 + \alpha_2.\vec{b}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{b}_n$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ están unívocamente determinados. Definimos $T(\vec{v}) = \alpha_1.\vec{v}_1 + \alpha_2.\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{v}_n$. Debemos probar que T es la única transformación lineal que verifica las condiciones del enunciado.

$T_1)$ Si $\vec{u}, \vec{w} \in V$, $\vec{u} = \beta_1.\vec{b}_1 + \beta_2.\vec{b}_2 + \cdots + \beta_n.\vec{b}_n$ y $\vec{w} = \gamma_1.\vec{b}_1 + \gamma_2.\vec{b}_2 + \cdots + \gamma_n.\vec{b}_n$,
entonces $\vec{u} + \vec{w} = (\beta_1 + \gamma_1).\vec{b}_1 + (\beta_2 + \gamma_2).\vec{b}_2 + \cdots + (\beta_n + \gamma_n).\vec{b}_n$, por lo tanto
$T(\vec{u} + \vec{w}) = (\beta_1 + \gamma_1).\vec{v}_1 + (\beta_2 + \gamma_2).\vec{v}_2 + \cdots + (\beta_n + \gamma_n).\vec{v}_n =$
$(\beta_1.\vec{v}_1 + \beta_2.\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n.\vec{v}_n) + (\gamma_1.\vec{v}_1 + \gamma_2.\vec{v}_2 + \cdots + \gamma_n.\vec{v}_n) = T(\vec{u}) + T(\vec{w})$.

$T_2)$ Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha.\vec{u} = (\alpha\,\beta_1).\vec{b}_1 + (\alpha\,\beta_2).\vec{b}_2 + \cdots + (\alpha\,\beta_n).\vec{b}_n$, luego
$T(\alpha.\vec{u}) = (\alpha\,\beta_1).\vec{v}_1 + (\alpha\,\beta_2).\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha\,\beta_n).\vec{v}_n = \alpha.(\beta_1.\vec{v}_1 + \beta_2.\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n.\vec{v}_n) =$
$\alpha.T(\vec{u})$.

Además $T(\vec{b}_i) = T(0.\vec{b}_1 + \cdots + 1.\vec{b}_i + \cdots + 0.\vec{b}_n) = 0.\vec{v}_1 + \cdots + 1.\vec{v}_i + \cdots + 0.\vec{v}_n = \vec{v}_i$.

Sea T' una transformación lineal tal que $T'(\vec{b}_i) = \vec{v}_i$, $1 \leq i \leq n$.

Cualquiera sea $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \alpha_1.\vec{b}_1 + \alpha_2.\vec{b}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{b}_n$, por lo tanto

$T'(\vec{v}) = \alpha_1.T'(\vec{b}_1) + \alpha_2.T'(\vec{b}_2) + \cdots + \alpha_n.T'(\vec{b}_n) = \alpha_1.\vec{v}_1 + \alpha_2.\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n.\vec{v}_n = T(\vec{v})$.

Luego $T = T'$. □

Entonces concluimos que para conocer a una transformación lineal basta con conocer los efectos de la misma sobre los vectores de una base.

Ejemplo
Sean $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,-1,0)\,,\,(0,1,1)\,,\,(0,1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $S = \{(1,-1)\,,\,(0,1)\,,\,(3,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Hallar la única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,0) = (1,-1)$, $T(0,1,1) = (0,1)$ y $T(0,1,0) = (3,1)$.
A partir del teorema anterior obtenemos que:
$(x,y,z) = x\,(1,-1,0) + z\,(0,1,1) + (x+y-z)(0,1,0)$. Por lo tanto $T(x,y,z) = x\,T(1,-1,0) + z\,T(0,1,1) + (x+y-z)\,T(0,1,0) = x\,(1,-1) + z\,(0,1) + (x+y-z)(3,1) = (4\,x + 3\,y - 3\,z, y)$.

8.2 Matriz asociada a una transformación lineal

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, W un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión m, $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ una base ordenada de V y $B' = \{\vec{b'_1}, \vec{b'_2}, \ldots, \vec{b'_m}\}$ una base ordenada de W. Como toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ queda determinada por su efecto sobre los vectores de una base de V, se tiene que $T(\vec{b}_j) = a_{1j}.\vec{b'_1} + a_{2j}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{mj}.\vec{b'_m}$; $1 \leq j \leq n$,

lo que implica que $\left[T(\vec{b}_j)\right]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$; $1 \leq j \leq n$. Entonces T queda determinada por

$m \cdot n$ escalares a_{ij}.

La matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ se denomina **matriz de $\boldsymbol{T}$ respecto a las bases $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$**, se nota $[T]_{BB'}$ y se tiene que

$$[T]_{BB'} = \Big([T(\vec{b}_1)]_{B'}[T(\vec{b}_2)]_{B'} \cdots [T(\vec{b}_n)]_{B'}\Big)$$

Además,

$$[T(\vec{v})]_{B'} = [T]_{BB'} \cdot [\vec{v}]_B$$

Recíprocamente, si $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, la aplicación $T : V \longrightarrow W$ definida por $T(\vec{b}_1) = a_{11}.\vec{b'_1} + a_{21}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{m1}.\vec{b'_m}$, $T(\vec{b}_2) = a_{12}.\vec{b'_1} + a_{22}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{m2}.\vec{b'_m}, \ldots,$ $T(\vec{b}_n) = a_{1n}.\vec{b'_1} + a_{2n}.\vec{b'_2} + \cdots + a_{mn}.\vec{b'_m}$, es una transformación lineal.

Como consecuencia, para cada par de bases B, B' de V y W respectivamente, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las transformaciones lineales de V en W y $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Si $V = W$, $B = B'$ y $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal, $[T]_{BB}$ se denomina **la matriz de $\boldsymbol{T}$ respecto de la base $\boldsymbol{B}$** y para abreviar notamos: $[T]_B$. Se tiene entonces que:

$$[T(\vec{v})]_B = [T]_B \cdot [\vec{v}]_B$$

Ejemplos

1. Sean $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, $B' = \{\vec{b'_1}, \vec{b'_2}, \vec{b'_3}\}$, bases de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(\vec{b}_1) = \vec{b'_1} + \vec{b'_2} - 3.\vec{b'_3}$, $T(\vec{b}_2) = \vec{b'_1} - 2.\vec{b'_3}$ y $T(\vec{b}_3) = 3.\vec{b'_1} + 2.\vec{b'_2}$. Entonces
$$[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x - y,\ x + z,\ 2\,x)$. Queremos hallar la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   $T(1, 0, 0) = (1, 1, 2)$, $T(0, 1, 0) = (-1, 0, 0)$ y $T(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$. Entonces:
$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición 8.2.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, B y B' bases ordenadas de V, entonces:*

$$[T]_{B'} = [B]_{B'} \cdot [T]_B \cdot [B']_B$$

Dem. Para todo $\vec{v} \in V$ se tiene que $[T(\vec{v})]_{B'} = [B]_{B'} \cdot [T(\vec{v})]_B = [B]_{B'} \cdot ([T]_B \cdot [\vec{v}]_B) =$ $[B]_{B'} \cdot ([T]_B \cdot ([B']_B \cdot [\vec{v}]_{B'})) = ([B]_{B'} \cdot [T]_B \cdot [B']_B) \cdot [\vec{v}]_{B'}$. Como $[T(\vec{v})]_{B'} = [T]_{B'} \cdot [\vec{v}]_{B'}$, resulta que

$$[T]_{B'} \cdot [\vec{v}]_{B'} = ([B]_{B'} \cdot [T]_B \cdot [B']_B) \cdot [\vec{v}]_{B'}$$

Si $B' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \ldots, \vec{b}'_n\}$, reemplazando $\vec{v}$ sucesivamente por $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \ldots, \vec{b}'_n$ se obtiene la igualdad que queremos demostrar. Teniendo en cuenta que $[B]_{B'} = [B']_B^{-1}$, resulta que

$$[T]_{B'} = [B']_B^{-1} \cdot [T]_B \cdot [B']_B$$

Los cálculos se simplifican cuando B y B' son bases ortonormales pues en ese caso $[B']_B^{-1} = [B']_B^T$, de donde obtenemos que $[T]_{B'} = [B']_B^T \cdot [T]_B \cdot [B']_B$. $\square$

Ejemplos

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación que a cada punto del Espacio le hace corresponder su simétrico respecto de la recta $L : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

   Sabemos que T es una transformación lineal, usando una base adecuada queremos hallar $[T]_{\mathcal{C}}$.

   Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, donde $\vec{b}_1 = \dfrac{\vec{d}_L}{\|\vec{d}_L\|}$, $\vec{b}_2$ es un versor ortogonal a $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2$. $B = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$.

   Como $T(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 = 1.\vec{b}_1 + 0.\vec{b}_2 + 0.\vec{b}_3$, $T(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2 = 0.\vec{b}_1 + (-1).\vec{b}_2 + 0.\vec{b}_3$, y $T(\vec{b}_3) = -\vec{b}_3 = 0.\vec{b}_1 + 0.\vec{b}_2 + (-1).\vec{b}_3$, entonces,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Por otra parte, sabemos que: $[T]_{\mathcal{C}} = [B]_{\mathcal{C}} \cdot [T]_B \cdot [B]_{\mathcal{C}}^{-1}$. Luego, reemplazando:

$$[T]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección sobre la recta $L : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, en forma paralela al plano π de ecuación $x + z + 1 = 0$. Queremos hallar, usando una base adecuada, $[T]_{\mathcal{C}}$.

   Si $T' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la proyección ortogonal sobre el eje Z, entonces $T'(x, y, z) =$

$(0,0,z)$. Por lo tanto $[T']_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Debemos hallar $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ tal que $[T]_B = [T']_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $\vec{b}_3 = \vec{d}_L = (1,-1,0)$. Consideramos $\pi' : x + z = 0$, paralelo a π por el origen de coordenadas y $\vec{b}_1 = (0,1,0)$ y $\vec{b}_2 = (1,0,-1)$.

Si $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, entonces $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $[T]_{\mathcal{C}} = [B]_{\mathcal{C}} \cdot [T]_B \cdot [B]_{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observaciones

1. En el ejemplo anterior la base adecuada no puede elegirse ortonormal.

2. En el caso de una rotación la base adecuada debe tomarse con orientación positiva, es decir $\det[B]_{\mathcal{C}} > 0$.

8.3 Ejercicios

1. Aplicar la definición e indicar cuales de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada punto $P(x, y)$ del Plano le hace corresponder su proyección ortogonal sobre el eje de las abscisas.

   b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (-z\ , \ x\ , \ y^2)$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada punto de coordenadas (x, y, z) del Espacio le hace corresponder su simétrico respecto al plano XZ.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada punto de coordenadas (x, y, z) le hace corresponder su proyección ortogonal sobre el eje Y.

   e) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada punto de coordenadas (x, y, z) del Espacio le hace corresponder su simétrico respecto al eje Y.

   f) $T : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \det A$.

   g) $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   h) $T : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ tal que $T(P(X)) = P(X) + 1$.

2. Hallar la expresión de $T(\vec{v})$ para todo vector $\vec{v} \in V$, siendo:

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(-1, 2) = (1, 0)$ y $T(-1, 1) = (2, 3)$.

   b) $V = \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(-1, 1, 1) = (0, 0, 1)$, $T(-1, -2, 1) = (0, 0, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$.

   c) $V = \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$ y $T(0, 1, 0) = (0, 3, 1)$. ¿ Es única ? Justificar la respuesta.

3. ¿ Existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que verifique $T(1, -1) = (1, 0)$, $T(2, -1) = (0, 1)$ y $T(3, -2) = (1, 2)$? Justificar la respuesta.

4. a) Considerar las transformaciones lineales del ejercicio 1, incisos a) al e) y hallar la matriz de la transformación respecto de la base canónica.

   b) Hallar la matriz de la transformación lineal del inciso a) del ejercicio 1, con respecto a la base $B = \{(-1, 2), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   c) Idem para la transformación lineal del inciso d) del ejercicio 1, con respecto a la base $B = \{(1, -1, 2), (0, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

5. a) Hallar la matriz, respecto de las bases usuales de $M_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_1[X]$ de la transformación lineal $T : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(a\,X + b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la transformación lineal que, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, tiene a A como matriz asociada.

6. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, hallar la matriz de la transformación con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y usando esta matriz, hallar la matriz de T respecto a la base B indicada:

   a) $n = 2$, $T(x, y) = (x - 2\,y, -y)$, $B = \{(2, 1), (-3, 4)\}$.

   b) $n = 3$, T la aplicación que a cada punto del Espacio le hace corresponder su proyección ortogonal sobre el plano XY, $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

7. Si $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es una base ordenada de E_3 y $T : E_3 \longrightarrow E_3$ es una transformación lineal tal que $T(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 + \vec{b}_3$, $T(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2$ y $T(\vec{b}_3) = -\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, hallar $[T]_B$.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la transformación lineal definida por:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) + T(0,1,0) &= (a, a+1, 1) \\ T(1,0,0) + T(0,0,1) &= (-1, a, 2) \\ T(0,0,1) &= (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

   Hallar $A = [T]_{\mathcal{C}}$, y determinar los valores de a de modo que $\det A = 0$.

9. Para cada una de las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ hallar, usando base adecuada, la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   a) T la aplicación que a cada punto del Espacio le hace corresponder su proyección ortogonal sobre el plano $\pi : 2\,x - y + z = 0$.

   b) T la aplicación que a cada punto del Espacio le hace corresponder su simétrico respecto a la recta $L : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

   c) T la simetría con respecto al plano $\pi : x - y + z = 0$, en forma paralela a la recta $L : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9 Autovalores y autovectores

9.1 Definición y ejemplos

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Queremos hallar, si es posible, una base ordenada $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ tal que

$$A = [T]_B = \Big([T(\vec{b}_1)]_B \, [T(\vec{b}_2)]_B \cdots [T(\vec{b}_n)]_B \Big) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es decir, queremos hallar una base ordenada $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ tal que $T(\vec{b}_i) = \lambda_i.\vec{b}_i$, para todo i, $1 \leq i \leq n$. Nos interesa hallar vectores no nulos $\vec{v}$, tales que $T(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$.
En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, buscamos vectores no nulos de modo que $T(\vec{v})$ y $\vec{v}$ sean paralelos ó $T(\vec{v}) = \vec{0}$.

Definición 9.1.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Un número real λ se dice un* **autovalor** *de T, si existe un vector no nulo $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \lambda.\,\vec{v}$; $\vec{v}$ se denomina un* **autovector** *asociado a λ.*

Ejemplos

1. Sea $V = E_2$ y T la proyección ortogonal sobre el eje X.

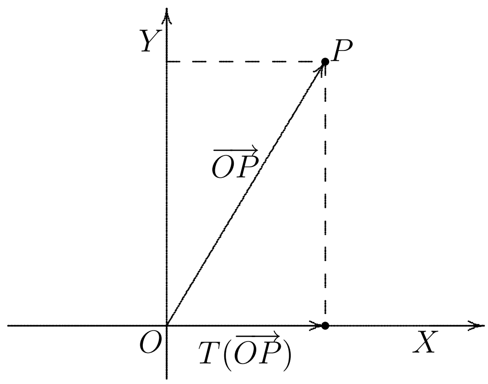


Figura 53

   Si $P \neq O$ se halla sobre el eje X, entonces $T(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} = 1.\overrightarrow{OP}$. Por lo tanto $\lambda = 1$ es un autovalor de T y $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ es un autovector asociado.

   Si $P \neq O$ se halla sobre el eje Y, $T(\overrightarrow{OP}) = \vec{0} = 0.\overrightarrow{OP}$ y entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de T con autovector asociado $\overrightarrow{OP}$.

2. Sea $V = E_3$ y T la simetría respecto al plano XY.

   Si $P \neq O$ pertenece al plano XY, entonces $T(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} = 1.\overrightarrow{OP}$, de donde se deduce que $\lambda = 1$ es un autovalor de T, con autovector asociado $\overrightarrow{OP}$.

Si $P \neq O$ pertenece al eje Z, entonces $T(\overrightarrow{OP}) = -\overrightarrow{OP} = (-1).\overrightarrow{OP}$, por lo tanto $\lambda = -1$ es autovalor de T y $\overrightarrow{OP}$ es un autovector asociado.

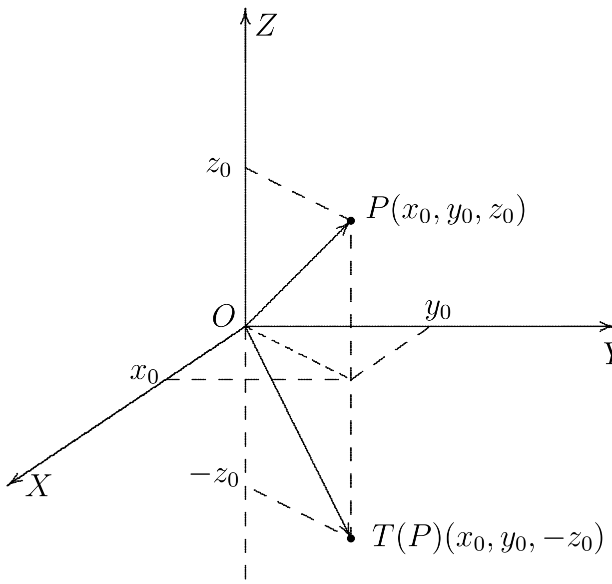


Figura 54

Proposición 9.1.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Si $\vec{v} \in V$ es un autovector de T asociado a λ y λ', entonces $\lambda = \lambda'$.*

Dem. Si $T(\vec{v}) = \lambda.\vec{v} = \lambda'.\vec{v}$, entonces $(\lambda - \lambda').\vec{v} = \vec{0}$ y como $\vec{v} \neq \vec{0}$ se tiene que $\lambda - \lambda' = 0$ y en consecuencia $\lambda = \lambda'$. □

Proposición 9.1.2 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces $V_\lambda = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}\}$ es un subespacio de V.*

Dem. Ejercicio a cargo del lector. □

9.2 Cálculo de autovalores y autovectores

Proposición 9.2.1 *Si V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $A = [T]_B$, donde B es una base ordenada de V entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de T si, y sólo si $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.*

Dem. Sea $\vec{v}$ un autovector asociado a λ. Si $(\vec{v})_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se tiene que:

$$A\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow A\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - \lambda\cdot I_n)\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

tiene solución no trivial y por lo tanto la matriz de los coeficientes tiene determinante nulo, es decir, $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

Recíprocamente, si $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$, el sistema $(*)$ es compatible indeterminado y posee una solución no nula $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tomando $\vec{v} \in V$ tal que $(\vec{v})_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se tiene que $\vec{v}$ es un autovector asociado a λ. □

Por lo tanto, si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal y $A = (a_{ij}) = [T]_B$, donde B es una base ordenada de V entonces:

- λ es un autovalor de $T \Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$

  Es decir, λ es autovalor de T si, y sólo si λ es raíz del polinomio $\det(A - X \cdot I_n)$.

- $\vec{v}$ es autovector de T asociado a λ si $(\vec{v})_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es solución no trivial del sistema $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir un vector no nulo de V_λ.

Teorema 9.2.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, $A = [T]_B$ y $A' = [T]_{B'}$; con B y B' bases ordenadas de V. Entonces* $\det(A - x \cdot I_n) = \det(A' - x \cdot I_n)$.

Dem. Si $D = [B']_B$, entonces $\det(A - x \cdot I_n) = \det(D \cdot A' \cdot D^{-1} - x \cdot I_n) =$ $\det[D \cdot A' \cdot D^{-1} - D \cdot (x \cdot I_n) \cdot D^{-1}] = \det[D \cdot (A' - x \cdot I_n) \cdot D^{-1}] = \det D \, \det(A' - x \cdot I_n) \, \det D^{-1} =$ $\det(A' - x \cdot I_n)$. □

El teorema 9.2.1 nos permite concluir que los autovalores de una transformación lineal T no dependen de la base elegida para representarla. Al polinomio $\det(A - X \cdot I_n)$ se lo denomina **polinomio característico** de T.

Ejemplos

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   $\det(A - x \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$. Como $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real, T no posee autovalores.

2. Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A=[T]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   $\det(A-x\cdot I_3)=\begin{vmatrix} 3-x & 1 & -1 \\ 2 & 2-x & -1 \\ 2 & 2 & -x \end{vmatrix}=-(x-1)(x-2)^2$. Los autovalores de T son:

   $\lambda_1=1,\ \ \lambda_2=\lambda_3=2.$

   • Autovectores asociados al autovalor 1

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

   Luego $V_1=\{(x,y,z):\ y=0,\ z=2x\}=\{(x,0,2x):\ x\in\mathbb{R}\}$.

   • Autovectores asociados al autovalor 2

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+z=0 \end{cases}.$$

   Entonces $V_2=\{(y,y,2y):\ y\in\mathbb{R}\}$.

Obsevemos que en este caso, no es posible hallar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores.

Definición 9.2.1 *Una transformación lineal* $T:V\longrightarrow V$ *se dice* **diagonalizable** *si existe una base* B *de* V *formada por autovectores de* T.

La definición anterior implica que si T es diagonalizable, $[T]_B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Ejemplo
$T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(-y-z,\,x+2y+z,\,x+2y+z)$, es una transformación lineal.

Sea $A=[T]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\det(A-x\cdot I_3)=-x(x-2)(x-1)$, los autovalores de T son : $\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=2,\ \ \lambda_3=1$.

• Autovectores asociados al autovalor 0

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow z=-y\ ,\ x=-y.$$

Obtenemos así $V_0=\{(-y,y,-y):\ y\in\mathbb{R}\}=\overline{\{(1,-1,1)\}}$.

• Autovectores asociados al autovalor 2

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2\,x\, -\, y\, -\, z = 0 \\ x\, +\, z = 0 \\ x\, +\, 2\,y\, -\, z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2\,x - y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}.$$

Entonces $V_2 = \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \overline{\{(1, -1, -1)\}}$.

• Autovectores asociados al autovalor 1

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x\, +\, y\, +\, z = 0 \\ x\, +\, 2\,y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\, +\, y\, +\, z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

$V_1 = \{(-2\,y, y, y) :\ y \in \mathbb{R}\} = \overline{\{(-2, 1, 1)\}}$.

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = \{(1, -1, 1),\ (1, -1, -1),\ (-2, 1, 1)\}$ es una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ y se verifica que:

$$T(\vec{b}_1) = 0.\vec{b}_1 = 0.\vec{b}_1\, +\, 0.\vec{b}_2\, +\, 0.\vec{b}_3$$
$$T(\vec{b}_2) = 2.\vec{b}_2 = 0.\vec{b}_1\, +\, 2.\vec{b}_2\, +\, 0.\vec{b}_3$$
$$T(\vec{b}_3) = \vec{b}_3 = 0.\vec{b}_1\, +\, 0.\vec{b}_2\, +\, 1.\vec{b}_3$$

Por lo tanto T es diagonalizable y $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si se hubiera considerado la base $B' = \{(1, -1, -1),\ (1, -1, 1)\, (-2, 1, 1)\}$ entonces

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición 9.2.2 *Si* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una transformación lineal, entonces a dos autovalores distintos les corresponden autovectores linealmente independientes.*

Dem. Si λ_1 y λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, son autovalores de T, con autovectores asociados $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ respectivamente, entonces $T(\vec{b_1}) = \lambda_1.\vec{b_1}$ y $T(\vec{b_2}) = \lambda_2.\vec{b_2}$. Si $\alpha.\vec{b_1} + \beta.\vec{b_2} = \vec{0}$, entonces $\vec{0} = T(\alpha.\vec{b_1} + \beta.\vec{b_2}) = \alpha.T(\vec{b_1}) + \beta.T(\vec{b_2}) = \alpha.(\lambda_1.\vec{b_1}) + \beta.(\lambda_2.\vec{b_2}) = (-\lambda_1\,\beta).\vec{b_2} + (\beta\,\lambda_2).\vec{b_2} = (\lambda_2 - \lambda_1)\,\beta.\vec{b_2}$.

Como $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ y $\vec{b_2} \neq \vec{0}$ se tiene que $\beta = 0$ lo que implica $\alpha.\vec{b_1} = \vec{0}$ y en consecuencia $\alpha = 0$, pues $\vec{b_1} \neq \vec{0}$. Por lo tanto $\{\vec{b_1}\, ,\, \vec{b_2}\}$ es linealmente independiente. □

Proposición 9.2.3 *Si* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una transformación lineal con autovalores* λ_1 , λ_2 , λ_3, *distintos dos a dos, y autovectores asociados* $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{b_3}$ *respectivamente, entonces* $\{\vec{b_1}\, ,\, \vec{b_2}\, ,\, \vec{b_3}\}$ *es linealmente independiente.*

Dem. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\{\vec{b_1}\,,\,\vec{b_2}\}$ es linealmente independiente. Para probar la proposición basta ver que $\vec{b_3}$ no es combinación lineal de $\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$.

Supongamos que $\vec{b_3} = \alpha.\vec{b_1} + \beta.\vec{b_2}$, entonces $\lambda_3.\vec{b_3} = T(\vec{b_3}) = T(\alpha.\vec{b_1} + \beta.\vec{b_2}) = \alpha.T(\vec{b_1}) + \beta.T(\vec{b_2}) = \alpha.(\lambda_1.\vec{b_1}) + \beta.(\lambda_2.\vec{b_2})$, por lo tanto $\lambda_3.(\alpha.\vec{b_1} + \beta.\vec{b_2}) = (\alpha\ \lambda_1).\vec{b_1} + (\beta\ \lambda_2).\vec{b_2}$.

Se tiene entonces que $(\alpha\ \lambda_3).\vec{b_1} + (\beta\ \lambda_3).\vec{b_2} = (\alpha\ \lambda_1).\vec{b_1} + (\beta\ \lambda_2).\vec{b_2}$.

Como $\{\vec{b_1}\,,\,\vec{b_2}\}$ es linealmente independiente entonces

$\begin{cases} \alpha\,\lambda_3 = \alpha\,\lambda_1 \\ \beta\,\lambda_3 = \beta\,\lambda_2 \end{cases}$, esto implica que $\begin{cases} \alpha(\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \\ \beta(\lambda_3 - \lambda_2) = 0 \end{cases}$, como $\lambda_1 - \lambda_3 \neq 0$ y $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$. debe ser $\alpha = \beta = 0$.

Entonces $\vec{b_3} = \vec{0}$, contradiciendo la hipótesis de que $\vec{b_3}$ es un autovector de T. $\square$

Corolario 9.2.1 *Si* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una transformación lineal con autovalores* $\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\lambda_3$, *distintos dos a dos, entonces existe una base ordenada* B *formada por autovectores y por consiguiente* T *es diagonalizable.*

Dem. Si $\vec{b_1}\,,\,\vec{b_2}\,,\,\vec{b_3}$ son los autovectores correspondientes a $\lambda_1\,,\,\lambda_2$ y λ_3, entonces $B = \{\vec{b_1}\,,\,\vec{b_2}\,,\,\vec{b_3}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. $\square$

Observación

Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal con autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, nada podemos asegurar de su diagonalización, como lo demuestran los siguientes ejemplos:

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Como $\det(A - x \cdot I_3) = -(x-1)^2(x+1)$, resulta que $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ son autovalores de T.

   • Si $\lambda = -1$, entonces $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ implica que:

   $\begin{cases} 2\,x + y = 0 \\ 2\,y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$. Por lo tanto $V_{-1} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

   • Si $\lambda = 1$, entonces $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

   Por lo tanto $V_1 = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

   Entonces T no es diagonalizable pues no se puede elegir una base formada por autovectores.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Entonces $\det(A - x \cdot I_3) = -(x+1)(x-1)^2 = 0$ implica que $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ son los autovalores de T.

   • Si $\lambda = -1$, entonces $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\,x = 0 \\ 2\,y - z = 0 \end{cases}$.

   Por lo tanto $V_{-1} = \{(0, y, 2\,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

   • Si $\lambda = 1$, entonces $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0.$

   Entonces $V_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

   Si se considera $B = \{(0,1,2), (1,0,0), (0,1,0)\}$ se tiene que $[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.3 Transformaciones lineales simétricas

Definición 9.3.1 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y B una base ortonormal de V. T se dice una* **transformación lineal simétrica** *si $[T]_B$ es simétrica.*

Observación
Si B' es una base ortonormal de V, $B' \neq B$ y T es transformación lineal simétrica, entonces $[T]_{B'}$ es una matriz simétrica.

En lo que sigue consideraremos $V = \mathbb{R}^3$, con el producto interno canónico.

Entre las más importantes propiedades de las transformaciones lineales simétricas, cuya demostración se puede consultar en el Apéndice, se encuentran:

a) Todas las raíces del polinomio característico son reales.

b) $\langle T(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, T(\vec{v}) \rangle$, para todo $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$.

c) A autovalores distintos corresponden autovectores ortogonales.

Los resultados anteriores permiten caracterizar a las transformaciones lineales simétricas como sigue:

***T* es una transformación lineal simétrica si y sólo si es diagonalizable en una base ortonormal.**

Ejemplos

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$.

   Como $\mathcal{C}$ en una base ortonormal y $[T]_{\mathcal{C}}$ es simétrica entonces T es transformación lineal simétrica.
   Calculemos los autovalores y una base ortonormal B, formada por autovectores, con respecto a la cual $[T]_B$ es diagonal.

   $$\det(A - x \cdot I_3) = \begin{vmatrix} -2 - x & 0 & -36 \\ 0 & -3 - x & 0 \\ -36 & 0 & -23 - x \end{vmatrix} = (-3 - x)(x^2 + 25\,x - 1250).$$

   Son autovalores: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 25$, $\lambda_3 = -50$.

   • Autovectores asociados a $\lambda = -3$

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - 36\,z = 0 \\ -36\,x - 20\,z = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = z = 0.$$

   $V_{-3} == \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \overline{\{(0, 1, 0)\}}$.

   Considero a $\vec{b}_1 = (0, 1, 0)$ como autovector asociado al autovalor -3.

   • Autovectores asociados a $\lambda = 25$

   $$\begin{pmatrix} -27 & 0 & -36 \\ 0 & -28 & 0 \\ -36 & 0 & -48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -27\,x - 36\,z = 0 \\ -28\,y = 0 \\ -36\,x - 48\,z = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0\ , \quad x = -\frac{4}{3}\,z.$$

   Por lo tanto $V_{25} = \{(-\frac{4}{3}\,z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\ \} = \overline{\{(-4, 0, 3)\}}$. Sea $\vec{b}_2 = (-4/5\,,\,0\,,\,3/5)$ un autovector asociado a $\lambda = 25$.

   • Autovectores asociados a $\lambda = -50$

   $$\begin{pmatrix} 48 & 0 & -36 \\ 0 & 47 & 0 \\ -36 & 0 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 48\,x - 36\,z = 0 \\ 47\,y = 0 \\ -36\,x + 27\,z = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0\ , \quad z = \frac{4}{3}\,x,$$

   entonces $V_{-50} = \{(x, 0, \frac{4}{3}\,x) : x \in \mathbb{R}\,\}$. Sea $\vec{b}_3 = (3/5\,,\,0\,,\,4/5)$ un autovector asociado a $\lambda = -50$.

   $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\} = \{(0, 1, 0)\,,\,(-4/5, 0, 3/5)\,,\,(3/5, 0, 4/5)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y

   $$[T]_B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$$

2. Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   Por lo enunciado anteriormente T es una transformación lineal simétrica, y por lo tanto existe una base ortonormal B tal que $[T]_B$ es diagonal.

   $\det(A - x \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 4-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 2 & 2 & 4-x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x-8) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 8,$

   $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ son autovalores de T.

   • Autovectores asociados a $\lambda = 8$

   $$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

   $\Longrightarrow y = z = x$, por lo tanto $V_8 = \{(z,z,z) : z \in \mathbb{R}\} = \overline{\{(1,1,1)\}}$.

   Sea $\vec{b}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

   • Autovectores asociados a $\lambda = 2$

   $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x + y + z = 0 \Longrightarrow V_2 = \{(x, y, -x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

   $\vec{b}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, es un autovector asociado al autovalor 2. Para completar la base debemos hallar $\vec{b}_3 \in V_2$ tal que $\|\vec{b}_3\| = 1$. $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \wedge \vec{b}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$, verifica lo pedido. Por lo tanto $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es una base ortonormal y

   $$[T]_B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposición 9.3.1 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal no simétrica tal que sus autovalores son* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. *Entonces* T *no es diagonalizable.*

Dem. Si T fuese diagonalizable existiría una base B tal que $[T]_B = \lambda_1 \cdot I_3$. Entonces

$$[T]_{\mathcal{C}} = [B]_{\mathcal{C}} \cdot [T]_B \cdot [B]_{\mathcal{C}}^{-1} = [B]_{\mathcal{C}} \cdot (\lambda_1 \cdot I_3) \cdot [B]_{\mathcal{C}}^{-1} = \lambda_1 \cdot I_3,$$

que es una matriz simétrica, de donde se deduce que T es una transformación lineal simétrica, contradiciendo la hipótesis. □

9.4 Ejercicios

1. Indicar, haciendo uso de un gráfico, cuales son los autovalores y los autovectores de las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

   a) $n = 3$ y T la proyección ortogonal sobre un plano que pasa por el origen.

   b) $n = 2$ y T la proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen.

   c) $n = 3$ y T la proyección ortogonal sobre una recta que pasa por el origen.

   d) $n = 3$ y T la simetría respecto de un plano que pasa por el origen.

   e) $n = 2$ y T el simétrico respecto de una recta que pasa por el origen.

   f) $n = 3$ y T la rotación alrededor de una recta que pasa por el origen.

2. Si cada una de las matrices siguientes es la matriz asociada a una transformación lineal T respecto a la base $\mathcal{C}$, hallar los autovalores reales y los correspondientes autovectores asociados:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Hallar los autovalores y los correspondientes autovectores de cada una de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $T =$O.

   b) $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $T = Id_{\mathbb{R}^n}$.

   c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (-2\,x - 2\,y\,,\,-5\,x + y)$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (x + y + z\,,\,x + y\,,\,-z)$.

4. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$, de modo que $\lambda = 9$ sea autovalor doble de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (k^2\,x - 2\,y\,,\,7\,y\,,\,5\,y + 9\,z)$.

5. Determinar para que transformaciones lineales, correspondientes a los ejercicios 1 y 2, existe una base B tal que $[T]_B$ es diagonal. Indicar claramente B y $[T]_B$.

6. De una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $\vec{v} = (1, 1)$ es un autovector de T asociado a $\lambda = 2$ y que $T(0, 1) = (1, 2)$.

   a) Hallar $[T]_{\mathcal{C}}$.

   b) Hallar, si es posible, una base respecto de la cual la matriz de T sea diagonal.

7. Sabiendo que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ posee a $\vec{v_1} = (1, 2)$ y a $\vec{v_2} = (3, 1)$ como autovectores y que $T(5, -5) = (2, -1)$, hallar los autovalores de T y $[T]_{\mathcal{C}}$.
¿ Es T diagonalizable ?

8. Cada una de las siguientes matrices es la matriz asociada a una transformación lineal simétrica con respecto a la base canónica. Hallar una base ortonormal B tal que la matriz de la transformación con respecto a la misma sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

9. Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ de modo que 0 sea un autovalor doble asociado a $\vec{v_1} = (2, 1, 0, 0)$ y a $\vec{v_2} = (0, 1, 0, 1)$ y sus otros autovalores sean 3 y -1.
¿ Es $\vec{u} = (-2, 2, 2, 0, 3)$ un autovector de T ?

10. Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que tenga autovalores 1 y -1, de modo que $V_1 = \{(x, y, z) : \ 2\,x - y + z = 0 \ \}$ y $V_{-1} = \{(-2\,z, 0, z) : \ z \in \mathbb{R}\}$.

11. Sea $B = \{(1, 1, 1) \, , \, (1, -1, 0) \, , \, (1, 1, 0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

    a) Indicar los autovalores y los autovectores de T.

    b) ¿ Es una transformación lineal simétrica ?

12. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & b & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y
$\vec{v} = (7, 2, 0)$, un autovector de T asociado a $\lambda = 3$.

    a) Hallar b.

    b) Calcular todos los autovalores de T y los respectivos autovectores.

    c) ¿ Es T diagonalizable ? En caso afirmativo mostrar claramente B y $[T]_B$.
    ¿ Es T diagonalizable en una base ortonormal ? Justificar la respuesta.

10 Cónicas y Cuádricas

10.1 Cónicas

Estudiaremos someramente un grupo de curvas que los griegos denominaron cónicas.
Son ellas: la **elipse** (y como caso particular la circunferencia), la **hipérbola** y la **parábola**.
Los matemáticos griegos consideraron un cono circular e intentaron describir todas las curvas obtenidas al intersectar el cono con un plano. Si el plano no pasa por el vértice, se obtienen las cónicas propiamente dichas:

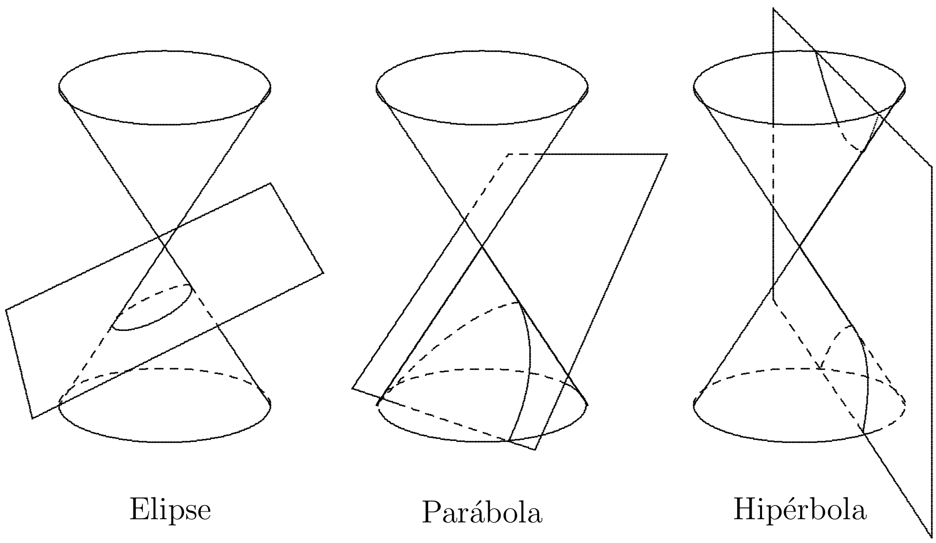


Figura 55

Si el plano pasa por el vértice del cono las posibles intersecciones serán: un punto, una recta o un par de rectas; denominadas cónicas degeneradas.

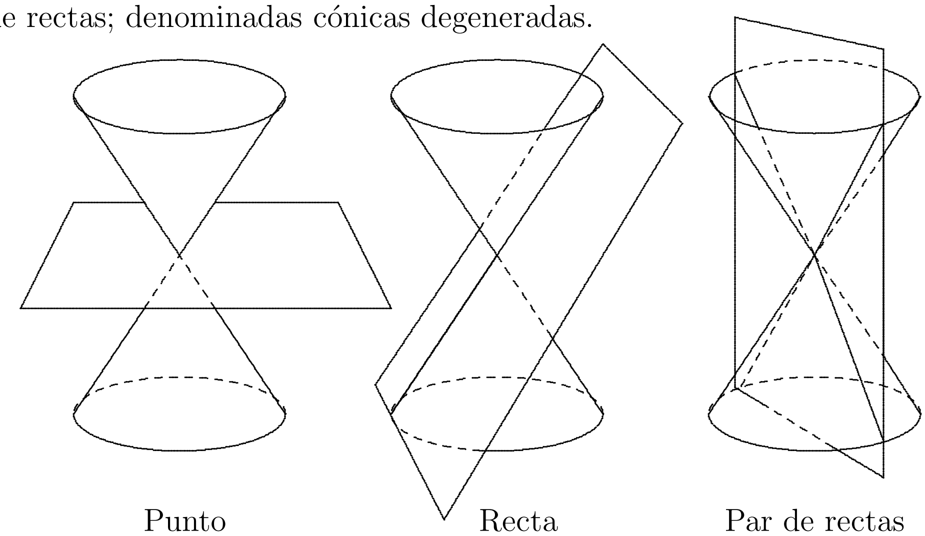


Figura 56

Circunferencia

Fijemos en el Plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal (O, XY). Consideremos $C(x_0, y_0)$ un punto fijo y $r \in \mathbb{R},\ r > 0$.

Definición 10.1.1 *Llamaremos* **circunferencia** *con centro C y radio r, al conjunto $\mathcal{C}$ de los puntos P del Plano cuya distancia a C es r.*

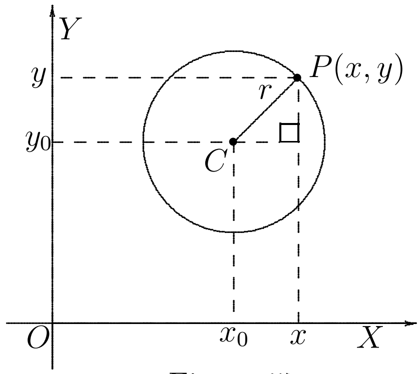


Figura 57

$P(x, y) \in \mathcal{C}$ si, y sólo si $d(P, C) = r$. Luego $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$, y en consecuencia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (*).$$

Si $x_0 = y_0 = 0$, el centro es el origen de coordenadas y la ecuación toma la forma $x^2 + y^2 = r^2$.
Desarrollando $(*)$ obtenemos $x^2 + y^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$.
Si $A = x_0$, $B = y_0$ y $C = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ resulta $x^2 + y^2 - 2\,A\,x - 2\,B\,y + C = 0$.
Recíprocamente, toda ecuación del tipo $x^2 + y^2 - 2\,A\,x - 2\,B\,y + C = 0$; con $A^2 + B^2 - C > 0$, es la ecuación de una circunferencia con centro $C(A, B)$ y radio $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$.
Basta "completar el cuadrado" y obtener $(*)$, donde $x_0 = A$ e $y_0 = B$.

Ejemplos

1. La ecuación de la circunferencia de radio 4 y centro en $C(1, -2)$ es $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.

2. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 3\,x + 5\,y - \dfrac{1}{2} = 0$, queremos hallar las coordenadas de su centro y su radio.
   $-2\,A = 3$ y $-2\,B = 5 \Longrightarrow A = x_0 = -\dfrac{3}{2}$, $B = y_0 = -\dfrac{5}{2}$ y $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{9} = 3$. Por lo tanto la circunferencia tiene centro $C(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2})$ y radio 3.

Elipse

Definición 10.1.2 *Llamaremos* **elipse** *al lugar geométrico $\mathcal{E}$ de los puntos del Plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados* **focos**, *F_1 y F_2, es constante y mayor que la distancia entre F_1 y F_2.*

Observación
La suma de las distancias de un punto M a dos puntos fijos F_1 y F_2 nunca es menor que la distancia entre F_1 y F_2. La suma es igual a la distancia entre F_1 y F_2 si y sólo si M pertenece al segmento $\overline{F_1F_2}$. La restricción respecto a la constante elimina esta posibilidad.

Sea O el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$. Como eje X consideremos la recta que contiene a los puntos F_1, F_2 y como eje Y, a la recta perpendicular a la anterior que contiene a O. Supongamos que F_1 y F_2 tienen, respectivamente, coordenadas $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, $c \geq 0$ y llamemos $2\,a$, $a > 0$ a la constante.

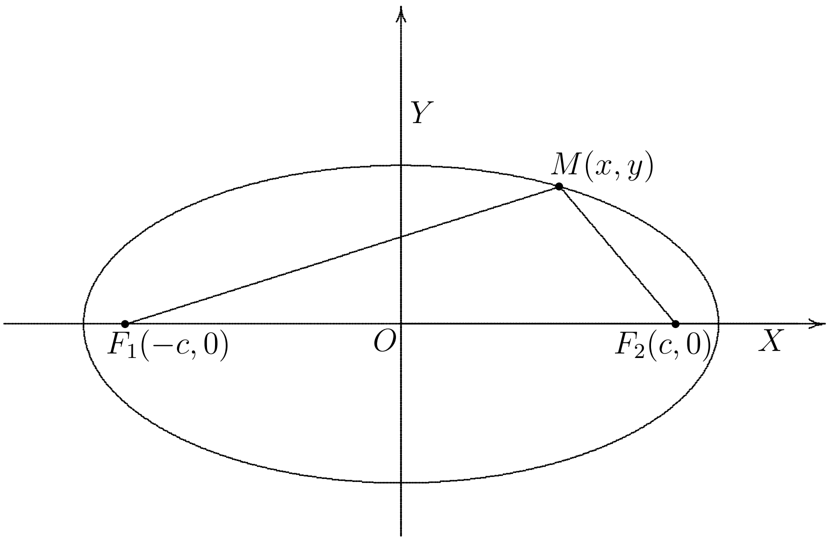


Figura 58

Sea $M(x, y) \in \mathcal{E} = \{P : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\,a\}$. Se tiene entonces que

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2\,a \implies \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2\,a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4\,a^2 - 4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \implies a^2 - x\,c = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies$$

$$(a^2 - x\,c)^2 = a^2\,[(x-c)^2 + y^2] \implies a^2\,(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)\,x^2 + a^2\,y^2. \qquad (*)$$

Como $d(F_1, M) + d(F_2, M) = 2\,a > d(F_1, F_2) = 2\,c$ se tiene que $a > c \geq 0 \implies a^2 - c^2 > 0$.
Sea $b^2 = a^2 - c^2$, reemplazando en $(*)$ obtenemos que $a^2\,b^2 = b^2\,x^2 + a^2\,y^2$ y dividiendo por $a^2\,b^2$ resulta:

$$(\mathcal{E}) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ ; \quad a \geq b > 0$$

que es una de las formas canónicas de la ecuación de la elipse.

Los ejes X e Y se denominan los **ejes de simetría** de la elipse. Los segmentos $\overline{A'A}$ y $\overline{B'B}$ se denominan, respectivamente, el **eje mayor** y el **eje menor** de la elipse. Los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se llaman, respectivamente, el **semieje mayor** y el **semieje menor** y los números a y b, son sus respectivas longitudes. Si $a = b$ obtenemos le ecuación de una circunferencia de radio a. La ecuación $(\mathcal{E})$ implica que $|x| \leq a$ e $|y| \leq b$. Los cuatro puntos en que la elipse corta a los ejes se llaman **vértices** y sus coordenadas son $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$. O se denomina el **centro** de la elipse.

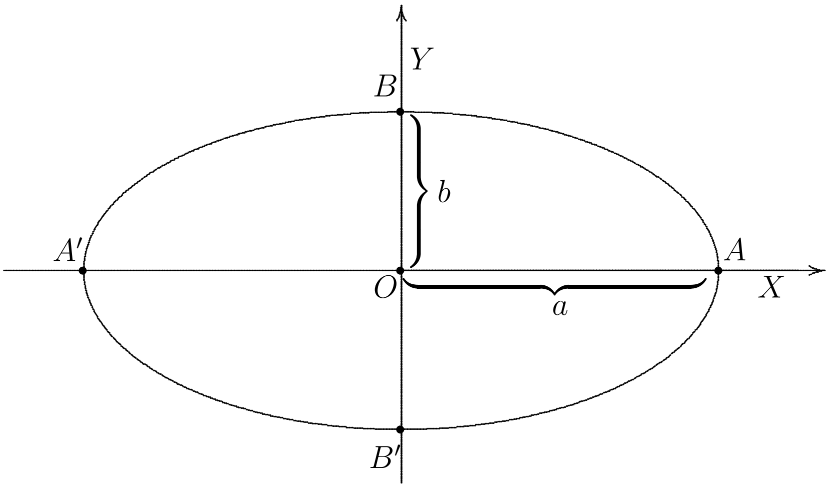


Figura 59

Observación

Si en los casos anteriores se considera como eje Y a la recta que pasa por los focos y como eje X su perpendicular por O obtendremos, por un procedimiento análogo,

$$(\mathcal{E}') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ; \quad b \geq a > 0$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de una elipse con vértice en $V(-1, 1)$, centro en $O'(3, -1)$ y tal que $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. ¿ Cuántas elipses existen en esas condiciones ?

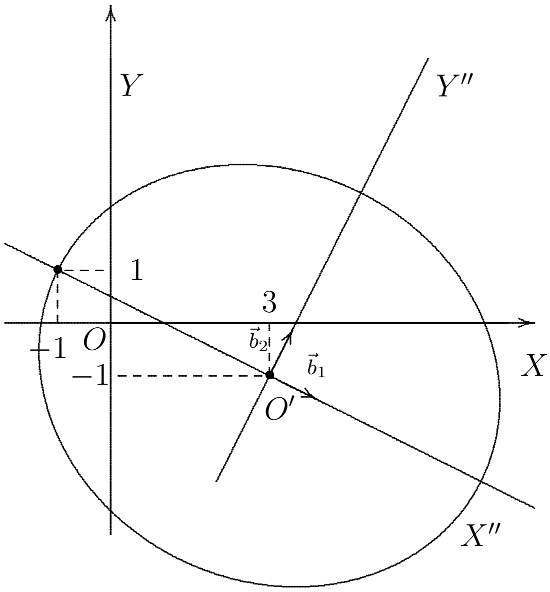


Figura 60

Como V es un vértice y O' es el centro de la elipse, entonces $\|\overrightarrow{VO'}\|$ puede considerarse como la longitud del eje mayor ó la longitud del eje menor. Luego existen dos elipses que verifican las condiciones del problema.

Supongamos que $a = \|\overrightarrow{VO'}\| = \sqrt{20}$ es la longitud del semieje mayor. Como $O'(3,-1)$, necesitamos hallar una base ortonormal B de manera que en el sistema de coordenadas $(O', X''Y'')$, asociado a O' y B, la elipse tenga ecuación canónica. Consideramos $\vec{b}_1 = \dfrac{\overrightarrow{VO'}}{\|\overrightarrow{VO'}\|} = (2/\sqrt{5}\,, -1/\sqrt{5})$ y $\vec{b}_2 = (1/\sqrt{5}\,, 2/\sqrt{5})$. $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ es una base ortonormal y en el sistema de coordenadas $(O', X''Y'')$ asociado a O' y B la elipse tiene ecuación $\dfrac{x''^2}{20} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$.

Como $c^2 = a^2 - b^2$ y $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$, entonces $b^2 = 15$. Por lo tanto $\dfrac{x''^2}{20} + \dfrac{y''^2}{15} = 1$.
Para hallar la ecuación en el sistema (O, XY) de partida consideramos las correspondientes fórmulas de cambio de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = [B]_{\mathcal{C}}^{T} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces que $x'' = \dfrac{2\,x - y - 7}{\sqrt{5}}$ e $y'' = \dfrac{x + 2\,y - 1}{\sqrt{5}}$. Reemplazando y efectuando los cálculos se obtiene $16\,x^2 + 19\,y^2 + 4\,x\,y - 92\,x + 26\,y - 149 = 0$.
Análogamente, si consideramos $a = \sqrt{20}$ como la longitud del semieje menor obtenemos $24\,x^2 + 21\,y^2 - 4\,x\,y - 148\,x + 54\,y - 251 = 0$.

Si $a > b$, las rectas $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ y $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ se llaman **directrices** de la elipse y cada una de ellas tiene la siguiente propiedad:

Si r es la distancia de un punto arbitrario de la elipse a un foco y d es la distancia del mismo punto a la directriz, unilateral a este mismo foco, entonces $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$.

Observación
El número $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ se denomina la excentricidad de la elipse. Es claro que $0 \leq \varepsilon < 1$ y que $\varepsilon = 0$ en el caso en que la elipse es una circunferencia.

Hipérbola

Definición 10.1.3 *Llamaremos* **hipérbola** *al lugar geométrico* $\mathcal{H}$ *de los puntos del Plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados* **focos**, F_1 *y* F_2, *es constante en valor absoluto, menor que la distancia entre los focos y no nula.*

Observación
La diferencia, en valor absoluto, entre las distancias de un punto M a dos puntos fijos F_1 y F_2, nunca es mayor que la distancia entre F_1 y F_2. La diferencia, en valor absoluto, es igual a la distancia entre F_1 y F_2 si M pertenece a la recta determinada por F_1 y F_2, pero no al segmento abierto $\overline{F_1F_2}$. La diferencia es nula si M equidista de F_1 y F_2, es decir, si M

pertenece a la recta perpendicular a la determinada por F_1 y F_2 por su punto medio. Estos casos han sido excluidos por la restricción dada a la constante.

Sea (O, XY) el sistema de coordenadas de la Figura 58 y los focos de $\mathcal{H}$: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ $c > 0$. Llamemos $2\,a$, $a > 0$ a la constante.

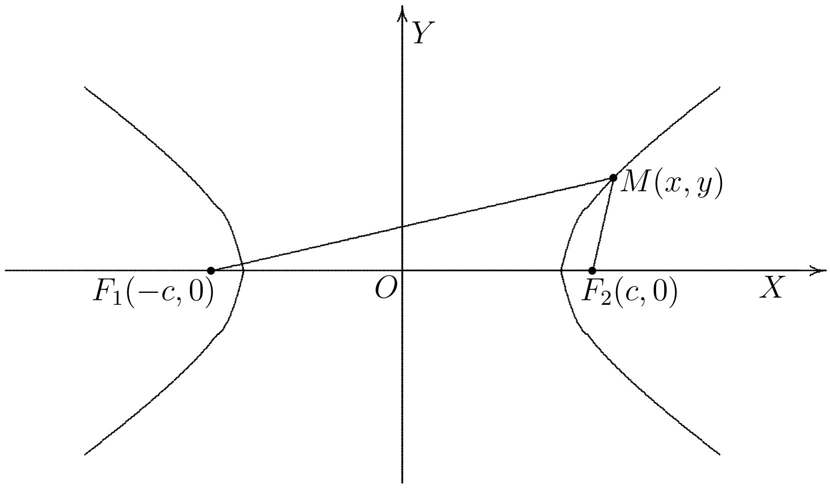


Figura 61

Sea $M(x, y) \in \mathcal{H} = \{P : |\ d(P, F_1) - d(P, F_2)\ | = 2\,a\}$. Entonces obtenemos que

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2\,a$. Por un cálculo análogo al caso anterior resulta:

$a^4 + c^2\,x^2 = a^2\,x^2 + a^2\,c^2 + a^2\,y^2 \implies x^2(c^2 - a^2) - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (*)$

Como $2\,c = d(F_1, F_2) > |\ d(F_1, M) - d(F_2, M)\ | = 2\,a \implies c > a > 0 \implies c^2 > a^2 \implies c^2 - a^2 > 0$.

Sea $b^2 = c^2 - a^2$, reemplazando en $(*)$ obtenemos $x^2\,b^2 - a^2\,y^2 = a^2\,b^2$.

Dividiendo por $a^2\,b^2$ resulta:

$$(\mathcal{H}) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ ; \ a > 0,\ b > 0$$

que es una de las formas canónicas de la ecuación de la hipérbola.

El eje X se denomina el **eje** de la hipérbola. La ecuación $(\mathcal{H})$ implica que $|x| \geq a$, luego la hipérbola consta de dos partes, llamadas **ramas**. La hipérbola intersecta a su eje en los puntos $A'(-a, 0)$ y $A(a, 0)$, llamados **vértices**. O es el **centro** de la hipérbola y los números a y b las longitudes de sus semiejes. Si $a = b$ la hipérbola se dice **equilátera.**

Las diagonales del rectángulo $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ son las rectas de ecuación $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}\,x$, que se denominan las **asíntotas** de la hipérbola.

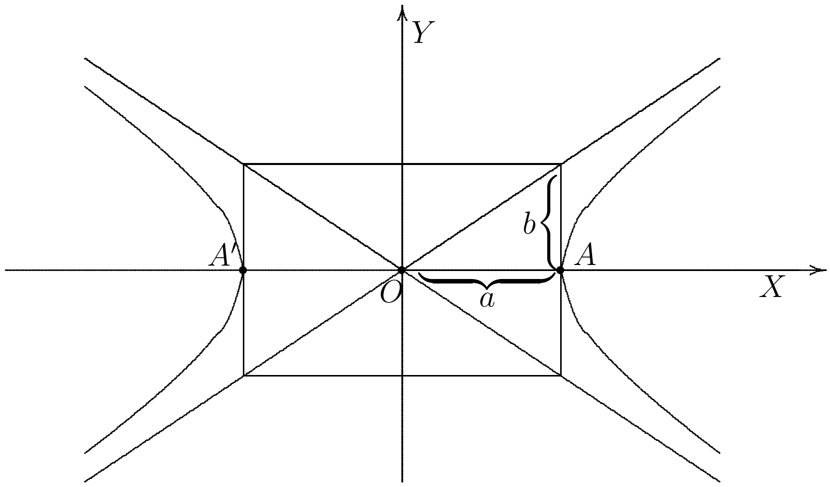


Figura 62

Observación
Si en los casos anteriores se considera a la recta que pasa por los focos como eje Y, y como eje X su perpendicular por O obtendremos, por un procedimiento análogo,

$$(\mathcal{H}') \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \ ; \quad a > 0, \ b > 0$$

que es la otra forma canónica de la ecuación de la hipérbola.

Ejemplo
Hallemos la ecuación de la hipérbola con vértices $A'(-3, 4)$, $A(1, -1)$ y foco $F_1(5, -6)$.

Encontremos un sistema de coordenadas $(O', X''Y'')$ en el cual la cónica tenga una ecuación canónica. Para esto, debemos hallar O' y una base ortonormal B.

Como A' y A son los vértices de la hipérbola es claro que O' es el punto medio del segmento $\overline{A'A}$, es decir, $O'(-1, \frac{3}{2})$.

Tomemos como eje X'' a la recta $L : 5\,x + 4\,y - 1 = 0$, que contiene a A' y a A, como eje Y'' elegimos la recta perpendicular a L que pasa por O'.

Una base ortonormal adecuada es $B = \left\{ (\frac{4}{\sqrt{41}}, -\frac{5}{\sqrt{41}}) \, , \, (\frac{5}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}) \right\}$. Ver Figura 63

En el sistema $(O', X''Y'')$ la hipérbola tiene ecuación $\dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1$, pues F_1 pertenece al eje X''.

Entonces $a^2 = \left[\dfrac{d(A', A)}{2} \right]^2 = \dfrac{41}{4}$ y $c^2 = a^2 + b^2 = \dfrac{41}{4} + b^2$. Como $c^2 = [d(O', F_1)]^2 = \dfrac{369}{4}$
$b^2 = \dfrac{369}{4} - \dfrac{41}{4} = 82$. La ecuación de la hipérbola es: $\dfrac{x''^2}{\frac{41}{4}} - \dfrac{y''^2}{82} = 1 \Longrightarrow 8x''^2 - y''^2 = 82$ (1).

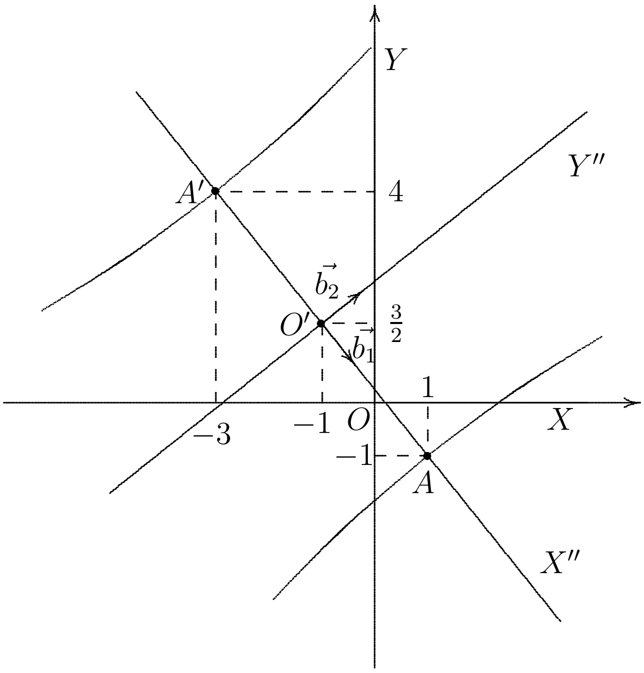


Figura 63

Hallemos su ecuación en el sistema (O, XY). El cambio de coordenadas queda determinado por:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = [B]^t_{\mathcal{C}} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{41} & -5/\sqrt{41} \\ 5/\sqrt{41} & 4/\sqrt{41} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3/2 \end{pmatrix}, \text{ de donde obtenemos}$$

$x'' = \dfrac{4}{\sqrt{41}}\,x - \dfrac{5}{\sqrt{41}}\,y + \dfrac{23}{2\sqrt{41}}$ e $y'' = \dfrac{5}{\sqrt{41}}\,x + \dfrac{4}{\sqrt{41}}\,y - \dfrac{1}{\sqrt{41}}$. Reemplazando en (1) se obtiene

$103\,x^2 - 360\,x\,y + 184\,y^2 + 746\,x - 912\,y - 2305 = 0.$

En el sistema $(O', X''Y'')$, $F_2 \ll -\dfrac{3}{2}\sqrt{41}, 0 \gg$, y como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [B]_{\mathcal{C}} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ obtenemos que $F_2(-7, 9)$.

Parábola

Definición 10.1.4 *Llamaremos* **parábola** *al lugar geométrico $\mathcal{P}$ de los puntos del Plano cuya distancia a un punto fijo F llamado* **foco**, *coincide con su distancia a una recta fija D, que no pasa por el foco, llamada* **directriz**.

Sea L la recta perpendicular a D por F y $\{M\} = D \cap L$. Consideremos el punto medio O del segmento $\overline{FM}$, como eje X la recta paralela a D por O y como eje Y la recta L. Suponemos que $F(0, p)$, $p \neq 0$, y directriz D de ecuación $y = -p$. Ver Figura 64

Observación
Si la directriz pasara por el foco, los puntos pertenecientes a la recta que pasa por F y es perpendicular a la directriz verificarían la definición.

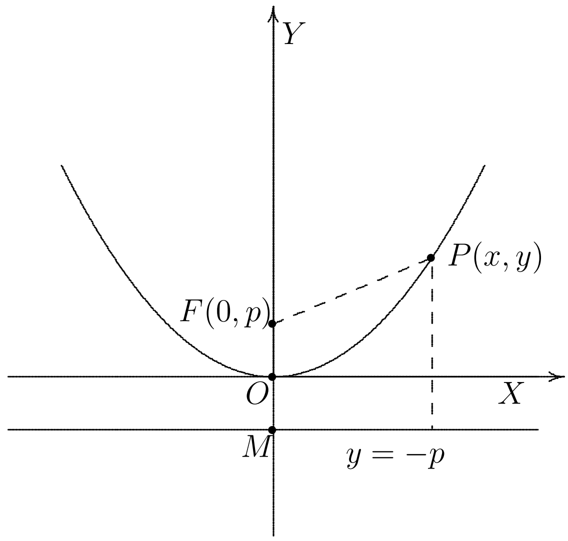


Figura 64

Sea $P(x,y) \in \mathcal{P} = \{P :\ d(P,F) = d(P,D)\}$. Se tiene entonces que:

$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \mid y+p \mid \Longrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$

De aquí obtenemos:

$$(\mathcal{P})\ \ 4py = x^2$$

que es una de las formas canónicas de la ecuación de la parábola.

El eje Y se denomina el **eje de simetría** de la parábola y O el **vértice**.

Observación

Si consideramos como eje X a la recta L y como eje Y la recta paralela a D por O, se tiene que el foco tiene coordenadas $(p,0)$, $p \neq 0$ y la directriz ecuación $D:\ x = -p$. Por un procedimiento análogo, obtenemos la ecuación canónica:

$$(\mathcal{P}')\ \ 4px = y^2$$

que es la otra forma canónica de la ecuación de la parábola.

Ejemplo

Hallemos la ecuación de una parábola que tenga foco en el punto de coordenadas $(0,0)$ y directriz de ecuación $D: x - \sqrt{3}\,y + 16 = 0$.

Para hallar un sistema de coordenadas $(O', X''Y'')$ en el cual, la parábola tenga una forma canónica, consideremos como eje Y'', la recta L perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Por lo tanto, la ecuación del eje Y'' es $L:\ \sqrt{3}\,x + y = 0$.

El nuevo origen O' es el punto medio del segmento $\overline{FM}$, donde $\{M\} = L \cap D$, esto implica que $M(-4, 4\sqrt{3})$, por lo tanto $O'(-2, 2\sqrt{3})$.

El eje X'' es la recta paralela a la directriz por O'.

La base ortonormal que determina junto con O' el nuevo sistema de coordenadas es

$$B = \left\{ (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \, , \, (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \right\} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}.$$ Ver figura 65

En el sistema $(O', X''Y'')$ la cónica tiene ecuación $4py'' = x''^2$, con $p = d(F, O') = 4$. Esto implica que $y'' = \dfrac{1}{16}\, x''^2$.

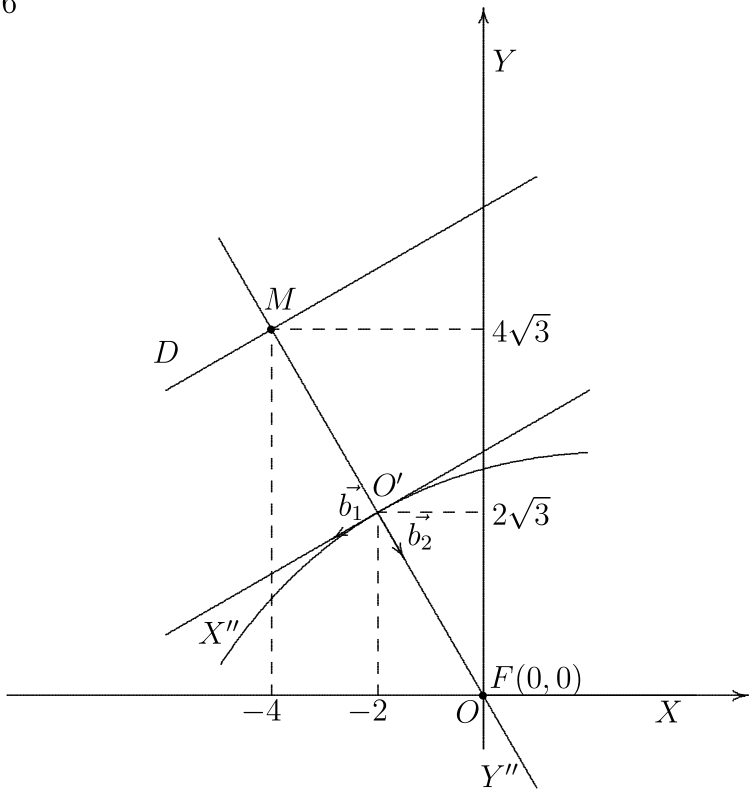


Figura 65

Para obtener su ecuación en el sistema (O, XY) de partida usaremos las fórmulas de cambio de coordenadas.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = [B]_{\mathcal{C}}^{T} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\, x - \dfrac{1}{2}\, y \\ y'' = \dfrac{1}{2}\, x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, y + 4 \end{cases} .$$

Esto implica que la parábola tiene ecuación $3\,x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,x\,y - 32\,x + 32\sqrt{3}\,y - 256 = 0$.

10.2 Reducción de una cónica a la forma canónica

Supongamos fijado, en el Plano, un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal (O, XY) y consideremos el conjunto de puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen:

(1) $$a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0\ ; \quad a, b, c, d, e, f\ \in\ \mathbb{R}\ ,$$

a, b y c no simultáneamente nulos.
Es claro que las ecuaciones canónicas $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{E})$ y $(\mathcal{H})$ de las cónicas son casos particulares de (1). El conjunto de puntos considerado anteriormente puede ser vacío $(x^2 + 1 = 0)$, un único punto $(x^2 + y^2 = 0)$, una recta ($x^2 = 0)$, dos rectas paralelas $(x^2 = 1)$ o dos rectas que se cortan $(x\,y = 0)$.
Veremos que mediante un cambio adecuado de coordenadas, (1) es la ecuación de una cónica o una cónica degenerada.

Sea $f(x, y) = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0$ y consideremos la transformación lineal simétrica $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Si $\vec{v} = (x, y)$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$, sabemos que:

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{C}} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x + b\,y \\ b\,x + c\,y \end{pmatrix}$$

Luego, $\langle\, T(\vec{v}), \vec{v}\,\rangle = \langle\, (a\,x + b\,y, b\,x + c\,y), (x, y)\,\rangle = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2$. Entonces, notando $\vec{L} = (d, e)$, resulta:

$$f(x, y) = \langle\, T(\vec{v}), \vec{v}\,\rangle + \langle\, \vec{L}, \vec{v}\,\rangle + f = 0$$

Como T es una transformación lineal simétrica, existe una base ortonormal B, formada por autovectores, tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Como B y la base canónica son bases ortonormales, para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, se verifica que:

$$\langle\, T(\vec{v}), \vec{v}\,\rangle = \langle\, (T(\vec{v}))_B, (\vec{v})_B\,\rangle$$

Supongamos que $(\vec{v})_B = (x', y')$, entonces:

$$[T(\vec{v})]_B = [T]_B \cdot [\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, x' \\ \lambda_2\, y' \end{pmatrix}$$

Si notamos $(\vec{L})_B = (d', e')$, tenemos que:

$$\langle\, (T(\vec{v}))_B, (\vec{v})_B\,\rangle + \langle\, (\vec{L})_B, (\vec{v})_B\,\rangle\ +\ f = \lambda_1\, x'^2 + \lambda_2\, y'^2 + d'\, x' + e'\, y' + f$$

Por consiguiente, en el sistema de coordenadas $(O, X'Y')$ asociado a la base B, (1) toma la forma:

$$f'(x', y') = \lambda_1\, x'^2 + \lambda_2\, y'^2 + d'\, x' + e'\, y' + f = 0$$

Agrupando las variables y de ser necesario,“completando cuadrados ” se efectúa una traslación de los ejes a un nuevo origen O' y así se obtiene un sistema de coordenadas $(O', X''Y'')$ en el cual $f''(x'', y'') = 0$ es la ecuación canónica de una **cónica propiamente dicha** o de una **cónica degenerada**.

X'' será paralelo al autovector asociado a λ_1 e Y'' paralelo al asociado a λ_2.

Ejemplos

1. Sea $f(x, y) = 3\,x^2 + 10\,x\,y + 3\,y^2 + 22\,x + 10\,y + 5 = 0$.

   $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ luego $\det(A - x \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 3-x & 5 \\ 5 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 6x - 16$, sus raíces son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -2$. Hallemos los autovectores asociados.

   - Si $\lambda = 8$,
     $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -x + y = 0$, de aquí resulta $x = y$ y entonces $V_8 = \{(x, x) :\ x \in \mathbb{R}\}$. Elegimos $\vec{v_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   - Si $\lambda = -2$,
     $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x + y = 0$ entonces $x = -y$ y por lo tanto $V_{-2} = \{(-y, y) :\ y \in \mathbb{R}\}$. Elegimos $\vec{v_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

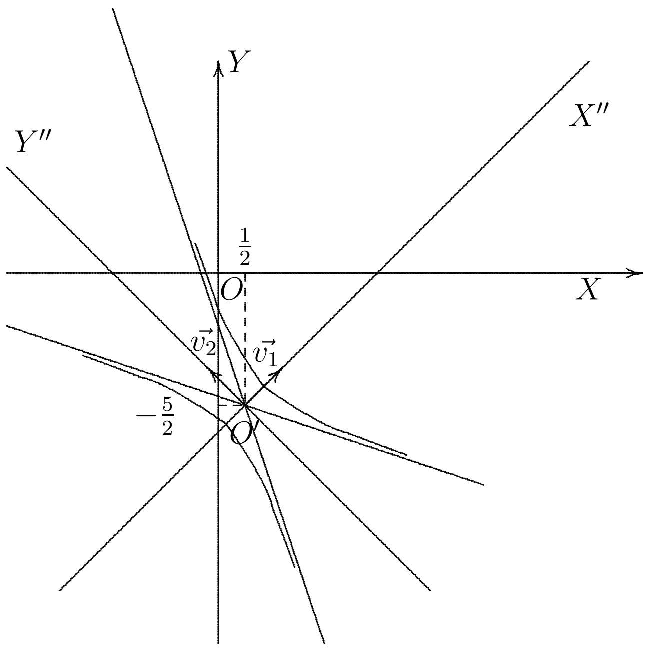


Figura 66

Sea $B = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right\}$. Es claro que $[T]_B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$[L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix} \implies [L]_B = [B]_{\mathcal{C}}^T \cdot [L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Luego $f'(x', y') = 8\,x'^2 - 2\,y'^2 + 16\,\sqrt{2}\,x' - 6\,\sqrt{2}\,y' + 5 = 0$, y por lo tanto

$$8\,x'^2 + 16\,\sqrt{2}\,x' - (2\,y'^2 + 6\,\sqrt{2}\,y') + 5 = 0 \implies 8\,(x' + \sqrt{2})^2 - 2\,(y' + \frac{3}{2}\,\sqrt{2})^2 - 2 = 0.$$

Consideramos $x'' = x' + \sqrt{2}$; $y'' = y' + \dfrac{3}{2}\,\sqrt{2}$, es decir efectuamos una traslación de ejes a O' tal que $[\overrightarrow{OO'}]_B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$, luego $[\overrightarrow{OO'}]_{\mathcal{C}} = [B]_{\mathcal{C}} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$.

Tenemos entonces que $8\,x''^2 - 2\,y''^2 - 2 = 0 \implies \dfrac{x''^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} - y''^2 = 1$ que es la ecuación canónica de una hipérbola.

2. Sea $f(x, y) = 3\,x^2 + 2\,\sqrt{3}\,x\,y + y^2 - 32\,x + 32\,\sqrt{3}\,y + 256 = 0$.

   $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \implies \det(A - x \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 3 - x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 - x \end{vmatrix} = x(x - 4).$

   Los autovalores de T son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 0$.

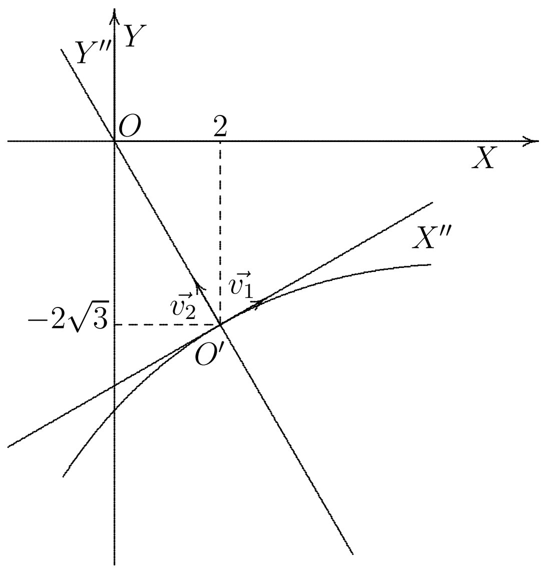


Figura 67

- Si $\lambda = 4$,

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -x + \sqrt{3}\,y = 0 \\ \sqrt{3}\,x - 3\,y = 0 \end{cases} \implies x = \sqrt{3}\,y.$$

Por lo tanto $V_4 = \{(\sqrt{3}\,y, y) :\ y\ \in\ \mathbb{R}\ \}$. Elegimos $\vec{v_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- Si $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3\,x + \sqrt{3}\,y = 0 \\ \sqrt{3}\,x + \ \ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,y.$$

Luego $V_0 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,y, y \right) :\ y\ \in\ \mathbb{R} \right\}$. Elegimos $\vec{v_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Sea $B = \left\{ (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})\,,\,(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \right\}$. Entonces $[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$[L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -32 \\ 32\sqrt{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow [L]_B = [B]_{\mathcal{C}}^T \cdot [L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -32 \\ 32\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 64 \end{pmatrix}$. Luego,

$f'(x', y') = 4\,x'^2 + 64\,y' + 256 = 0 \Longrightarrow 4\,x'^2 + 64\,(y' + 4) = 0 \Longrightarrow x'^2 + 16\,(y' + 4) = 0.$

Si $x'' = x'$, $y'' = y' + 4$, se tiene que $x''^2 + 16\,y'' = 0$ y por lo tanto $y'' = -\frac{1}{16}\,x''^2$, que es la ecuación de una parábola. Tenemos además que

$[\overrightarrow{OO'}]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow [\overrightarrow{OO'}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Ver Figura 67.

10.3 Cuádricas

Supongamos fijado, en el Espacio, un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal (O, XYZ). Estudiaremos superficies tales que las coordenadas cartesianas de sus puntos, (x, y, z) satisfacen una ecuación del tipo:

$$f(x, y, z) = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{13}\,x\,z + 2\,a_{23}\,y\,z + a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z + k = 0, \quad (*)$$

donde los coeficientes de los términos cuadráticos no son simultáneamente nulos. Estas superficies se denominan **cuádricas**.

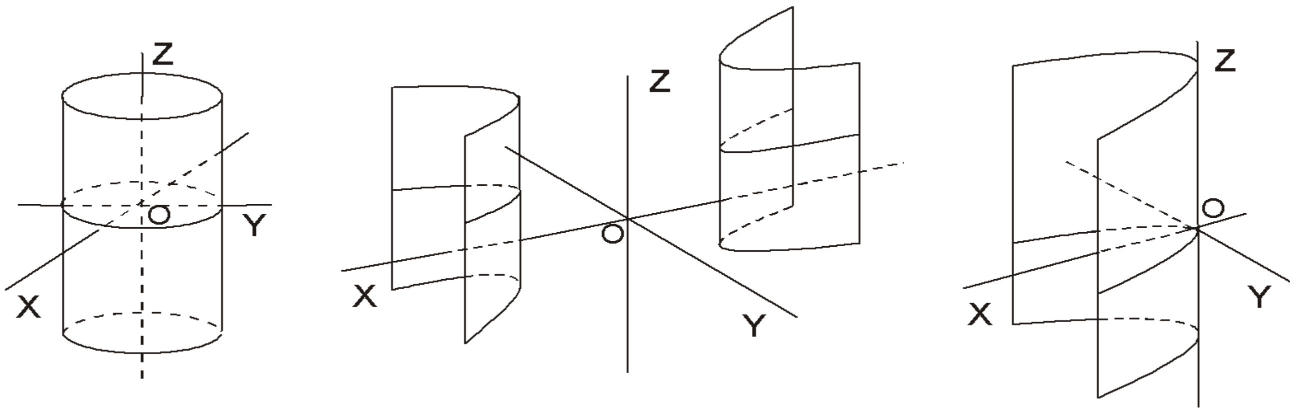
Cilindros

Un cilindro es una superficie S tal que, para un apropiado sistema de coordenadas, consta de todas las rectas perpendiculares al plano $z = 0$, que pasan por una curva γ en dicho plano. En nuestro caso γ es una cónica. Obtenemos entonces:

(1) **cilindro elíptico:** $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ ;\quad a \geq b > 0.$

(2) **cilindro hiperbólico:** $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ ;\quad a > 0\ ,\ b > 0.$

(3) **cilindro parabólico:** $\quad 4\,p\,y = x^2\ ;\quad p \neq 0.$



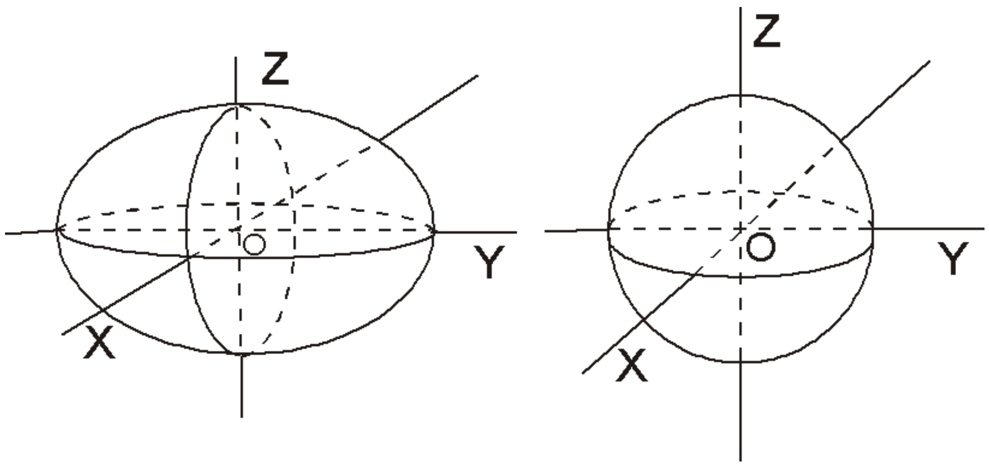
Cilindro elíptico Cilindro hiperbólico Cilindro parabólico

Figura 68

Elipsoide

Es una superficie que en un sistema de coordenadas adecuado tiene ecuación:

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ ; \quad a \geq b \geq c > 0$$



Elipsoide Esfera

Figura 69

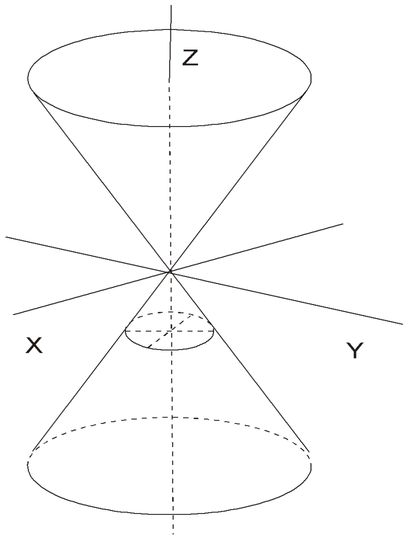
Si $a = b = c$, obtenemos la ecuación de una **esfera** de radio a.

Conos

Son superficies que en un sistema de coordenadas adecuado tienen ecuación:

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \ ; \ a \geq b > 0$$

Si $a = b$, el cono se dice **circular** y se obtiene por rotación alrededor del eje z de una recta que pasa por el origen. Si $a \neq b$, el cono se dice **elíptico**.



Cono

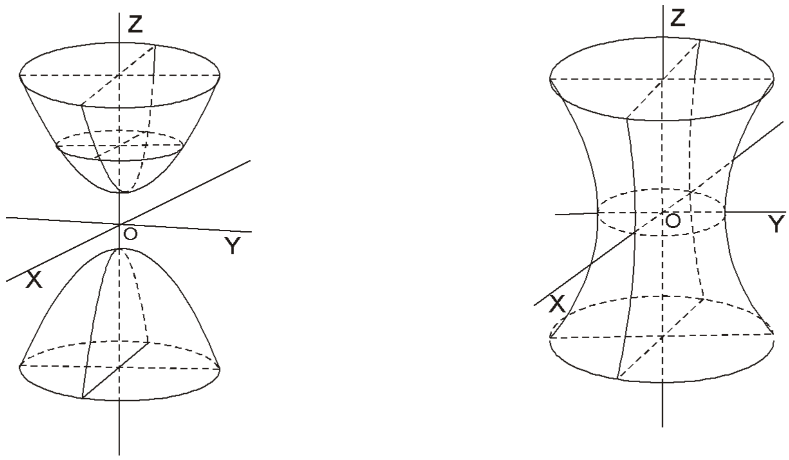
Figura 70

Hiperboloides

Son superficies que poseen ecuación:

(6) $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $a \geq b > 0$, $c > 0$. Hiperboloide de dos hojas.

(7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $a \geq b > 0$, $c > 0$. Hiperboloide de una hoja.



Hiperboloide de dos hojas Hiperboloide de una hoja

Figura 71

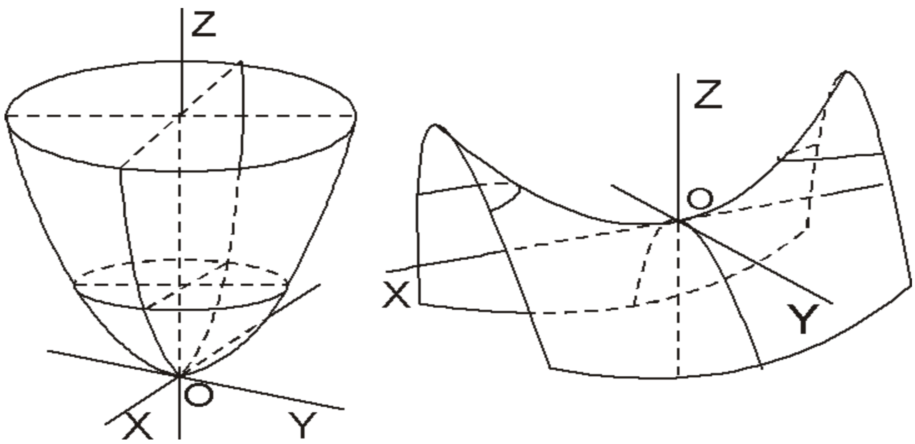
Paraboloides

Existen dos cuádricas llamadas paraboloides, el **paraboloide elíptico** de ecuación:

$$(8) \quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \; ; \quad a \geq b > 0$$

y el **paraboloide hiperbólico** o "silla de montar" de ecuación:

$$(9) \quad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \; ; \quad a > 0 \; , \; b > 0$$



Paraboloide elíptico Paraboloide hiperbólico

Figura 72

Las ecuaciones (1), (2), ...,(8) y (9) son casos particulares de $(*)$ y se denominan **ecuaciones canónicas** de las cuádricas. Observemos que las mismas pueden clasificarse en dos grupos:

I: (1), (2), (4), (5), (6) y (7) se denominan **cuádricas con centro** y en un sistema de coordenadas adecuado tienen ecuación:

$f(x,y,z) = A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D = 0$ con A, B y C no simultáneamente nulos.

II: (3), (8) y (9) se denominan **cuádricas sin centro** y tienen ecuación:

$f(x,y,z) = A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z = 0$ con $C \neq 0$, A y B no simultáneamente nulos.

Observación

La ecuación $(*)$ puede representar el conjunto vacío $(x^2 = -1)$, un punto $(x^2+y^2+z^2 = 0)$, una recta $(x^2 + y^2 = 0)$, un plano $(z^2 = 0)$, dos planos paralelos $(z^2 = 1)$ o dos planos que se cortan $(x\,y = 0)$.

10.4 Reducción de una cuádrica a la forma canónica

Consideremos la ecuación :

$f(x,y,z) = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{13}\,x\,z + 2\,a_{23}\,y\,z + a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z + k = 0.$

Veremos que con un cambio adecuado de coordenadas obtenemos la ecuación canónica de una cuádrica o uno de los casos considerados en la observación anterior. A $f(x,y,z)=0$ le asociamos la transformación lineal simétrica $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Si $L=(a_1,a_2,a_3)$, en forma análoga a lo visto para cónicas $f(x,y,z)=0$ se expresa:

$$f(x,y,z) = \langle T(x,y,z),(x,y,z)\rangle + \langle L,(x,y,z)\rangle + k = 0$$

Como T es transformación lineal simétrica existe una base ortonormal B formada por autovectores de T, tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. B es base ortonormal y determina un sistema de coordenadas $(O, X'Y'Z')$ en el cual $f(x,y,z)=0$ toma la forma

$$f'(x',y',z') = \lambda_1\, {x'}^2 + \lambda_2\, {y'}^2 + \lambda_3\, {z'}^2 + a_1'\, x' + a_2'\, y' + a_3'\, z' + k = 0$$

Veamos ahora como proceder en cada caso, de acuerdo a los autovalores obtenidos.

Primer caso: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$

En tal caso agrupamos las variables, y si fuera necesario "completamos cuadrados" efectuando una traslación que permite obtener un sistema de coordenadas $(O', X''Y''Z'')$ en el cual $f'(x',y',z')=0$ tiene ecuación:

$$f''(x'',y'',z'') = \lambda_1\, {x''}^2 + \lambda_2\, {y''}^2 + \lambda_3\, {z''}^2 + k' = 0$$

Ejemplo

Consideremos la cuádrica de ecuación $f(x,y,z) = -x^2 + y\,z + 2\,x - 4\,z - 5 = 0$.

$$A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A - x\cdot I_3) = \begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-x)\begin{vmatrix} -x & 1/2 \\ 1/2 & -x \end{vmatrix} = (-1-x)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = -(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}).$$

Son autovalores: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ y $\lambda_3 = \dfrac{1}{2}$.

- Si $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y + \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{y}{2} + z = 0 \end{cases} \implies y = z = 0.$$

  Por lo tanto $V_{-1} = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Elegimos $\vec{v_1} = (1,0,0)$.

- Si $\lambda = -\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \implies x = 0 \ , \ y = -z.$$

entonces $V_{-\frac{1}{2}} = \{(0, -z, z) : \ z \ \in \ \mathbb{R} \ \}$. Elegimos $\vec{v_2} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

- Si $\lambda = \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies x = 0 \ , \ y = z.$$

Entonces $V_{\frac{1}{2}} = \{(0, y, y) : \ y \ \in \ \mathbb{R} \ \}$. Elegimos $\vec{v_3} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Sea $B = \left\{ (1,0,0) \, , \, (0, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \, , \, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}), (0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}) \right\}$, luego,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Como $[L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $[L]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $f'(x', y', z') = -x'^2 - \dfrac{1}{2} y'^2 + \dfrac{1}{2} z'^2 + 2\,x' + 2\sqrt{2}\,y' - 2\sqrt{2}\,z' - 5 = 0$.

Agrupamos las variables y “completamos cuadrados” y determinamos la traslación a efectuar.

$$\begin{aligned} f'(x', y', z') &= -(x'^2 - 2\,x') - \frac{1}{2}(y'^2 - 4\sqrt{2}\,y') + \frac{1}{2}(z'^2 - 4\sqrt{2}\,z') - 5 = \\ &= -[(x'-1)^2 - 1] - \frac{1}{2}[(y' - 2\sqrt{2})^2 - 8] + \frac{1}{2}[(z' - 2\sqrt{2})^2 - 8] - 5 = \\ &= -(x'-1)^2 - \frac{1}{2}(y' - 2\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}(z' - 2\sqrt{2})^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Si $x'' = x' - 1$; $y'' = y' - 2\sqrt{2}$; $z'' = z' - 2\sqrt{2}$ obtenemos

$-x''^2 - \dfrac{1}{2} y''^2 + \dfrac{1}{2} z''^2 - 4 = 0 \implies -\dfrac{x''^2}{4} - \dfrac{y''^2}{8} + \dfrac{z''^2}{8} = 1$, que es la ecuación de un hiperboloide de dos hojas.

Segundo caso: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$

Se tiene que: $f'(x', y', z') = \lambda_1 \, x'^2 + \lambda_2 \, y'^2 + a_1' \, x' + a_2' \, y' + a_3' \, z' + k = 0.$

- Si $a_3' = 0$, "completando cuadrados" se obtiene $f''(x'', y'', z'') = \lambda_1 \, x''^2 + \lambda_2 \, y''^2 + k' = 0.$
- Si $a_3' \neq 0$, "completamos cuadrados" y, sacando un factor común conveniente, obtenemos $f''(x'', y'', z'') = \lambda_1 \; x''^2 + \lambda_2 \; y''^2 + a_3' \; z'' = 0.$

Ejemplo
Consideremos la cuádrica de ecuación $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 6\, x\, y - 2\, z - 20 = 0$.

$$A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - x \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 0 \\ 3 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$-x[(1-x)^2 - 9] = -x(x^2 - 2x - 8) = -x(x-4)(x+2).$

Por lo tanto los autovalores de T son $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 0$.

- Si $\lambda = 4$,

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = 0 \; , \; y = x \; .$$

Entonces $V_4 = \{(x, x, 0) : \; x \; \in \mathbb{R} \; \}$. Elegimos $\vec{v_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$.

- Si $\lambda = -2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = 0 \; , \; y = -x.$$

Por lo tanto $V_{-2} = \{(-y, y, 0) : \; y \; \in \mathbb{R} \; \}$. Elegimos $\vec{v_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$.

- Si $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + \;\; y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = y = 0.$$

En consecuencia $V_0 = \{(0, 0, z) : \; z \; \in \mathbb{R} \; \}$. Elegimos $\vec{v_3} = (0, 0, 1)$.

Sea $B = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \, , \, (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \, , \, (0, 0, 1) \right\}$.

Como $[L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ entonces $[L]_B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Luego $f'(x',y',z') = 4\,x'^2 - 2\,y'^2 - 2\,z' - 20 = 4\,x'^2 - 2\,y'^2 - 2\,(z'+10) = 0.$

Entonces si $x'' = x'$, $y'' = y'$ y $z'' = z' + 10$, tenemos que:

$\dfrac{x''^2}{\frac{1}{2}} - y''^2 = z''$, que es la ecuación de un paraboloide hiperbólico.

Tercer caso: $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$f'(x',y',z') = \lambda_1\,x'^2 + a'_1\,x' + a'_2\,y' + a'_3\,z' + k = 0.$

a) Si $a'_2 = 0$ ó $a'_3 = 0$ obtenemos, realizando una traslación conveniente, una cuádrica degenerada, $f''(x'',y'',z'') = \lambda_1\,x''^2 + a'_3\,z'' = 0$ ó $f''(x'',y'',z'') = \lambda_1\,x''^2 + a'_2\,y'' = 0.$

b) Si $a'_2 \neq 0$ y $a'_3 \neq 0$ debemos elegir, en el plano que contiene los vectores $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$, otro par de vectores $\vec{v'_2}$ y $\vec{v'_3}$ perpendiculares entre sí de modo que en la nueva base ortonormal $B' = \{\vec{v_1}, \vec{v'_2}, \vec{v'_3}\}$, $f'''(x''',y''',z''') = 0$ tenga $a'''_2 = 0$ ó $a'''_3 = 0.$

Sea $a = \sqrt{{a'_2}^2 + {a'_3}^2}$ y consideremos $\vec{v'_2} = \dfrac{1}{a}.(a'_3.\vec{v_2} - a'_2.\vec{v_3})$ y $\vec{v'_3} = \dfrac{1}{a}.(a'_2.\vec{v_2} + a'_3.\vec{v_3}).$

$B' = \{\vec{v_1}, \vec{v'_2}, \vec{v'_3}\}$ es una base ortonormal y permite solucionar nuestro problema.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [B']_B \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_3/a & a'_2/a \\ 0 & -a'_2/a & a'_3/a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$x' = x''$, $y' = \dfrac{a'_3}{a}\,y'' + \dfrac{a'_2}{a}\,z''$ y $z' = -\dfrac{a'_2}{a}\,y'' + \dfrac{a'_3}{a}\,z''.$

Reemplazamos en $f'(x',y',z') = 0$ y obtenemos $\lambda_1\ x''^2 + a'_1\,x'' + a\,z'' + k' = 0$, por lo que estamos en las condiciones del inciso a).

Ejemplo

Sea $f(x,y,z) = 5\,x^2 + 5\,y^2 - 10\,x\,y - 2\,x + 3\,y + z + 1 = 0.$

$$A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \det(A - x \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 5-x & -5 & 0 \\ -5 & 5-x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^2(x-10).$$

Los autovalores de T son $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

- Si $\lambda = 10$,

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies z = 0\ ,\ y = -x.$$

Por lo tanto $V_{10} = \{(x,-x,0) :\ x\ \in\ \mathbb{R}\ \}$. Elegimos $\vec{v_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$

- Si $\lambda = 0$,

  $$\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

  Obtenemos entonces, $V_0 = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Elegimos $\vec{v_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\vec{v_3} = (0, 0, 1)$.

Sea $B = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,,\, (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\,,\, (0, 0, 1) \right\}$. Luego, $[T]_B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $[L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[L]_B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $f'(x', y', z') = 10\,x'^2 - \dfrac{5}{\sqrt{2}}\,x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,y' + z' + 1 = 0$,

luego $a'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $a'_3 = 1$, lo que implica $a = \sqrt{\dfrac{1}{2} + 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Si $B' = \left\{ \vec{v_1}\,,\, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\vec{v_2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\vec{v_3}\,,\, \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\vec{v_2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\vec{v_3} \right\}$, $[B']_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Observemos que $[L]_B = \begin{pmatrix} -5/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto,

$$[L]_{B'} = [B']_B^T \cdot [L]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/\sqrt{2} \\ 0 \\ 3/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces,

$$f''(x'', y'', z'') = 10\,x''^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}\,x'' + \frac{3}{\sqrt{6}}\,z'' + 1 = 10\,\left(x''^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,x''\right) + \frac{3}{\sqrt{6}}\,z'' + 1 =$$

$$10\,\left[\left(x'' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{32}\right] + \frac{3}{\sqrt{6}}\,z'' + 1 = 10\,\left(x'' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{10}{32} + 1 + \frac{3}{\sqrt{6}}\,z'' =$$

$$10\,\left(x'' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{\sqrt{6}}\,z'' + \frac{22}{32} = 10\,\left(x'' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3}{\sqrt{6}}\,\left(z'' + \frac{22\sqrt{6}}{3 \cdot 32}\right) = 0.$$

Si $x''' = x'' - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $y''' = y''$ y $z''' = z'' + \dfrac{11}{8\sqrt{6}}$, se tiene que: $10\,x'''^2 + \dfrac{3}{\sqrt{6}}z''' = 0$, que es un cilindro parabólico.

10.5 Ejercicios

1. Hallar las ecuaciones canónicas de las circunferencias indicadas a continuación. Graficar.

   a) Con centro en $(2,3)$ y radio 3.

   b) De ecuación $x^2 + y^2 + 4\,x - 6\,y - 17 = 0$.

   c) De radio 4 y concéntrica con la de ecuación $x^2 + y^2 - 10\,x + 16 = 0$.

   d) Pasa por los puntos $A(5,0)$, $B(1,-2)$ y $C(1,0)$.

   e) Su diámetro es el segmento de la recta de ecuación $4\,x - 3\,y + 12 = 0$ situado entre los ejes coordenados.

   f) Su centro es el punto $C(1,-1)$ y la recta de ecuación $5\,x - 12\,y + 9 = 0$ es tangente a la misma.

   g) Pasa por los puntos $A(3,1)$, $B(-1,3)$ y su centro está en la recta de ecuación $3\,x - y - 2 = 0$.

2. Dada la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, hallar:

   a) Las coordenadas de sus focos.

   b) Las coordenadas de sus vértices.

   c) La longitud de sus semiejes.

   d) Los puntos de la elipse que distan 14 unidades del foco derecho.

3. Hallar el área de un cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse de ecuación $9\,x^2 + 5\,y^2 = 1$ y los restantes coinciden con los extremos de su eje menor.

4. En cada caso hallar, en el sistema (O,XY), la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones y dibujarla.

   a) Dos vértices son $A(-1,2)$, $A'(-7,2)$ y su eje menor es de longitud 2.

   b) Posee centro en el origen de coordenadas, semieje mayor sobre la recta de ecuación $2\,x - y = 0$ de longitud 10 y un vértice en $A'(2,-1)$.

   c) Dos vértices son $A'(1,-\frac{7}{2})$, $A(5,-\frac{7}{2})$ y un foco $F_1(3,-2)$.

   d) Posee focos $F_1(0,-4)$, $F_2(2,0)$ y un vértice en $A'(3,-3)$.

   e) Posee centro en $O'(3,-2)$, foco en $F_1(-1,1)$ y pasa por $P(8,-2)$.

   f) Tiene centro en el origen de coordenadas, semiejes de longitud 2 y 6 y el eje menor forma un ángulo de 60° con el eje X.

   g) Sus focos se hallan en el eje X, su centro en el origen de coordenadas, $d(F_1,F_2) = 6$ y $5\,c = 3\,a$.

5. Dada la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ hallar:

   a) La longitud de sus semiejes.

   b) Las coordenadas de sus focos y de sus vértices.

   c) Las ecuaciones de sus asíntotas.

   d) El área del triángulo determinado por las asíntotas y la recta $9\,x + 2\,y - 24 = 0$.

6. En cada caso hallar, en el sistema (O, XY), la ecuación de la hipérbola que satisface las siguientes condiciones y dibujarla.

   a) Sus vértices son $A'(4, -3)$, $A(0, -3)$ y $d(F_1, F_2) = 6$.

   b) Sus vértices son $A(1, -2)$, $A'(-1, 2)$ y uno de sus focos es $F_1(3, -6)$.

   c) Posee un foco en $F(2, -1)$ y asíntotas de ecuación $x = 0$, $3\,x - 4\,y = 0$.

   d) Sus focos son $F_1(4, -4)$, $F_2(-2, 2)$ y sus asíntotas forman un ángulo recto.

   e) Sus asíntotas se cortan perpendicularmente en el origen de coordenadas y posee un foco en $F_1(1, 3)$.

   f) Posee centro en $O'(3, -4)$, un vértice en $(\dfrac{3}{\sqrt{5}} + 3\,, \dfrac{6}{\sqrt{5}} - 4)$ y un foco en $F_1(6, 2)$.

   g) Sus focos son $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 2)$ y pasa por el punto $P(\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1\,, \dfrac{\sqrt{6}}{2} + 2)$.

7. En cada caso hallar, en el sistema (O, XY), la ecuación de la parábola que satisface las siguientes condiciones y dibujarla.

   a) Posee foco en $F(2, -1)$, pasa por $P(2, 2)$ y su eje de simetría es paralelo al eje X. ¿ Es única ?

   b) Posee el vértice en el origen de coordenadas y el foco en $F(-3, -1)$.

   c) Tiene directriz de ecuación $3\,x + 4\,y - 1 = 0$ y foco en $F(5, 9)$.

   d) Posee el vértice en $O'(-2, -2)$, pasa por el punto $P(4, -4)$ y su directriz es paralela al eje X.

   e) La ecuación de la recta directriz es $x + 2\,y + 6 = 0$ y su vértice es el origen de coordenadas.

8. Para cada una de las siguientes cónicas, hallar un sistema de coordenadas $(O', X''Y'')$ en el cual la ecuación de la cónica tenga forma canónica. Clasificarla. En a), d) y f) graficar.

   a) $3\,x^2 - 2\,x\,y + 3\,y^2 + 18\,x + 10\,y = -19.$ (elipse)

   b) $x^2 + y^2 + 4\,x\,y = 7.$ (hipérbola)

   c) $x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 0.$ (una recta)

   d) $11\,x^2 - 24\,x\,y + 4\,y^2 + 6\,x + 8\,y = -15.$ (hipérbola)

e) $3\,x^2 + 10\,x\,y + 3\,y^2 + 16\,x + 16\,y + 16 = 0.$ (rectas incidentes)

f) $16\,x^2 - 24\,x\,y + 9\,y^2 - 30\,x - 40\,y = 0.$ (parábola)

g) $x^2 + y^2 + x - 1 = 0.$ (circunferencia)

h) $4\,x^2 - 4\,x\,y + y^2 + 4\,x - 2\,y - 3 = 0.$ (par de rectas paralelas)

i) $2\,x^2 - 4\,x\,y - y^2 + 8 = 0.$ (hipérbola)

j) $16\,x^2 - 24\,x\,y + 9\,y^2 - 30\,x - 40\,y - 5 = 0.$ (parábola)

k) $7\,x^2 + 3\,y^2 + 28\,x - 42\,y + 166 = 0.$ (elipse)

9. a) Para cada una de las siguientes cuádricas, hallar un sistema de coordenadas respecto del cual la ecuación de la cuádrica tenga forma canónica. Indicar la ecuación canónica. Clasificarla.

b) En (1), (4) y (14) hallar las coordenadas de O' en el sistema (O, XYZ) de partida.

c) En (6) y (8) hallar la ecuación del eje Y en el sistema $(O', X''Y''Z'')$ en el cual la cuádrica tiene forma canónica.

d) Dada la recta $L : \begin{cases} x = -2 + 3\,\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 5\,\lambda \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ y el plano $\pi : x - 2\,y + z + 2 = 0$ en el sistema (O, XYZ) de partida, hallar las ecuaciones en el sistema $(O', X''Y''Z'')$ obtenidos en los incisos (2),(3) y (7).

1) $4\,x^2 + 36\,y^2 - 9\,z^2 - 16\,x - 216\,y + 304 = 0.$ (hiperboloide de una hoja)

2) $y^2 - 2\,z^2 = 0.$ (par de planos que se cortan)

3) $6\,x^2 + 6\,y^2 + 8\,z = 1.$ (paraboloide elíptico)

4) $2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z^2 + 2\,x\,z - 2\,x\,y - 2\,y\,z = 1.$ (elipsoide)

5) $x^2 + 4\,z^2 + 4\,x\,z + 2\sqrt{5}\,x + 4\sqrt{5}\,z = 0.$ (par de planos paralelos)

6) $-2\,y^2 + x\,z - 4\,y + 6\,z = 5.$ (hiperboloide de dos hojas)

7) $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x + 4\,y - 6\,z = 11.$ (esfera)

8) $2\,z^2 + 8\,x + 4\,y - 9 = 0.$ (cilindro parabólico)

9) $2\,x^2 - y^2 + z^2 + 2\,x + 3\,y + 4\,z - 2 = 0.$ (hiperboloide de una hoja)

10) $2\,x\,y - 6\,x + 10\,y + z - 31 = 0.$ (paraboloide hiperbólico)

11) $4\,x^2 + 9\,y^2 - z^2 - 54\,y - 50\,z = 544.$ (cono elíptico)

12) $5\,x^2 + 5\,y^2 - 10\,x\,y - 2\,x + 3\,y + z + 1 = 0.$ (cilindro parabólico)

13) $2\,x^2 + 2\,y^2 + 5\,z^2 - 4\,x\,y - 2\,x\,z + 2\,y\,z + 10\,x - 26\,y - 2\,z = 0.$ (paraboloide elíptico)

14) $x^2 + y^2 + 2\,z^2 + 6\,x\,y + 4\,x\,z + 4\,y\,z - 2 = 0.$ (cilindro hiperbólico)

15) $3\,x^2 + 2\,z^2 = 0.$ (recta)

16) $x^2 = 9.$ (par de planos paralelos)

17) $4\,x^2 + 4\,y^2 + 5\,z^2 - 4\,x\,z - 8\,y\,z - 36 = 0$. (cilindro elíptico)

10. Dada la cuádrica $2\,x^2 - 10\,x\,y - 8\,x\,z - 7\,y^2 - 10\,y\,z + 2\,z^2 + 6\,x + 12\,y - 6\,z + 5 + \lambda = 0$, calcular su ecuación canónica y clasificarla en función del parámetro λ.

11 Apéndice

11.1 Rango de una matriz

Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, una matriz de m filas y n columnas. Elijamos k filas y k columnas de A, digamos las filas i_1, i_2, ..., i_k, con $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, y las columnas j_1, j_2, ..., j_k, con $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $k \leq m$, $k \leq n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_11} & \cdots & a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} & \cdots & a_{i_1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k1} & \cdots & a_{i_kj_1} & \cdots & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} & \cdots & a_{i_kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_k} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sea $B = (b_{ij})$ la matriz $k \times k$ definida por $b_{rs} = a_{i_rj_s}$, es decir, los elementos de la matriz B son los elementos *intersección* de las k filas y k columnas de A elegidas.

Se llama **menor** de A de orden k al de cualquier matriz B de orden $k \times k$ elegida de la manera indicada. En general, una **submatriz** de una matriz A es una matriz (no necesariamente cuadrada) construída tomando la intersección de ciertas filas y columnas de A. En consecuencia, un menor de A de orden k es el determinante de una submatriz $k \times k$ de A.

Definición 11.1.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $n \times m$. El* **rango** *(o* **característica***) de A, que notaremos $\operatorname{Rg} A$ está definido como sigue. Si A es la matriz nula, $\operatorname{Rg} A = 0$. Caso contrario, $\operatorname{Rg} A$ es el número entero k, definido por la siguiente condición: existe un menor de A de orden k no nulo, y todo menor de A de orden mayor que k es nulo. La matriz de un tal menor de orden k se llama* **submatriz principal***. También el* **menor** *se llama* **principal***.*

Ejemplos

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad ; \qquad \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad ; \qquad \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Observación

Si en la matriz A hay un menor de orden k no nulo y todos los menores de orden $k+1$ son nulos, entonces $\operatorname{Rg} A = k$. En efecto, cualquier menor de orden $k+2$ será también cero (desarrollarlo por los elementos de una fila o columna). De la misma manera, los menores de orden $k+3$, $k+4$, ... son nulos.

Sea A una matriz de orden $m \times n$. Si indicamos con $C_1, C_2, \ldots, C_n$ las columnas de

A, diremos que la columna C_i es combinación lineal de las columnas C_j y C_k, con $1 \le j,k \le m$, si existen números α, β tales que $C_i = \alpha \cdot C_j + \beta \cdot C_k$. En forma análoga se define una combinación lineal de un número cualquiera de columnas, y una combinación lineal de dos o más filas.

Lema 11.1.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n. Si $\operatorname{Rg} A = n-1$ entonces una columna (fila) de A es combinación lineal de las columnas (filas) de un menor principal cualquiera de A.*

Dem. Vamos a suponer sin pérdida de generalidad que

$$\alpha = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por hipótesis, $\det A = 0$, luego

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}A_{n1} & + & a_{12}A_{n2} & + & \cdots & + & a_{1n}A_{nn} & = & 0 & & \\ a_{21}A_{n1} & + & a_{22}A_{n2} & + & \cdots & + & a_{2n}A_{nn} & = & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1}A_{n1} & + & a_{n2}A_{n2} & + & \cdots & + & a_{nn}A_{nn} & = & \det A & = & 0 \end{array}$$

Luego, como $A_{nn} = \alpha \neq 0$, resulta

$$\begin{aligned} a_{1n} &= -\frac{A_{n1}}{\alpha}a_{11} - \frac{A_{n2}}{\alpha}a_{12} - \cdots - \frac{A_{n,n-1}}{\alpha}a_{1,n-1} \\ a_{2n} &= -\frac{A_{n1}}{\alpha}a_{21} - \frac{A_{n2}}{\alpha}a_{22} - \cdots - \frac{A_{n,n-1}}{\alpha}a_{2,n-1} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{nn} &= -\frac{A_{n1}}{\alpha}a_{n1} - \frac{A_{n2}}{\alpha}a_{n2} - \cdots - \frac{A_{n,n-1}}{\alpha}a_{n,n-1} \end{aligned}$$

Es decir,

$$C_n = -\frac{A_{n1}}{\alpha}C_1 - \frac{A_{n2}}{\alpha}C_2 - \cdots - \frac{A_{n,n-1}}{\alpha}C_{n-1}.$$

Una demostración similar vale para filas en lugar de columnas. □

Proposición 11.1.1 *Todas las filas (columnas) de una matriz son combinación lineal de las filas (columnas) de un menor principal.*

Dem. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las primeras k filas y las primeras k columnas de la matriz $m \times n$ $A = (a_{ij})$ forman una matriz $M = (m_{ij})$ cuyo determinante es principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{ks} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elijamos una fila, digamos r, y una columna, digamos s, de A, y formemos la siguiente matriz ampliada de M:

$$N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{ks} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} & a_{rs} \end{pmatrix}$$

Como M es una submatriz principal, se tiene que $\det M \neq 0$ y $\det N = 0$. Entonces, la columna C_s de N es combinación lineal de las columnas de M, o sea, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 \, a_{11} & + & \lambda_2 \, a_{12} & + & \cdots & + & \lambda_k \, a_{1k} & = & a_{1s} \\ \lambda_1 \, a_{21} & + & \lambda_2 \, a_{22} & + & \cdots & + & \lambda_k \, a_{2k} & = & a_{2s} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \, a_{k1} & + & \lambda_2 \, a_{k2} & + & \cdots & + & \lambda_k \, a_{kk} & = & a_{2s} \\ \lambda_1 \, a_{r1} & + & \lambda_2 \, a_{r2} & + & \cdots & + & \lambda_k \, a_{rk} & = & a_{rs} \end{array} \right.$$

Las k primeras ecuaciones de este sistema se pueden escribir $M \cdot \lambda = d_s$, donde

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \quad , \quad d_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ks} \end{pmatrix},$$

de donde $\lambda = M^{-1} \cdot d_s$.

Luego la matriz $k \times 1$ λ está determinada por d_s y no depende de r. En consecuencia, cualquier columna C_s, $1 \leq s \leq n$, de A es combinación lineal con coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de las columnas $C_2, C_2, \ldots, C_k$.

En forma análoga se prueba para las filas de A. □

Proposición 11.1.2 *Sea A una matriz y sea B la matriz obtenida de A al sumar a una fila (columna) de A una combinación lineal de las demás. Sean $i_1, i_2, \dots, i_k$ y $j_1, j_2, \dots, j_k$ filas y columnas respectivamente de una matriz principal de A. Entonces $i_1, i_2, \dots, i_k$ y $j_1, j_2, \dots, j_k$ son filas y columnas de una matriz principal de B. En particular, A y B tienen el mismo rango.*

La proposición anterior permite calcular $\operatorname{Rg} A$ utilizando operaciones elementales. En efecto, la triangulación de A se logra sumando a filas de A combinaciones lineales de otras filas de A. Luego las filas $i_1, i_2, \dots, i_k$ y columnas $j_1, j_2, \dots, j_k$ de A corresponden a una matriz principal si y sólo si lo son de una matriz principal de la matriz triangulada, en esta última se detectan de inmediato tales $i_1, i_2, \dots, i_k$ y $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la última matriz es evidentemente 3. Luego, como se ha obtenido por el proceso de triangulación, todas las anteriores, incluyendo A, tienen rango 3.

11.2 Matrices ortogonales

Definición 11.2.1 *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$. A *se dice* **ortogonal** *si* $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$.

De la definición se deduce que si A es ortogonal entonces es inversible y $A^{-1} = A^T$.

Propiedades

1) Si A es una matriz ortogonal entonces A^{-1} es ortogonal.

2) El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

3) Si A es ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

Proposición 11.2.1 *Si B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces $[B]_{\mathcal{C}}$ es una matriz ortogonal.*

Dem. Sea $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que

$$[B]_{\mathcal{C}} = (\,[\vec{b_1}]_{\mathcal{C}}\ [\vec{b_2}]_{\mathcal{C}}\ \dots\ [\vec{b_n}]_{\mathcal{C}}\,) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$[B]_{\mathcal{C}}^T \cdot [B]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{b_1}\,,\,\vec{b_1}\rangle & \langle \vec{b_1}\,,\,\vec{b_2}\rangle & \cdots & \langle \vec{b_1}\,,\,\vec{b_n}\rangle \\ \langle \vec{b_2}\,,\,\vec{b_1}\rangle & \langle \vec{b_2}\,,\,\vec{b_2}\rangle & \cdots & \langle \vec{b_2}\,,\,\vec{b_n}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{b_n}\,,\,\vec{b_1}\rangle & \langle \vec{b_n}\,,\,\vec{b_2}\rangle & \cdots & \langle \vec{b_n}\,,\,\vec{b_n}\rangle \end{pmatrix} = I_n, \text{ luego } [B]_{\mathcal{C}} \text{ es ortogonal.}$$ □

Corolario 11.2.1 *Si B y B' son bases ortonormales de $\mathbb{R}^n$ entonces $[B]_{B'}$ es ortogonal.*

Dem. $[B]_{B'} = [B']_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [B]_{\mathcal{C}} = [B']_{\mathcal{C}}^T \cdot [B]_{\mathcal{C}}$ y como $[B]_{\mathcal{C}}$ y $[B']_{\mathcal{C}}$ son ortogonales, $[B]_{B'}$ es ortogonal. □

Proposición 11.2.2 *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces A es ortogonal si y solo si las columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

Dem.

($\Rightarrow$) Sea $A = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal y $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ con $\vec{b_j} = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})$, $1 \leq j \leq n$. Entonces:

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n = \begin{pmatrix} \langle \vec{b_1}\,,\,\vec{b_1}\rangle & \langle \vec{b_1}\,,\,\vec{b_2}\rangle & \cdots & \langle \vec{b_1}\,,\,\vec{b_n}\rangle \\ \langle \vec{b_2}\,,\,\vec{b_1}\rangle & \langle \vec{b_2}\,,\,\vec{b_2}\rangle & \cdots & \langle \vec{b_2}\,,\,\vec{b_n}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{b_n}\,,\,\vec{b_1}\rangle & \langle \vec{b_n}\,,\,\vec{b_2}\rangle & \cdots & \langle \vec{b_n}\,,\,\vec{b_n}\rangle \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto}$$

$$\langle \vec{b_i}\,,\,\vec{b_j}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}; \quad 1 \leq i, j \leq n, \text{ luego } B \text{ es una base ortonormal de } \mathbb{R}^n.$$

($\Leftarrow$) Trivial de la proposición anterior, pues $A = [B]_{\mathcal{C}}$.

□

11.3 Sobre transformaciones lineales

Núcleo e Imagen de una transformación lineal

Definición 11.3.1 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Se llama* **núcleo** *de T al conjunto $Nuc\,T = \{\vec{u} \in V : T(\vec{u}) = \vec{0}\}$.*

Definición 11.3.2 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Se llama* **imagen** *de T al conjunto $Im\,T = \{\vec{v} \in W : \vec{v} = T(\vec{u}),$ con $\vec{u} \in V\}$.*

Ejemplos

1. Si $T : E_3 \longrightarrow E_3$ es la transformación lineal que consiste en una proyección ortogonal sobre un plano π que pasa por el origen, entonces $NucT = L$, donde L es la recta perpendicular a π por el origen e $ImT = \pi$.

2. Si $T : V \longrightarrow V$ es la transformación lineal identidad, $T(\vec{u}) = \vec{u}$ para todo $\vec{u} \in V$, entonces $NucT = \{\vec{0}\}$ y $ImT = V$.

3. Si $T : V \longrightarrow W$ es la transformación lineal nula, $T(\vec{u}) = \vec{0}$ para todo $\vec{u} \in V$ y entonces $NucT = V$ e $ImT = \{\vec{0}\}$.

Proposición 11.3.1 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces $NucT$ es un subespacio de V.*

Dem. Por definición $NucT$ es un subconjunto de V. Veamos que se verifican las tres condiciones para ser subespacio.

S_1) $NucT \neq \emptyset$, pues $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

S_2) Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in NucT$ entonces $T(\vec{u}) = \vec{0}$ y $T(\vec{v}) = \vec{0}$. Esto implica que $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ y por lo tanto $\vec{u} + \vec{v} \in NucT$.

S_3) Si $\vec{u} \in NucT$ entonces $T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u}) = \lambda.\vec{0} = \vec{0}$ y entonces $\lambda.\vec{u} \in NucT$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Proposición 11.3.2 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces ImT es un subespacio de W.*

Dem. Por definición ImT es un subconjunto de W.

S_1) $ImT \neq \emptyset$, ya que $T(\vec{0}) = \vec{0}$ y entonces $\vec{0} \in ImT$.

S_2) Si $\vec{v}$ y $\vec{v'} \in ImT$ entonces existen $\vec{u}$ y $\vec{u'} \in V$ tales que $T(\vec{u}) = \vec{v}$ y $T(\vec{u'}) = \vec{v'}$, luego $T(\vec{u} + \vec{u'}) = T(\vec{u}) + T(\vec{u'}) = \vec{v} + \vec{v'}$, por lo que $\vec{v} + \vec{v'} \in ImT$.

S_3) Si $\vec{v} \in ImT$ entonces existe $\vec{u} \in V$ tal que $T(\vec{u}) = \vec{v}$, luego $\lambda.\vec{u} \in V$ y $T(\lambda.\vec{u}) = \lambda.T(\vec{u}) = \lambda.\vec{v}$, por lo tanto $\lambda.\vec{v} \in ImT$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como se verifican S_1, S_2 y S_3, entonces ImT es un subespacio de W. □

Definición 11.3.3 *Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice* **inyectiva** *si para $x, x' \in A$, $x \neq x'$, se tiene que $f(x) \neq f(x')$ o lo que es equivalente $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$.*

Definición 11.3.4 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces T se denomina:*

a) **Monomorfismo**, *si T es inyectiva.*

b) **Epimorfismo**, *si T es epiyectiva.*

c) **Isomorfismo**, *si T es biyectiva.*

Núcleo de una transformación lineal inyectiva

Proposición 11.3.3 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces T es inyectiva si, y sólo si $NucT = \{\vec{0}\}$.*

Dem.

$\Rightarrow$) Si $\vec{u} \in NucT$, entonces $T(\vec{u}) = \vec{0}$ y como $T(\vec{0}) = \vec{0}$ resulta por ser T inyectiva que $\vec{u} = \vec{0}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $T(\vec{u}) = T(\vec{u'})$. Como $T(\vec{u} - \vec{u'}) = T(\vec{u}) - T(\vec{u'}) = \vec{0}$ resulta que $\vec{u} - \vec{u'} \in NucT = \{\vec{0}\}$, luego $\vec{u} - \vec{u'} = \vec{0}$, lo que implica que $\vec{u} = \vec{u'}$.

$\square$

Generadores de ImT

Proposición 11.3.4 *Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y $V = \overline{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s\}}$, entonces $ImT = \overline{\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_s)\}}$.*

Dem. Si $\vec{w} \in \overline{\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_s)\}}$ entonces $\vec{w} = \lambda_1.T(\vec{v}_1) + \lambda_2.T(\vec{v}_2) + \cdots + \lambda_s.T(\vec{v}_s) = T(\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_s.\vec{v}_s) = T(\vec{v})$, por lo tanto $\vec{w} \in ImT$.
Recíprocamente, si $\vec{w} \in ImT$ entonces $\vec{w} = T(\vec{v})$, con $\vec{v} \in V = \overline{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s\}}$, por lo tanto $\vec{w} = T(\lambda_1.\vec{v}_1 + \lambda_2.\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_s.\vec{v}_s) = \lambda_1.T(\vec{v}_1) + \lambda_2.T(\vec{v}_2) + \cdots + \lambda_s.T(\vec{v}_s)$, y por lo tanto $\vec{w} \in \overline{\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_s)\}}$. $\square$

Observación
La dimensión de la imagen de T se denomina el rango de T y es igual al número de columnas(filas) linealmente independientes de $[T]_B$.

El siguiente teorema establece una relación entre las dimensiones de la imagen y el núcleo de una transformación lineal definida en un espacio vectorial de dimensión finita y proporciona una importantísima herramienta para el estudio de las trasformaciones lineales.

Teorema 11.3.1 (Teorema de la dimensión)
Sean V y W $\mathbb{R}$-espacios vectoriales tal que $dim_{\mathbb{R}}V = n$ y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

$$dim_{\mathbb{R}}V = dim_{\mathbb{R}}NucT + dim_{\mathbb{R}}ImT$$

Dem. Si $NucT = V$, entonces T es la transformación lineal nula e $ImT = \{\vec{0}\}$ y el teorema se verifica.

Si $NucT \neq V$, sea $r = dim_{\mathbb{R}} NucT$ y probemos que $dim_{\mathbb{R}} ImT = n - r$.

Sea $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_r\}$ una base de $NucT$.

Si $r \neq 0$, por ser r vectores linealmente independientes de V, se pueden extender a una base $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$ de V.

Si $r = 0$, se elige una base cualquiera de V.

Vamos a demostrar que $\{T(\vec{b}_{r+1}), \ldots, T(\vec{b}_n)\}$ es una base de ImT, de donde resulta que $dim_{\mathbb{R}} ImT = n - r$.

1) $\{T(\vec{b}_{r+1}), \ldots, T(\vec{b}_n)\}$ es linealmente independiente.
   En efecto, supongamos que $\lambda_1.T(\vec{b}_{r+1}) + \lambda_2.T(\vec{b}_{r+2}) + \cdots + \lambda_{n-r}.T(\vec{b}_n) = \vec{0}$,
   entonces $T(\lambda_1.\vec{b}_{r+1} + \lambda_2.\vec{b}_{r+2} + \cdots + \lambda_{n-r}.\vec{b}_n) = \vec{0}$, esto implica que
   $\vec{u} = \lambda_1.\vec{b}_{r+1} + \lambda_2.\vec{b}_{r+2} + \cdots + \lambda_{n-r}.\vec{b}_n \in NucT$.
   Si $NucT = \{\vec{0}\}$ entonces $\vec{u} = \vec{0}$ y $\lambda_i = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n - r$, pues
   $\{\vec{b}_{r+1}, \vec{b}_{r+2}, \ldots, \vec{b}_n\}$ es linealmente independiente.
   Si $NucT \neq \{\vec{0}\}$, es decir, si $r \neq 0$, $\vec{u} = \alpha_1.\vec{b}_1 + \alpha_2.\vec{b}_2 + \cdots + \alpha_r.\vec{b}_r$,
   con $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. Entonces $\lambda_1.\vec{b}_{r+1} + \cdots + \lambda_{n-r}.\vec{b}_n = \alpha_1.\vec{b}_1 + \alpha_2.\vec{b}_2 + \cdots + \alpha_r.\vec{b}_r$,
   por lo tanto $(-\alpha_1).\vec{b}_1 + (-\alpha_2).\vec{b}_2 + \cdots + (-\alpha_r).\vec{b}_r + \lambda_1.\vec{b}_{r+1} + \cdots + \lambda_{n-r}.\vec{b}_n = \vec{0}$ y como
   $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$ es linealmente independiente, resulta que todos los escalares de esta combinación lineal son nulos, en particular $\lambda_i = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n - r$.

2) $ImT = \overline{\{T(\vec{b}_{r+1}), \ldots, T(\vec{b}_n)\}}$.
   Como $V = \overline{\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}}$, entonces $ImT = \overline{\{T(\vec{b}_1), \ldots, T(\vec{b}_r), T(\vec{b}_{r+1}), \ldots, T(\vec{b}_n)\}}$.
   Pero $T(\vec{b}_1) = T(\vec{b}_2) = \cdots = T(\vec{b}_r) = \vec{0}$, luego $ImT = \overline{\{T(\vec{b}_{r+1}), \ldots, T(\vec{b}_n)\}}$.
   Por lo tanto, $dim_{\mathbb{R}} ImT = n - r = dim_{\mathbb{R}} V - dim_{\mathbb{R}} NucT$ o sea
   $dim_{\mathbb{R}} V = dim_{\mathbb{R}} NucT + dim_{\mathbb{R}} ImT$ y el teorema queda demostrado.

□

Corolario 11.3.1 *Si* $T : V \longrightarrow W$ *es una transformación lineal biyectiva entonces* $dim_{\mathbb{R}} V = dim_{\mathbb{R}} W$.

Dem. T es biyectiva, entonces $NucT = \{\vec{0}\}$ e $ImT = W$, por lo tanto $dim_{\mathbb{R}} NucT = 0$ y $dim_{\mathbb{R}} ImT = dim_{\mathbb{R}} W$. Por el teorema de la dimensión $dim_{\mathbb{R}} V = dim_{\mathbb{R}} NucT + dim_{\mathbb{R}} ImT = dim_{\mathbb{R}} ImT = dim_{\mathbb{R}} W$. □

Corolario 11.3.2 *Si* $dim_{\mathbb{R}}V = dim_{\mathbb{R}}W$ *y* $T : V \longrightarrow W$ *es una transformación lineal, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) T *es inyectiva.*

b) T *es suryectiva.*

c) T *es biyectiva.*

Dem.

$a) \Rightarrow b)$ Como T es inyectiva $Nuc\,T = \{\vec{0}\}$ y $dim_{\mathbb{R}}Nuc\,T = 0$.
Por el teorema de la dimensión $dim_{\mathbb{R}}V = dim_{\mathbb{R}}Im\,T = dim_{\mathbb{R}}W$.
Como $Im\,T$ es un subespacio de W de igual dimensión,
resulta que $Im\,T = W$ y entonces T es suryectiva.

$b) \Rightarrow c)$ Como T es suryectiva $Im\,T = W$ y $dim_{\mathbb{R}}Im\,T = dim_{\mathbb{R}}W$. Falta ver que es inyectiva.
$dim_{\mathbb{R}}W = dim_{\mathbb{R}}V = dim_{\mathbb{R}}Nuc\,T + dim_{\mathbb{R}}Im\,T = dim_{\mathbb{R}}Nuc\,T + dim_{\mathbb{R}}W$, de donde resulta $dim_{\mathbb{R}}Nuc\,T = 0$ y entonces $Nuc\,T = \{\vec{0}\}$, por lo tanto T es inyectiva.

$c) \Rightarrow a)$ Trivial.

□

Ejemplos

1. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente manera:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - 2\,x_4\,,\; x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 - 3\,x_4\,,\; x_1 + x_2 - 2\,x_3 - x_4).$$

$Nuc\,T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0)\}$.

Resolvemos el sistema homógeneo

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2\,x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right. \text{ y obtenemos } \left\{\begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ -2\,x_2 + 3\,x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Luego, $Nuc\,T = \{(-3\,x_2 + 5\,x_3\,,\; x_2\,,\; x_3\,,\; -2\,x_2 + 3\,x_3) : \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Una base de $Nuc\,T$ es $B = \{(-3, 1, 0, -2), (5, 0, 1, 3)\}$. Como $dim_{\mathbb{R}}Nuc\,T = 2$ resulta que $dim_{\mathbb{R}}Im\,T = 2$.

Para hallar una base de $Im\,T$ basta con extender la base de $Nuc\,T$ a una base de $\mathbb{R}^4$ y calcular los transformados de los vectores que se agregan.

Así, $\{(-3, 1, 0, -2), (5, 0, 1, 3), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ y los vectores $T(0, 0, 1, 0)$ y $T(0, 0, 0, 1)$ forman una base de $Im\,T$.

Entonces $B' = \{(1, 4, -2), (-2, -3, -1)\}$ es una base de $Im\,T$.

2. Definamos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, para n adecuado, de modo tal que T sea un epimorfismo y $NucT = \overline{\{(1,0,-1,0),(2,1,1,-1)\}}$.

   Como $dim_{\mathbb{R}} NucT = 2$, entonces $dim_{\mathbb{R}} ImT = 2$ y debemos tomar $n = 2$.

   Extendemos la base de $NucT$ a una base B de $\mathbb{R}^4$.

   Sea $B = \{(1,0,-1,0),(2,1,1,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$.

   Definamos $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned} T(1,0,-1,0) &= (0,0) & \qquad T(2,1,1,-1) &= (0,0) \\ T(1,0,0,0) &= (1,0) & \qquad T(0,1,0,0) &= (0,1) \end{aligned}$$

   Los transformados de $(1,0,0,0)$ y $(0,1,0,0)$ deben ser linealmente independientes pues forman una base de ImT.
   Queda a cargo del alumno hallar la expresión general de la transformación lineal definida.

   Observemos que si T no es epimorfismo, se puede tomar $n \geq 2$ y elegir otra base de $\mathbb{R}^4$.
   Por otra parte, los transformados de los vectores de la base pueden definirse de muchas maneras, siempre que se respeten las condiciones del ejercicio.

Transformaciones lineales ortogonales

Definición 11.3.5 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ se dice* **ortogonal** *si $\|\vec{v}\| = \|T(\vec{v})\|$, para todo $\vec{v} \in V$, o lo que es equivalente, $\langle T(\vec{v}), T(\vec{v})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$ para todo $\vec{v} \in V$.*

Ejemplos

1. Si $T : E_2 \longrightarrow E_2$ es la rotación alrededor del origen en un ángulo α, entonces T es ortogonal.

2. Si $T : E_3 \longrightarrow E_3$ es la rotación en un ángulo α alrededor de una recta que pasa por el origen, entonces T es ortogonal.

3. Si $T : E_3 \longrightarrow E_3$ es la proyección sobre un plano que pasa por el origen, entonces T no es ortogonal.

Proposición 11.3.5 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno. Si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal ortogonal se verifican las siguientes propiedades:*

a) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|T(\vec{u}) - T(\vec{v})\|$, *para todo* $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

b) $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle$, *para todo* $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

c) Si $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$ *entonces* $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = 0$.

d) $\acute{a}ng(\vec{u}, \vec{v}) = \acute{a}ng(T(\vec{u}), T(\vec{v}))$, *para todo* $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Dem.

a) $\|T(\vec{u}) - T(\vec{v})\| = \|T(\vec{u} - \vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

b) $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|T(\vec{u}+\vec{v})\|^2 = \|T(\vec{u})+T(\vec{v})\|^2 = \langle T(\vec{u})+T(\vec{v}), T(\vec{u})+T(\vec{v})\rangle =$
$\|T(\vec{u})\|^2 + 2\,\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle + \|T(\vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle + \|\vec{v}\|^2$.
Por otro lado $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$ de donde resulta $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle$.

c) Resulta trivialmente de b).

d) Resulta de la igualdad $\dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \dfrac{\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle}{\|T(\vec{u})\|\|T(\vec{v})\|}$.

□

Proposición 11.3.6 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Si con $T(B)$ notamos al conjunto de los transformados de los vectores de una base B, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) T es ortogonal.

b) $T(B)$ es una base ortonormal de V, para toda base ortonormal B de V.

c) $T(B)$ es una base ortonormal de V, para alguna base ortonormal B de V.

Dem.

a) $\Rightarrow$ *b)* Si $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ es una base ortonormal, como T es ortogonal, entonces por la proposición 11.3.5 b) $\langle T(\vec{b_i}), T(\vec{b_j})\rangle = \langle \vec{b_i}, \vec{b_j}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
Luego $T(B) = \{T(\vec{b_1}), T(\vec{b_2}), \ldots, T(\vec{b_n})\}$ es una base ortonormal de V.

b) $\Rightarrow$ *c)* Trivial.

c) $\Rightarrow$ *a)* Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ una base ortonormal de V tal que $\{T(\vec{b_1}), T(\vec{b_2}), \ldots, T(\vec{b_n})\}$ es ortonormal y supongamos que $\vec{v} = \lambda_1.\vec{b}_1 + \lambda_2.\vec{b}_2 + \cdots + \lambda_n.\vec{b}_n$.
Entonces $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2$. Además $T(\vec{v}) = T(\lambda_1.\vec{b}_1 + \lambda_2.\vec{b}_2 + \cdots + \lambda_n.\vec{b}_n) =$
$\lambda_1.T(\vec{b}_1) + \lambda_2.T(\vec{b}_2) + \cdots + \lambda_n.T(\vec{b}_n)$ lo que implica que $\langle T(\vec{v}), T(\vec{v})\rangle = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2$,
de donde concluimos que $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{v})\rangle$.

□

Las propiedades anteriores muestran que si T es una tranformación lineal ortogonal entonces T conserva distancias, ángulos y productos escalares entre vectores y además transforma vectores ortogonales en vectores ortogonales.

Teorema 11.3.2 *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) T es ortogonal.

b) $[T]_B$ es ortogonal, para toda base ortonormal B de V.

c) $[T]_B$ es ortogonal, para alguna base ortonormal B de V.

Dem.

a) $\Rightarrow$ *b)* Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ una base ortonormal de V. Como T es ortogonal, por la proposición 11.3.6, los vectores columnas de $[T]_B$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ lo que implica que $[T]_B$ es ortogonal.

b) $\Rightarrow$ *c)* Trivial.

c) $\Rightarrow$ *a)* Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ una base ortonormal de V tal que $[T]_B$ es ortogonal.
Por la proposición 11.3.6, como $\{T(\vec{b}_1), T(\vec{b}_2), \ldots, T(\vec{b}_n)\}$ es una base ortonormal de V, T es ortogonal.

$\square$

Ejemplo

Sean $\pi : x - y + z = 0$ y $L : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$

Queremos determinar si la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que es la simetría con respecto a π, paralelamente a L, es una tansformación lineal ortogonal.

Por el teorema 11.3.2, debemos hallar la matriz de T con respecto a una base ortonormal, por ejemplo la base canónica, y ver si dicha matriz es ortogonal.

Observemos que con respecto a la base $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$,

$[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es una matriz ortogonal, pero como B no es una base ortonormal,

para ver si la transformación lineal es ortogonal, debemos calcular $[T]_{\mathcal{C}}$.

$$[T]_{\mathcal{C}} = [B]_{\mathcal{C}} \cdot [T]_B \cdot [B]_{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto T no es ortogonal.

El espacio vectorial de las transformaciones lineales

Si V y V' son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, indicaremos con $\mathcal{L}(V,V')$ al conjunto formado por todas las transformaciones lineales de V en V'.

Proposición 11.3.7 $\mathcal{L}(V,V')$ *es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si se definen:*

1) *La suma $T+T'$ de dos transformaciones lineales $T:V\longrightarrow V'$ y $T':V\longrightarrow V'$ de la siguiente forma: $T+T':V\longrightarrow V'$; $(T+T')(\vec{u})=T(\vec{u})+T'(\vec{u})$, para todo $\vec{u}\in V$.*

2) *El producto de un escalar λ por una transformación lineal $T:V\longrightarrow V'$ como sigue: $\lambda.T:V\longrightarrow V'$; $(\lambda.T)(\vec{u})=\lambda.T(\vec{u})$, para todo $\vec{u}\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$.*

Dem. Ejercicio. Probar que si T y T' están en $\mathcal{L}(V,V')$ también lo están $T+T'$ y $\lambda.T$, $\lambda\in\mathbb{R}$ y verificar los axiomas de espacios vectoriales.

El vector nulo de $\mathcal{L}(V,V')$ es la transformación lineal $\mathrm{O}:V\longrightarrow V'$ definida por $\mathrm{O}(\vec{u})=\vec{0}$, para todo $\vec{u}\in V$, ya que se verifica que $(T+\mathrm{O})(\vec{u})=T(\vec{u})+\mathrm{O}(\vec{u})=T(\vec{u})+\vec{0}=T(\vec{u})$, esto es $T+\mathrm{O}=T$, para cualquier $T\in\mathcal{L}(V,V')$. □

Ejemplo
Si T y T' son las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definidas por:

$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3\,,\,2\,x_1+x_3)$, $T'(x_1,x_2,x_3)=(2\,x_1+3\,x_2-x_3\,,\,x_1+2\,x_3)$
entonces,

$$\begin{aligned}(T+T')(x_1,x_2,x_3)&=(3\,x_1+4\,x_2-2\,x_3\,,\,3\,x_1+3\,x_3)\\(5.T)(x_1,x_2,x_3)&=(5\,x_1+5\,x_2-5\,x_3\,,\,10\,x_1+5\,x_3)\end{aligned}$$

Proposición 11.3.8 *Sean V y V' $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita, $T:V\longrightarrow V'$ y $T':V\longrightarrow V'$ transformaciones lineales. Si B y B' son bases ordenadas de V y V' respectivamente, entonces:*

a) $[T+T']_{BB'}=[T]_{BB'}+[T']_{BB'}$.

b) $[\lambda.T]_{BB'}=\lambda.[T]_{BB'}$; $\lambda\in\mathbb{R}$.

Dem. A cargo del lector entusiasta. □

Ejemplo
Sean T y T' las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ tales que,

$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_1)$ y $T'(x_1,x_2,x_3)=(x_3,-x_2)$.

Consideremos las bases: $B=\{(1,0,1),(0,-1,0),(2,0,0)\}$ y $B'=\{(1,-1),(0,1)\}$.
Entonces:

a) $[T+T']_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

En efecto: $T(\vec{b_1}) = T(1,0,1) = (1,1) = 1.(1,-1) + 2.(0,1) = 1.\vec{b'_1} + 2.\vec{b'_2}$.

$T(\vec{b_2}) = T(0,-1,0) = (-1,0) = -1.(1,-1) - 1.(0,1) = -1.\vec{b'_1} - 1.\vec{b'_2}$.

$T(\vec{b_3}) = T(2,0,0) = (2,2) = 2.(1,-1) + 4.(0,1) = 2.\vec{b'_1} + 4.\vec{b'_2}$.

Luego: $[T]_{BB'} = ([T(\vec{b_1})]_{B'}\ [T(\vec{b_2})]_{B'}\ [T(\vec{b_3})]_{B'}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Análogamente, $T'(\vec{b_1}) = T'(1,0,1) = (1,0) = 1.\vec{b'_1} + 1.\vec{b'_2}$.

$T'(\vec{b_2}) = T'(0,-1,0) = (0,1) = 0.\vec{b'_1} + 1.\vec{b'_2}$.

$T'(\vec{b_3}) = T'(2,0,0) = (0,0) = 0.\vec{b'_1} + 0.\vec{b'_2}$.

Por lo tanto, $[T']_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resulta entonces, $[T+T']_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $[3.T]_{BB'} = 3.[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$.

Composición de transformaciones lineales

Proposición 11.3.9 *Sean V, V' y V'' $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $T : V \longrightarrow V'$ y $T' : V' \longrightarrow V''$ transformaciones lineales. La composición $T' \circ T : V \longrightarrow V''$, definida de la siguiente manera: $(T' \circ T)(\vec{u}) = T'(T(\vec{u}))$, para todo $\vec{u} \in V$, es una transformación lineal.*

Dem. Si $\vec{u},\ \vec{v} \in V$, entonces $(T' \circ T)(\vec{u}+\vec{v}) = T'(T(\vec{u}+\vec{v})) = T'(T(\vec{u}) + T(\vec{v})) = T'(T(\vec{u})) + T'(T(\vec{v})) = (T' \circ T)(\vec{u}) + (T' \circ T)(\vec{v})$.

$(T' \circ T)(\lambda.\vec{u}) = T'(T(\lambda.\vec{u})) = T'(\lambda.T(\vec{u})) = \lambda.T'(T(\vec{u})) = \lambda.(T' \circ T)(\vec{u});\ \lambda \in \mathbb{R}$. □

Ejemplo

Sean $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $T' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4\,,\ x_1 + x_2)\ \ ,\ \ T'(x_1, x_2) = (x_1 - x_2\,,\ x_1 + x_2\,,\ x_2)$$

Entonces:

$(T' \circ T)(x_1, x_2, x_3, x_4) = T'(x_1 - x_2 + x_3 - x_4\,,\ x_1 + x_2) = (-2\,x_2 + x_3 - x_4\,,\ 2\,x_1 + x_3 - x_4\,,\ x_1 + x_2)$.

Proposición 11.3.10 *Sean V, V' y V'' $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, B, B' y B'' bases ordenadas de V, V' y V'', respectivamente. Si $T : V \longrightarrow V'$ y $T' : V' \longrightarrow V''$ son transformaciones lineales se tiene que: $[T' \circ T]_{BB''} = [T']_{B'B''} \cdot [T]_{BB'}$.*

Dem. $([T']_{B'B''} \cdot [T]_{BB'}) \cdot [\vec{v}]_B = [T']_{B'B''} \cdot ([T]_{BB'} \cdot [\vec{v}]_B) = [T']_{B'B''} \cdot [T(\vec{v})]_{B'} = [T'(T(\vec{v}))]_{B''} = [(T' \circ T)(\vec{v})]_{B''} = [T' \circ T]_{BB''} \cdot [\vec{v}]_B$, para todo $\vec{v} \in V$. □

Ejemplo

Sean $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $T' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por:

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4\ ,\ x_1 + x_2)\ ,\ T'(x_1, x_2) = (x_1 - x_2\ ,\ x_1 + x_2\ ,\ x_2)$.

Considerando las bases canónicas $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, las matrices asociadas son:

$[T]_{\mathcal{C}_4\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $[T']_{\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$[T' \circ T]_{\mathcal{C}_4\mathcal{C}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto

$(T' \circ T)(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2\,x_2 + x_3 - x_4\ ,\ 2\,x_1 + x_3 - x_4\ ,\ x_1 + x_2)$.

Transformaciones lineales inversibles

Definición 11.3.6 *Sean V y V' $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V'$ una función. T se dice* **inversible** *si existe una aplicación $T' : V' \longrightarrow V$ tal que $T \circ T' = id_{V'}$ y $T' \circ T = id_V$.*

Si T' existe, es única y se denomina **inversa** de T. La notaremos $T' = T^{-1}$.

Proposición 11.3.11 *Sean V y V' $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V'$ una transformación lineal inversible, entonces T^{-1} es una transformación lineal y si B y B' son bases ordenadas de V y V' respectivamente, entonces $[T^{-1}]_{B'B} = [T]^{-1}_{BB'}$.*

Dem.

T_1) Sean $\vec{u'}$ y $\vec{v'} \in V'$. Como T es una biyección $\vec{u'} = T(\vec{u})$ y $\vec{v'} = T(\vec{v})$, lo que implica que $\vec{u} = T^{-1}(\vec{u'})$ y $\vec{v} = T^{-1}(\vec{v'})$. Por lo tanto, $\vec{u'} + \vec{v'} = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{u} + \vec{v})$ de donde $\vec{u} + \vec{v} = T^{-1}(\vec{u'} + \vec{v'})$. Luego $T^{-1}(\vec{u'}) + T^{-1}(\vec{v'}) = T^{-1}(\vec{u'} + \vec{v'})$.

T_2) Sea $\vec{u'} \in V'$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\lambda.\vec{u'} = \lambda.T(\vec{u}) = T(\lambda.\vec{u})$, de donde resulta que $T^{-1}(\lambda.\vec{u'}) = \lambda.\vec{u} = \lambda.T^{-1}(\vec{u'})$.

De T_1) y T_2) resulta que T^{-1} es transformación lineal. □

De la proposición 11.3.10, considerando $V'' = V$, $B'' = B$ y $T' = T^{-1}$ se deduce que $[T^{-1}]_{B'B} = [T]^{-1}_{BB'}$.

Observaciones

1. T es inversible si, y sólo si T es biyectiva.

2. Si $T : V \longrightarrow V'$ es inversible, entonces $dim_{\mathbb{R}}V = dim_{\mathbb{R}}V'$.

3. T es inversible si, y sólo si $\det([T]_{BB'}) \neq 0$.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\det A \neq 0$, entonces T es inversible. $[T^{-1}]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto $T^{-1}(x, y, z) = (\dfrac{x - 2\,y}{3}\,,\, \dfrac{x + y}{3}\,,\, z)$.

11.4 Sobre transformaciones lineales simétricas

Proposición 11.4.1 *Si* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una transformación lineal simétrica entonces* $\langle T(\vec{u})\,,\, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}\,,\, T(\vec{v})\rangle$, *para todo* $\vec{u}\,,\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Dem. Basta probar el resultado para los vectores de una base ortonormal $B = \{\vec{b_1}\,,\, \vec{b_2}\,,\, \vec{b_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$.
Sea $[T]_B = (a_{ij})$. Si $h \in \{1\,,\, 2\,,\, 3\}$ entonces $(\vec{b_h})_B = (\alpha_1\,,\, \alpha_2\,,\, \alpha_3)$ con $\alpha_h = 1$ y $\alpha_k = 0$, para todo $k \neq h$.

$$[T(\vec{b_i})]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto } \langle T(\vec{b_i})\,,\, \vec{b_j}\rangle = a_{ji}.$$

Análogamente $\langle \vec{b_i}\,,\, T(\vec{b_j})\rangle = a_{ij}$. Como T es una transformación lineal simétrica y B es una base ortonormal entonces $[T]_B$ es simétrica, es decir $a_{ij} = a_{ji}$ y entonces $\langle T(\vec{b_i})\,,\, \vec{b_j}\rangle = \langle \vec{b_i}\,,\, T(\vec{b_j})\rangle$. □

Proposición 11.4.2 *Si* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una transformación lineal simétrica entonces autovectores correspondientes a autovalores distintos son perpendiculares.*

Dem. Si $\lambda_1\,,\, \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, son autovalores de T con autovectores asociados $\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$, respectivamente, entonces $T(\vec{b_1}) = \lambda_1.\vec{b_1}$ y $T(\vec{b_2}) = \lambda_2.\vec{b_2}$.

Como T es una transformación lineal simétrica entonces $\langle T(\vec{b_1})\,,\, \vec{b_2}\rangle = \langle \vec{b_1}\,,\, T(\vec{b_2})\rangle$, lo que implica $\langle \lambda_1.\vec{b_1}\,,\, \vec{b_2}\rangle = \langle \vec{b_1}\,,\, \lambda_2.\vec{b_2}\rangle$, por lo tanto $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \vec{b_1}\,,\, \vec{b_2}\rangle = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\langle \vec{b_1}\,,\, \vec{b_2}\rangle = 0$ luego $\vec{b_1}$ es perpendicular a $\vec{b_2}$ pues $\vec{b_1} \neq \vec{0}$ y $\vec{b_2} \neq \vec{0}$. □

Proposición 11.4.3 *Si* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una transformación lineal simétrica, entonces todas las raíces del polinomio característico son reales.*

Dem. Sea $A = [T]_{\mathcal{C}}$. Como $\det(A - x \cdot I_3)$ es un polinomio de grado 3 con ceficientes reales, admite por lo menos una raíz real λ_1. Sea $\vec{b_1}$ un autovector unitario asociado a λ_1, es decir $T(\vec{b_1}) = \lambda_1.\vec{b_1}$. Consideremos $\vec{b_2}$ perpendicular a $\vec{b_1}$ tal que $\|\vec{b_2}\| = 1$ y $\vec{b_3} = \vec{b_1} \wedge \vec{b_2}$.

Entonces que $B = \{\vec{b_1}\,,\, \vec{b_2}\,,\, \vec{b_3}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Como $[T(\vec{b_1})]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[T(\vec{b_2})]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $[T(\vec{b_3})]_B = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, entonces

$$A' = [T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{pmatrix}$$

Como B es una base ortonormal y T es una transformación lineal simétrica $A' = A'^{\,t}$, de donde $a = d = 0$ y $e = c$. Luego,

$$A' = [T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & f \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $\det(A - x \cdot I_3) = \det(A' - x \cdot I_3)$ resulta

$$\det(A - x \cdot I_3) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - x & 0 & 0 \\ 0 & b - x & c \\ 0 & c & f - x \end{vmatrix} = (\lambda_1 - x)[x^2 - (b + f)x + bf - c^2].$$

$(b+f)^2 - 4(bf - c^2) = (b - f)^2 + 4c^2 \geq 0$ por lo tanto $x^2 - (b+f)x + bf - c^2$ tiene sus raíces reales y como $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\det(A - x \cdot I_3)$ tiene todas sus raíces reales. $\square$

Los resultados anteriores permiten caracterizar a las transformaciones lineales simétricas a partir de los dos teoremas siguientes:

Teorema 11.4.1 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Si existe una base ortonormal B tal que $[T]_B$ es diagonal entonces T es una transformación lineal simétrica. Además B está formada por autovectores de T y los elementos de la diagonal principal de $[T]_B$ son los correspondientes autovalores.*

Dem. Como $A = [T]_B$ es una matriz diagonal entonces $A = A^T$ y como B es una base ortonormal, T es una transformación lineal simétrica.

Sea $B = \{\vec{b_1}\,,\, \vec{b_2}\,,\, \vec{b_3}\}$ y $[T]_B = ([T(\vec{b_1})]_B\ [T(\vec{b_2})]_B\ [T(\vec{b_3})]_B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, por lo tanto

$T(\vec{b_1}) = \lambda_1.\vec{b_1}$, $T(\vec{b_2}) = \lambda_2.\vec{b_2}$ y $T(\vec{b_3}) = \lambda_3.\vec{b_3}$, con $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ y $\vec{b_3}$ vectores no nulos, lo que implica que $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ y $\vec{b_3}$ son autovectores asociados a λ_1 , λ_2 y λ_3, respectivamente. $\square$

Teorema 11.4.2 *Si* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *es una transformación lineal simétrica entonces existe una base ortonormal* B *tal que* $[T]_B$ *es diagonal.*

Dem. Sea $A = [T]_{\mathcal{C}}$. Como T es una transformación lineal simétrica, posee sus autovalores λ_1, λ_2 y λ_3. Se presentan los siguientes casos:

a) $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1}$

Sean $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ y $\vec{b_3}$ autovectores de módulo 1, asociados a λ_1, λ_2 y λ_3, respectivamente. Como T es transformación lineal simétrica, estos vectores son perpendiculares dos a dos es decir, $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Por otra parte, $T(\vec{b_1}) = \lambda_1.\vec{b_1}$, $T(\vec{b_2}) = \lambda_2.\vec{b_2}$ y $T(\vec{b_3}) = \lambda_3.\vec{b_3}$, de donde,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

b) $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3}$

Sean $\vec{b_1}$ y $\vec{b_2}$ autovectores de módulo 1, asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y T es una transformación lineal simétrica $\vec{b_1}$ es perpendicular a $\vec{b_2}$.

Sea $\vec{b_3} = \vec{b_1} \wedge \vec{b_2}$. Observemos que $\|\vec{b_3}\| = 1$, es decir, $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y si $T(\vec{b_3}) = a.\vec{b_1} + b.\vec{b_2} + c.\vec{b_3}$

$$A' = [T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Como B es una base ortonormal y T es una transformación lineal simétrica, entonces $A' = [T]_B$ es una matriz simétrica, lo que implica $a = b = 0$ y por lo tanto

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Sabemos que,

$$\det(A - x \cdot I_3) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(\lambda_2 - x) = \det(A' - x \cdot I_3) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(c - x),$$

entonces $c = \lambda_2$ y $T(\vec{b_3}) = \lambda_2.\vec{b_3}$. Luego $\vec{b_3}$ es un autovector asociado a λ_2 y

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

c) $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3}$

Sea $\vec{b_1}$ un autovector de módulo 1 asociado a λ_1. Consideremos $\vec{b_2}$ perpendicular a $\vec{b_1}$ tal que $\|\vec{b_2}\| = 1$ y $\vec{b_3} = \vec{b_1} \wedge \vec{b_2}$. Así, $B = \{\vec{b_1}\,,\, \vec{b_2}\,,\, \vec{b_3}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y $[T(\vec{b_1})]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sean $[T(\vec{b_2})]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $[T(\vec{b_3})]_B = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, entonces

$$A' = [T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{pmatrix}$$

Como B es una base ortonormal y T es una transformación lineal simétrica, entonces $A' = [T]_B$ es simétrica, lo que implica $a = d = 0$, $c = e$ y

$$A' = [T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & f \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que, $\det(A' - x \cdot I_3) = \det(A - x \cdot I_3)$, resulta

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - x & 0 & 0 \\ 0 & b - x & c \\ 0 & c & f - x \end{vmatrix} = (\lambda_1 - x)[x^2 - (b+f)x + bf - c^2] = (\lambda_1 - x)^3.$$

Luego, λ_1 es raíz doble de $x^2 - (b+f)x + b\,f - c^2$ por lo tanto,
$(b+f)^2 - 4(bf - c^2) = (b-f)^2 + 4c^2 = 0$, lo que implica $(b-f)^2 = 0$ y $4c^2 = 0$, es decir, $b = f$ y $c = 0$. Tenemos entonces que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

y por consiguiente los autovalores de T son $\lambda_1\,,\, b\,,\, b$, de donde obtenemos que $b = \lambda_1$ y

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot I_3$$

$\square$

BIBLIOGRAFÍA

1. Anton, Howard., *Introducción al álgebra lineal*, Limusa,1986.
2. Efimov, N., *Curso breve de geometría analítica,* Editorial MIR, Moscú.
3. Florey, F.G., *Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones,* Prentice-Hall, 1979.
4. Gastaminza, M. L., *Nociones de álgebra,* Coop. de la UNS, Bahía Blanca, 1970.
5. Gentile, E., *Anillo de polinomios,* Ed. Docencia S.A., Buenos Aires, Proyecto CINAE.
6. Gentile, E., *Notas de álgebra I,* EUDEBA, 1988.
7. Golovina, L., *Álgebra lineal y algunas aplicaciones,* Editorial MIR, Moscú, 1974.
8. Hoffman, K. y Kunze, R.,*Álgebra lineal,* Prentice-Hall, 1973.
9. Kindle, J., *Teoría y problemas de geometría analítica,* Editorial Mc Graw-Hill, 1969.
10. Klétenic, D., *Problemas de geometría analítica,* Editorial Latinoamericana, 1988.
11. Kurosch, A. G., *Curso de álgebra superior,* Editorial MIR, Moscú, 1975.
12. Murdoch, D., *Geometría analítica,* Limusa, 1973.
13. Santaló, L.,*Vectores y tensores con sus aplicaciones,* EUDEBA, 1977.