PROBLEMAS RESUELTOS DE INECUACIONES

V 2.0

"El presente trabajo es el resultado de un proyecto de docencia en el cual participo hasta el día de hoy, la experiencia acumulada durante mis cursos de ciencias básicas y ayudantías de cálculo me permitieron confeccionar esta recopilación de problemas, cuyo principal objetivo es servir de apoyo a las clases teóricas de cálculo y a la vez también ser un documento de ayuda a los nuevos estudiantes de Ingeniería Civil que cursen ramos en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción.

Gustavo Dinamarca P
Estudiante ing. Civil Electrónica
Universidad de Concepción

http://www.udec.cl/~gusdinamarca

(Última Actualización: Marzo 2006)

Resuelva las siguientes inecuaciones:

$a)\ \sqrt{x^2-1} \geq |x|-3$

$b)\ \left|\frac{x+3}{x-5}\right| \leq 3$

$c)\ \sqrt{|x|-1} \geq a,\ a \neq 0$

Solución:

$a)$ En primer lugar debemos asegurarnos que la cantidad subradical sea no negativa, es decir,

$x^2-1 \geq 0$, luego

$$x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \vee x \leq -1$$

$$\therefore S_{a1} = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$$

No olvidando lo anterior, tenemos:

$$\sqrt{x^2-1} \geq |x|-3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}+3 \geq |x| \Rightarrow /(\ )^2$$

$$x^2-1+6\sqrt{x^2-1}+9 \geq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \geq -\frac{8}{6}$$

Ahora si observamos con detención la última inecuación, vemos que es verdadera para todos los valores de x admisibles o permitidos, es decir, aquellos x que están en S_{a1}.
Concluimos finalmente, que la solución de la inecuación original es :

$$S = S_{a1} = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty) \blacklozenge$$

$b)$ $\left|\frac{x+3}{x-5}\right| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \frac{x+3}{x-5} \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \frac{x+3}{x-5} \wedge \frac{x+3}{x-5} \leq 3$

$b.1)$ *Para* $-3 \leq \frac{x+3}{x-5}$:

$-3 \leq \frac{x+3}{x-5} \Rightarrow 0 \leq \frac{x+3}{x-5} + 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{x+3+3x-15}{x-5} \Rightarrow$

$\frac{4x-12}{x-5} \geq 0$

Obtengamos puntos críticos:

$4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$
$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Construyamos la tabla asociada:

	$x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$4x - 12$	$-$	0	$+$	8	$+$
$x - 5$	$-$	-2	$-$	0	$+$
$\frac{4x-12}{x-5}$	$+$	0	$-$	$indet.$	$+$

Se observa que la solución es (nos interesa que el cuociente sea positivo o cero):

$S_{b.1} = (-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$

$b.2)$ *Para* $\frac{x+3}{x-5} \leq 3$:

$\frac{x+3}{x-5} \leq 3 \Rightarrow \frac{x+3}{x-5} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+3-3x+15}{x-5} \leq 0 \Rightarrow$

$\frac{-2x+18}{x-5} \leq 0$

Puntos críticos:

$$-2x+18=0 \Rightarrow x=9$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

Tabla asociada:

	$x<5$	$x=5$	$5<x<9$	$x=9$	$x>9$
$-2x+18$	$+$	8	$+$	0	$-$
$x-5$	$-$	0	$+$	4	$+$
$\frac{-2x+18}{x-5}$	$-$	$indet.$	$+$	0	$-$

Nos interesa que el cuociente sea negativo o cero, luego

$$S_{b.2}=(-\infty\,,5)\cup[9\,,+\infty)$$

Ahora, para obtener la solución final debemos intersectar las soluciones de los casos $b.1$ y $b.2$, es decir,

$$S=S_{b.1}\cap S_{b.2}=\{(-\infty\,,3]\cup(5\,,+\infty)\}\cap\{(-\infty\,,5)\cup[9\,,+\infty)\}$$

$$=(-\infty\,,3]\cup[9\,,+\infty)\blacklozenge$$

$c)$ $\sqrt{|x|-1}\geq a,\ a\neq 0$

Como aparece una raíz cuadrada, debemos preocuparnos que la cantidad subradical sea no negativa.

$$|x|-1\geq 0 \Rightarrow |x|\geq 1 \Rightarrow x\geq 1 \ \vee\ x\leq -1$$

Así, el requerimiento inicial obligatorio es que

$$x\in S_i=(-\infty\,,-1]\cup[1\,,+\infty)$$

Observando que $1+a^2 > 1$ y $-(1+a^2) < -1$, se tiene que la solución final para el Caso 1 es:

$S_{1f} = S_i \cap S_1 =$

$\{(-\infty\,,\ -1] \cup [1\,,\ +\infty)\} \cap \{(-\infty\,,\ -(1+a^2)] \cup [1+a^2\,,\ +\infty)\} =$

$(-\infty\,,\ -(1+a^2)] \cup [1+a^2\,,\ +\infty)$

$Caso\,2:\ a<0$

En este caso se ve que $\sqrt{|x|-1}$ es siempre mayor o igual que un número negativo (a), para todos los valores permitidos de x (aquellos que están en S_i), por lo tanto, la solución final en este caso es:

$S_{2f} = S_i = (-\infty\,,\ -1] \cup [1\,,\ +\infty)$ ♦

Nota: Las soluciones S_{1f} y S_{2f} son soluciones **independientes**, eso quiere decir que no debemos intersectarlas ni unirlas. ¿Qué se hace entonces con ellas? La respuesta es nada; para este problema existen dos soluciones, una es S_{1f} y la otra es S_{2f}.

Resuelva la siguiente inecuación:

$$\left|\frac{2}{x}\right| \geq \frac{x}{5}$$

Solución:

Observemos en primer lugar que x no puede ser cero, pues en tal situación $\frac{2}{x}$ se indetermina y la inecuación carece de sentido.

Luego, podemos considerar sólo dos casos:

$$Caso\,1:\ \frac{2}{x} > 0 \ \text{ y } \ Caso\,2:\ \frac{2}{x} < 0$$

$$Caso\,1:\ \frac{2}{x} > 0 \ \Leftrightarrow x > 0$$

$$\left|\frac{2}{x}\right| = \frac{2}{x} \geq \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{2}{x} \geq \frac{x}{5} \Rightarrow 10 \geq x^2 \Rightarrow x^2 \leq 10 \Rightarrow x \leq \sqrt{10}$$

La solución en este primer caso es:

$$S_1 = (-\infty\,,\ \sqrt{10}] \ \cap \ (0\,,\ +\infty) = (0, \sqrt{10}]$$

$Caso\,2: \ \frac{2}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$$\left|\frac{2}{x}\right| = \frac{2}{-x} \geq \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{-2}{x} \geq \frac{x}{5} \Rightarrow -10 \leq x^2 \Rightarrow x^2 \geq -10$$

Esto último es claramente verdadero $(x^2 \geq -10)$, pues todo número distinto de cero elevado al cuadrado es positivo y obviamente mayor que -10. De lo anterior, concluimos que la solución es el conjunto de todos los valores admisibles en este caso, es decir, aquellos tales que $x < 0$.
Así,

$$S_2 = (-\infty, 0)$$

Finalmente, la solución del problema original es la unión de las soluciones para cada uno de los casos:

$$S = S_1 \cup S_2 = (0, \sqrt{10}] \cup (-\infty, 0) \blacklozenge$$

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x^2-1}{|x+1|} > -1$, con $x > 0$

b) $\frac{|x|}{|x^2-2x+1|} > 2$

Solución:

a)

$x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$

$$\frac{x^2-1}{|x+1|} > -1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x(x+1)}{x+1} > 0 \Rightarrow x > 0 \,(\text{pues } x+1 > 0)$$

$\therefore S = (0, +\infty)\bigstar$

b)

$$\frac{|x|}{|x^2-2x+1|} > 2 \Rightarrow \left|\frac{x}{x^2-2x+1}\right| > 2 \Rightarrow \frac{x}{x^2-2x+1} > 2 \vee \frac{x}{x^2-2x+1} < -2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2-2x+1} - 2 > 0 \vee \frac{x}{x^2-2x+1} + 2 < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x-2x^2+4x-2}{x^2-2x+1} > 0 \vee \frac{x+2x^2-4x+2}{x^2-2x+1} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-2x^2+5x-2}{x^2-2x+1} > 0 \vee \frac{2x^2-3x+2}{x^2-2x+1} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+1} < 0 \vee \frac{2x^2-3x+2}{x^2-2x+1} < 0$$

Para $i)$ $\dfrac{2x^2 \quad 5x+2}{x^2-2x+1} < 0$

Puntos críticos:

$$2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5+3}{4}=2 \\ x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

Construyamos la tabla:

	$x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
$2x-1$	$-$	0	$+$	1	$+$	3	$+$
$x-2$	$-$	$-\frac{3}{2}$	$-$	-1	$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$\frac{1}{4}$	$+$	0	$+$	1	$+$
$\frac{(2x-1)(x-2)}{(x-1)^2}$	$+$	0	$-$	$indet.$	$-$	0	$+$

$\therefore\ S_i=(\frac{1}{2},1)\cup(1,2)$

Para $ii)$ $\dfrac{2x^2 \quad 3x+2}{x^2 \quad 2x+1} < 0$

$$2x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{4}\notin\mathbb{R}$$

Observamos que $2x^2-3x+2>0$, para cada $x\in\mathbb{R}$

Luego : $\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2-2x+1}=\dfrac{2x^2-3x+2}{(x-1)^2}$ jamás es negativo para $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\therefore\ S_{ii}=\emptyset$

Finalmente, $S=S_i\cup S_{ii}=(\frac{1}{2},1)\cup(1,2)\cup\emptyset=(\frac{1}{2},1)\cup(1,2)$ ★

Resuelva las siguientes inecuaciones:

$a)\ -2x-1>-2$

$b)\ -5<ax-b\leq 1$, donde $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$

$c)\ \dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}}>2$

Solución:

$a)\ -2x-1>-2$

$$-2x-1>-2 \Rightarrow -2x>-2+1 \Rightarrow -2x>-1 \Rightarrow 2x<1 \Rightarrow x<\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\ S=(-\infty,\tfrac{1}{2})\bigstar$$

$b)\ -5<ax-b\leq 1$, donde $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$

$$-5<ax-b\leq 1 \Leftrightarrow \begin{array}{l} b.1)\ -5<ax-b \\ \qquad\wedge \\ b.2)\ ax-b\leq 1 \end{array}$$

Para $b.1)$

$$-5 < ax - b \Rightarrow -5 + b < ax \Rightarrow \frac{-5+b}{a} < x \quad \text{(pues } a > 0) \Rightarrow x > \frac{-5+b}{a}$$

$$\therefore S_{b.1} = \left(\frac{-5+b}{a}, +\infty\right)$$

Para $b.2)$

$$ax - b \leq 1 \Rightarrow ax \leq 1 + b \Rightarrow x \leq \frac{1+b}{a}$$

$$\therefore S_{b.2} = \left(-\infty, \frac{1+b}{a}\right]$$

La solución final de la pregunta $b)$ está dada por:

$$S = S_{b.1} \cap S_{b.2} = \left(\frac{-5+b}{a}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{1+b}{a}\right]$$

Observamos que $\frac{-5+b}{a} < \frac{1+b}{a}$ **(Verifiquelo!!!)**, luego:

$$S = \left(\frac{-5+b}{a}, \frac{1+b}{a}\right] \bigstar$$

$c)$ $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}} > 2$

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}} > 2 \Rightarrow \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x+\sqrt{2}-2x^2+\frac{2}{\sqrt{2}}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x+\sqrt{2}-2x^2+\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}} > 0 \Rightarrow \frac{x-2x^2+2\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2-x-2\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}} < 0$$

Calculemos puntos críticos.

Para el numerador:

$$2x^2 - x - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16\sqrt{2}}}{4} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+16\sqrt{2}}}{4} \approx 1.47$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+16\sqrt{2}}}{4} \approx -0.97$$

Para el denominador:

$$x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow$$

$$x_3 = +\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0.84$$

$$x_4 = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx -0.84$$

Construyamos la tabla.

	$x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_4$	x_4	$x_4 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_1$	x_1	$x > x_1$
$2x^2 - x - 2\sqrt{2}$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
$x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
$\frac{2x^2-x-2\sqrt{2}}{x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$$\therefore S = \left(\frac{1-\sqrt{1+16\sqrt{2}}}{4}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \cup \left(+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1+\sqrt{1+16\sqrt{2}}}{4}\right) \bigstar$$

Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\sqrt{|x|-a^2} \leq (a+1)\,,\, a>0$

b) $\left|\frac{-2}{x-3}\right| \leq 1$

c) $\sqrt{x} \geq |x-3|$

Solución:

a) $\sqrt{|x|-a^2} \leq (a+1)$

En primer lugar, debemos asegurarnos que la cantidad subradical sea no negativa.

$|x|-a^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq a^2 \Rightarrow x \geq a^2 \;\vee\; x \leq -a^2$

$\therefore\; S_1 = (-\infty, -a^2] \cup [a^2, +\infty)$

$\sqrt{|x|-a^2} \leq (a+1) \Rightarrow |x|-a^2 \leq (a+1)^2 \Rightarrow |x| \leq (a+1)^2+a^2$

$\therefore\; S_2 = [-((a+1)^2+a^2), (a+1)^2+a^2]$

Observemos que : $(a+1)^2+a^2 > a^2$ y $-((a+1)^2+a^2) < -a^2$

$\therefore\; S = S_1 \cap S_2 = [-((a+1)^2+a^2), -a^2] \cup [a^2, (a+1)^2+a^2]$ ★

$b)\ \left|\frac{-2}{x-3}\right| \leq 1$

Notemos que x debe ser distinto de 3, pues en tal caso el denominador involucrado se hace cero y el cuociente se indetermina.

$$\left|\frac{-2}{x-3}\right| \leq 1 \ \Rightarrow \frac{|-2|}{|x-3|} \leq 1 \ \Rightarrow \frac{2}{|x-3|} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq |x-3| \Rightarrow |x-3| \geq 2$$

$$\Rightarrow x-3 \geq 2 \ \vee \ x-3 \leq -2 \Rightarrow x \geq 5 \ \vee \ x \leq 1$$

$$\therefore \ S = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty) \ \bigstar$$

$c)\ \sqrt{x} \ \geq |x-3|$

En primer lugar, la cantidad subradical no puede ser negativa, es decir,

$x \geq 0 \qquad\qquad \therefore \ S_1 = [0, +\infty)$

$$\sqrt{x} \ \geq |x-3| \Rightarrow x \geq (x-3)^2 \Rightarrow x \geq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow$$

$$0 \geq x^2 - 7x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 9 \leq 0$$

Puntos críticos:

$$x^2-7x+9=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-36}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$$

$$x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{2} \approx 5.303$$

$$x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{2} \approx 1.697$$

	$x<x_2$	$x=x_2$	$x_2<x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$
x^2-7x+9	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\therefore\ S_2=[x_2\,,\,x_1]=\left[\,\frac{7-\sqrt{13}}{2}\,,\,\frac{7+\sqrt{13}}{2}\,\right]$$

Finalmente,

$$S=S_1\cap S_2=[0,+\infty)\cap\left[\,\frac{7-\sqrt{13}}{2}\,,\,\frac{7+\sqrt{13}}{2}\,\right]=\left[\,\frac{7-\sqrt{13}}{2}\,,\,\frac{7+\sqrt{13}}{2}\,\right]\bigstar$$

Resuelva los siguientes problemas:

$a)\ |-5x+1| \geq 2$

$b)\ |x-5| \leq |x|$

$c)\ \left|\frac{x+3}{x-2}\right| \geq \frac{x}{|x|}$

Solución:

$a)\ |-5x+1| \geq 2$

$|-5x+1| \geq 2 \Leftrightarrow -5x+1 \geq 2 \lor -5x+1 \leq -2 \Leftrightarrow$

$-5x \geq 1 \lor -5x \leq -3 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{5} \lor x \geq \frac{-3}{-5} \Leftrightarrow$

$x \leq \frac{-1}{5} \lor x \geq \frac{3}{5}$

$\therefore S = (-\infty, \frac{-1}{5}] \cup [\frac{3}{5}, +\infty)$♣

$b)\ |x-5| \leq |x|$

$|x-5| \leq |x| \Leftrightarrow (x-5)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \leq x^2 \Leftrightarrow$

$-10x + 25 \leq 0 \Leftrightarrow -10x \leq -25 \Leftrightarrow x \geq \frac{25}{10} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$

$\therefore S = [\frac{5}{2}, +\infty)$♥

$c)\ \left|\frac{x+3}{x-2}\right| \geq \frac{x}{|x|}$

$\left|\frac{x+3}{x-2}\right| \geq \frac{x}{|x|}$

Observamos que $x \neq 0$, luego tenemos sólo dos casos posibles:

***Caso 1:* $x > 0$** $\therefore\ S_{1'} = (0,\ +\infty)$

Si $x > 0$, entonces $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$. Así

$$\left|\frac{x+3}{x-2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-2} \geq 1 \ \vee\ \frac{x+3}{x-2} \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+3}{x-2} - 1 \geq 0 \ \vee\ \frac{x+3}{x-2} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+3-x+2}{x-2} \geq 0 \ \vee\ \frac{x+3+x-2}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{x-2} \geq 0 \ \vee\ \frac{2x+1}{x-2} \leq 0$$

Para $(*)$: $\frac{5}{x-2} \geq 0$ se tiene que la solución está dada por $x - 2 > 0$, es decir $x > 2$.

$$\therefore\ S_* = (2,\ +\infty)$$

Para $(**)$: $\frac{2x+1}{x-2} \leq 0$

Puntos críticos:
$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$2x+1$	$-$	0	$+$	5	$+$
$x-2$	$-$	$-\frac{5}{2}$	$-$	0	$+$
$\frac{2x+1}{x-2}$	$+$	0	$-$	$indet.$	$+$

$$\therefore\ S_{**} = [-\tfrac{1}{2}, 2)$$

Por lo tanto, para el caso 1 se tiene la solución:

$$S_1 = S_{1'} \cap (S_* \cup S_{**}) = (0, +\infty) \cap \left((2, +\infty) \cup [-\tfrac{1}{2}, 2) \right)$$

$$\therefore\ S_1 = (0,2) \cup (2, +\infty)$$

***Caso 2:* $x < 0$** $\quad \therefore\ S_{2'} = (-\infty, 0)$

Si $x < 0$, entonces $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$. Así

$\left|\frac{x+3}{x-2}\right| \geq -1$, pero sabemos que el valor absoluto de cualquier número real es no negativo y por lo tanto siempre será mayor que un número negativo.
Ahora para que $\frac{x+3}{x-2}$ sea un número real basta con decir que $x \neq 2$.

$$\therefore\ S_2 = \mathbb{R} - \{2\} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$$

La solución final del problema original es:

$$S = S_1 \cup S_2 = (0,2) \cup (2, +\infty) \cup (-\infty, 0) = \mathbb{R} - \{0,2\} \blacklozenge$$

Resuelva: $\sqrt{x+1} > |x+1|$

Solución:

Para que la raíz cuadrada tenga sentido, es decir, nos de un número real, se debe tener

$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Si $x=-1$, entonces $\sqrt{-1+1}=0$ no es mayor que $|-1+1|=0$, de donde $x=-1$ no pertenece al conjunto solución.

Si $x+1>0$, entonces $|x+1|=x+1$ y además $x>-1$. Luego $S_1=(-1,+\infty)$.

$\sqrt{x+1} > |x+1| \Rightarrow \sqrt{x+1} > x+1 \Rightarrow$

$x+1>(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2-(x+1)<0 \Rightarrow$

$x^2+2x+1-x-1<0 \Rightarrow x^2+x<0 \Rightarrow$

$x(x+1)<0$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$x>0$
x	$-$	-1	$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$+$	1	$+$
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore S_2=(-1,0)$

Finalmente, $S_T=S_1\cap S_2=(-1,+\infty)\cap(-1,0)=(-1,0)$♠

Resuelva: $|3x-2|=2x-1$

Solución:

$|3x-2|=2x-1 \Leftrightarrow 3x-2=\pm(2x-1) \Leftrightarrow$

$(3x-2=2x-1) \vee (3x-2=-(2x-1)) \Leftrightarrow$

$x=1 \vee x=\frac{3}{5}$

$\therefore S=\{1,\frac{3}{5}\}$ ■

Resuelva: $\frac{40}{x^2+x-12} < -4$

Solución:

$$\frac{40}{x^2+x-12} < -4 \Rightarrow \frac{40}{x^2+x-12} + 4 < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{40+4x^2+4x-48}{x^2+x-12} < 0 \Rightarrow \frac{4x^2+4x-8}{x^2+x-12} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4(x^2+x-2)}{x^2+x-12} < 0 \Rightarrow \frac{4(x+2)(x-1)}{(x-3)(x+4)} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x+4)} < 0$$

Se observa que los puntos críticos son: $-4,\ -2, 1, 3$

	$x<-4$	$x=-4$	$-4<x<-2$	$x=-2$	$-2<x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$(x+2)$	$-$	-2	$-$	0	$+$	3	$+$	5	$+$
$(x-1)$	$-$	-5	$-$	-3	$-$	0	$+$	2	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	10	$+$	0	$-$	0	$+$	10	$+$
$(x-3)$	$-$	-7	$-$	-5	$-$	-2	$-$	0	$+$
$(x+4)$	$-$	0	$+$	2	$+$	5	$+$	7	$+$
$(x-3)(x-4)$	$+$	0	$-$	-10	$-$	-10	$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x+4)}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Los intervalos en los cuales la expresión es negativa son: $(-4,-2)$ y $(1,3)$. Por lo tanto, la solución final es:

$$S = (-4,-2) \cup (1,3) \bigstar$$

Resuelva: $x^4 - x \leq 0$

Solución:

Tenemos que:

$x^4 - x = x(x^3 - 1)$

Así,

$x(x^3 - 1) \leq 0$

A continuación se consideran dos métodos para resolver el mismo problema.

Método 1: El producto de dos números reales es no positivo (negativo o cero) si uno de los factores es no negativo y el otro es no positivo; es decir, en símbolos

$x(x^3 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x \leq 0 \ \wedge x^3 - 1 \geq 0) \ \vee (x \geq 0 \wedge x^3 - 1 \leq 0) \Leftrightarrow$

$(x \leq 0 \ \wedge [(x-1)(x^2 + x + 1)] \geq 0) \ \vee$

$(x \geq 0 \wedge [(x-1)(x^2 + x + 1)] \leq 0) \Leftrightarrow$

$(x \leq 0 \ \wedge (x-1) \geq 0) \ \vee (x \geq 0 \wedge (x-1) \leq 0) \, (pues \, x^2 + x + 1 > 0)$

$\Leftrightarrow (x \leq 0 \ \wedge x \geq 1) \ \vee (x \geq 0 \wedge x \leq 1)$

$\Leftrightarrow x \in \emptyset \cup [0,1]$

$\Leftrightarrow x \in [0,1]$

La solución final es: $S = [0,1]$

Método 2: Mediante una tabla podemos resolver el problema, pero antes de construir la tabla es necesaria conocer cuáles son los puntos *críticos* o importantes para obtener los cambios de signo. Para ello, se iguala a cero la expresión que tengamos, es decir:

$$x\left(x^3-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^3-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^3=1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Los puntos críticos son: 0 y 1

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
x	$-$	0	$+$	1	$+$
x^3-1	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x\left(x^3-1\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

De la tabla se concluye que el intervalo en donde $x\left(x^3-1\right)$ es negativo o cero (≤ 0) es: $\left[0,1\right]$ ♦

Resuelva la inecuación: $x^2 + x - 1 \leq 5$

Solución:

$$x^2 + x - 1 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \leq 0$$

Sabiendo que los puntos críticos son $x = -3$ y $x = 2$, la tabla correspondiente es:

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$(x+3)$	$-$	0	$+$	5	$+$
$(x-2)$	$-$	-5	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto la expresión $(x+3)(x-2)$ es no positiva en el intervalo $[-3, 2]$

$\therefore S = [-3, 2]$ ★

Obtenga la solución de la inecuación: $x^2 + x - 1 \leq 5$

Solución:

$$x^2 + x - 1 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \leq 0$$

Sabiendo que los puntos críticos son $x = -3$ y $x = 2$, la tabla correspondiente es:

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$(x+3)$	$-$	0	$+$	5	$+$
$(x-2)$	$-$	-5	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto la expresión $(x+3)(x-2)$ es no positiva en el intervalo $[-3, 2]$

$\therefore S = [-3, 2]$ ♥

Resuelva: $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

Solución:

$$\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-2x-x^2-4x-3}{x(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-3}{x(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3(2x+1)}{x(x+3)} \overset{/-1}{<} 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3(2x+1)}{x(x+3)} > 0$$

Los puntos críticos son tales que:

$2x+1=0$ y $x(x+3)=0$

Luego, los puntos críticos son: $x = -\frac{1}{2}$, $x=0$, $x = -3$.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 0$	$x=0$	$x>0$
$3(2x+1)$	$-$	-15	$-$	0	$+$	3	$+$
$x(x+3)$	$+$	0	$-$	$-5/4$	$-$	0	$+$
$\frac{3(2x+1)}{x(x+3)}$	$-$	$indet.$	$+$	0	$-$	$indet.$	$+$

Del cuadro anterior se observa que los intervalos donde el cuociente es positivo son:

$(-3, -\frac{1}{2})$ y $(0, +\infty)$.

Por lo tanto, la solución es:

$(-3, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$.♣

Resuelva: $\frac{2}{5x} - \frac{x}{3} \leq -5x$

Solución:

$\frac{2}{5x} - \frac{x}{3} \leq -5x \Leftrightarrow \frac{6-5x^2}{15x} \leq -5x \Leftrightarrow \frac{6-5x^2}{15x} + 5x \leq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{6-5x^2+75x^2}{15x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{70x^2+6}{15x} \leq 0$

Determinemos los puntos críticos. Para ello igualamos a cero el numerador y el denominador de $\frac{70x^2+6}{15x}$. Así,

$70x^2+6=0 \Rightarrow x^2 = \frac{-6}{70} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-6}{70}}$ (números complejos, esto significa que la expresión $70x^2+6$ jamás se hará cero, cualesquiera sea el x real que consideremos. En efecto, sabemos que $x^2 \geq 0$, luego $70x^2+6>0$)

$15x = 0 \Rightarrow x = 0.$

Ahora, para que $\frac{a}{b} \leq 0$ cuando $a > 0$ se debe tener que $b < 0$ (Observe que la igualdad nunca se dará, en este caso, pues $a = 70x^2+6$ es estrictamente mayor que cero). Luego, $b = 15x < 0 \Rightarrow x < 0.$

$\therefore\ S = (-\infty, 0).$ ♦

Resuelva: $|x-1| < \frac{|x|}{x}$

Solución:

Observamos que x no puede ser igual a 0.
Consideremos, por tanto, los casos:
$i\ )\, x > 0$
$ii)\, x < 0$

Caso i)
$x > 0$ **:**

Tenemos que $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

Por tanto, la desigualdad se transforma en $|x-1| < 1$.

$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

$\therefore\ S_i = (0,2)$

Caso ii)
$x < 0$ **:**

Tenemos que $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

Por tanto, la desigualdad se transforma en $|x-1| < -1$, lo que es claramente imposible, pues el valor absoluto es siempre no negativo, y por tanto no puede ser menor que un número negativo.

$\therefore\ S_{ii} = \emptyset$

Finalmente, la solución de la desigualdad original es:

$$S_i \cup S_{ii} = (0,2) \cup \emptyset = (0,2)\spadesuit$$

Obtenga los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla la inecuación:

$-c > x + a \geq c$, donde $c \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$-c > x + a \geq c \Rightarrow \overset{(1)}{-c > x + a} \wedge \overset{(2)}{x + a \geq c}$$

Caso (1):

$$-c > x + a \Rightarrow -c - a > x \Rightarrow x < -c - a \Rightarrow S_{(1)} = (-\infty, -(c+a))$$

Caso $(\mathbf{2})$:

$$x + a \geq c \Rightarrow x \geq c - a \Rightarrow S_{(2)} = (c - a, +\infty)$$

$$\therefore\ S_{(1)} \cap S_{(2)} = (-\infty, -(c+a)) \cap (c - a, +\infty) = \emptyset,$$

pues $-(c+a) < c - a$ $(c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow c > 0 \Rightarrow -c < c \Rightarrow -c - a < c - a)$ $\square$

Resuelva la siguiente inecuación:

$$c+1>\sqrt{c-1}$$

Solución:

Condición obligatoria: $c-1\geq 0 \Rightarrow c\geq 1 \Rightarrow S_{co}=[1,\,+\infty)$

$$c+1>\sqrt{c-1} \Rightarrow (c+1)^2>c-1 \Rightarrow c^2+2c+1>c-1 \Rightarrow c^2+c+2>0$$

$$c=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \Rightarrow c=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

De lo anterior concluimos que c^2+c+2 es siempre positivo o siempre negativo. Para verificar esto último nos damos un valor para c, por ejemplo, $c=1: 1+1+2=4>0$; de donde podemos decir que la expresión c^2+c+2 siempre será positiva.

Así, la solución es $S=\mathbb{R}$

Finalmente, debemos intersectar la solución recién obtenida con la condición obligatoria, para obtener la solución final :

$$S_f=S\cap S_{co}=\mathbb{R}\cap[1,\,+\infty)=[1,\,+\infty)\square$$

Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2-x}{x(x+1)}-2<x+1,\ \text{con } x>0$$

Solución:

La condición obligatoria es $x>0$, es decir, $S_{co}=(0,+\infty)=\mathbb{R}^+$

$$\frac{x^2-x}{x(x+1)}-2<x+1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{x(x+1)}-2<x+1 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \frac{(x-1)}{(x+1)}-2<x+1 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)}-2-x-1<0 \Rightarrow \frac{(x-1)}{(x+1)}-3-x<0 \Rightarrow \frac{(x-1)-3(x+1)-x(x+1)}{(x+1)}<0 \Rightarrow$$

$$\frac{x-1-3x-3-x^2-x}{(x+1)}<0 \Rightarrow \frac{-4-3x-x^2}{(x+1)}<0 \Rightarrow /(-1)\ \frac{x^2+3x+4}{(x+1)}>0$$

Obtengamos puntos críticos:

$$x^2+3x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}\notin\mathbb{R}$$

Ahora, si $x=0$, entonces $x^2+3x+4=4>0$. Por lo tanto, $x^2+3x+4>0$

Por otro lado, $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Construyamos la tabla :

	$x<-1$	$x=-1$	$x>-1$
x^2+3x+4	$+$	2	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2+3x+4}{(x+1)}$	$-$	$indet.$	$+$

Como interesan aquellos intervalos donde el cuociente $\frac{x^2+3x+4}{(x+1)}$ sea positivo, la solución es : $S=(-1,+\infty)$

Por último, tomando en cuenta la condición obligatoria :

$S_f=(0,+\infty)\cap(-1,+\infty)=(0,+\infty)$❑

Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{1 - |x|} \geq \sqrt{x}$$

Solución:

Condición para que el problema tenga solución es

$$1 - |x| \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

$$\Rightarrow |x| \leq 1 \;\wedge\; x \geq 0$$

$$\Rightarrow (-1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad x \geq 0) \Rightarrow x \in [0,1]$$

Si $x \in [0,1]$

$$\sqrt{1 - |x|} \geq \sqrt{x} \qquad\qquad (\quad)^2$$

$$\Rightarrow 1 - |x| \geq x \Rightarrow |x| \leq 1 - x \Rightarrow -(1-x) \leq x \leq 1 - x$$

$$\Rightarrow (-1 + x \leq x \quad \wedge \quad x \leq 1 - x) \Rightarrow (-1 \leq 0 \;\wedge\; x \leq \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \; x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$$

Sea S_F la solución final. Luego,

$$S_F = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap [0,1] = [0, \frac{1}{2}] \bigstar$$

Resuelva

$$\sqrt{|x+1|+1} \geq \sqrt{x+1}$$

Solución:

Condición inicial

$$(|x+1|+1 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \geq -1) \Rightarrow x \in [-1, \infty)$$

Si $x \in [-1, \infty)$

$$\sqrt{|x+1|+1} \geq \sqrt{x+1} \qquad (\ )^2$$

$$\Rightarrow |x+1|+1 \geq x+1 \Rightarrow |x+1| \geq x$$

$$\Rightarrow (x+1 \leq -x \ \vee \ x+1 \geq x) \Rightarrow (x \leq -\frac{1}{2} \ \vee x \in \mathbb{R}) \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$S_F = [-1, \infty) \cap \mathbb{R} = [-1, \infty) \bigstar$$

Demuestre que si $0 < x < t$, entonces

$$\sqrt{t} - \sqrt{x} < \sqrt{t - x}$$

Solución:

$$(\sqrt{t} - \sqrt{x})^2 = t - 2\sqrt{t\,x} + x \qquad (1)$$

$$x < t \quad \xRightarrow{\text{multiplicando por } x>0} \quad x^2 < t\,x$$

$$x < \sqrt{t\,x} \Rightarrow$$

$$2\,x < 2\,\sqrt{t\,x} \qquad (2)$$

Reemplazando el resultado (2) en (1) :

$$(\sqrt{t} - \sqrt{x})^2 = t - 2\sqrt{t\,x} + x < t - 2x + x = t - x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{t} - \sqrt{x})^2 < t - x \Rightarrow \sqrt{t} - \sqrt{x} < \sqrt{t - x} \;\bigstar$$

LISTADO: INECUACIONES
Con Respuestas

1) INECUACIONES DE PRIMER GRADO

a) $(x - 2)^2 > (x + 2)\cdot(x - 2) + 8$ R. $]-\infty, 0[$
b) $(x - 1)^2 < x(x - 4) + 8$ R. $]-\infty, 7/2[$
c) $3 - (x - 6) \leq 4x - 5$ R. $[14/5, +\infty[$
d) $\frac{3x - 5}{4} - \frac{x - 6}{12} < 1$ R. $]-\infty, 21/8[$
e) $1 - \frac{x - 5}{9} < 9 + x$ R. $]-67/10, +\infty[$
f) $\frac{x + 6}{3} - x + 6 \leq \frac{x}{15}$ R. $[120/11, +\infty[$

g) Determine en cada uno de los siguientes ejercicios el intervalo real para x, tal que cada expresión represente un número real.

i) $\sqrt{x+5}$ R. $[-5, +\infty[$

ii) $\frac{2}{\sqrt{x+6}}$ R. $]-6, +\infty[$

iii) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$ R. $[-1, 1[\cup]1, +\infty[$

2) INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

a) $x^2 \geq 16$ R. $IR -]-4, 4[$
b) $9x^2 < 25$ R. $]-5/3, 5/3[$
c) $36 > (x - 1)^2$ R. $]-5, 7[$
d) $(x + 5)^2 \leq (x + 4)^2 + (x - 3)^2$ R. $IR -]0, 8[$
e) $x(x - 2) < 2(x + 6)$ R. $]-2, 6[$
f) $x^2 - 3x > 3x - 9$ R. $IR - \{3\}$
g) $4(x - 1) > x^2 + 9$ R. $\emptyset$
h) $2x^2 + 25 \leq x(x + 10)$ R. $\{5\}$
i) $1 - 2x \leq (x + 5)^2 - 2(x + 1)$ R. IR
j) $3 > x(2x + 1)$ R. $]-3/2, 1[$
k) $x(x + 1) \geq 15(1 - x^2)$ R. $IR -]-1, 15/16[$
l) $(x - 2)^2 > 0$ R. $IR - \{2\}$
m) $(x - 2)^2 \geq 0$ R. IR
n) $(x - 2)^2 < 0$ R. $\emptyset$
o) $(x - 2)^2 \leq 0$ R. $\{2\}$

p) Determine en cada uno de los siguientes ejercicios el intervalo real para x tal que:

i) $\sqrt{x^2+1} \in$ IR — R.] - ∞. + ∞ [

ii) $\sqrt{x^2+4x+4} \in$ IR — R.] - ∞. + ∞ [

iii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}} \in$ IR — R. IR - [0 , 1]

iv) $\sqrt{x^2-6x-7} \notin$ IR — R.] -1 , 7 [

3) INECUACIONES CON VARIABLE EN EL DENOMINADOR.

3.1) $\dfrac{x}{x-1} > 0$ — R. IR - [0 , 1]

3.2) $\dfrac{x+6}{3-x} < 0$ — R. IR - [-6 , 3]

3.3) $\dfrac{x}{x-5} - 2 \geq 0$ — R. [5 , 10]

3.4) $\dfrac{2x-1}{x+5} > 2$ — R.] - ∞ , -5 [

3.5) $\dfrac{x-1}{x+5} > 2$ — R.] -11 , -5 [

3.6) $\dfrac{1}{x-3} \leq 0$ — R.] - ∞ , 3 [

3.7) $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ — R. IR - [-1 , 1 [

3.8) $\dfrac{-1}{x} > 2$ — R.] - 1/2 , 0 [

3.9) $\dfrac{x}{x-3} \leq \dfrac{x}{x+1}$ — R.] - ∞ , -1 [∪ [0. 5[

3.10) $\dfrac{x^2+2}{x+3} > x$ — R. IR - [- 2/3 , 3]

3.11) $\dfrac{x^2}{x-3} \geq x+1$ — R. IR -]-3/2 , 3]

3.12) $\dfrac{x^2-4}{x+6} \geq 0$ — R.] - 6, -2] ∪ [2 , +∞ [

3.13) $\dfrac{(x+1)(x-7)}{(x-1)(x-6)(x+3)} > 0$ — R.] -3, -1 [∪] 1 , 6 [∪] 7 , + ∞ [

3.14) $\frac{4}{x^2} \le 1$ R. IR -] -2 , 2 [

3.15) $\frac{x^2+1}{x-5} < 0$ R.] - ∞ , 5 [

3.16) $3(x+3) \ge 2(1-\frac{1}{x})$ R.] -2 , -1/3] $\cup$] 0, + ∞ [

3.17) $x-4 < \frac{5}{x}$ R.] - ∞ , -1 [$\cup$] 0. 5 [

3.18) $x+\frac{15}{x} \ge 8$ R.] 0 , 3 [$\cup$ [5 , + ∞ [

3.19) $\frac{x^2+1}{x} \ge 1$ R.] 0 , + ∞ [

3.20) $3\left[\frac{1}{x}-3\right] > 5(x+1)$ R.] - ∞ , -3 [$\cup$] 0 , 1/5 [

3.21) $\frac{x}{x^2-1} < 0$ R.] - ∞ , - 1[$\cup$] 0 , 1 [

3.22) $x+20 > 1-\frac{84}{x}$ R.] -12 , -7 [$\cup$] 0 , + ∞ [

3.23) $x+\frac{25}{x} < 10$ R.] - ∞ , 0 [

3.24) $2x+\frac{9}{x} \ge x-6$ R.] 0 , + ∞ [$\cup$ $\{$-3$\}$

3.25) $x+\frac{1}{2} > \frac{1}{x}+2$ R.] -1 /2 , 0 [$\cup$] 2 , + ∞ [

3.26) Determine el intervalo real para x tal que:

h) $\sqrt{\frac{x-4}{x+5}} \in$ IR

R. IR - [-5 , 4 [

ii) $\sqrt{\frac{2x-1}{x-6}} \in$ IR

R. IR -] 1/2 , 6]

4) MODULOS O VALOR ABSOLUTO.

4.1) Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|4x - 1| = 5$ R. {-1 , 3/2 }

b) $\left|2 - \frac{x}{3}\right| = 2$ R. { 0 , 12 }

c) $\left|\frac{x+1}{x-5}\right| = 1$ R. { 2 }

d) $\left|\frac{2x-3}{1-x}\right| = 2$ R. { 5/4 }

e) $\left|\frac{3x}{4} - 1\right| = 4$ R. { -4 , 20/3 }

f) $\left|\frac{4-x}{3x}\right| = 3$ R. { -1/2 , 2/5 }

g) $\left|\frac{x^2}{x-1}\right| = 4$ R. { 2 , $-2 + 2\sqrt{2}$, $-2 - 2\sqrt{2}$ }

h) $|3x - 1| + 4 = 0$ R. { $\varnothing$ }

4.2) Resuelva cada una de las siguientes situaciones que se plantean:

a) Si 2 > x > y . Calcule el valor de "y" si : $|x - y| + |x - 2| = 3$.

R. y = -1.

b) Si y > x ; $|x^2 - y^2| = 27$; $|x + y| = 3$ ¿ Cuál es el valor de " x - y "?.

R. x - y = 9.

c) Si x > 1 ¿Cuál es el valor de "x" en la ecuación :

$|x^2 + 2x + 1| - |1 + x| - |1 - x| = 10$

R. { -3 , 3 }.

d) Si 3x + 15 = 0. Determine el valor de:

i) $\frac{|x+5|}{|x-5|}$ ii) $|x| - \frac{|x-8||x+6|}{|1-2x|}$

R. 0 R. 42 /11

4.3) Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $|2x - 1| > 3$ R. IR - [-1 , 2]

b) $\left|3 - \frac{x}{2} \le 2\right|$ R. [2 , 10]

c) $\left|\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right| \ge 5$ R. IR -] -45/2 , 55/2 [

d) $\left|1 - \frac{x}{3}\right| < 1$ R.] 0 , 6 [

e) $|x - 3| > -1$ R.] - ∞ , +∞ [

f) $|3 - 2x| < 0$ R. ∅

g) $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \le 1$ R. [- 2/3 , 4]

h) $|3 - 2x| < |x + 4|$ R.] - 1/3 , 7 [

i) $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| > 2$ R.] 1 , 2 [∪] 2 , 5 [

j) $\left|\frac{3x+5}{x}\right| \ge 2$ R.] - ∞ , - 5] ∪ [-1 , 0 [∪] 0 , + ∞ [

k) $\left|\frac{3x-1}{x+7}\right| < 3$ R.] - 10/3 , + ∞ [

l) $\left|\frac{2x-1}{1+2x}\right| > 3$ R.] - 1 , -1/2 [∪] -1/2 , -1/4 [

m) $|2x+5| \ge |x+4|$ R. IR -] -3 , -1 [

n) $\left|\frac{3x-5}{x-1}\right| \ge \frac{1}{2}$ R.] - ∞ , 1 [∪] 1 , 11/7] ∪ [9/5 , + ∞[

o) $\left|\frac{x-3}{5x}\right| < \frac{1}{3}$ R. IR - [-9/2 , 9/8]