

Capítulo XXXII

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

FORMULARIO

DESCARGA OSCILANTE DE UN CONDENSADOR:

a) Circuito LC (circuito con resistencia despreciable):

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q = Q_0 \cos 2\pi \nu t \\ I = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 2\pi \nu \sin 2\pi \nu t = I_0 \sin 2\pi \nu t \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{LC}$$

b) Circuito RCL:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \Rightarrow R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

DISTRIBUCIÓN DE LA ENERGÍA ENTRE C Y L:

$$U_0 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E'^2 + \frac{1}{2\mu} B'^2 = \frac{1}{2\mu} B^2$$

Problema 1. En un circuito hay intercalada una autoinducción de 5 H y un condensador de 20 μ F. Calcular:

1. El límite superior de resistencia para que se produzca una descarga oscilante.
2. Suponiendo que el circuito tiene resistencia nula, ¿cuál será el período de la descarga oscilante?

Solución

- 1) La condición para que se produzca descarga oscilante es:

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

Sustituyendo valores en el segundo miembro de la desigualdad, tenemos:

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \times 5 \times 10^6}{20}} = 1\,000 \, \Omega$$

2)

$$T = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{5 \times 20 \times 10^{-6}} = 2\pi \cdot 10^{-2} \, \text{s}$$

Problema 2. ¿Qué autoinducción debe tener un circuito en el que hay intercalado un condensador de $1 \, \mu\text{F}$ de capacidad para que se produzca en él una descarga oscilante de $1,6 \, \text{kc/s}$ de frecuencia? ¿Cuál es la resistencia máxima para la producción de la descarga oscilante?

Solución

Como la frecuencia es $1,6 \, \text{kc/s} = 1\,600 \, \text{Hz}$, el período será:

$$T = \frac{1}{1\,600} \, \text{s}$$

1) Aplicando la fórmula del período en la descarga oscilante:

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \Rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{10^6}{4\pi^2 1\,600^2} = 0,01 \, \text{H}$$

2)

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,01}{10^{-6}}} = 200 \, \Omega \Leftrightarrow R < 200 \, \Omega$$

Problema 3. En un circuito de cobre ($\rho = 0,018 \, \Omega \, \text{mm}^2/\text{m}$) de $100 \, \text{m}$ de longitud y $1,8 \, \text{mm}^2$ de sección están intercaladas un condensador de $100 \, \mu\text{F}$ y una bobina de $0,01 \, \text{H}$ de autoinducción.

1. ¿Podrán producirse corrientes oscilantes?
2. En caso afirmativo, ¿cuál es su frecuencia?

Solución

1)

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow R = 0,018 \frac{100}{1,8} = 1 \, \Omega$$

Para producirse descargas oscilantes tiene que verificarse:

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

Sustituyendo valores en el segundo miembro:

$$\sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \times 0,01}{\frac{100}{10^6}}} = 20 \, \Omega$$

La descarga oscilante es posible.

2) Su período vendrá dado por la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{10^{-2} \times 10^{-4}} = 2\pi \cdot 10^{-3} \, \text{s} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = \frac{10^3}{2\pi} \, \text{Hz}$$

Problema 4. Se desean producir unas ondas electromagnéticas de 1 km de longitud de onda en el vacío. Se dispone de un circuito de 10^{-3} H de autoinducción; calcular la capacidad que se debe intercalar en el circuito oscilante.

Solución

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

$$\lambda = cT$$

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi \sqrt{LC} \Rightarrow C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = \frac{1000^2}{4\pi^2 (3 \times 10^8)^2 10^{-3}} \text{ F} \approx 3 \times 10^{-4} \mu\text{F}$$

Problema 5. Calcular la capacidad que se tiene que intercalar en el circuito oscilante de un receptor de radio que posee una autoinducción de 10^{-4} H, cuando se utiliza para sintonizar una emisora de onda corta cuya longitud de onda emitida por ésta es de 10 m.

Solución

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{10} = 3 \times 10^7 \text{ Hz} = 30 \text{ MHz}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 \nu^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 9 \times 10^{14} \times 10^{-4}} \text{ F} \approx 0,28 \text{ pF}$$

Problema 6. Un condensador de $2 \mu\text{F}$ se carga a una tensión de 220 V, se desconecta de la fuente de alimentación y se conectan sus armaduras a una bobina de resistencia despreciable y de 5×10^{-3} H. Calcular la intensidad de la corriente máxima que circula por la bobina.

Solución

1.º MÉTODO:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_0 \cos 2\pi \nu t \\ I &= -\frac{dQ}{dt} \end{aligned} \right| \Rightarrow I = Q_0 2\pi \nu \sin 2\pi \nu t = I_0 \sin 2\pi \nu t$$

luego:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= Q_0 2\pi \nu \\ Q_0 &= CV_0 \\ \nu &= \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \end{aligned} \right| \Rightarrow I_0 = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 220 \sqrt{\frac{2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}}} = 4,4 \text{ A}$$

2.º MÉTODO: Considerando las transformaciones energéticas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} &= \frac{1}{2} L I_0^2 \\ Q_0 &= V_0 C \end{aligned} \right| \Rightarrow I_0 = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = 4,4 \text{ A}$$

Problema 7. Un condensador de $2 \mu\text{F}$, cargado con $\sqrt{2} \times 10^{-3} \text{ C}$, se conecta a una autoinducción de resistencia despreciable y de 10^{-2} H . Calcular:

1. La frecuencia de la descarga oscilante.
2. La carga del condensador cuando la energía en el condensador y en la autoinducción son iguales.
3. Tiempo que se necesita para que ocurra esta última condición.

Solución

1)

$$\nu = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{10^{-2} \cdot 2 \times 10^{-6}}} \approx 1\,125 \text{ Hz}$$

2) La energía máxima almacenada en el condensador es:

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

llamando Q a la carga del condensador cuando ésta energía está compartida en partes iguales entre el condensador y la autoinducción, la energía de éste será:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

como la condición pedida es:

$$U = \frac{1}{2} U_0 \Rightarrow \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{2C} \Rightarrow Q = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} = 10^{-3} \text{ C}$$

3) Como:

$$Q = Q_0 \cos 2\pi \nu t = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 2\pi \nu t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$2\pi \nu t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{8\nu} = 1,11 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Problema 8. Un condensador de $4 \times 10^{-2} \mu\text{F}$ se carga a una tensión de 500 V , se desconecta de la fuente de alimentación y se une a una bobina de $0,1 \text{ H}$ y $1\,000 \Omega$ de resistencia. Calcular:

1. La frecuencia de la oscilación del circuito.
2. La máxima intensidad de corriente que lo recorre.
3. Tiempo que tarda el condensador en reducir su carga a la tercera parte de su valor inicial.

Solución

1)

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{0,1 \times 4 \times 10^{-8}} - \frac{10^6}{4 \times 10^{-2}}} = \frac{3 \times 10^4}{4\pi} \text{ Hz} \approx 2\,387,3 \text{ Hz}$$

2)

$$I_0 = 2\pi \nu Q_0 \quad \left| \quad \begin{array}{l} Q_0 = CV_0 \\ \Rightarrow I_0 = 2\pi \frac{3 \times 10^4}{4\pi} 500 \times 4 \times 10^{-8} = 0,3 \text{ A} \end{array} \right.$$

3)

$$Q = Q_0 \cos 2\pi \nu t = \frac{Q_0}{3} \Rightarrow \cos 2\pi \nu t = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\pi \nu t = \arccos \frac{1}{3}$$

$$t = \frac{\arccos \frac{1}{3}}{2\pi \frac{3 \times 10^4}{4\pi}} = 82 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Problema 9. Una onda electromagnética plana (polarizada) tiene una amplitud de 3 V/m y una frecuencia de 1 MHz. Determinése la ecuación de la onda que representa al campo eléctrico.

Solución

La ecuación de una onda plana:

$$E = E_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

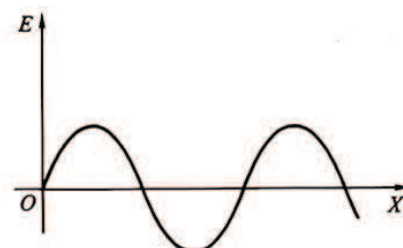
como:

$$E_0 = 3 \text{ V/m}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{10^6} \text{ s} = 10^{-6} \text{ s}$$

$$\lambda = cT = 3 \times 10^8 \cdot 10^{-6} = 300 \text{ m}$$

$$\Rightarrow E = 3 \sin \left(\frac{x}{300} - 10^6 t \right) \text{ V/m}$$



Problema XXXII-9