

Capítulo XXX

ELECTROMAGNETISMO

A) FUERZA DE LORENTZ

FORMULARIO

FUERZA DE LORENTZ A UN CONDUCTOR SUMERGIDO EN UN CAMPO MAGNÉTICO:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

FUERZA DE LORENTZ SOBRE UNA CARGA QUE SE MUEVE EN UN CAMPO MAGNÉTICO:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

FLUJO DEL CAMPO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE:

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \Leftrightarrow \Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

MOMENTO MAGNÉTICO DE UNA ESPIRA:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}$$

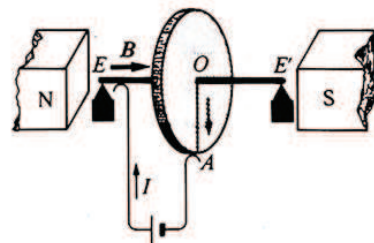
MOMENTO MAGNÉTICO DE UN ARROLLAMIENTO:

$$\mathbf{m} = nI\mathbf{A}$$

Problema 1. Un disco metálico puede girar alrededor de un eje EE' . Se instala una pila en la forma de la figura, estableciendo los contactos con la periferia de la rueda y con el eje por medio de escobillas que permiten el giro de la rueda sin perder el contacto. La corriente circula en el sentido de la flecha, funcionando el radio OA como conductor. Puesta la rueda en un campo magnético cuya dirección es la del eje, se pone a girar sola. ¿Por qué?

Solución

Sobre cada uno de los puntos del radio OA actúan fuerzas perpendiculares a él y hacia el exterior del plano del dibujo, determinadas por la fuerza de Lorentz, que hacen girar a la rueda de forma que su punto A saldría del papel hacia nosotros.



Problema XXX-1

Problema 2. La masa de la rueda de Barlow del problema anterior es de 20 g. La experiencia se hace en el vacío; el campo magnético es de 2×10^{-3} T y la intensidad de la corriente es de 1 A (ambos los supondremos constantes con el tiempo). Calcular la velocidad angular de la rueda a los 10 s de iniciado su movimiento.

Solución

El valor de la fuerza que actúa sobre cada elemento del radio dr queda determinado por la «fuerza de Lorentz»:

$$\left. \begin{aligned} dF &= I dr B \sin \varphi \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \varphi = 1 \end{aligned} \right| \Rightarrow dF = I dr B$$

La integración de esta expresión nos da el valor de la fuerza que actúa sobre la totalidad del radio y en su punto medio:

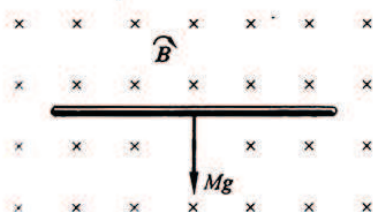
$$F = BI \int dr = BIr$$

El momento de tal fuerza con respecto al centro de la rueda es:

$$N = BIr \frac{r}{2} = \frac{BIr^2}{2}$$

El momento del par es igual al producto del momento de inercia, $Mr^2/2$, por la aceleración angular que adquiere el cuerpo y, por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{BIr^2}{2} &= \frac{1}{2} Mr^2 \alpha \\ \alpha &= \frac{\omega}{t} \end{aligned} \right| \Rightarrow BI = \frac{M\omega}{t} \Rightarrow 2 \times 10^{-3} = \frac{2 \times 10^{-2} \omega}{10} \Rightarrow \boxed{\omega = 1 \text{ rad/s}}$$



Problema XXX-3

Problema 3. Un alambre homogéneo de 50 cm de longitud y 10 g de masa, por el que circula una intensidad de corriente I , se encuentra «sumergido» en un campo magnético de valor $B = 0,2$ T (perpendicular al plano de la figura y que entra en la página). Determinar la magnitud y dirección de I para que se mantenga en equilibrio y no caiga por su peso.

Solución

$$\left. \begin{aligned} F &= Mg \\ F &= BI l \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{I = \frac{Mg}{Bl} = \frac{10^{-2} \times 9,8}{0,2 \times 0,5} = 0,98 \text{ A}}$$

que tendrán que ir de izquierda a derecha de la figura para que la fuerza de origen magnético esté dirigida hacia arriba y anule el peso.

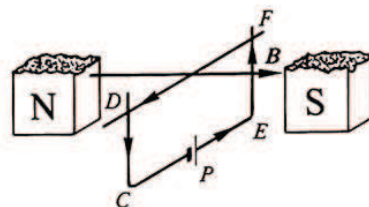
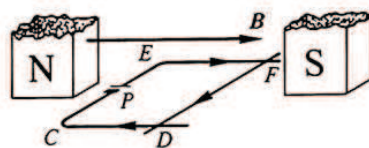
Problema 4. Un hilo conductor DF por el que circula una corriente producida por la pila P se puede deslizar a lo largo de los hilos CD y EF sobre los que descansa. Variamos la posición del cuadro, poniéndolo vertical. Si la intensidad de la corriente es adecuada, el hilo DF no caería. ¿Por qué?

Solución

La aplicación de la fuerza de Lorentz nos indica que sobre el hilo DF actúa una fuerza perpendicular a él y hacia arriba, cuyo valor es:

$$\left. \begin{aligned} F &= BIl \sin \varphi \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right| F = BIl$$

Si esta fuerza es igual al peso del hilo, éste no caerá.



Problema XXX-4

Problema 5. En la experiencia del problema anterior realizada en el vacío el campo magnético B es de 196×10^{-4} T y la intensidad de la corriente es 5 A. Calcular la masa de cada cm del hilo DF para que no caiga por su peso.

Solución

La expresión de la fuerza de Lorentz es:

$$dF = B I dl \sin \varphi$$

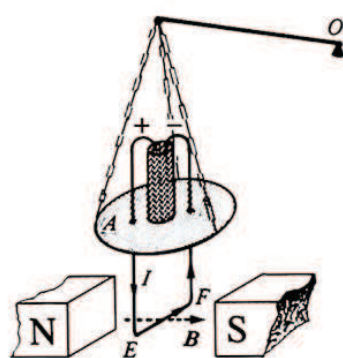
Siendo constantes todos los factores y el ángulo φ que forma el hilo DF con el campo magnético 90° ($\sin \varphi = 1$), el valor de la fuerza hacia arriba es:

$$F = BI \int dl = BIl$$

La fuerza F queda equilibrada por el peso del hilo; si λ es la masa de cada unidad de longitud, λl es la masa del hilo y su peso; $\lambda l g$, por tanto:

$$\lambda l g = BIl \Rightarrow \lambda = \frac{BI}{g} = \frac{0,0196 \times 5}{9,8} \text{ kg/m} = \frac{0,0196 \times 5 \times 10^3}{9,8 \times 10^2} \text{ g/cm} = 0,1 \text{ g/cm}$$

Problema 6. En el platillo de una balanza de Cotón colocamos una pila de FEM 1 V que alimenta un circuito de resistencia total 1Ω . El circuito está en el seno de un campo magnético producido por un electroimán NS de forma que el campo magnético entre sus polos es perpendicular a los hilos que hay entre las piezas polares. Antes de establecer contacto entre pila y circuito se coloca en el otro platillo de la balanza una tara, de mayor masa que la existente en A , y se equilibra la balanza mediante pesas de masa $M_1 = 15,830$ g. Se hace circular la corriente y para mantener el equilibrio de la balanza hay que modificar las pesas de A ; la masa de ellas, conseguido el equilibrio, es $M_2 = 15,730$ g. La longitud del hilo EF es 9,8 cm. La experiencia se realiza en vacío. Calcular la intensidad del campo entre los polos del electroimán.



Problema XXX-6

Solución

La fuerza de Lorentz:

$$dF = B I dl \sin \varphi \quad \left| \quad F = B I \int dl = B I l \right.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \varphi = 1$$

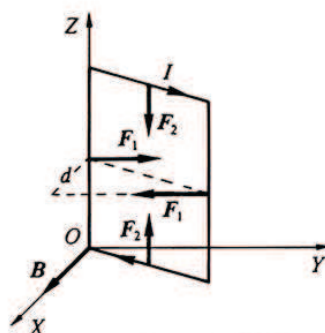
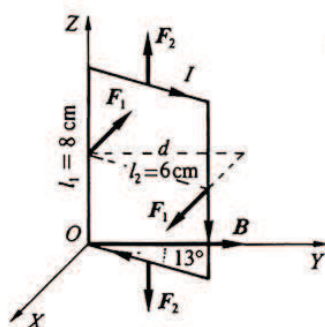
esta fuerza queda medida por la variación del peso en la balanza:

$$(M_1 - M_2)g = B I l \quad \left| \quad (15,830 - 15,730) 10^{-3} 9,8 = B 9,8 \times 10^{-2} \Rightarrow B = 10^{-2} \text{ T} \right.$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1 \text{ A}$$

Problema 7. El cuadro rectangular de la figura adjunta puede girar alrededor del eje Z y transporta una corriente de 10 A en el sentido indicado.

1. Si el cuadro se encuentra en un campo magnético uniforme de 0,2 T paralelo al eje Y, calcular la fuerza ejercida sobre cada lado del cuadro en dyn y el momento en dyn · cm necesario para mantener el cuadro en la posición indicada.
2. La misma cuestión cuando el campo es paralelo al eje X.
3. ¿Qué momento sería necesario aplicar al cuadro para que permanezca en equilibrio en el caso en que éste pudiese girar alrededor de un eje que pasase por su centro, paralelamente al eje Z?



Problema XXX-7

Solución

$$F = B I l \sin \varphi$$

1)

$$F_1 = 0,2 \times 10 \times 8 \times 10^{-2} \text{ N} \Rightarrow F_1 = 16 \text{ 000 dyn}$$

$$F_2 = 0,2 \times 10 \times 6 \times 10^{-2} \sin 13^\circ \text{ N} \Rightarrow F_2 = 2 \text{ 700 dyn}$$

$$N_1 = F_1 d = F_1 l_2 \cos \varphi = 16 \text{ 000} \times 6 \cos 13^\circ \text{ dyn} \cdot \text{cm} \Rightarrow N_1 = 93 \text{ 540 dyn} \cdot \text{cm}$$

2)

$$F_1 = 0,2 \times 10 \times 8 \times 10^{-2} \text{ N} \Rightarrow F_1 = 16 \text{ 000 dyn}$$

$$F_2 = 0,2 \times 10 \times 6 \times 10^{-2} \sin 103^\circ \text{ N} \Rightarrow F_2 = 11 \text{ 700 dyn}$$

$$N_2 = F_1 d = F_1 l_2 \sin \varphi = 16 \times 10^3 \times 6 \sin 13^\circ \text{ dyn} \cdot \text{cm} \Rightarrow N_2 = 21 \text{ 600 dyn} \cdot \text{cm}$$

- 3) Habría que aplicar pares iguales, pero de sentidos contrarios a los obtenidos en los apartados 1) y 2).

Problema 8. Un electrón penetra normalmente en un campo magnético uniforme de $15 \times 10^{-4} \text{ T}$. La velocidad es de $2 \times 10^6 \text{ m/s}$. Calcular:

1. La fuerza que actúa sobre el electrón.
2. El radio de la órbita que describe.
3. El tiempo que tarda en recorrer esa órbita.

Solución

1)

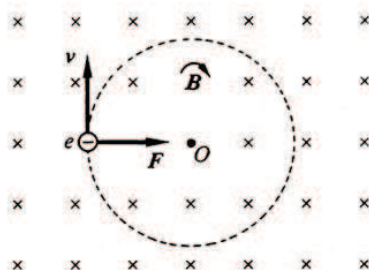
$$F = Bqv = 15 \times 10^{-4} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \cdot 2 \times 10^6 = 48 \times 10^{-17} \text{ N}$$

- 2) La fuerza que actúa sobre el electrón es constante y siempre perpendicular a la velocidad de éste y, por tanto, a la trayectoria; en consecuencia, ésta es circular, calculándose su radio:

$$Bqv = M \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \cdot 2 \times 10^6}{15 \times 10^{-4} \cdot 1,6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 7,6 \text{ mm}$$

3)

$$v = \frac{2\pi}{T} r = \frac{Bqr}{M} \Rightarrow T = \frac{2\pi M}{Bq} = \frac{2\pi \cdot 9,1 \times 10^{-31}}{15 \times 10^{-4} \cdot 1,6 \times 10^{-19}} = 2,38 \times 10^{-8} \text{ s}$$



Problema XXX-8

Problema 9. Se lanza un electrón con una velocidad de $v = 10^5$ km/s en el interior de un campo magnético, normalmente a la dirección de la inducción B , cuyo valor es de 10^{-2} T. Se pide:

1. Demostrar que el electrón seguirá una trayectoria circular con un movimiento uniforme, y calcular el radio de la trayectoria y el número de Hz.
2. Calcular en J la energía del electrón a su entrada en el campo.
3. Calcular la variación de potencial V que debe experimentar ese electrón para pasar del reposo a la velocidad v (suponemos invariable la masa).

Solución

- 1) La fuerza debida a B es constantemente perpendicular a la trayectoria, luego tiene que seguir una trayectoria circular:

$$r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{9,1 \times 10^{-31} \cdot 10^8}{10^{-2} \cdot 1,6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 5,7 \text{ cm}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{Bq}{2\pi M} = \frac{10^{-2} \cdot 1,6 \times 10^{-19}}{2\pi \cdot 9,1 \times 10^{-31}} = 2,8 \times 10^8 \text{ Hz}$$

2)

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,1 \times 10^{-31} \cdot 10^{16} = 4,55 \times 10^{-15} \text{ J}$$

3)

$$T = (V - V')q \Rightarrow 4,55 \times 10^{-15} = (V - V') \cdot 1,6 \times 10^{-19} \Rightarrow V - V' = 28\,400 \text{ V}$$

Problema 10. Sobre un protón que posee una energía cinética de 4,5 MeV actúa en dirección normal a su trayectoria un campo magnético uniforme de valor 8 T. Determinar:

1. Valor de la fuerza que actúa sobre él.
2. El radio de la órbita descrita.
3. Número de vueltas que da en 1 s.

Solución

$$T = 4,5 \text{ MeV} = 4,5 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} = 7,2 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} Mv^2 = T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 7,2 \times 10^{-13}}{1,7 \times 10^{-27}}} = 2,91 \times 10^7 \text{ m/s}$$

1)

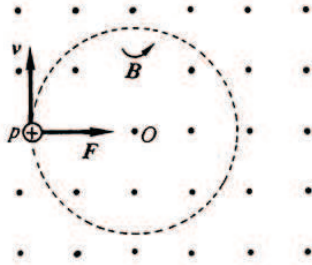
$$F = Bqv = 8 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 2,91 \times 10^7 = 37,3 \times 10^{-12} \text{ N}$$

2)

$$Bqv = \frac{Mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{1,7 \times 10^{-27} \times 2,91 \times 10^7}{8 \times 1,6 \times 10^{-19}} = 38,6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

3)

$$v = \frac{Bq}{2\pi M} = \frac{8 \times 1,6 \times 10^{-19}}{2\pi \times 1,7 \times 10^{-27}} = 1,2 \times 10^8 \text{ Hz}$$



Problema XXX-10

Problema 11. Calcular el radio de la trayectoria y el semiperíodo al penetrar un *electrón, un protón o un deuterón* con velocidad de 10^7 m/s en un campo magnético uniforme de 2×10^{-2} T; la velocidad y el campo son perpendiculares entre sí.

Solución

$$F = Bqv = M \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{Mv}{Bq}$$

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} \frac{Mv}{Bq} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi M}{Bq}$$

$e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
$p = -e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
$d = p = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$m_d = 2m_p = 2 \times 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

1)

$$r_e = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 10^7}{2 \times 10^{-2} \times 1,6 \times 10^{-19}} = 2,8 \times 10^{-3} \text{ m} = 2,8 \text{ mm}$$

$$\frac{T_e}{2} = \frac{\pi \times 9,1 \times 10^{-31}}{2 \times 10^{-2} \times 1,6 \times 10^{-19}} \text{ s} = 8,93 \times 10^{-10} \text{ s}$$

2)

$$r_p = \frac{1,67 \times 10^{-27} \times 10^7}{2 \times 10^{-2} \times 1,6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 5,2 \text{ m}$$

$$\frac{T_p}{2} = \frac{\pi \times 1,67 \times 10^{-27}}{2 \times 10^{-2} \times 1,6 \times 10^{-19}} \text{ s} = 1,64 \times 10^{-6} \text{ s}$$

3) Al ser la masa del deuterón doble que la del protón y tener la misma carga, el radio de la trayectoria circular y el semiperíodo serán el doble de los de aquella:

$$r_d = 10,4 \text{ m}$$

$$\frac{T_d}{2} = 3,28 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Problema 12. ¿Qué trayectoria sigue un electrón al penetrar en un campo magnético de forma que las direcciones de la velocidad y el campo no sean perpendiculares ni coincidan? ¿Y si coinciden?

Solución

Descompongamos v en v_x y v_y . Debido a la velocidad v_y , actuará la fuerza de Lorentz:

$$F_z = Bqv_y = Bqv \sin \alpha$$

y la partícula adquirirá una trayectoria circular:

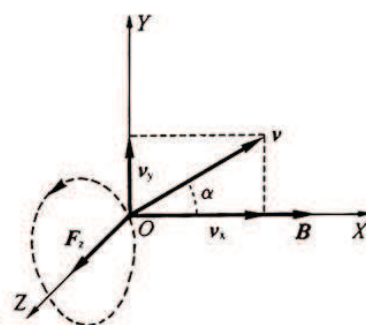
$$Bqv \sin \alpha = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{Bq \sin \alpha}$$

Sobre la componente v_x no ejerce acción el campo B , ya que el ángulo que forman ambos es nulo. La partícula avanzará a lo largo del eje x , con movimiento uniforme de velocidad:

$$v_x = v \cos \alpha$$

Al componer los dos movimientos obtendremos una trayectoria helicoidal.

Si B y v coinciden, no se manifiesta la fuerza de Lorentz y la partícula: sigue con el movimiento que llevaba al entrar en el campo.



Problema XXX-12

Problema 13. En un determinado instante una carga de $2 \mu\text{C}$ posee una velocidad $v = 2i - 3j + 2k$ m/s en una región en la que existen un campo eléctrico $E = i - j + 2k$ V/m y un campo magnético $B = 3i - 2j + k$ T. Calcular la fuerza total ejercida sobre la carga en ese momento.

Solución

$$F = F_E + F_B = qE + qv \wedge B \Rightarrow F_E = qE = (i - j + 2k)2 \times 10^{-6} \text{ N}$$

$$F_B = qv \times B = 2 \times 10^{-6} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 10^{-6}(i + 4j + 5k) \text{ N}$$

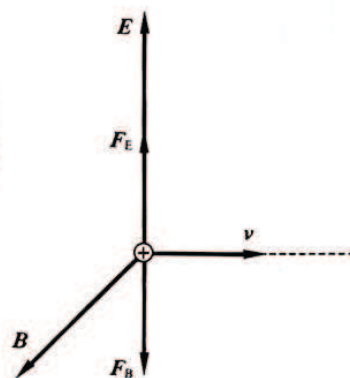
$$F = (2i + 3j + 7k)2 \times 10^{-6} \text{ N}$$

Problema 14. ¿Qué condición es la necesaria para que una partícula electrizada que se mueve rectilíneamente siga en su trayectoria rectilínea, estando sometida a un campo eléctrico y a otro magnético perpendiculares entre sí y perpendiculares a su velocidad?

Solución

Las fuerzas debidas al campo eléctrico y al magnético deben ser iguales y de sentido contrario:

$$F_E = F_B \Rightarrow Eq = Bqv \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$



Problema XXX-14

Problema 15. Se aplica una diferencia de potencial de 100 V a las armaduras de un condensador, planas, paralelas, horizontales, separadas por 1 cm de distancia, y en el vacío. Calcular:

1. La intensidad del campo eléctrico entre dichas láminas.
2. La capacidad del condensador, si la superficie de cada lámina es de $0,5 \text{ m}^2$.
3. Se lanza horizontalmente un electrón entre las láminas con una velocidad de 10^7 m/s y se aplica un campo magnético perpendicular a dicha velocidad. Calcular la intensidad de este campo magnético para que el electrón no se desvíe, y determinar su dirección.
4. Calcular el radio de la órbita circular descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico.

Solución

1)

$$E = \frac{V - V'}{d} = \frac{100}{0,01} = 10^4 \text{ V/m}$$

2)

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{0,5}{4\pi \times 10^9 \times 10^{-2}} = 0,44 \times 10^{-9} \text{ F}$$

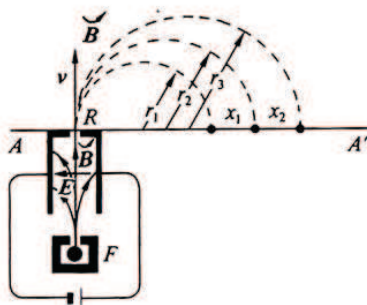
3) (Ver problema anterior.)

$$v = \frac{E}{B} \Rightarrow 10^7 = \frac{10^4}{B} \Rightarrow B = 10^{-3} \text{ T}$$

4)

$$r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{9,1 \times 10^{-31} 10^7}{10^{-3} 1,6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 5,7 \text{ cm}$$

Problema 16. En el esquema representado en la figura de un espectrógrafo de masas ideado por Bainbridge, F es una fuente de iones acelerados a través de un potencial de algunos miles de voltios, que penetran en un «selector de velocidades» constituido por un condensador plano en el que se mantiene un campo eléctrico y perpendicularmente a él un campo magnético que sólo deja pasar a aquellos iones que poseen una determinada velocidad v . Por encima de AA' existe un campo magnético perpendicular al plano de la figura que hace que los iones de diferentes masas e igual carga describan distintas trayectorias circulares, incidiendo sobre una placa fotográfica que una vez revelada nos dará el espectro de masas. En el supuesto que el campo eléctrico entre las placas del condensador sea de 200 V/m y el campo magnético en ambas regiones descritas sea de 0,1 T, y el manantial emite iones de los tres isótopos de magnesio, $^{24}_{12}\text{Mg}$, $^{25}_{12}\text{Mg}$ y $^{26}_{12}\text{Mg}$, con dos cargas positivas; calcular la distancia entre las líneas formadas por los tres isótopos sobre la placa fotográfica (x_1 y x_2 en la figura).



Problema XXX-16

Solución

La carga de los iones será:

$$q = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} = 3,2 \times 10^{-19} \text{ C}$$

La masa del ion $^{24}_{12}\text{Mg}^{2+}$ es:

$$M_1 = 24 \text{ u} = 24 \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 39,84 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La masa del ion $^{25}_{12}\text{Mg}^{2+}$ es:

$$M_2 = 25 \text{ u} = 25 \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 41,50 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La masa del ion $^{26}_{12}\text{Mg}^{2+}$ es:

$$M_3 = 26 \text{ u} = 26 \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 43,16 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La velocidad con que salen los iones de la rendija R será tal que la fuerza de origen magnético ejercida sobre ellos quede compensada por la fuerza eléctrica; entonces:

$$Eq = Bqv \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

En la región por encima de AA' los iones se moverán con una trayectoria circular tales que:

$$Bqv = \frac{Mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{E}{B^2q} M$$

que para cada ion valdrá:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{E}{B^2q} M_1 = \frac{200 \times 39,84 \times 10^{-27}}{10^{-2} \times 3,2 \times 10^{-19}} \text{ m} = 2,49 \text{ mm} \\ r_2 &= \frac{E}{B^2q} M_2 = \frac{200 \times 41,50 \times 10^{-27}}{10^{-2} \times 3,2 \times 10^{-19}} \text{ m} = 2,59 \text{ mm} \\ r_3 &= \frac{E}{B^2q} M_3 = \frac{200 \times 43,16 \times 10^{-27}}{10^{-2} \times 3,2 \times 10^{-19}} \text{ m} = 2,70 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2(r_2 - r_1) = 0,20 \text{ mm} \\ x_2 &= 2(r_3 - r_2) = 0,22 \text{ mm} \end{aligned}$$

Problema 17. Comprobar que una partícula de carga q y masa M moviéndose en trayectoria circular de radio R y con velocidad angular ω equivale a una espira circular del mismo radio por la que circula una intensidad de corriente cuyo valor es $I = \omega q / 2\pi$. Expresar esta I en función del momento angular de la partícula (L) y calcular el momento magnético del sistema.

Solución

En efecto, si la trayectoria es la de la figura y la velocidad angular es ω , la frecuencia será:

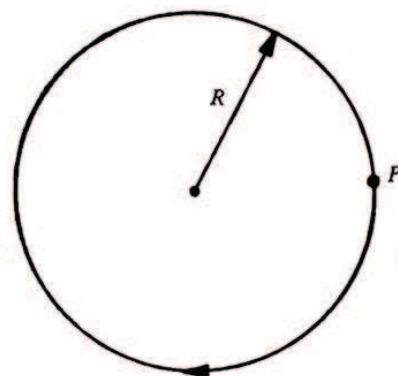
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

y por el punto P pasa la partícula ν veces en un segundo; luego en un segundo por el punto P pasa una carga $q\nu$; por tanto, en un intervalo de tiempo dt la carga dq que pasará por P será:

$$dq = \nu q dt$$

luego la intensidad de la corriente que da lugar (equivale) el movimiento de esa partícula cargada será:

$$I = \frac{dq}{dt} = \nu q = \frac{\omega}{2\pi} q \quad \text{c.q.d.}$$



Problema XXX-17

Por otra parte, el momento angular de la partícula es:

$$L = g\omega$$

(g = momento de inercia respecto al centro = MR^2); entonces:

$$I = \frac{1}{2\pi} q \frac{L}{g} = \frac{qL}{2\pi MR^2}$$

que es la expresión que queríamos obtener.

El «circuito» obtenido tendrá un momento magnético cuyo valor será:

$$m = IA = I\pi R^2 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \frac{q}{M} L$$

como m es un vector perpendicular al plano del circuito y el momento angular L también, se verifica que:

$$m = \frac{1}{2} \frac{q}{M} L$$

B) LEY DE BIOT Y SABART

FORMULARIO

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UN ELEMENTO DE CORRIENTE:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \wedge r}{r^3} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{Idl \wedge r}{r^3}$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \wedge r}{r^3}$$

PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO:

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \text{ N/A}^2$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE RECTILÍNEA INDEFINIDA:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO EN EL CENTRO DE UN CIRCUITO CIRCULAR:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Problema 18. En el plano del meridiano magnético (plano vertical que pasa por el eje de un magnetómetro, en equilibrio en el campo magnético terrestre) está colocado un circuito circular de 12,56 cm de radio. Cuando por él circula una corriente de 2 A la aguja magnética apoyada en un eje vertical gira un ángulo de 45° . Calcular la componente horizontal del campo magnético terrestre.

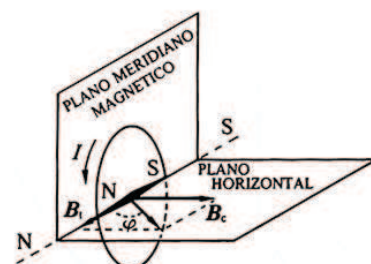
Solución

La intensidad del campo magnético creado por la corriente tiene por valor:

$$B_c = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{4\pi 2}{10^7 2 \times 0,1256} = 10^{-5} \text{ T}$$

El magnetómetro gira un ángulo φ , colocándose en la dirección de la diagonal del rectángulo que tiene por lados el campo calculado, B_c (perpendicular al plano del circuito) y la componente horizontal del campo magnético terrestre, B_t :

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{B_c}{B_t} \\ \varphi = 45^\circ &\Rightarrow \tan \varphi = 1 \end{aligned} \quad \left| \quad \boxed{B_t = B_c = 10^{-5} \text{ T}} \right.$$



Problema XXX-18

Problema 19. Tenemos un hilo conductor recto y muy largo. A la distancia de 10 cm de él y en un punto P colocamos un magnetómetro de forma que su posición de equilibrio (NS) esté en el mismo plano del hilo. Hacemos circular una corriente y el imán, girando en un plano horizontal (su eje es vertical) se desvía 45° con respecto a su primer equilibrio. Calcular la intensidad de la corriente que circula por el hilo. (La componente horizontal del campo magnético terrestre es la calculada en el problema anterior.)

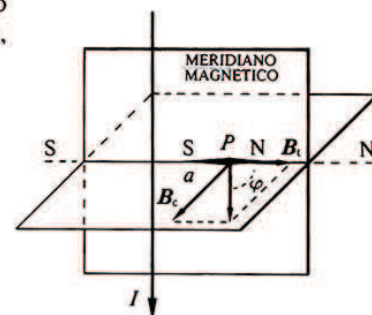
Solución

El imán gira, hasta adquirir la dirección de la diagonal del rectángulo formado por el campo magnético creado por la corriente y la componente horizontal del campo magnético terrestre, ya que ambos campos son perpendiculares entre sí:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{B_c}{B_t} \\ \varphi = 45^\circ &\Rightarrow \tan \varphi = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad B_c = B_t = 10^{-5} \text{ T}$$

y como:

$$B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \Rightarrow 10^{-5} = \frac{4\pi I}{10^7 2\pi 0,1} \Rightarrow \boxed{I = 5 \text{ A}}$$



Problema XXX-19

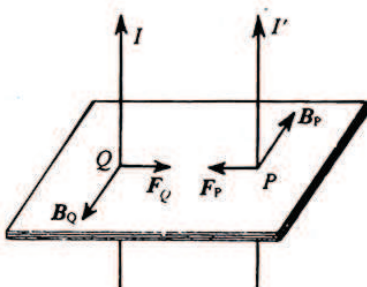
Problema 20. Dos conductores paralelos, rectos y que se pueden considerar como indefinidos están recorridos por sendas corrientes eléctricas; la separación entre ambos es de 15 cm. Por uno de ellos pasan 54 000 C cada hora y por el otro una corriente de 10 A; las dos corrientes son del mismo sentido. Determinar:

1. El valor y sentido de la fuerza que actúa, por cada cm de longitud de conductor.

2. El campo magnético creado por el primer conductor, en un punto a 20 cm de él.
 3. Si la corriente del primer conductor pasa a través de un voltámetro con agua acidulada, ¿cuántos gramos de hidrógeno se desprenden en cada hora?

Solución

$$I = \frac{54\,000}{3\,600} = 15\text{ A} \quad I' = 10\text{ A}$$



Problema XXX-20

1)

$$F_Q = F_P = B I l = \mu_0 \frac{I'}{2\pi a} I l = \frac{4\pi}{10^7} \frac{15 \times 10 \times 10^{-2}}{2\pi 0,15} \text{ N} = 2 \times 10^{-6} \text{ N}$$

2)

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{15}{2\pi 0,2} = 15 \times 10^{-6} \text{ T}$$

3)

$$M = \frac{1}{96\,500} 15 \times 3\,600 = 0,56 \text{ g}$$

Problema 21. Dos largos y fijos conductores paralelos están separados 10 cm; por uno M pasa una corriente de 30 A, y por el otro N una de 40 A. Si las corrientes son de sentidos opuestos, determinar:

1. El valor del campo magnético resultante en una línea del plano de los dos conductores, paralela a ellos y a igual distancia de ambos.
2. El valor del campo magnético en una línea paralela a los conductores y situada a 5 cm de M y 15 cm de N .
3. ¿Cuál es la fuerza que por unidad de longitud sobre un conductor paralelo a ambos, en su plano y a igual distancia de ellos y por el que pasa una corriente de 5 A, en el mismo sentido de la que pasa por el conductor M .

Solución

1)

$$B_1 = B_M + B_N = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2\pi a} [I + I'] = \frac{4\pi 70}{10^7 2\pi 0,05} = 28 \times 10^{-5} \text{ T}$$

2)

$$a = 0,05 \text{ m}$$

$$b = 0,15 \text{ m}$$

$$B_2 = B_M + B_N = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi b} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{I}{a} - \frac{I'}{b} \right] = 2 \times 10^{-7} \left[\frac{30}{0,05} - \frac{40}{0,15} \right] = \frac{2}{3} 10^{-4} \text{ T}$$

3)

$$F = B_1 I l \Rightarrow \frac{F}{l} = 28 \times 10^{-5} 5 = 14 \times 10^{-4} \text{ N/m}$$

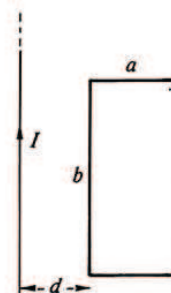
Problema 22. Calcular el flujo magnético que atraviesa el cuadro rectangular de la figura. DATOS: $I = 2 \text{ A}$, $a = 5 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $d = 5 \text{ cm}$.

Solución

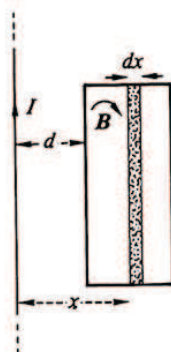
$$\begin{aligned} d\Phi &= \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = B dA \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dx}{x} \\ dA &= b dx \\ \Phi &= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} \end{aligned}$$

Sustituyendo valores:

$$\Phi = \frac{4\pi \times 10^{-1}}{10^7 \cdot 2\pi} \ln 2 = 2,77 \times 10^{-8} \text{ Wb}$$



Problema XXX-22



Problema XXX-22-1.a

Problema 23. Calcular, aplicando la ley de Biot y Sabart, el campo magnético creado en el centro de un circuito circular de radio R por el que circula una intensidad de corriente I .

Solución

Aplicando la fórmula de Biot y Sabart y considerando que el ángulo φ es 90° , obtendremos para valor del campo creado, por cada uno de los elementos de un circuito circular, en su centro:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}$$

Todos estos campos se suman aritmeticamente, ya que tienen la misma dirección (perpendicular al plano del circuito) y el mismo sentido:

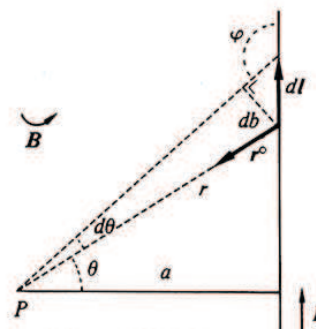
$$B = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Problema 24. Determinar, aplicando la ley de Biot y Sabart, el valor del campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto a una distancia a del hilo.

Solución

Consideremos un elemento del hilo conductor dl de la figura, el vector $d\mathbf{B}$ que le corresponde es un vector perpendicular a dl y a $\mathbf{r}$, por tanto perpendicular al plano de la figura y hacia afuera. Si consideramos otro dl' , su correspondiente $d\mathbf{B}'$ también será perpendicular al plano de la figura y, por consiguiente, paralelo al anterior; lo mismo ocurrirá para cualquier otro elemento que consideremos en el hilo, por lo cual el módulo del campo magnético total será la suma (integral) de los módulos creados por cada elemento; al ser:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \varphi}{r^2}$$



Problema XXX-24

y teniendo en cuenta la figura, en la que se verifica:

$$dl = \frac{db}{\sin \varphi} = \frac{rd\theta}{\sin \varphi} \Rightarrow \frac{dl \sin \varphi}{r} = d\theta$$

sustituyendo nos dará:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{r}$$

sustituyendo r por su valor:

$$r = \frac{a}{\cos \theta}$$

obtenemos:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

Integrando para los límites $\theta = -\pi/2$ y $\theta = \pi/2$, abarcaremos todo el conductor rectilíneo indefinido:

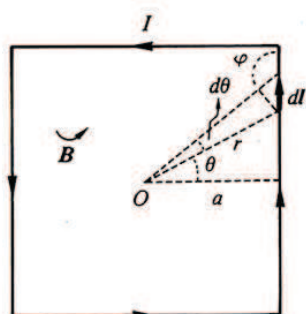
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2$$

y en definitiva:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Problema 25. Por integración de la ley de Biot y Savart, calcular el valor del campo magnético creado en el centro de un circuito cuadrado de lado l por el que circula una intensidad I . Realizar el cálculo para $l = 20$ cm e $I = 10$ A.

Solución



Problema XXX-25

Realizando en la expresión de la ley de Biot y Savart el mismo cambio de variables que los realizados al demostrar el campo creado por una corriente rectilínea e indefinida, obtenemos por cada uno de los lados del cuadrado:

$$B_1 = \frac{I\mu_0}{4\pi a} \int \cos \theta d\theta$$

Los límites de integración son $-\pi/4$ y $\pi/4$ y el valor de a es la mitad del lado del cuadrado:

$$B_1 = \frac{2I\mu_0}{4\pi l} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta = \frac{2I\mu_0}{4\pi l} \left[\sin \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{2I\mu_0}{4\pi l} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = \frac{I\mu_0}{\pi l \sqrt{2}}$$

Como los campos producidos por cada uno de los lados del cuadrado coinciden en dirección (perpendicular al plano del papel) y en sentido (hacia el exterior), el campo total se obtendrá multiplicando al anterior por 4:

$$B = 4B_1 = \frac{4I\mu_0}{\pi l \sqrt{2}} \Rightarrow B = \frac{4 \times 10 \times 4\pi}{10^7 \pi 0,2 \sqrt{2}} = 5,66 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Problema 26. Calcular el campo magnético creado en el centro de un circuito en forma de hexágono regular de perímetro $36\sqrt{3}$ cm, cuando circula por él una corriente capaz de depositar por electrólisis de nitrato de plata 10,062 g de este metal en 16 min y 40 s.

Solución

Realizando en la expresión de la ley de Biot y Savart el mismo cambio de variables que en el problema anterior, obtenemos, para cada uno de los seis lados del hexágono:

$$B_1 = \frac{I\mu_0}{4\pi a} \int \cos\theta d\theta$$

Los límites de integración son $-\pi/6$ y $\pi/6$ (-30° y 30°). El valor de a es:

$$a = \frac{l}{2} \cos 30^\circ = l \frac{\sqrt{3}}{4}$$

luego:

$$B_1 = \frac{I\mu_0}{\pi l \sqrt{3}} \left[\sin\theta \right]_{-30^\circ}^{30^\circ} = \frac{I\mu_0}{\pi l \sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{I\mu_0}{\pi l \sqrt{3}}$$

Y para los seis lados del hexágono (los campos de los lados coinciden en dirección y sentido):

$$B = \frac{6I\mu_0}{\pi l \sqrt{3}} = \frac{2I\mu_0 \sqrt{3}}{\pi l} \quad [1]$$

siendo:

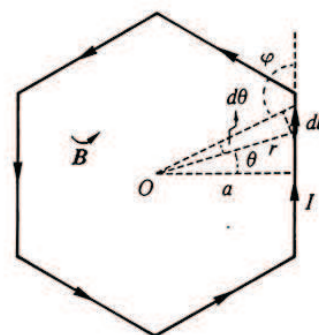
$$l = \frac{\text{perímetro}}{6} = \frac{36 \sqrt{3}}{6} = 6 \sqrt{3} \text{ cm}$$

y como:

$$M = E_c I t \Rightarrow I = \frac{M}{E_c t} = \frac{10,062}{0,001118(16 \times 60 + 40)} = 9 \text{ A}$$

Sustituyendo en [1]:

$$B = \frac{2 \times 9 \times 4\pi \sqrt{3}}{10^7 \pi 0,06 \sqrt{3}} = 12 \times 10^{-5} \text{ T}$$



Problema XXX-26

Problema 27. Determinar el campo magnético creado por un circuito circular de radio R en un punto del eje y a una distancia a de su centro, cuando circula por él una intensidad de corriente I .

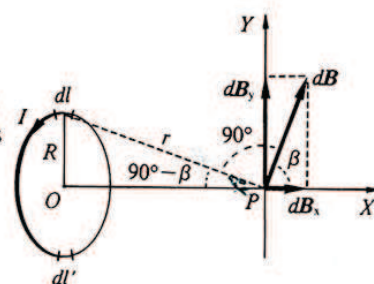
Solución

Aplicando la fórmula de Biot y Savart, el campo magnético creado por el elemento dl (figura) en un punto P del eje, y como la dirección de la corriente y la distancia r son perpendiculares ($\varphi = 90^\circ$), nos quedará:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

Descomponiendo el vector dB en los ejes X e Y de la figura, y teniendo en cuenta que la componente del eje Y se nos anulará con la componente del campo creado por el elemento dl' en el punto P , y que esto nos ocurrirá con todas las componentes en el plano π (figura) de los campos magnéticos creados por todos los elementos que constituyen la espira, sacamos en consecuencia que el campo activo será la suma (integral) de todas las componentes de los campos magnéticos creados por todos los elementos de corriente, según el eje OX . Como la componente dB_x toma el valor:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos\beta$$



Problema XXX-27-1.^a

y de la figura deducimos:

$$r^2 = R^2 + a^2 \quad \cos \beta = \sin(90 - \beta) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

sustituyendo, tenemos:

$$dB_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} dl$$

e integrando para todo el circuito:

$$B = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} dl = \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0 I R}{4\pi [R^2 + a^2]^{3/2}} 2\pi R$$

y simplificando:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + a^2]^{3/2}}$$

Si tenemos un arrollamiento de n espiras, y suponiendo que es plano, el campo magnético creado por él en un punto del eje a una distancia a será:

$$B = \frac{\mu_0 n I R^2}{2[R^2 + a^2]^{3/2}}$$

Problema 28. Por un solenoide recto de longitud l y radio R y que tiene arrolladas n espiras circula una intensidad de corriente I . Determinar:

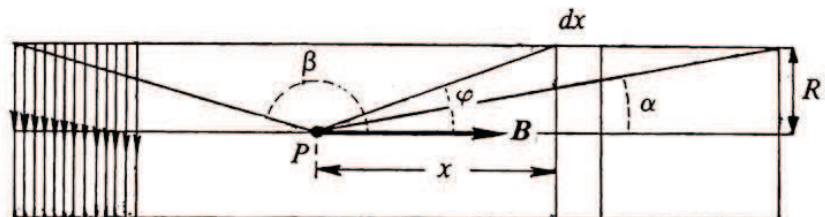
1. El campo magnético en su interior, en un punto de su eje, aplicando la ley de Biot y Sabart.
2. El campo magnético en uno cualquiera de los extremos del solenoide y en un punto del eje cuando $l \gg R$.
3. El campo magnético en su interior cuando se verifica que $l \gg R$ (solenoides recto e indefinido).

Solución

1) Siendo n/l el número total de espiras que existen en la unidad de longitud, entonces un elemento dx del solenoide tendrá ndx/l espiras. El campo magnético creado por estas ndx/l espiras en un punto P del eje será, según el problema anterior:

$$dB = \frac{\mu_0 I n R^2}{2l [R^2 + x^2]^{3/2}} dx$$

Siendo R el radio del solenoide y x la distancia indicada en la figura:



Problema XXX-28

Teniendo en cuenta que:

$$x = \frac{R}{\tan \varphi}$$

diferenciando esta expresión:

$$dx = - \frac{R}{\sin^2 \varphi} d\varphi$$

Sustituyendo y simplificando, nos queda:

$$dB = - \frac{\mu_0 I n}{2l} \sin \varphi d\varphi$$

e integrando para toda la longitud del solenoide entre los límites β y α , obtenemos:

$$B = \int_{\beta}^{\alpha} - \frac{\mu_0 I n}{2l} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I n}{2l} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I n}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

2) En uno de los extremos del solenoide, siendo éste lo suficientemente largo ($l \gg R$), y en un punto del eje al ser $\alpha = 0$ y $\beta = 90^\circ$, nos queda para valor del campo magnético:

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2l}$$

3) En este caso será: $\alpha = 0$ y $\beta = 180^\circ$, con lo que tendremos para valor del campo:

$$B = \frac{\mu_0 I n}{l}$$

Esta fórmula obtenida para un punto del eje es aplicable con gran aproximación para cualquier punto del interior de un solenoide largo, con la excepción de puntos próximos a los extremos.

C) LEY DE AMPERE

FORMULARIO

LEY DE AMPERE:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

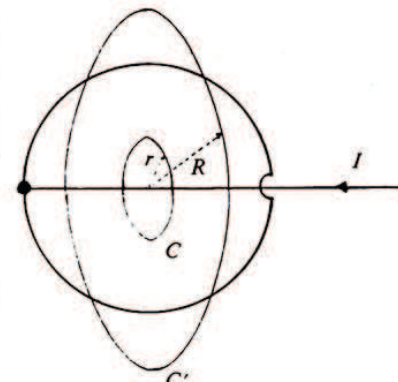
$\mathbf{J}$: densidad de corriente estacionaria.

Problema 29. Sea una esfera conductora hueca con un orificio por el que pasamos un hilo conductor que unimos a la pared opuesta de la esfera. Suponiendo que por el hilo conductor pasa una corriente I y vuelve por la esfera uniformemente repartida, calcular el campo magnético en el interior y exterior de la esfera.

Solución

Aplicaremos la ley de Ampere a una circunferencia C de radio r menor que el de la esfera, para puntos interiores:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$



Problema XXX-29

como B y $d\mathbf{l}$ son paralelos:

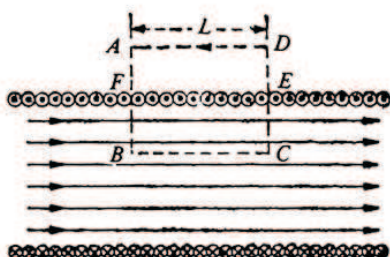
$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl \Rightarrow \oint B dl = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Haciendo lo mismo para puntos exteriores, tomando una circunferencia C' de radio R , mayor que el de la esfera, y teniendo en cuenta que la intensidad que atraviesa la superficie en un sentido lo hace después en el otro, tendremos:

$$\oint_{C'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi R = \mu_0 [I - I] = 0 \Rightarrow B = 0$$

Problema 30. Aplicando la ley de Ampere, determínese el campo magnético en el interior de un solenoide recto y largo con N espiras por unidad de longitud I cuando por él circula una corriente de intensidad I .

Solución



Problema XXX-30

Representamos en la figura la sección de un solenoide muy largo comparado con su diámetro, de tal forma que si nos interesa sólo el cálculo del campo en un punto interior alejado de los extremos, podemos suponerlo como indefinido, y sabemos (de antemano) que el campo en el interior es uniforme y en el exterior el campo es nulo. Sabiendo esto, calculemos la circulación del campo a lo largo de una trayectoria que nos interese, es decir, que sea cómoda de cálculo, y en este caso de campo uniforme la elegimos como un rectángulo $ABCD$, parte del cual esté dentro del campo y parte fuera. Tenemos que calcular:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

esta integral la podemos descomponer en suma de varias:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_F^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_C^E \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_E^D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

pero:

$$\int_A^F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_E^D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

puesto que $B = 0$ en el exterior. Además:

$$\int_F^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_C^E \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

porque B y $d\mathbf{l}$ en los tramos FB y CE son siempre perpendiculares, luego el producto escalar será nulo. Por tanto, el valor de:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^C B dl = B \int_B^C dl = BL$$

ya que en el tramo BC todo $d\mathbf{l}$ es paralelo a B , y al ser el campo uniforme, el módulo de B es constante en todo punto, por lo que se puede sacar de la integral. Apliquemos ahora la ley de Ampere:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

teniendo en cuenta que I es la intensidad que atraviesa el área de la curva C . En nuestro caso el área del rectángulo $ABCD$ es cortada sucesivas veces por el conductor que suponemos que transporta una intensidad I . Cada espira la corta una vez, y si hay N espiras por unidad de longitud, el número total de veces que la intensidad corta al área del rectángulo será: NL . Luego tendremos que:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 NLI$$

e igualando nos queda:

$$BL = \mu_0 NLI$$

es decir:

$$B = \mu_0 NI$$

Si la longitud total del solenoide fuese l y n el número total de espiras:

$$N = \frac{n}{l}$$

luego:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l}$$

de acuerdo con lo que ya habíamos obtenido en el problema 28 aplicando la ley de Biot y Savart.

Problema 31. Hallar el campo magnético en el interior de una bobina toroidal de n espiras recorridas por una intensidad I . Demostrar que para la misma bobina el campo magnético exterior es nulo. (Supondremos que la diferencia entre el radio externo e interno del toroide es despreciable frente al radio interno.)

Solución

Aplicaremos la ley de Ampere para una curva C de radio:

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

como B y dl son paralelos:

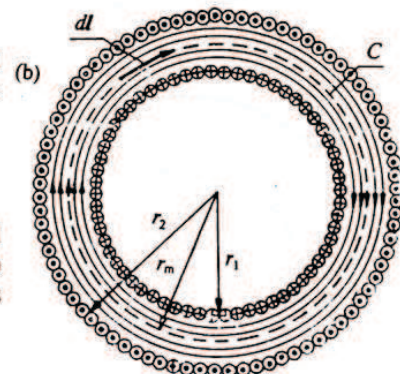
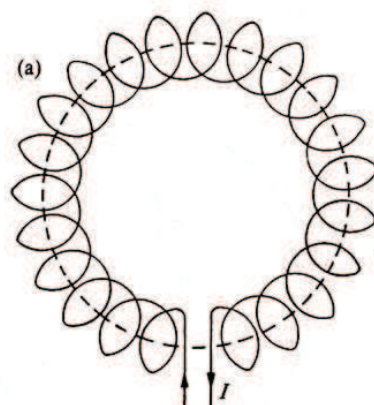
$$\oint_C B \cdot dl = \oint_C B dl = B 2\pi r_m$$

ya que B , debido a las hipótesis hechas, es prácticamente independiente de la distancia al centro. Como además la superficie de la curva C está atravesada por n espiras, tendremos:

$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 nI \Rightarrow B 2\pi r_m = \mu_0 nI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 nI}{2\pi(r_1 + r_2)}$$

Para demostrar que el campo en el exterior es nulo, tomaremos una curva contenida en el plano del toroide, de radio mayor que r_2 , con lo cual la intensidad que atraviesa en un sentido la superficie de la curva lo vuelve a hacer en el sentido contrario; luego la ley de Ampere nos da:

$$\oint_C B \cdot dl = \oint_C B dl = \mu_0 [nI - nI] = 0 \Rightarrow B = 0 \quad \text{c.q.d.}$$



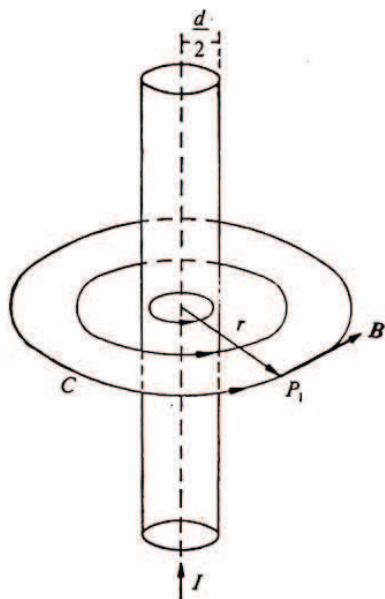
Problema XXX-31

Problema 32. Aplicando la ley de Ampere, determínese el campo magnético creado por un hilo conductor rectilíneo indefinido de diámetro d y que transporta una intensidad I :

1. En un punto que diste r del conductor para $r > d/2$.
2. En un punto que diste r del conductor para $r < d/2$.

Solución

Por simetría el campo magnético tiene que ser tal que sus líneas de fuerza sean circulares, con centro en el eje del conductor, como se indica en la figura.



1) Elegimos como línea de integración una circunferencia C que coincida con la línea de fuerza de radio r . De esta manera el campo B y dl son paralelos en todo punto de la línea; por tanto, se verifica que:

$$\oint_C B \cdot dl = \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi r$$

hemos sacado fuera de la integral el módulo del campo magnético, pues es constante en todo punto de la línea C .

Por otra parte, la aplicación de la ley de Ampere nos dará:

$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 I$$

ya que la intensidad que atraviesa el área de la línea C es la que circula por el conductor. Igualando, queda:

$$B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

2) Elegimos como línea de integración una circunferencia C que coincida con una línea de fuerza de radio r . Operando exactamente igual que en el caso anterior, la circulación del campo a lo largo de dicha línea será:

$$\oint_C B \cdot dl = B 2\pi r$$

La intensidad que atraviesa el área de C no será la misma que circula por el conductor «entero». Como la corriente circula uniformemente a través del conductor, podemos decir que la intensidad por unidad de área es constante, o lo que es lo mismo, que la densidad de corriente J es uniforme en todo el conductor (corrientes estacionarias). El valor de la densidad de corriente será:

$$J = \frac{I}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

luego la intensidad I' que circula por la sección de área C será:

$$J = \frac{I'}{\pi r^2}$$

es decir:

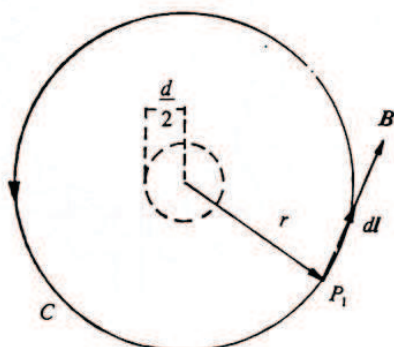
$$\frac{I'}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow I' = 4I \frac{r^2}{d^2}$$

por lo que la aplicación de la ley de Ampere nos dará:

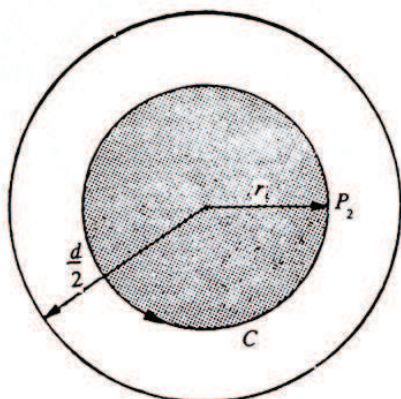
$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 4I \frac{r^2}{d^2}$$

igualando nos queda:

$$B 2\pi r = \mu_0 4I \frac{r^2}{d^2} \Rightarrow B = \frac{2\mu_0 I r}{\pi d^2}$$



Problema XXX-32-1.^a



Problema XXX-32-2.^a

D) PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA. CIRCUITOS MAGNETICOS

FORMULARIO

IMANACIÓN (VECTOR M): $M = \frac{\Delta m}{\Delta V}$

en módulo: $M = j_M = \frac{I_M}{l}$

j_M : densidad de corriente de magnetización.

I_M : corriente equivalente de magnetización.

INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO (EXCITACIÓN, VECTOR H):

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

LEY DE AMPER: $\oint_c H \cdot dl = I \Leftrightarrow \text{rot} H = j$

LEY DE BIOT Y SABART: $dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \wedge r}{r^3}$

PERMEABILIDAD MAGNÉTICA Y PERMEABILIDAD RELATIVA:

$$\mu = \mu_0 \mu'$$

RELACIÓN ENTRE B Y H : $B = \mu H$

CAMPO MAGNÉTICO EN EL INTERIOR DE UN SOLENOIDE:

Finito y en un punto de su eje: $B = \frac{\mu I n}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta)$

Indefinido o cerrado: $B = \frac{\mu I n}{l}$

FUERZA MAGNETOMOTRIZ: $M = nI$

RELUCTANCIA: $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$

«La reluctancia equivalente a otras en serie es la suma de las reluctancias asociadas.»

LEY DE OHM A CIRCUITOS MAGNÉTICOS: $\phi = \frac{M}{R}$

Problema 33. Un imán está constituido por una barra cilíndrica de 15 cm de longitud. Podemos obtener un solenoide equivalente arrollando sobre un cilindro de cartón, de las mismas dimensiones, 150 espiras y haciéndole pasar por ellas una intensidad de corriente de 3 A. Determinése la imanación M del imán.

Solución

El momento magnético es:

$$\Delta m = nIA$$

y la imanación (momento magnético de la unidad de volumen) nos queda:

$$M = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{nIA}{lA} = \frac{nI}{l} = \frac{150 \times 3}{0,15} = 3\,000 \text{ A/m}$$

Problema 34. Por un hilo conductor recto y muy largo circula una corriente de 10 A. Calcular el campo magnético B , la intensidad del campo magnético H y la imanación M en un punto que se encuentra a 20 cm de él, según se encuentre «sumergido»:

1. En el vacío.
2. En el mu-metal ($\mu' = 2 \times 10^4$).
3. En el alambre férreo ($\mu' = 1,00754$).

Solución

Para los tres casos:

$$H = \frac{I}{2\pi a} = \frac{10}{2\pi \times 0,2} = \frac{25}{\pi} \text{ A/m}$$

puesto que H sólo depende de las corrientes reales.

1)

$$B = \mu_0 H = \frac{4\pi 25}{10^7 \pi} = 10^{-5} \text{ T}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{10^{-5} 10^7}{4\pi} - \frac{25}{\pi} = 0$$

en el vacío M siempre es nulo, puesto que en él no se producen corrientes equivalentes de magnetización.

2)

$$B = \mu H = \mu_0 \mu' H = \frac{4\pi 2 \times 10^4 \times 25}{10^7 \pi} = 0,2 \text{ T}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{0,2 \times 10^7}{4\pi} - \frac{25}{\pi} = 15,9 \times 10^4 \text{ A/m}$$

3)

$$B = \mu H = \mu_0 \mu' H = \frac{4\pi 1,00754 \times 25}{10^7 \pi} = 100,754 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{100,754 \times 10^{-7} \times 10^7}{4\pi} - \frac{25}{\pi} = \frac{18,85 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ A/m}$$

Problema 35. Un anillo de Rowland de 8 cm de radio medio, en el que arrollamos 800 vueltas de un hilo conductor a un núcleo de permeabilidad relativa 1 000, se le hace pasar una corriente de 5 A. Calcular:

1. El valor del campo magnético B en su interior.
2. El valor de la intensidad del campo magnético H en su interior.
3. La imanación del anillo.

Solución

1)

$$B = \mu \frac{nI}{l} = \mu_0 \mu' \frac{nI}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^3 \times 800 \times 5}{10^7 \times 2\pi \times 8 \times 10^{-2}} = 10 \text{ T}$$

2)

$$B = \mu H \Rightarrow H = \frac{B}{\mu_0 \mu'} = \frac{10 \times 10^7}{4\pi \times 10^3} = \frac{10^5}{4\pi} \text{ A/m}$$

3)

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \Rightarrow M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{10 \times 10^7}{4\pi} - \frac{10^5}{4\pi} = \frac{999 \times 10^5}{4\pi} \text{ A/m}$$

Problema 36. Considérese un anillo de Rowland de 10 cm de radio medio en el que arrollamos 1 000 espiras a un núcleo de hierro, por el arrollamiento circula una intensidad de corriente (corriente de conducción) de 5 A. El valor del campo magnético B en su interior es de 2 T. Calcular:

1. La intensidad del campo magnético H (excitación).
2. La imanación M .
3. El valor de la intensidad de la corriente de magnetización.

Solución

- 1) El valor de H es independiente del material del núcleo, y su valor es:

$$H = \frac{nI}{l} = \frac{nI}{2\pi r} = \frac{10^3 \times 5}{2\pi \times 10^{-1}} = 7\,958 \text{ A/m}$$

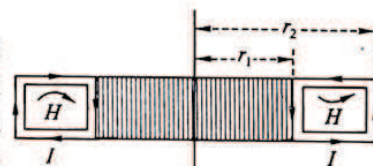
2)

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \Rightarrow M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{2 \times 10^7}{4\pi} - 7\,958 = 15,8 \times 10^5 \text{ A/m}$$

3)

$$I_M = I_{jM} = lM = 2\pi r M = 2\pi \times 10^{-1} \times 7\,958 = 5\,000 \text{ A}$$

Problema 37. Determinar el flujo de inducción magnética que atraviesa a la sección transversal cuadrada del toroide de hierro de la figura, siendo $r_1 = 10 \text{ cm}$ y $r_2 = 15 \text{ cm}$, cuando lleva un arrollamiento de 1 000 vueltas; sabiendo que la intensidad de corriente que lo recorre es de 1 A y que la permeabilidad magnética relativa del hierro es $\mu' = 1\,200$.



Problema XXX-37

Solución

En este caso no se puede considerar la aproximación hecha en los problemas anteriores y operar con un radio medio, puesto que $r_2 - r_1$ no es despreciable frente a r_1 . Por aplicación de la ley de Ampere a una curva circular C de radio r ($r_1 < r < r_2$) se obtiene:

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = nI$$

y como $\mathbf{H}$ y $d\mathbf{l}$ tienen la misma dirección y H es la misma en toda la curva C , se obtiene:

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_C H d\mathbf{l} = H \int_C d\mathbf{l} = H 2\pi r$$

que, junto con que $B = \mu H = \mu_0 \mu' H$, nos queda:

$$B = \frac{\mu_0 \mu'}{2\pi} \frac{nI}{r}$$

no siendo constante B en toda la sección transversal. El flujo que atravesará a una espira será:

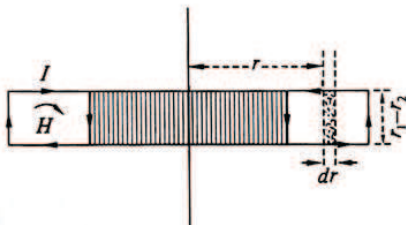
$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_{r_1}^{r_2} B dA$$

siendo $dA = (r_2 - r_1) dr$, luego:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu' n I (r_2 - r_1)}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu' n I (r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

sustituyendo valores, queda:

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 1200 \times 1000 \times 1 \times 5 \times 10^{-2}}{10^7 \cdot 2\pi} \ln \frac{3}{2} \approx 48 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$



Problema XXX-37-1.

Problema 38. Un anillo de hierro de sección cuadrada y diámetro interior y exterior, respectivamente, de 25 cm y 35 cm, lleva un arrollamiento de 500 vueltas. Sabiendo que el flujo de inducción magnética vale 0,01 Wb, calcular la intensidad de la corriente que recorre el arrollamiento. (Permeabilidad magnética relativa del hierro: $\mu' = 1200$.)

Solución

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el problema anterior, en el que:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu' n I (r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

y que en este caso:

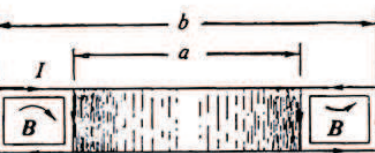
$$r_1 = \frac{a}{2} \quad r_2 = \frac{b}{2}$$

nos queda:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu' n I (b - a)}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

luego:

$$I = \frac{4\pi \Phi}{\mu_0 \mu' n (b - a) \ln \frac{b}{a}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 10^7}{4\pi \cdot 1200 \times 500 \times 10^{-1} \ln \frac{7}{5}} \approx 4,95 \text{ A}$$



Problema XXX-38

Si hacemos el problema por aproximación y tomando a B como constante en toda la sección transversal, como la longitud media del anillo es:

$$l = 2\pi r = 2\pi \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}}{2} = \frac{\pi(a+b)}{2} = 0,3\pi \text{ m}$$

Sección del anillo:

$$A = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 = 25 \text{ cm}^2 = 25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Phi = BA = \mu HA = \mu' \mu_0 \frac{In}{l} A \Rightarrow$$

$$I = \frac{\Phi l}{\mu' \mu_0 n A} = \frac{10^{-2} 0,3\pi}{1\,200 \times 4\pi 10^{-7} 500 \times 25 \times 10^{-4}} = 5 \text{ A}$$

Problema 39. Se enrolla a un anillo de Rowland de hierro un hilo conductor recubierto de una materia aislante. La longitud media del anillo es 60 cm, y la sección es de 4 cm². Si es 3 el número de espiras por centímetro, el hilo está recorrido por una corriente de 5 A y la permeabilidad relativa del hierro en estas condiciones es 400; determinar:

1. La intensidad del campo magnético H dentro del anillo.
2. El valor del campo magnético B .
3. El flujo Φ .
4. La reluctancia R .
5. La fuerza magnetomotriz M .

Solución

El número total de espiras será:

$$n = lN = 60 \times 3 = 180 \text{ vueltas}$$

1)

$$H = \frac{nI}{l} = \frac{180 \times 5}{0,6} = 1\,500 \text{ A/m}$$

2)

$$B = \mu H = \mu_0 \mu' H = \frac{4\pi}{10^7} 400 \times 1\,500 = 24\pi 10^{-2} \text{ T}$$

3)

$$\Phi = BA = 24\pi 10^{-2} 4 \times 10^{-4} = 96\pi 10^{-6} \text{ Wb}$$

4)

$$R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A} = \frac{10^7 \times 0,6}{4\pi \times 400 \times 4 \times 10^{-4}} = \frac{93,75}{\pi} 10^5 \text{ A/Wb}$$

5)

$$M = R\Phi = nI = 180 \times 5 = 900 \text{ A}$$

Problema 40. Alrededor de un anillo de hierro en el que la permeabilidad relativa es 1 000, que tiene una longitud total del circuito magnético de 40 cm y una sección de 80 cm², se enrolla un hilo conductor por el que circula una intensidad de corriente de 0,5 A. ¿Cuántas espiras se han de arrollar si se quiere conseguir un flujo magnético de 0,02 Wb a través de su armadura (sin entrehierro)?

Solución

La ley de Ohm aplicable a circuitos magnético es:

$$\phi = \frac{M}{R}$$

Siendo la fuerza magnetomotriz de valor:

$$M = nI$$

y la reluctancia:

$$R = \frac{l}{\mu A}$$

luego:

$$\phi = \frac{nI\mu A}{l} = \frac{nI\mu_0\mu' A}{l}$$

con lo que:

$$n = \frac{\phi l}{I\mu_0\mu' A} = \frac{0,02 \times 0,4 \times 10^7}{0,5 \times 4\pi \times 10^3 \times 80 \times 10^{-4}} = 1\,591 \text{ espiras}$$

Problema 41. En el interior de un solenoide de radio medio 20 cm y sección 15 cm² se le introduce un núcleo de hierro dulce de permeabilidad relativa $\mu' = 2\,000$. Calcular la fuerza magnetomotriz capaz de producir en el entrehierro de $e = 2$ mm un flujo magnético de 15×10^{-4} Wb.

Solución

La reluctancia del circuito magnético será:

$$R = \frac{1}{\mu'\mu_0} \frac{l}{A} + \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{l + \mu' e}{\mu' A}$$

siendo l la longitud del hierro y e la del entrehierro. Sustituyendo nos queda:

$$R = \frac{10^7}{4\pi} \frac{2\pi 20 \times 10^{-2} + 2\,000 \times 2 \times 10^{-3}}{2\,000 \times 15 \times 10^{-4}} = 1\,394 \times 10^3 \text{ A/Wb}$$

despejando en la ley de Ohm para circuitos magnéticos la fuerza magnetomotriz, nos queda:

$$M = R\phi = 1\,394 \times 10^3 \times 15 \times 10^{-4} = 2\,091 \text{ A}$$