Capítulo V

ESTUDIO CINEMATICO DE DIVERSOS MOVIMIENTOS PARTICULARES

A) MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA EN TRAYECTORIA RECTA

FORMULARIO

MOVIMIENTOS UNIFORMES:

$$s = s_0 + vt \qquad \text{Si:} \qquad s_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s = vt$$

MOVIMIENTOS UNIFORMEMENTE ACELERADOS:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

MOVIMIENTOS UNIFORMEMENTE ACELERADOS, PARTIENDO O LLEGANDO AL REPOSO:

$$s = \frac{1}{2} . |a| \, t^2 \qquad\qquad s = \frac{1}{2} \, vt$$

$$v = |a| \, t \qquad\qquad v = \sqrt{2 \, |a| \, s}$$

Problema 1. ¿Qué tiempo tardaría en recorrer una circunferencia máxima de la Tierra un avión a la velocidad del sonido, 340 m/s?

Solución

Circunferencia máxima terrestre $\simeq$ 40 000 000 m. De la expresión:

$$s = \frac{v}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{s}{v} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t = \frac{4 \times 10^7}{340} = 177\,647 \text{ s} = 32^{\text{h}}\ 40^{\text{min}}\ 47^{\text{s}}}$$

Problema 2. La distancia mínima a que debe estar un muro para que se produzca eco al emitir enfrente de él una sílaba, es 17 m; el mínimo tiempo para que se perciban dos sílabas distintamente es 0,1 s (poder separador del oído medio). Calcular con estos datos la velocidad de propagación del sonido en el aire, teniendo en cuenta que el sonido va y vuelve en el trayecto de 17 m. ¿Cuál es el valor de una velocidad «supersónica» en km/h?

Solución

El sonido recorre: $2 \times 17 = 34$ m en 0,1 s. La velocidad es:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{34}{0{,}1} = 340 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 340 \text{ m/s} = \frac{340 \times 3\,600}{1\,000} = 34 \times 36 = 1\,224 \text{ km/h}}$$

$$\boxed{\text{La velocidad supersónica es mayor de } 1\,224 \text{ km/h}}$$

Problema 3. Entre dos observadores hay una distancia de 1 050 m; uno de ellos dispara un arma de fuego y el otro cuenta el tiempo que transcurre desde que ve el fogonazo hasta que oye el sonido, obteniendo un valor de 3 s. Despreciando el tiempo empleado por la luz en hacer tal recorrido, calcular la velocidad de propagación del sonido.

Solución

La velocidad es: $\boxed{v = s / t = 1\,050 / 3 = 350 \text{ m/s}}$

Problema 4. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los problemas anteriores, calcular:
1. La componente de la velocidad del viento en la dirección de los observadores en la experiencia del problema 2.
2. ¿Qué tiempo tardaría el sonido en recorrer los 1 050 m si los observadores del anterior problema invirtieran sus posiciones?

Solución

1) La componente de la velocidad del viento es la diferencia de los resultados de los dos problemas anteriores:

$$\boxed{350 - 340 = 10 \text{ m/s}}$$

2) Haciendo la observación inversamente, el sonido se propagará en contra del viento, con una velocidad:

$$v = 340 - 10 = 330 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = s / v = 1\,050 / 330 = 3{,}18 \text{ s}}$$

Problema 5. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 s de ver un fogonazo oímos el disparo del cañón, y a los 11 s del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Velocidad del sonido, 340 m/s.

Solución

Despreciando el tiempo empleado por la luz en su recorrido, la distancia a que se encuentra el enemigo es:

$$\boxed{s = 340 \times 3 = 1\,020 \text{ m}}$$

El sonido emplea para ir y volver a la costa, desde nuestra posición, un tiempo que es:

$$t = 11 - 3 = 8 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad 2s' = 340 \times 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s' = 1\,360 \text{ m}}$$

Problema 6. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas abajo de 20 km/h. Calcular:

1. ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?
2. ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?
3. ¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

Solución

1)

$$\boxed{\bar{v} = \frac{s_{\text{total}}}{t_{\text{total}}} = \frac{s_{\text{subidas}} + s_{\text{baja}}}{t_{\text{total}}} = \frac{2s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_2}} = \frac{2\,v_1\,v_2}{v_1 + v_2} = 8 \text{ km/h}}$$

2)

$$\boxed{\bar{v}\ \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 12{,}5 \text{ km/h}}$$

3)

$$\boxed{\bar{v} = \frac{v_1 2t + v_2 t}{3t} = \frac{2\,v_1 + v_2}{3} = \frac{2 \times 5 + 20}{3} = 10 \text{ km/h}}$$

(Obsérvese que únicamente la velocidad media es la media aritmética de las velocidades uniformes, en el caso de que el tiempo que duran los distintos recorridos es el mismo).

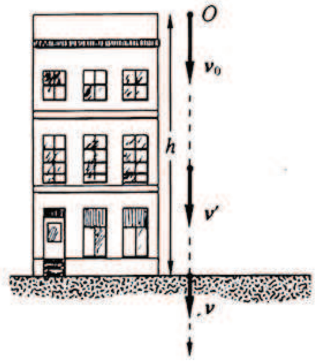
Problema 7. Desde la cornisa de un edificio de 60 m de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 10 m/s. Calcular:

1. Velocidad con que llega al suelo.
2. Tiempo que tarda en llegar al suelo.
3. Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido.
4. Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado 3).

Solución

Tomamos magnitudes positivas las que van hacia abajo. Las ecuaciones de este movimiento referidas al punto de lanzamiento como origen serán:

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 + gt \\ s = v_0 t + \dfrac{1}{2}\, gt^2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} v_0 = 10 \text{ m/s} \\ g = 10 \text{ m/s}^2 \end{array}$$



Problema V-7

1) y 2)

$$h = 60 \text{ m} \quad \left|\begin{array}{l} v = 10 + 10t \\ 60 = 10t + \dfrac{1}{2}\, 10t^2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \boxed{t = 2{,}6 \text{ s}} \\ \boxed{v = 36 \text{ m/s}} \end{array}$$

3) y 4)

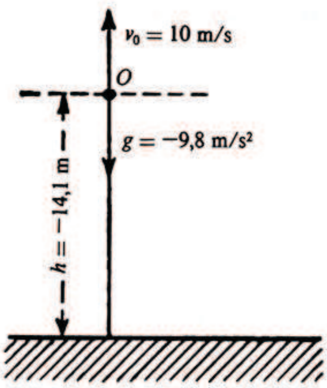
$$h' = 30 \text{ m} \quad \left|\begin{array}{l} v' = 10 + 10t' \\ 30 = 10t' + \dfrac{1}{2}\, 10t'^2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \boxed{t' = 1{,}65 \text{ s}} \\ \boxed{v' = 26{,}5 \text{ m/s}} \end{array}$$

Problema 8. Desde el balcón situado a 14,1 m sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcular el tiempo que tardará en llegar al suelo.

Solución

Tomando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y como sentido positivo el del eje vertical ascendente, nuestros datos son:

$$v_0 = 10 \text{ m/s} \qquad h = -14{,}1 \text{ m} \qquad g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$



Problema V-8

Sustituyendo en la ecuación general:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}\, gt^2$$

tenemos:

$$-14{,}1 = 10t - \frac{1}{2}\, 9{,}8\, t^2$$

Ecuación de segundo grado en t, que resuelta nos da, para valores del tiempo: $t_1 = 3$ s y $t_2 \simeq -0{,}96$ s.

El tiempo pedido es 3 s; tiempo invertido por el cuerpo en subir hasta la cúspide del trayecto y caer desde ella hasta la calle.

El tiempo negativo $-0{,}96$ s (anterior al origen de los tiempos) hubiese sido el empleado por el cuerpo lanzado desde el suelo, en subir hasta el origen *(O)* y pasar por él a la velocidad de 10 m/s hacia arriba.

Problema 9. Desde lo alto de una torre de 100 m de alta se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con la velocidad de 15 m/s. La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer por la parte exterior de la torre. Tomando como origen de ordenadas el punto de lanzamiento, calcular la posición y velocidad de la piedra al cabo de 1 y 4 s después de su salida. ¿Cuál es la altura alcanzada por la piedra y qué tiempo tarda en alcanzarla? Asimismo calcular la velocidad cuando se encuentra a 8 m por encima del punto de partida y cuando cayendo pasa por el citado punto de partida. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo y qué velocidad lleva en ese momento?

Solución

Tomamos magnitudes positivas las que van hacia arriba. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 + gt \\ s = v_0 t + \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} v_0 = 15 \text{ m/s} \\ g = -10 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

$$t = 1 \text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} v = 15 - 10 \times 1 = 5 \text{ m/s (subiendo)} \\ h = 15 \times 1 - \dfrac{1}{2}\, 10 \times 1^2 = 10 \text{ m} \end{array}\right.$$

$$t = 4 \text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} v = 15 - 10 \times 4 = -25 \text{ m/s (bajando)} \\ h = 15 \times 4 - \dfrac{1}{2} 10 \times 16 = -20 \text{ m} \end{array}\right.$$

$$v = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 15 = 10t \;\Rightarrow\; t = \dfrac{3}{2} \text{ s} \\ h = \dfrac{1}{2}\, 10\, \dfrac{9}{4} = \dfrac{45}{4} \text{ m} \end{array}\right.$$

$$h = 8 \text{ m} \quad \left| \begin{array}{l} 8 = 15t - \dfrac{1}{2}\, 10t^2 \quad \left| \begin{array}{l} t_1 = 0{,}7 \text{ s} \\ t_2 = 2{,}3 \text{ s} \end{array}\right. \\ v_1 = 15 - 10 \times 0{,}7 = \;\; 8 \text{ m/s} \\ v_2 = 15 - 10 \times 2{,}3 = -8 \text{ m/s} \end{array}\right.$$

$$h = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0 = 15t - \dfrac{1}{2}\, 10t^2 \quad \left| \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_2 = 3 \text{ s} \end{array}\right. \\ v_1 = 15 - 0 \times 10 = \;\; 15 \text{ m/s} \\ v_2 = 15 - 3 \times 10 = -15 \text{ m/s} \end{array}\right.$$

$$h = -100 \text{ m} \quad \left| \begin{array}{l} -100 = 15t - \dfrac{1}{2}\, 10t^2 \quad \Rightarrow \quad t \simeq 6{,}2 \text{ s} \\ v = 15 - 10 \times 6{,}2 = -47 \text{ m/s} \end{array}\right.$$

Problema 10. Una piedra que cae libremente y pasa a las 10^h, frente a un observador situado a 300 m sobre el suelo, y a las $10^h\ 2^s$ frente a un observador situado a 200 m sobre el suelo. Se pide calcular:

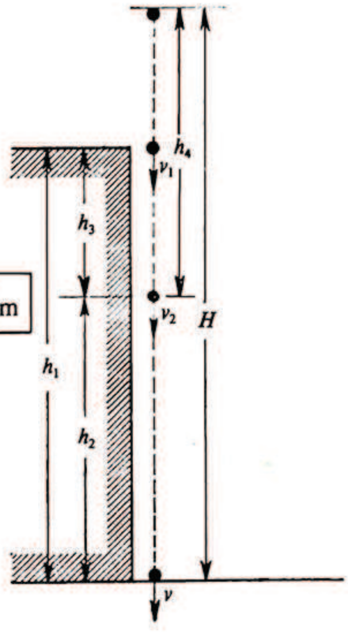
1. La altura desde la que cae.
2. En qué momento llegará al suelo.
3. La velocidad con que llegará al suelo.

Solución

$$h_1 = 300 \text{ m} \quad h_2 = 200 \text{ m} \quad h_3 = 100 \text{ m} \quad \Bigg| \quad t_1 = 2 \text{ s} \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = v_1 + g t_1 \\ h_3 = v_1 t_1 + \dfrac{1}{2} g t_1^2 \\ h_4 = \dfrac{v_2^2}{2g} \\ H = h_2 + h_4 \end{array}\right| \begin{array}{l} v_2 = v_1 + 10 \times 2 \\ 100 = 2 v_1 + \dfrac{1}{2}\, 10 \times 4 \\ h_4 = \dfrac{v_2^2}{2 \times 10} \end{array} \left| \begin{array}{l} v_1 = 40 \text{ m/s} \\ v_2 = 60 \text{ m/s} \\ h_4 = 180 \text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{H = 200 + 180 = 380 \text{ m}}$$



Problema V-10

2) Llamando t_2 al tiempo que tarda en recorrer h_1:

$$h_1 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad 300 = 40 t_2 + \frac{1}{2}\, 10 t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 \simeq 5 \text{ s}$$

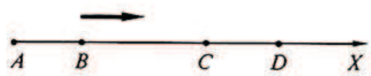
$\boxed{\text{Luego llega al suelo a las } 10^h\ 5^s}$

3)

$$\boxed{v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 10 \times 380} \simeq 87 \text{ m/s}}$$

Problema 11. Un móvil parte del reposo y de un punto A, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado ($a = 10$ cm/s²); tarda en recorrer una distancia $BC = 105$ cm un tiempo de 3 s, y, finalmente, llega al punto D ($CD = 55$ cm). Calcular:

1. La velocidad del móvil en los puntos B, C y D.
2. La distancia AB.
3. El tiempo invertido en el recorrido AB y en el CD.
4. El tiempo total en el recorrido AD.



Problema V-11

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} BC = v_B t + \dfrac{1}{2} a t^2 \\ 105 = v_B\, 3 + \dfrac{1}{2}\, 10 \times 9 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_B = 20 \text{ cm/s}}$$

$$\boxed{v_C = v_B + at = 20 + 30 = 50 \text{ cm/s}}$$

$$CD = v_C t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$55 = 50 t + \frac{1}{2} 10 t^2$$
$$t^2 + 10t - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1 \text{ s}}$$

$$\boxed{v_D = v_C + at = 50 + 10 = 60 \text{ cm/s}}$$

2)
$$v_B = \sqrt{2aAB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{AB = v_B^2 / 2a = 400 / 20 = 20 \text{ cm}}$$

3)
$$v_B = at$$
$$20 = 10t \quad \boxed{t = \frac{20}{10} = 2 \text{ s}}$$

4) Será la suma de los tiempos parciales:

$$\boxed{t = 2 + 3 + 1 = 6 \text{ s}}$$

Problema 12. Determinar la profundidad de un pozo si el sonido producido por una piedra que se suelta en su brocal, al chocar con el fondo se oye 2 s después. (Velocidad del sonido, 340 m/s).

Solución

t_1: tiempo de bajada de la piedra. t_2: tiempo de subida del sonido. h: profundidad del pozo.

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 = 4{,}9\, t_1^2$$
$$h = v t_2 = 340\, t_2$$
$$t_1 + t_2 = 2 \text{ s}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{h = 18{,}5 \text{ m}}$$

Problema 13. Un automóvil arranca de un punto y transcurridos 5 s alcanza la velocidad de 108 km/h desde cuyo momento la conserva, hasta que a los 2 minutos de alcanzarla, frena hasta pararse al producirle los frenos una deceleración de 10 m/s².
Calcular el tiempo transcurrido y el espacio recorrido desde que arranca hasta que se para.

Solución

$v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ $\qquad t_1 = 5 \text{ s}$ $\qquad t_2 = 2 \times 60 \text{ s} = 120 \text{ s}$

$$v = |a_3|\, t_3 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{30}{10} = 3 \text{ s} \qquad \boxed{t = t_1 + t_2 + t_3 = 128 \text{ s} = 2^{\text{min}}\, 8^{\text{s}}}$$

$$s_1 = \frac{1}{2} v t_1 = \frac{1}{2} 30 \times 5 = 75 \text{ m}$$

$$s_2 = v t_2 = 30 \times 120 = 3600 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{2\,|a_3|\,s_3} \quad \Rightarrow \quad s_3 = \frac{v^2}{2\,|a_3|} = \frac{900}{2 \times 10} = 45 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = s_1 + s_2 + s_3 = 3720 \text{ m}}$$

Problema 14. Un móvil parte de un punto con una velocidad de 110 cm/s y recorre una trayectoria rectilínea con aceleración de -10 cm/s². Calcular el tiempo que tardará en pasar por un punto que dista 105 cm del punto de partida. (Interpretar físicamente las dos soluciones que se obtienen).

Solución

La ecuación del movimiento es:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad 105 = 110\,t - \frac{1}{2}\, 10\,t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 22\,t + 21 = 0$$

$$\boxed{t_1 = 21 \text{ s}} \qquad \boxed{t_2 = 1 \text{ s}}$$

t_2 representa el tiempo que tarda el móvil en recorrer los 105 primeros cm.

t_1 representa el tiempo que tarda el móvil en pararse por su movimiento retardado y retrocediendo luego con movimiento acelerado llegar de nuevo al punto que dista del origen 105 cm.

Problema 15. Una partícula se mueve sobre una recta con un movimiento uniformemente variado. En los instantes 1, 2, 3 s, las distancias al origen de espacios son: 70, 90, 100 m. Calcular la velocidad inicial del móvil, su aceleración y el momento de su paso por el origen de espacios.

Solución

$$70 = s_0 + v_0 + \frac{1}{2} a \qquad s_0 = 40 \text{ m}$$

$$90 = s_0 + 2\,v_0 + \frac{1}{2} a 4 \qquad \boxed{v_0 = 35 \text{ m/s}}$$

$$100 = s_0 + 3\,v_0 + \frac{1}{2} a 9 \qquad \boxed{a = -10 \text{ m/s}^2}$$

$$0 = 40 + 35\,t - \frac{1}{2}\, 10\,t^2 \qquad \boxed{t_1 = 8 \text{ s}}$$

$$t^2 - 7\,t - 8 = 0 \qquad \boxed{t_2 = -1 \text{ s}}$$

El móvil pasó por el origen, 1 s antes de comenzar a contar el tiempo, avanza con movimiento *decelerado* se para, retrocede y a los 8 segundos de empezar a cronometrar pasa de nuevo por el origen.

Problema 16. Hallar las fórmulas de un movimiento uniformemente variado sabiendo que la aceleración es 8 cm/s², que la velocidad se anula para $t = 3$ s, y que el espacio se anula para $t = 11$ s.

Solución

$$0 = v_0 + 8 \times 3 \quad \Rightarrow \quad v_0 = -24 \text{ cm/s}$$

$$0 = s_0 - 24 \times 11 + \frac{1}{2} 8 \times 121 \quad \Rightarrow \quad s_0 = -220 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = -200 - 24t + 4t^2} \qquad \boxed{v = -24 + 8t}$$

Problema 17. La expresión que nos determina la velocidad de un punto móvil en el sistema CGS es: $v = 12 + 4t$. Sabiendo que el móvil inició su movimiento partiendo del reposo y desde el origen de coordenadas, en un instante anterior al origen de los tiempos, calcular:

1. La velocidad inicial.
2. La aceleración.
3. ¿Qué clase de movimiento es?
4. El espacio inicial.
5. La ecuación del espacio en función del tiempo.

Solución

1) Para calcular la velocidad inicial haremos $t = 0$:

$$\boxed{v_0 = 12 \text{ cm/s}}$$

2)

$$\boxed{a = dv / dt = 4 \text{ cm/s}^2}$$

3) El movimiento es uniformemente acelerado (a = constante).

4) El espacio inicial ha sido recorrido con movimiento uniformemente acelerado, partiendo del reposo y alcanzando una velocidad $v_0 = 12$ cm/s:

$$v_0 = \sqrt{2 a s_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_0 = v_0^2 / 2a = 144 / 8 = 18 \text{ cm}}$$

5)

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 18 + 12t + 2t^2}$$

Problema 18. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada en el SI por la ecuación: $v = 40 - 8t$. Para $t = 2$ s el punto dista del origen 80 m. Determinar:

1. La expresión general de la distancia al origen.
2. El espacio inicial.
3. La aceleración.
4. ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula?

5. ¿Cuánto dista del origen en tal instante?
6. Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de $t = 0$, cuando $t = 7$ s, $t = 10$ s, y $t = 15$ s.

Solución

1) $$s = \int v\,dt = \int (40 - 8t)\,dt = 40t - 4t^2 + C \qquad \boxed{s = s_0 + 40t - 4t^2}$$

2) $$80 = s_0 + 80 - 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_0 = 16 \text{ m}}$$

3) $$\boxed{a = dv / dt = -8 \text{ m/s}^2}$$

4) $$0 = 40 - 8t \qquad \boxed{t = 5 \text{ s}}$$

5) $$\boxed{s_5 = 16 + 40 \times 5 - 4 \times 5^2 = 116 \text{ m}}$$

6)
$$s_7 = 16 + 40 \times 7 - 4 \times 7^2 = 100 \text{ m}$$
$$s_{10} = 16 + 40 \times 10 - 4 \times 10^2 = 16 \text{ m}$$
$$s_{15} = 16 + 40 \times 15 - 4 \times 15^2 = -284 \text{ m}$$

Cálculo de caminos sobre la trayectoria a partir de $t = 0$.
El móvil cambia el sentido de su velocidad para $t = 5$ s.
El recorrido en los 5 primeros segundos es: $C = 40t - 4\,t^2 = 100$ m
A ellos hay que sumar el recorrido en los segundos restantes que se obtienen de la integral de la ecuación general de la velocidad, cambiada de signo, entre los límites $t = 5$ s y $t =$ instante final.

$$\boxed{\begin{aligned} C_7 &= 100 - \int_5^7 (40 - 8t)\,dt = 116 \text{ m} \\ C_{10} &= 100 - \int_5^{10} (40 - 8t)\,dt = 200 \text{ m} \\ C_{15} &= 100 - \int_5^{15} (40 - 8t)\,dt = 500 \text{ m} \end{aligned}}$$

Problema 19. Demostrar que todo movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado obedece a la ecuación: $v^2 = v_0^2 + 2as$

Solución

1.^{er} Método:
Teóricamente se obtienen para ecuaciones cinemáticas de este movimiento las fórmulas:

$$v = v_0 + at$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}\,at^2$$

despejando t en la primera y sustituyendo en la segunda nos queda:

$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad \Rightarrow \quad s = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left[\frac{v - v_0}{a} \right]^2$$

$$2sa = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2vv_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2as}$$

2.º MÉTODO:
Las ecuaciones diferenciales de todo movimiento rectilíneo son:

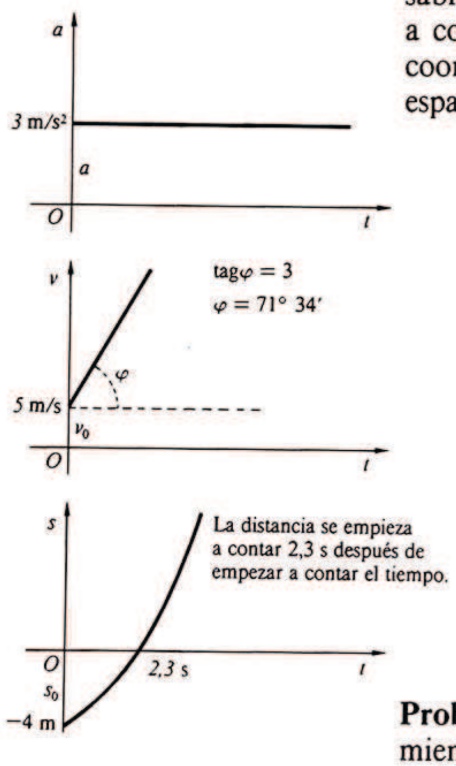
$$v = ds / dt \qquad\qquad a = dv / dt$$

despejando dt en la primera y sustituyendo en la segunda nos queda: $v\ dv = a\ ds$ ecuación diferencial característica de los movimientos rectilíneos. Integrando y teniendo en cuenta que $a = \text{ct}^{\text{e}}$:

$$\frac{1}{2} v^2 = as + C \quad \left| \begin{array}{c} t = 0 \\ s = 0 \end{array} \right| \quad C = \frac{1}{2} v_0^2$$

con v_0 velocidad inicial. Luego: $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2as}$

Problema 20. Determinar las constantes de un movimiento uniformemente variado, sabiendo que el móvil tiene una velocidad de 17 m/s a los 4 s de haber comenzado a contar el tiempo, y que en los tiempos $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s. dista del origen de coordenadas 12 m y 40 m, respectivamente. Representar gráficamente las curvas de espacios, velocidades y aceleraciones.



Problema V-20

Solución

$$\begin{array}{l|l} 17 = v_0 + 4a & \boxed{s_0 = -4 \text{ m}} \\ 12 = s_0 + 2v_0 + \frac{1}{2} a 4 & \boxed{v_0 = \ \ 5 \text{ m/s}} \\ 40 = s_0 + 4v_0 + \frac{1}{2} a 16 & \boxed{a = \ \ 3 \text{ m/s}^2} \end{array}$$

Las ecuaciones horarias escritas en el SI serán:

$$a = 3 \text{ m/s} \qquad v = 5 + 3t \qquad s = -4 + 5t + 1{,}5t^2$$

cuyas representaciones gráficas son las de las Fig.

Problema 21. Trazar la curva de los espacios y la de las velocidades en el movimiento dado por la fórmula $s = 4 - 26t + 4t^2$ (GIORGI) y determinar los instantes para los cuales la velocidad y el espacio tienen el mismo valor numérico.

Solución

$$v = ds / dt = -26 + 8t$$

La curva: $s = s(t)$, es una parábola. Cálculo del máximo o mínimo:

$$ds / dt = -26 + 8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}25 \text{ s} \qquad s_m = -38{,}25 \text{ m}$$

$d^2s / dt^2 = 8 > 0$; el punto (3,25, −38,25) es un mínimo.

Cálculo de cortes con los ejes:
La parábola corta el eje de los espacios en: $s = 4$ m , para $t = 0$

La parábola corta al eje de los tiempos en las soluciones de la ecuación:

$$0 = 4 - 26t + 4t^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}16 \text{ s} \qquad t_2 = 6{,}34 \text{ s}$$

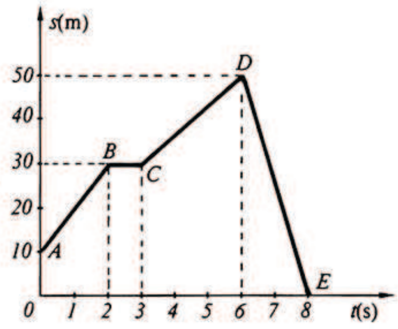
La función: $v = v(t)$, es una recta que corta al eje de los tiempos en la solución de la ecuación:

$$0 = -26 + 8t \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}25 \text{ s}$$

corta al eje de las velocidades en: $v = -26$ m/s

(El alumno con tales datos, debe trazar los gráficos correspondientes.)
La velocidad y el espacio tendrán el mismo valor cuando:

$$4 - 26t + 4t^2 = -26 + 8t \quad \Rightarrow \quad 4t^2 - 34t + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ s} \\ 7{,}50 \text{ s} \end{array} \right.$$



Problema V-22

Problema 22. El gráfico de la Fig. nos representa el movimiento realizado por un móvil en trayectoría recta. Interpretar y clasificar su movimiento.

Solución

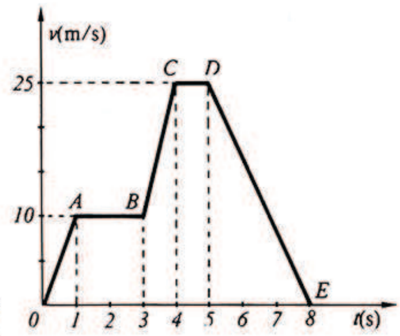
Tramo *AB.*—Su ecuación es: $s = 10 + 10t$
El movimiento es uniforme de velocidad: $v = ds / dt = 10$ m/s
el espacio inicial (para $t = 0$) vale $s_0 = 10$ m.

Tramo *BC.*—Su ecuación es: $s = 30$ m
El móvil está parado en el intervalo de tiempo de 2 a 3 s.

Tramo *CD.*—Su ecuación es: $s = 10 + \dfrac{20}{3}\, t$

El movimiento es uniforme de velocidad: $v = ds / dt = 20 / 3$ m/s
El móvil comienza este movimiento a los 3 s de partir y dista del origen de espacios 30 m.

Tramo *DE.*—Su ecuación es: $s = 200 - 25t$
El movimiento es uniforme de velocidad: $v = ds / dt = -25$ m/s
el signo menos nos indica que se mueve en sentido opuesto al llevado en los tramos anteriores, y en el instante $t = 8$ s se encuentra en el origen de los espacios.
El móvil comienza este movimiento a los 6 s de partir y dista del origen de espacios 50 m.



Problema V-23

Problema 23. El gráfico de la Fig. nos representa la velocidad de un móvil en trayectoria recta, en el que para $t = 0$, $s_0 = 0$. Determinar las ecuaciones del espacio y aceleración interpretando el movimiento que tiene en cada caso.

Tramo OA.—Su ecuación es: $v = 10t$

la ecuación del espacio: $s = \int v\,dt = \int 10t\,dt = 5t^2 + C_1$

y como para $t = 0$, $s = 0$ $\Rightarrow$ $C_1 = 0$; luego: $\boxed{s = 5t^2}$

El movimiento es uniformemente acelerado de aceleración: $\boxed{a = dv / dt = 10 \text{ m/s}^2}$

Tramo AB.—Su ecuación es: $v = 10$ m/s

luego el *movimiento es uniforme* ($a = 0$) desde el primero al tercer segundo; la ecuación del espacio la calcularemos:

$$s = \int v\,dt = \int 10\,dt = 10t^2 + C_2$$

para calcular C_2 tendremos en cuenta que en el segundo anterior (Tramo OA) el móvil recorrió una distancia:

$$t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad s_{OA} = 5t^2 = 5 \text{ m}$$

luego:

$$t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad 5 = 10 \times 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -5 \text{ m}$$

$$\boxed{s = -5 + 10t}$$

Tramo BC.—Su ecuación es: $v = -35 + 15t$

téngase en cuenta que el móvil comienza éste movimiento cuando $t = 3$ s y su velocidad es $v = 10$ m/s en ese instante. La ecuación del espacio será:

$$s = \int v\,dt = \int (-35 + 15t)\,dt = -35t + \frac{15}{2}\,t^2 + C_3$$

para calcular C_3, tendremos en cuenta que el espacio recorrido hasta el tercer segundo se obtendrá sustituyendo en la ecuación del espacio del tramo AB $t = 3$ s:

$$s_{OB} = -5 + 10 \times 3 = 25 \text{ m}$$

luego: $25 = -35 \times 3 + 7{,}5 \times 9 + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 62{,}5$ m

$$\boxed{s = 62{,}5 - 35t + 7{,}5t^2}$$

téngase en cuenta que el móvil comienza a moverse cuando $t = 3$ s, entonces el espacio que ha recorrido antes es de 25 m.

El movimiento es uniformemente acelerado de aceleración: $\boxed{a = dv / dt = 15 \text{ m/s}^2}$

Tramo CD.—Su ecuación es: $v = 25$ m/s

luego *el movimiento es uniforme* ($a = 0$) desde el cuarto al quinto segundo; la ecuación del espacio la calcularemos:

$$s = \int v\,dt = \int 25\,dt = 25t + C_4$$

para calcular C_4, tendremos en cuenta que el espacio recorrido hasta el cuarto segundo se obtendrá sustituyendo en la ecuación del espacio del tramo BC, $t = 4$ s:

$$s_{OC} = 62{,}5 - 35 \times 4 + 7{,}5 \times 4^2 = 42{,}5 \text{ m}$$

luego: $42{,}5 = 25 \times 4 + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_4 = -57{,}5$ m

$$\boxed{s = -57{,}5 + 25t}$$

Tramo DE.—Su ecuación es:

$$v = \frac{200}{3} - \frac{25}{3} t$$

la ecuación del espacio será:

$$s = \int v dt = \frac{200}{3} t - \frac{25}{6} t^2 + C_5$$

si sustituimos en la ecuación del espacio del tramo CD, t por 5 s, obtenemos:

$$s_{OD} = -57{,}5 + 25 \times 5 = 67{,}5 \text{ m}$$

luego:

$$67{,}5 = \frac{200}{3} 5 - \frac{25}{6} 25 + C_5 \qquad \Rightarrow \qquad C_5 = -\frac{485}{3} \text{ m}$$

$$\boxed{s = -\frac{485}{3} + \frac{200}{3} t - \frac{25}{6} t^2}$$

El movimiento es uniformemente decelerado y transcurridos 8 s el móvil llega al reposo; su deceleración es:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -\frac{25}{3} \text{ m/s}^2}$$

y dista del punto de partida: $t = 8 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad s = 105 \text{ m}$

B) MOVIMIENTOS SIMULTANEOS EN TRAYECTORIA RECTA

Problema 24. Dos móviles marchan en sentidos contrarios, dirigiéndose el uno al encuentro del otro con las velocidades de 4 y 5 cm/s respectivamente. Sabiendo que el encuentro tiene lugar a 1,52 m, de la posición de partida del primero, determinar la distancia entre los móviles al comenzar el movimiento y el tiempo transcurrido hasta que se encontraron.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = v_1 t \\ s_2 = v_2 t \end{array}\right| \Rightarrow \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{1{,}52}{s_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow s_2 = 1{,}9 \text{ m}$$

$$\boxed{t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{152}{4} = 38 \text{ s}}$$

La distancia entre los móviles al comenzar el movimiento será: $\boxed{s = s_1 + s_2 = 3{,}42 \text{ m}}$

Problema 25. Un acorazado se aleja de la costa, en la que hay un alto acantilado. A 680 m de la costa dispara un cañonazo; el eco es percibido 4,1 s después. Calcular la velocidad del acorazado. (Se supone para el sonido la velocidad de 340 m/s).

Problema V-25

Solución

Llamando c a la velocidad del sonido:

$$\left.\begin{aligned} 2s_1 + s_2 &= ct \\ s_2 &= vt \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad 2s_1 + vt = ct \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{ct - 2s_1}{t} = \frac{340 \times 4{,}1 - 2 \times 680}{4{,}1} = 8{,}3 \text{ m/s}}$$

Problema 26. Dos puntos materiales A y B se mueven con movimiento uniformemente acelerado partiendo del reposo; la aceleración de B es doble que la de A y el tiempo que emplea A en su trayectoria es triple que el de B. ¿Qué camino recorre B, con respecto al recorrido por A?

Solución

$$\left.\begin{aligned} s_B &= \frac{1}{2}at^2 \\ s_A &= \frac{1}{2}\frac{a}{2}9t^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \boxed{\frac{s_B}{s_A} = \frac{2}{9}}$$

Problema 27. Un automóvil que está parado, arranca con una aceleración de 1,5 m/s². En el mismo momento es adelantado por un camión que lleva una velocidad constante de 15 m/s. Calcular:

1. Distancia contada desde el punto de cruce en la que alcanza el automóvil al camión.

2. Velocidad del automóvil en ese momento.

Solución

1) $$s = \frac{1}{2}at^2 = vt \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{aligned} t &= 0 \\ t &= \frac{2v}{a} = \frac{30}{1{,}5} = 20 \text{ s} \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \boxed{s = 15 \times 20 = 300 \text{ m}}$$

2) $$\boxed{v = at = 1{,}5 \times 20 = 30 \text{ m/s}}$$

Problema 28. Un automóvil y un camión parten en el mismo momento, inicialmente el coche se encuentra a una cierta distancia del camión; si el coche tiene una aceleración de 3 m/s² y el camión de 2 m/s² y el coche alcanza al camión cuando este último ha recorrido 60 m. Calcular:

1. Distancia inicial entre ambos.

2. Velocidad de cada uno en el momento del encuentro.

Solución

1) $$s_C = \frac{1}{2}a_C t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s_C}{a_C}} = \sqrt{\frac{2 \times 60}{2}} = 2\sqrt{15} \text{ s}$$

$$s_A = \frac{1}{2} a_A t^2 = \frac{1}{2} 3 \times 60 = 90 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = s_A - s_C = 30 \text{ m}}$$

2)

$$\boxed{v_A = a_A t = 6\sqrt{15} \text{ m/s}} \quad \boxed{v_C = a_C t = 4\sqrt{15} \text{ m/s}}$$

Problema 29. Dos cuerpos A y B situados a 2 km de distancia salen simultáneamente en la misma dirección ambos con movimiento uniformemente acelerado, siendo la aceleración del más lento, el B, de 0,32 cm/s². Deben encontrarse a 3,025 km. de distancia del punto de partida de cuerpo B. Calcular el tiempo que invertirán en ello y cuál será la aceleración de A, así como las velocidades de los dos en el momento de encontrarse.

Solución

$$s_B = 302\,500 = \frac{1}{2} \; 0{,}32\, t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1\,375 \text{ s}}$$

$$s_A = 502\,500 \text{ cm} = \frac{1}{2} a_A t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_A = \frac{2 s_A}{t^2} \simeq 0{,}53 \text{ cm/s}^2}$$

$$\boxed{v_A = a_A t \simeq 728 \text{ cm/s} \simeq 7{,}28 \text{ m/s}} \quad \boxed{v_B = a_B t = 440 \text{ cm/s} = 4{,}4 \text{ m/s}}$$

Problema 30. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad constante de 3 m/s, si llega al suelo a los 3 s. Calcular:

1. Altura a que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.

2. Distancia globo-piedra a los 2 s del lanzamiento.

Solución

Tomaremos el origen de coordenadas en el punto en que se suelta la piedra. Magnitudes positivas son las que tienen dirección hacia arriba.

1)

$$v_0 = 3 \text{ m/s}, \quad g = -10 \text{ m/s}^2, \quad t = 3 \text{ s}$$

$$\boxed{h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 3 \times 3 - \frac{1}{2} \; 10 \times 9 = -36 \text{ m}}$$

2) $t' = 2$ s. h_1 : espacio recorrido por el globo en t'. h_2 : espacio recorrido por la piedra en t'.

$$h_1 = v_0 t' = 3 \times 2 = 6 \text{ m}$$

$$h_2 = v_0 t' + \frac{1}{2} g t'^2 = 3 \times 2 - \frac{1}{2} \; 10 \times 4 = -14 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d = 6 + 14 = 20 \text{ m}}$$

Problema 31. Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo a arriba, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de 30 m/s. ¿Qué intervalo de tiempo tiene que haber entre los dos lanzamientos para que los dos lleguen a la vez al suelo?

Solución

El tiempo que tarda el primero en llegar al suelo se calcula:

$$h = 0 = v_{01} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 50 t_1 - 5 t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 10 \text{ s}$$

El tiempo del segundo será:

$$h = 0 = v_{02} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad 30 t_2 - 5 t_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 6 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = t_1 - t_2 = 4 \text{ s}}$$

Problema 32. Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo a arriba con dos segundos de intervalo, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de 80 m/s. ¿Cuál será el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentren a la misma altura? ¿A qué altura sucederá? ¿Qué velocidad tendrá cada uno en ese momento?

Solución

$$h = 50t - 4{,}9t^2 = 80(t-2) - 4{,}9\,(t-2)^2$$

$$50t - 4{,}9\,t^2 = 80t - 160 - 4{,}9t^2 - 4{,}9 \times 4 + 2 \times 4{,}9 \times 2t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t \simeq 3{,}62 \text{ s}}$$

$$\boxed{h \simeq 50 \times 3{,}62 - 4{,}9 \times 3{,}62^2 = 116{,}8 \text{ m}}$$

$$\boxed{v_1 \simeq 50 - 9{,}8 \times 3{,}62 = 14{,}5 \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_2 \simeq 80 - 9{,}8 \times 1{,}62 = 64{,}1 \text{ m/s}}$$

Problema 33. La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1 m/s². Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.

Solución

1.er MÉTODO

En el instante de caer el cuerpo el ascensor lleva una velocidad vertical y hacia arriba v. El espacio vertical y hacia abajo que debe recorrer la lámpara es:

$$h - \left(vt + \frac{1}{2} at^2 \right)$$

(h = altura del ascensor) y ($vt + at^2/2$) ascenso del suelo de éste. La lámpara al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba v. Aplicando la ecuación:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

siendo positivas la magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tendremos:

$$-h + vt + \frac{1}{2} at^2 = vt - \frac{1}{2} gt^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{9{,}8 + 1}} \text{ s} = 0{,}74 \text{ s}}$$

2.º MÉTODO

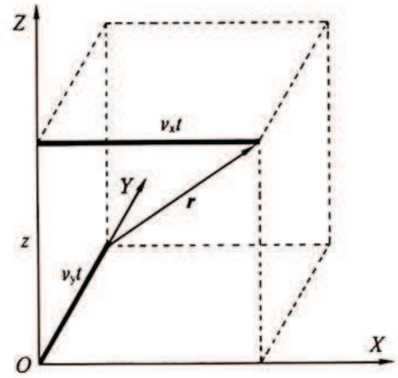
La aceleración de la lámpara respecto al ascensor, considerando magnitudes positivas hacia abajo, es:

$$a_{BA} = a_B - a_A = 9{,}8 - (-1) = 10{,}8 \text{ m/s}^2$$

$$h = \frac{1}{2} a_{BA} t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BA}}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{10{,}8}} = 0{,}74 \text{ s}}$$

Problema 34. Dos carreteras se cruzan bajo un ángulo de 90° por medio de un puente. Ambas carreteras están situadas en planos horizontales. La altura del puente (distancia vertical entre ambas carreteras) es de 11 m. Por la superior circula un coche a la velocidad de 4 m/s, y por la inferior otro a la velocidad de 3 m/s. Cuando el primer coche se encuentra en el centro del puente, el segundo se encuentra exactamente debajo de él. Determinar:

1. La distancia que los separa al cabo de 12 s. de haberse cruzado.
2. La velocidad con que se separan al cabo de estos 12 s.
3. Valor de la acelaración en este momento.



Problema V-34

Solución

$$\boldsymbol{r} = v_x t\,\boldsymbol{i} - v_y t\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = 4t\,\boldsymbol{i} - 3t\,\boldsymbol{j} + 11\,\boldsymbol{k} \text{ m}$$

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = 4\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j} \text{ m/s}$$

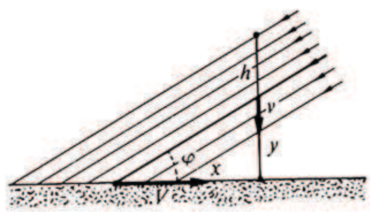
$$\boldsymbol{a} = 0$$

$$t = 12 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = 48\,\boldsymbol{i} - 36\,\boldsymbol{j} + 11\,\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \sqrt{48^2 + 36^2 + 11^2} = 61 \text{ m}} \qquad \boxed{v = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m/s}} \qquad \boxed{a = 0}$$

Problema 35. A una cierta hora del día los rayos solares inciden sobre un lugar con un ángulo φ con la horizontal; dejamos caer libremente un cuerpo desde una altura h sobre un terreno horizontal. Calcular la velocidad de la sombra cuando el cuerpo se encuentra a una altura y del suelo.

Solución



Problema V-35

Al ser:

$$x = \frac{y}{\text{tag}\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\text{tag}\varphi} \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{\text{tag}\varphi} v$$

por otro lado, la velocidad del cuerpo cuando ha recorrido un espacio $h - y$ es:

$$v = \sqrt{2g(h-y)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\sqrt{2g(h-y)}}{\text{tag}\varphi}}$$

C) MOVIMIENTOS CIRCULARES

FORMULARIO

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$s = \varphi R \qquad v = \omega R \qquad a_\tau = \alpha R$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}^0 + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}^\circ$$

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2}R = 4\pi^2\nu^2 R$$

Las ecuaciones de los movimientos circulares uniforme y uniformemente acelerado, son las mismas que las de los lineales de un punto, haciendo las siguientes sustituciones:

s (espacio) .... φ (ángulo)
v (velocidad tangencial) .... ω (velocidad angular)
a (aceleración tangencial) .... α (aceleración angular)

Problema 36. Un volante gira con una velocidad angular de 50 rad/s. Calcular:
1. La velocidad de un punto de periferia sabiendo que su radio es $R = 1$ m.
2. Calcular la velocidad de un punto colocado a una distancia de 0,5 m del centro.
3. Espacio recorrido por ambos puntos materiales en el tiempo de 1 min.

Solución

1) $\boxed{v = \omega R = 50 \times 1 = 50 \text{ m/s}}$

2) $\boxed{v' = \omega R' = 50 \times 0{,}5 = 25 \text{ m/s}}$

3) $\boxed{s = v\,t = 50 \times 60 = 3\,000 \text{ m}}$

$\boxed{s' = v' t = 25 \times 60 = 1\,500 \text{ m}}$

Problema 37. Un disco gira con una velocidad angular de 60 rpm. Si su radio es 1 m. Calcular:
1. Velocidad angular en rad/s.
2. Velocidad lineal de un punto de la periferia y de un punto a 50 cm de su centro.
3. Número de vueltas que da en 1/2 h.

Solución

1) $\nu = 60 \text{ rpm} = 1 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 2\pi\nu = 2\pi \text{ rad/s}}$

2) $\boxed{v = \omega R = 2\pi \text{ m/s}} \qquad \boxed{v' = \omega R' = \pi \text{ m/s}}$

3) $$\boxed{n^{\circ} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{2\pi \times 30 \times 60}{2\pi} = 1\,800 \text{ vueltas}}$$

Problema 38. Calcular la velocidad angular de cualquier punto de la Tierra en su movimiento de rotación alrededor del eje terrestre. Expresar el resultado en grados/hora, en segundos de arco/hora y en segundos de arco/segundo.

Solución

$$\boxed{\omega = \frac{360}{24} = 15°/\text{h}} \qquad \boxed{\omega = \frac{15 \times 60 \times 60 \text{ segundos de arco}}{1 \text{ hora}} = 54\,000''/\text{h}} \qquad \boxed{\omega = \frac{15 \times 60 \times 60 \text{ segundos de arco}}{60 \times 60 \text{ segundos tiempo}} = 15''/\text{s}}$$

Problema 39. Calcular la velocidad tangencial y la aceleración normal de un punto sobre la Tierra situado en un lugar de 60° de latitud. (Radio terrestre = 6 300 km).

Solución

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \text{ rad/h}$$

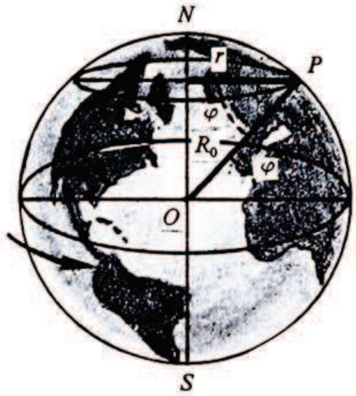
llamando r al radio del paralelo de latitud φ, su relación con el radio terrestre R_0 es:

$$r = R_0 \cos\varphi$$

con lo que:

$$\boxed{v = \omega r = \omega R_0 \cos\varphi = \frac{2\pi}{24}\, 6\,300\, \frac{1}{2} \simeq 824 \text{ km/h}}$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 r = \omega^2 R_0 \cos\varphi = \frac{4\pi^2}{24^2}\, 6\,300\, \frac{1}{2} \simeq 216 \text{ km/h}^2}$$



Problema V-39

Problema 40. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de radio 1 m, dando 30 vueltas cada minuto. Calcular el período, la frecuencia, la velocidad angular, la tangencial, la areolar y la aceleración centrípeta.

Solución

1) $$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ s} - 30 \text{ vueltas} \\ T - 1 \text{ vuelta} \end{array}\right| \Rightarrow T = \frac{60}{30} = 2 \text{ s}$$

2) $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

3) $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

4) $$v = \omega R = \pi \text{ m/s}$$

5) $$V_a = \pi R^2 \nu = 0{,}5\, \pi \text{ m}^2/\text{s}$$

6) $$a_n = \omega^2 R = \pi^2 \text{ m/s}^2$$

Problema 41. Un volante parte del reposo y en 5 s adquiere una velocidad angular de 40 rad/s. Calcular su aceleración angular, supuesta constante y el número de vueltas que ha efectuado.

Solución

$$\omega = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{40}{5} = 8 \text{ rad/s}^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\ 8 \times 5^2 = 100 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^{\circ} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = \frac{50}{\pi} \text{ vueltas}}$$

Problema 42. Un volante de 2 dm de diámetro gira en torno a su eje a 3000 rpm. Un freno lo para en 20 s. Calcular:

1. La aceleración angular supuesta constante.

2. Número de vueltas dadas por el volante hasta que se para.

3. El módulo de la aceleración tangencial, normal y total de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas.

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 = |\alpha|\, t \quad &\Rightarrow \quad |\alpha| = \frac{\omega_0}{t} \\ \omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi\ \frac{3000}{60} &= 100\,\pi \text{ rad/s} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad |\alpha| = \frac{100\,\pi}{20} = 5\,\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\boxed{\alpha = -5\,\pi \text{ rad/s}^2}$$

2)

$$\omega_0 = \sqrt{2\,|\alpha|\,\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{10^4\,\pi^2}{10\pi} = 10^3\,\pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^{\circ} = \frac{10^3\,\pi}{2\pi} = 500 \text{ vueltas}}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \varphi &= 200\pi \text{ rad} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad 200\pi = 100\pi t - \frac{1}{2}\,5\pi t^2 \quad \Rightarrow$$

$$t^2 - 40t + 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{aligned} &t \simeq 37{,}9 \text{ s} > 20 \text{ s (no sirve)} \\ &t \simeq 2{,}1 \text{ s} \end{aligned}\right.$$

La velocidad angular a los 2,1 s de aplicado el freno es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 100\pi - 5\pi\, 2{,}1 = 89{,}5\,\pi \text{ rad/s}$$

luego:

$$\boxed{a_\tau = \alpha R = 5\pi\, 0{,}1 = 0{,}5\,\pi \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a_n = \omega^2 R = 89{,}5^2\,\pi^2\, 0{,}1 \simeq 800\,\pi^2 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \simeq 801\,\pi^2 \text{ m/s}^2}$$

Problema 43. La velocidad angular de un volante, disminuye uniformemente desde 900 a 800 rpm en 5 s. Encontrar:

1. La aceleración angular.

2. El número de revoluciones efectuado por el volante en el intervalo de 5 s.

3. ¿Cuántos segundos más serán necesarios para que el volante se detenga?

Solución

1)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad 2\pi\nu = 2\pi\nu_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2\pi(\nu - \nu_0)}{t} = -\frac{2}{3}\pi \text{ rad/s}^2}$$

2)

$$\boxed{n^o = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 t + \alpha t^2/2}{2\pi} = \frac{2\pi\nu_0 t + \alpha t^2/2}{2\pi} \simeq 62{,}5 \text{ vueltas}}$$

3)

$$\omega = |\alpha| t' \quad \Rightarrow \quad \boxed{t' = \frac{2\pi\nu}{|\alpha|} = \frac{2\pi \times 800 \times 3}{60 \times 2\pi} = 40 \text{ s}}$$

Problema 44. Un automotor parte del reposo, en una vía circular de 400 m de radio, y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los 50 s de iniciada su marcha, alcanza la velocidad de 72 km/h, desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar:

1. La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.
2. La aceleración normal, la aceleración total y la longitud de vía recorrida en ese tiempo, en el momento de cumplirse los 50 s.
3. La velocidad angular media en la primera etapa, y la velocidad angular a los 50 s.
4. Tiempo que tardará el automotor en dar cien vueltas al circuito.

Solución

$$72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

1)

$$v = a_\tau t \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_\tau = \frac{v}{t} = \frac{20}{50} = 0{,}4 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{400}{400} = 1 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}16 + 1} = 1{,}08 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{s = \frac{1}{2} v t = \frac{1}{2} 20 \times 50 = 500 \text{ m}}$$

3)

$$\bar{v} = \bar{\omega} r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\omega} = \frac{\bar{v}}{r} = \frac{s}{tr} = \frac{500}{50 \times 400} = \frac{1}{40} = 0{,}025 \text{ rad/s}}$$

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{v}{r} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 0{,}050 \text{ rad/s}}$$

4)

$$s = 2\pi r n = 2\pi \times 400 \times 100 = 80\,000\,\pi \text{ m}$$

En la primera etapa:

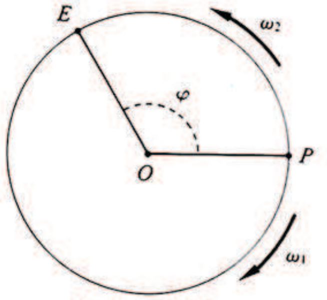
500 metros en 50 s

En la segunda etapa:

$$s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{80\,000\,\pi - 500}{20} = 12\,541 \text{ s}$$

En total el tiempo es: $\boxed{T = 50 + 12\,541 = 12\,591 \text{ s} = 3^{h}\, 29^{min}\, 51^{s}}$

Problema 45. Desde el mismo punto de una circunferencia parten dos móviles en sentidos opuestos. El primero recorre la circunferencia en $2^h\ 4^{min}$, el segundo recorre un arco de 6° 30′ por minuto. Determinar en qué punto se encontrarán y el tiempo invertido.



Problema V-45

Solución

$$T_1 = 124 \text{ min} \quad \left| \begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{360}{124}\ °/\text{min} \\ \omega_2 = 6{,}5°/\text{min} \end{array} \right| \begin{array}{l} \varphi = \dfrac{360}{124}\, t \\ 360 - \varphi = 6{,}5\, t \end{array} \Bigg| \Rightarrow \quad \frac{\varphi}{360-\varphi} = \frac{360}{124 \times 6{,}5}$$

$$\boxed{\varphi = 111°\ 9'} \qquad \boxed{t \simeq 38{,}3 \text{ min}}$$

Problema 46. Dos móviles parten simultáneamente del mismo punto y en el mismo sentido recorriendo una trayectoria circular. El primero está animado de movimiento uniforme de velocidad angular 2 rad/s y el segundo hace su recorrido con aceleración angular constante de valor 1 rad/s². ¿Cuánto tiempo tardarán en reunirse de nuevo y qué ángulo han descrito en tal instante? La circunferencia sobre la cual se mueven los móviles es de 2 m de radio. ¿Qué velocidad tiene cada uno de los móviles en el instante de la reunión? ¿Qué aceleración tangencial? ¿Qué aceleración normal? ¿Qué aceleración resultante y en qué dirección?

Solución

1) $$\begin{array}{l} \varphi = \omega t \\ \varphi = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \omega t = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{dos soluciones} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \boxed{t = \dfrac{2\omega}{\alpha} = 4 \text{ s}} \\ t = 0 \quad \text{(origen)} \end{array}$$

$$\boxed{\varphi = 2 \times 4 = 8 \text{ rad}}$$

2)

$$\boxed{v_1 = \omega_1 r = 2 \times 2 = 4 \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_2 = \omega_2 r = \alpha t r = 1 \times 4 \times 2 = 8 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{a_{1\tau} = 0} \qquad \boxed{a_{1n} = \omega_1^2 r = 2^2 \times 2 = 8 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a_1 = \sqrt{a^2_{1\tau} + a^2_{1n}} = \sqrt{0 + 64} = 8 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{a_{2\tau} = \alpha r = 1 \times 2 = 2 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a_{2n} = \omega_2^2 r = 4^2 \times 2 = 32 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a_2 = \sqrt{a^2_{1\tau} + a^2_{1n}} = \sqrt{2^2 + 32^2} = 2\sqrt{257} \text{ m/s}^2}$$

$$\text{tag}\beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 3°\ 34'\ 35''} \quad (\beta = \text{ángulo de } a_2 \text{ con } r).$$

Problema 47. Un móvil parte del reposo y del origen, recorre una trayectoria circular de 20 cm de radio, con una aceleración tangencial que viene dada el sistema CGS por la expresión: $a_\tau = 60t$. Determinar en módulo, dirección y sentido, la aceleración del móvil a los 2/3 s de iniciado el movimiento.

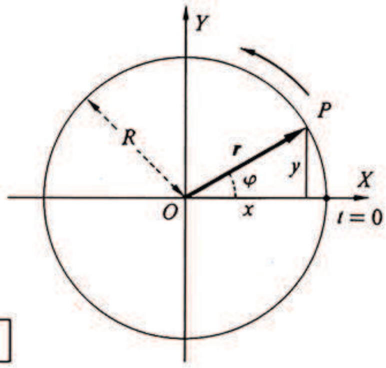
Solución

$$a_\tau = dv/dt \quad \Rightarrow \quad dv = a_\tau dt \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} v = \displaystyle\int 60t\,dt = 30t^2 + C \\ C = v_0 = 0 \end{array} \Bigg| \; v = 30t^2$$

$$\text{Si } t = \frac{2}{3}\text{ s:} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} a_\tau = 60\,\dfrac{2}{3} = 40 \text{ cm/s}^2 \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(30t^2)^2}{20} = 45t^4 = \dfrac{80}{9} \text{ cm/s}^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 41 \text{ cm/s}^2}$$

$$\text{tag}\beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 77°\ 28'\ 16''}$$

Problema 48. Una partícula se mueve con movimiento circular y uniforme (ω = ct^{e}.) de radio R. Si tomamos el origen de un sistema de coordenadas en el centro de la circunferencia trayectoria; calcúlese el vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración, poniendo este último en función del tiempo y del vector de posición. (El origen de los tiempos lo tomamos sobre el eje OX).



Problema V-48

Solución

$$\left. \begin{array}{l} x = R\cos\varphi \\ y = R\,\text{sen}\alpha \\ \varphi = \omega t \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = R\,(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \text{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j})}$$

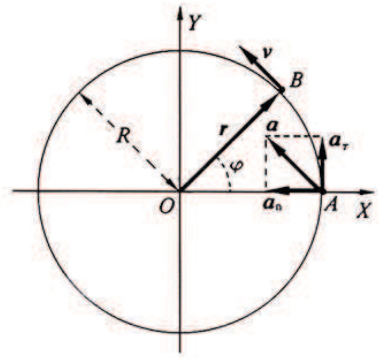
$$\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = R\omega\,(-\text{sen}\omega t\,\boldsymbol{i} + \cos\omega t\,\boldsymbol{j})} \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt = -R\omega^2\,(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \text{sen}\omega t\,\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}}$$

Problema 49. Una partícula describe una circunferencia de 27 cm de radio, aumentando con el tiempo el valor de su velocidad, de una forma constante. En el punto A la velocidad es 9 cm/s; en el B, transcurridos 0,25 s es 10 cm/s. Calcular el vector aceleración en el punto A.

Solución

Tomando los ejes de referencia como se indica en la Fig.:

$$\left. \begin{array}{l} a_x = a_n = -\dfrac{v_0^2}{R} = -\dfrac{9^2}{27} = -3 \text{ cm/s}^2 \\ a_y = a_\tau = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{10-9}{0{,}25} = 4 \text{ cm/s}^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2}$$



Problema V-49

Problema 50. Una partícula posee un movimiento circular y uniforme de 1 m de radio, dando 1 vuelta en 10 s. Calcular:

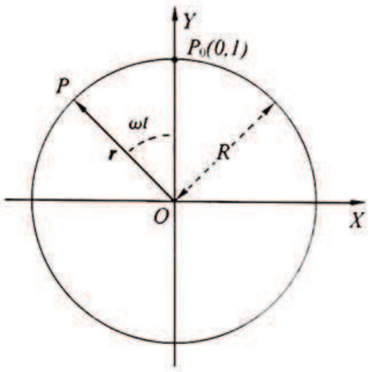
1. El vector de posición referido al centro de la trayectoria como origen si la partícula inicialmente se encuentra en el punto P_0 (0, 1) m.

2. El vector velocidad y aceleración a los 5 s de iniciado el movimiento.

3. Velocidad media en el intervalo de 5 s comprendido entre el quinto y décimo segundo.

Solución

$$\nu = \frac{1}{10}\text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{5}\text{ rad/s}$$



Problema V-50

1) $$\boldsymbol{r} = R\,(-\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i}\,sen\,\frac{\pi t}{5} + \boldsymbol{j}\cos\,\frac{\pi t}{5}}$$

2) $$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -R\omega\,(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\omega t)$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -R\omega^2(-\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t) = -R\omega^2\boldsymbol{r}$$

$$t = 5\text{ s} \quad \left|\; \begin{aligned} &\boldsymbol{v} = -\,\frac{\pi}{5}\,(\boldsymbol{i}\cos\pi + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\pi) = \frac{\pi}{5}\boldsymbol{i}\text{ m/s} \\ &\boxed{\boldsymbol{a} = -\,\frac{\pi^2}{25}\,(-\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\pi + \boldsymbol{j}\cos\pi) = \frac{\pi^2}{25}\boldsymbol{j}\text{ m/s}^2} \end{aligned}\right.$$

3) El ángulo girado en 5 s cualquiera que sea el intervalo es: $\varphi = \omega t = \pi$ rad, al que corresponde un arco:

$$l = \varphi R = \pi\text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{v} = \frac{l}{t} = \frac{\pi}{5}\text{ m/s}}$$

Problema 51. El vector de posición de una partícula que se mueve en trayectoria plana es: $\boldsymbol{r} = (5\cos\pi t - 1)\boldsymbol{i} + (5\operatorname{sen}\pi t + 2)\boldsymbol{j}$ (GIORGI).

1. Demuéstrese que el movimiento es circular y uniforme.
2. Calcular el radio de la circunferencia trayectoria.
3. Calcular la frecuencia de este movimiento.

Solución

1) Un movimiento circular y uniforme viene caracterizado porque los módulos de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}_n$ son constantes y por tanto no existe $\boldsymbol{a}_\tau$.

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = -5\pi\operatorname{sen}\pi t\,\boldsymbol{i} + 5\pi\cos\pi t\,\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{25\pi^2(\operatorname{sen}^2\pi t + \cos^2\pi t)} = 5\pi\text{ m/s} \qquad \text{(constante)}$$

$$\text{Si } v = \text{ct}^e \quad \Rightarrow \quad a_\tau = dv/dt = 0$$

luego:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n = d\boldsymbol{v}/dt = -5\pi^2\cos\pi t\,\boldsymbol{i} - 5\pi^2\operatorname{sen}\pi t\,\boldsymbol{j}$$

$$a_n = \sqrt{25\pi^4(\cos^2\pi t + \operatorname{sen}^2\pi t)} = 5\pi^2\text{ m/s}^2 \qquad \text{(constante)}$$

2) $$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad 5\pi^2 = \frac{25\pi^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 5\text{ m}}$$

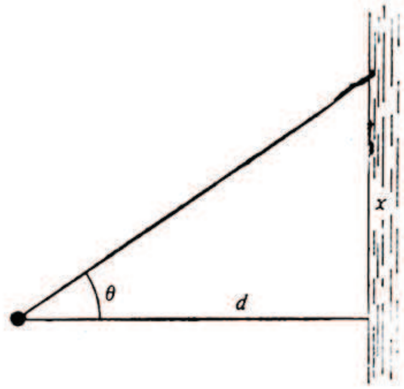
3) $$\left.\begin{aligned} v &= \omega R \\ \omega &= 2\pi \end{aligned}\right| \quad v = 2\pi\nu R \quad \Big| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{v}{2\pi R} = \frac{5\pi}{2\pi 5} = \frac{1}{2}\text{Hz}}$$

Problema 52. La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a ω y está situado a una distancia d de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forma d y el rayo es θ.

Solución

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad x = d\,\text{tag}\theta \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{\omega d}{\cos^2\theta}}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,\omega^2 d\,\text{sen}\theta}{\cos^3\theta}}$$



Problema V-52

D) COMPOSICION DE MOVIMIENTOS

FORMULARIO

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS EN LA MISMA DIRECCIÓN

PRIMER CASO.—*Dos movimientos uniformes producen un movimiento uniforme*

$$s = s_1 + s_2 = (s_{01} + s_{02}) + (v_1 + v_2)\,t$$

SEGUNDO CASO.—*Dos movimientos uniformente acelerados producen un movimiento uniformemente acelerado.*

$$s = s_1 + s_2 = (s_{01} + s_{02}) + (v_{01} + v_{02})\,t + \frac{1}{2}\,(a_1 + a_2)\,t^2$$

TERCER CASO.—*Un movimiento uniforme y otro uniformemente acelerado producen un movimiento uniformemente acelerado.*

$$s = s_1 + s_2 = (s_{01} + s_{02}) + (v_1 + v_{02})\,t + \frac{1}{2}\,at^2$$

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS PERPENDICULARES

PRIMER CASO.—*Dos movimientos uniformes.*

$$y = v_y\,t \qquad x = v_x\,t \quad \Bigg| \quad \frac{y}{x} = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{v_y}{v_x}\,x$$

trayectoria recta. El valor del módulo de la velocidad resultante es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

el movimiento es rectilíneo y uniforme de ecuación: $s = vt$

SEGUNDO CASO.—*Dos movimientos uniformemente acelerados partiendo del reposo.*

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} a_x t^2 \\ \\ y = \dfrac{1}{2} a_y t^2 \end{array}\right| \quad \frac{y}{x} = \frac{a_y}{a_x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_y}{a_x} x$$

trayectoria recta. El valor del módulo de la aceleración resultante es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

el movimiento es uniformemente acelerado de ecuación: $s = \dfrac{1}{2} a t^2$

TERCER CASO.—*Un movimiento uniforme y otro uniformemente acelerado.*

$$\left.\begin{array}{l} x = vt \\ y = \dfrac{1}{2} at^2 \end{array}\right| \quad y = \frac{a}{2v^2} x^2 = Kx^2$$

trayectoria parabólica.

TIRO HORIZONTAL:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} gt^2 \end{array}\right| \quad y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = Kx^2$$

TIRO OBLÍCUO:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} x = v_0 t \cos\varphi \\ y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}$$

$$y = x \operatorname{tag}\varphi - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\varphi} = Kx - K'x^2$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} \qquad y_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{2g}$$

Problema 53. Un nadador recorre una piscina de 100 m en 2 min. Va a nadar en un río observando antes de lanzarse al agua, que un trozo de madera que flota en ella recorre en 1 min 20 m. Calcular el tiempo que tardará el nadador en recorrer 100 m en el río, según vaya a favor o en contra de la corriente.

Solución

La velocidad del nadador es: $v = s / t = 100 / 2 = 50$ m/min

La velocidad del agua del río es: $v' = 20$ m/min

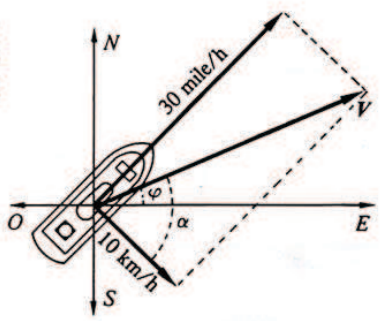
La velocidad, nadando a favor de la corriente, es: $v_1 = v + v' = 50 + 20 = 70$ m/min

Y el tiempo que tarda en recorrer 100 m es: $\boxed{t_1 = s / v_1 = 100 / 70 = 1^{min}\ 26^{s}}$

La velocidad, nadando en contra de la corriente, es: $v_2 = v - v' = 50 - 20 = 30$ m/min

Y el tiempo para recorrer 100 m: $\boxed{t_2 = 100 / 30 = 3^{min}\ 20^{s}}$

Problema 54. Un acorazado navega con rumbo NE a una velocidad de 30 mile/h. Suena zafarrancho de combate y uno de los tripulantes marcha corriendo de babor a estribor para ocupar su puesto, a una velocidad de 10 km/h. Calcular el valor de la velocidad resultante y su dirección.



Problema V-54

Solución

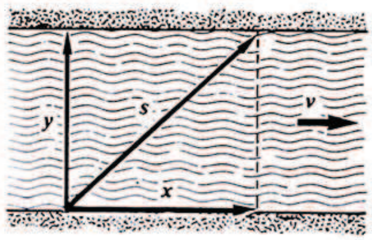
$$v = 30 \text{ mile/h} = 1{,}852 \times 30 = 55{,}56 \text{ km/h}$$

$$\boxed{V = \sqrt{55{,}56^2 + 10^2} = 56{,}45 \text{ km/h}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{tag}\alpha = \dfrac{55{,}56}{10} \\ \varphi = \alpha - 45 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \varphi = 34°\ 47'\ 49''$$

El «rumbo» será: $\boxed{90 - \varphi = 55°\ 12'\ 11''}$

Problema 55. Una pequeña lancha atraviesa un río de 50 m de anchura; al mismo tiempo la corriente le arrastra 60 m aguas abajo. ¿Qué camino ha recorrido?



Problema V-55

Solución

Si en la figura, y es la anchura del río y x el avance producido por la corriente, el camino recorrido por la lancha es s:

$$\boxed{s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{60^2 + 50^2} = 78{,}1 \text{ m}}$$

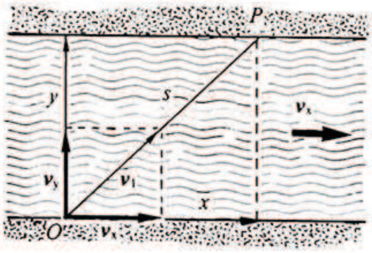
Problema 56. La velocidad que provocan unos remeros a una barca es de 8 km/h. La velocidad del agua de un río es 6 km/h, y la anchura del tal río 100 m.

1. Suponiendo la posición de la proa perpendicular a las orillas, calcular el tiempo que tarda la barca en cruzar el río y la distancia a que es arrastrada, aguas abajo, por la corriente.

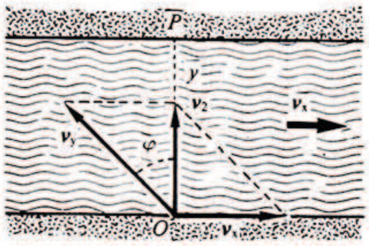
2. ¿En qué dirección debe colocarse la proa de la barca para alcanzar el punto de la orilla opuesta situado enfrente del de partida? (punto de partida y llegada en la perpendicular común a las orillas).

3. ¿Qué velocidad, respecto a la tierra, lleva la barca en los dos casos estudiados?

4. ¿Cuánto tarda en atravesar el río?



Problema V-56-1.ª



Problema V-56-2.ª

Solución

1)

$v_x = 6$ km/h
$v_y = 8$ km/h

$$y = v_y t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{0{,}1}{8}\ \text{h} = 45\ \text{s}}$$

$$\boxed{x = v_x t = 6\ \frac{0{,}1}{8}\ \text{km} = 75\ \text{m}}$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ \text{km/h}}$$

2) Para que la barca vaya en la dirección de $\boldsymbol{v}_2$, la componente horizontal de $\boldsymbol{v}_y$ (Fig. 2.ª) ha de ser igual a 6 km/h:

$$v_y \operatorname{sen}\varphi = v_x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{6}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 48°\ 35'}$$

3) En el 1.er caso son los 10 km/h ya calculados; en el 2.º:

$$\boxed{v_2 = v_y \cos\varphi = 8 \cos 48°\ 35' = 5{,}3\ \text{km/h}}$$

4) En el 1.er caso son 45 s ya calculados; en el 2.º:

$$\boxed{t = \frac{y}{v_2} = \frac{0{,}1}{5{,}3}\ \text{h} = 68\ \text{s}}$$

Problema 57. Una canoa de 2,5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la corriente 23,4 m.

1. Calcular la velocidad del agua, sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m.

2. Si la canoa marcha a lo largo del río, determinar el camino recorrido en 1 min según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.

Solución

1) La proa de la canoa debe recorrer un espacio en dirección perpendicular al río:

$$y = 100 - 2{,}5 = 97{,}5\ \text{m}$$

siendo:

$$y = v_c t = 5t = 97{,}5\ \text{m}$$

el río arrastra a la canoa:

$$x = 23{,}4\ \text{m} = v_r t$$

dividiendo las dos anteriores:

$$\frac{97{,}5}{23{,}4} = \frac{5}{v_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_r = 1{,}2\ \text{m/s}}$$

2)

$$v_1 = v_c + v_r = 5 + 1{,}2 = 6{,}2\ \text{m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 6{,}2 \times 60 = 372\ \text{m}}$$

$$v_2 = v_c - v_r = 5 - 1{,}2 = 3{,}8\ \text{m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 3{,}8 \times 60 = 228\ \text{m}}$$

Problema 58. Un avión de bombardeo, en vuelo horizontal, a la velocidad de 360 km/h, y a una altura sobre un objetivo de 1 000 m, lanza una bomba.

1. ¿A qué distancia del objetivo inmóvil, contada horizontalmente, debe proceder al lanzamiento?
2. Si el objetivo es un camión que marcha en carretera horizontal, a 72 km/h en la misma recta que el bombardero ¿a qué distancia del objetivo, contada horizontalmente, se debe proceder al lanzamiento si el objetivo se acerca o se aleja?

Solución

1)

$$x = vt \qquad y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\boxed{x = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = \frac{360\,000}{3\,600}\sqrt{\frac{2 \times 1\,000}{9{,}8}} = 1\,429 \text{ m}}$$

2)

$$x \mp v't = vt \qquad y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = t\,(v \pm v') = \sqrt{\frac{2y}{g}}\,(v \pm v') = \sqrt{\frac{2 \times 1\,000}{9{,}8}}\,(360 \pm 72)\,\frac{1\,000}{3\,600} \text{ m}$$

$$\boxed{x_1 = 1\,714 \text{ m}} \qquad \boxed{x_2 = 1\,143 \text{ m}}$$

Problema 59. Un avión en vuelo horizontal, a velocidad constante de 500 km/h lanza tres bombas en intervalos de 3 s. Dibujar en un esquema la posición del avión y de las bombas a los 3 s de lanzar la tercera. Se supone nula la resistencia del aire.

Solución

Las tres bombas están en la misma vertical ya que el avance horizontal de las bombas y el avión es el mismo. La distancia horizontal, contada desde el punto en que se lanzó la primera es:

$$x = \frac{500\,000}{3600} 9 \text{ m} = 1\,250 \text{ m}$$

La primera recorre un camino vertical:

$$y_1 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 9^2 \text{ m} = 396{,}9 \text{ m}$$

la segunda:

$$y_2 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 6^2 \text{ m} = 176{,}4 \text{ m}$$

la tercera:

$$y_3 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 3^2 \text{ m} = 44{,}1 \text{ m}$$

Problema 60. Sobre la superficie de un lago, a 5 m sobre ella y horizontalmente, se dispara un proyectil, con una velocidad de 5 m/s. Determinar:
1. El tiempo que tarda el proyectil en introducirse en el agua
2. La distancia horizontal recorrida por el proyectil hasta que se introduce en el agua.
3. Valor de la tangente del ángulo que forma el vector velocidad con la horizontal en el momento que el proyectil se introduce en el lago.

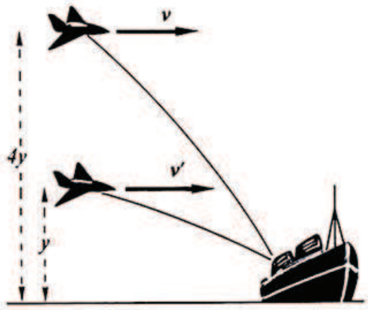
Solución

1)
$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10}} = 1 \text{ s}}$$

2)
$$\boxed{x = v_0 t = 5 \times 1 = 5 \text{ m}}$$

3)
$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 = 5 \text{ m/s} \\ v_y &= gt \simeq 10 \times 1 = 10 \text{ m/s} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tag}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = 2}$$

Problema 61. Dos aviones están situados en la misma vertical; la altura sobre el suelo de uno de ellos es 4 veces mayor que la del otro. Pretenden bombardear el mismo objetivo. Siendo la velocidad del más alto v ¿qué velocidad debe llevar el más bajo?



Problema V-61

Solución

$$\left.\begin{aligned} x &= vt \\ 4y &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right| \quad 4y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v' t' \\ y &= \frac{1}{2} g t'^2 \end{aligned}\right| \quad y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v'^2}$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \frac{v'^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' = 2v}$$

Problema 62. Un avión en vuelo horizontal rectilíneo, a una altura de 7 840 m y con una velocidad de 450 km/h deja caer una bomba al pasar por la vertical de un punto A del suelo.

1. ¿Al cabo de cuánto tiempo se producirá la explosión de la bomba por choque con el suelo?

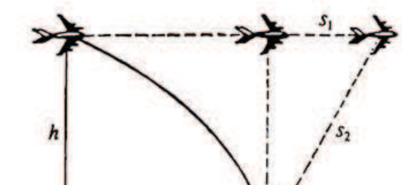
2. ¿Qué distancia habrá recorrido entre tanto el avión?

3. ¿A qué distancia del punto A se producirá la explosión?

4. ¿Cuánto tiempo tardará en oírse la explosión desde el avión, a contar desde el instante del lanzamiento de la bomba, si el sonido se propaga a 330 m/s

Solución

$$v_0 = 450 \text{ km/h} = 125 \text{ m/s}$$



Problema V-62

1)
$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 7840}{9{,}8}} = 40 \text{ s}}$$

2)
$$\boxed{x = v_0 t = 125 \times 40 = 5000 \text{ m}}$$

3) El mismo resultado que 2).

4) 1^er^ MÉTODO

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= v_0 t' \\ s_2 &= v t' \\ h^2 &= s_2^2 - s_1^2 \end{aligned}\right| \quad h^2 = t'^2 [v^2 - v_0^2] \quad \Rightarrow \quad t' = \sqrt{\frac{h^2}{v^2 - v_0^2}} = \sqrt{\frac{7840^2}{330^2 - 125^2}} = 25{,}7 \text{ s}$$

$$\boxed{T = 40 + 25{,}7 = 65{,}7 \text{ s}}$$

2.º MÉTODO

La componente v_x de la velocidad del sonido ha de ser igual a v_0:

$$v_0 = v\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{125}{330} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 67°\ 44'\ 29''$$

con lo que:

$$v_y = v\,\text{sen}\alpha = \frac{h}{t'} \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{h}{v\,\text{sen}\alpha} = 25{,}7\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = t + t' = 65{,}7\ \text{s}}$$

Problema 63. Se dispara un cañón con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal, siendo la velocidad de salida 490 m/s. Calcular:

1. El alcance, la altura máxima y el tiempo necesario para tal avance y tal ascenso.

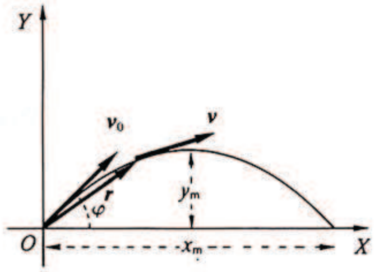
2. La posición del proyectil y la velocidad al cabo de 2 s del disparo

Solución

1) El tiempo para el alcance es la solución (no igual a cero) de la ecuación:

$$y = v_0 t\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2v_0\text{sen}\varphi}{g} = 70{,}7\ \text{s}}$$

$$\boxed{x_m = v_0 t\cos\varphi = \frac{2\,v_0^2\,\text{sen}\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2\,\text{sen}2\varphi}{g} = 24\,500\ \text{m}}$$



Problema V-63

El tiempo para alcanzar la altura máxima es la mitad del correspondiente al alcance:

$$\boxed{t' = 35{,}3\ \text{s}} \qquad \boxed{y_m = v_0 t'\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{2}gt'^2 = 6\,125\ \text{m}}$$

2)

$$x = v_0 t\cos\varphi = 490 \times 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 693\ \text{m}$$

$$y = v_0 t\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{2}gt^2 = 490 \times 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,9{,}8 \times 4 = 673{,}4\ \text{m}$$

$$v_x = v_0\cos\varphi = 490\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 346{,}5\ \text{m/s}$$

$$v_y = v_0\,\text{sen}\varphi - gt = 490\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 9{,}8 \times 2 = 326{,}9\ \text{m/s}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 476{,}4\ \text{m/s}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = 693\,\boldsymbol{i} + 673{,}4\,\boldsymbol{j}\ \ \text{m}} \qquad \boxed{\boldsymbol{v} = 346{,}5\,\boldsymbol{i} + 326{,}9\,\boldsymbol{j}\ \ \text{m/s}}$$

Problema 64. Se dispara un cañón con un ángulo de 15°, saliendo la bala con la velocidad de 200 m/s. Se desea saber:

1. La distancia teórica que alcanzará la bala sobre la horizontal.

2. La velocidad con que llega a tierra, en valor absoluto y dirección.

3. Si tropieza con una colina que se encuentra a la mitad de su alcance, de 300 m de alta. ¿Por qué?

4. En caso afirmativo, ¿qué solución podríamos dar si queremos hacer blanco en el mismo objetivo y con el mismo cañón (la misma velocidad inicial) disparando desde el mismo sitio?

Solución

1)
$$y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{2 v_0 \operatorname{sen}\varphi}{g} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x = v_0 t \cos\varphi = \frac{v_0 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} = \frac{40\,000 \times 0{,}5}{9{,}8} = 2\,040 \text{ m} \simeq 2 \text{ km}}$$

2)
$$\boxed{v_{\text{final}} = v_{\text{inicial}} = 200 \text{ m/s}}$$

La simetría de la trayectoria exige que la velocidad al llegar el proyectil a tierra forme un ángulo de 15° hacia abajo, con la horizontal.

3) Para llegar a la cúspide de la trayectoria, se emplea un tiempo mitad al calculado en 1).

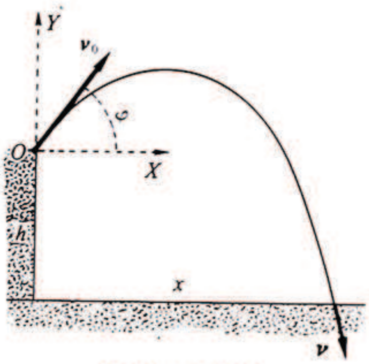
$$t' = \frac{v_0 \operatorname{sen}\varphi}{g} \quad \Rightarrow \quad y_m = v_0 t' \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t'^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{2g} = 137 \text{ m} \quad \boxed{\text{Tropieza.}}$$

4) Si los alcances deben ser iguales $\operatorname{sen} 2\varphi = \operatorname{sen} 2\varphi'$, la solución será disparar con un ángulo $\varphi' = 90° - \alpha = 75°$. La altura máxima es entonces:

$$y_m' = \frac{v_0{}^2 \operatorname{sen}^2\varphi'}{2g} = 1\,904 \text{ m}$$

Problema 65. Se dispara un cañón desde un acantilado de 50 m de altura y con un ángulo de 45° por encima de la horizontal, siendo la velocidad de salida del proyectil de 490 m/s. Calcular:

1. Tiempo que tarda el proyectil en llegar a la superficie del mar.
2. Posición del impacto.
3. Velocidad en ese instante.



Problema V-65

Solución

1)
$$y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad -50 = 490\, t \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} 9{,}8\, t^2$$

$$4{,}9 t^2 - 245 \sqrt{2} t - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \boxed{t = 70{,}8 \text{ s}} \\ t = -0{,}1 \text{ s (no tiene sentido físico)} \end{array} \right.$$

2)
$$x = v_0 t \cos\varphi = 490 \times 70{,}8 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} = 24\,530{,}9 \text{ m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = 24\,530{,}9\,\boldsymbol{i} - 50\boldsymbol{j} \text{ m}}$$

3)
$$v_x = v_0 \cos\varphi = 490 \frac{\sqrt{2}}{2} = 346{,}5 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - g t = 490 \frac{\sqrt{2}}{2} - 9{,}8 \times 70{,}8 = -347{,}3 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = 346{,}5\,\boldsymbol{i} - 347{,}3\,\boldsymbol{j} \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 490{,}6 \text{ m/s}$$

Problema 66. Una pelota resbala por un tejado que que forma un ángulo de 30° con la horizontal, y al llegar a su extremo, queda en libertad con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es 60 m y la anchura de la calle a la que vierte el tejado 30 m. Calcular:

1. Ecuaciones del movimiento de la pelota al quedar en libertad y ecuación de la trayectoria en forma explícita. (Tomar el eje X horizontal y el Y vertical y positivo en sentido descendente.)

2. ¿Llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta?

3. Tiempo que tarda en llegar al suelo y velocidad en ese momento.

4. Posición en que se encuentra cuando su velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal.

Solución

1) Las ecuaciones del movimiento escritas en el SI, serán:

$$\left.\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{a} = 9{,}8\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi = 10\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m/s} \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi + gt = 5 + 9{,}8\,t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v} = 5\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + (5 + 9{,}8\,t)\boldsymbol{j}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 t \cos\varphi = 5\sqrt{3}t \\ y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi + \dfrac{1}{2}gt^2 = 5t + 4{,}9t^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r} = 5\sqrt{3}\,t\,\boldsymbol{i} + (5t + 4{,}9t^2)\boldsymbol{j}}$$

La ecuación de la trayectoria en forma explícita se obtendrá despejando t en la ecuación de x y sustituyendo en y, es decir:

$$t = \frac{x}{5\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4{,}9x^2}{75}}$$

2) Para:

$$x = 30 \text{ m} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{30}{\sqrt{3}} + \frac{4{,}9 \times 900}{75} = 76 \text{ m}$$

Haría falta un descenso aproximado de 76 m para tocar la pared. A los 60 m, no choca con ella.

3) $$60 = 5t + 4{,}9t^2 \simeq 5t + 5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 + t - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} t = -4 \text{ s} \\ \boxed{t = \ \ 3 \text{ s}} \end{array}\right.$$

La solución 3 s es la correcta respondiendo al enunciado. La solución negativa (−4 s.) indica el tiempo (anterior al origen de los tiempos), que en la trayectoria parabólica indefinida, hubiese tardado el cuerpo en ir desde 60 metros por debajo del origen hasta dicho origen, pasando por él a una velocidad de 10 m/s, formando con la horizontal un ángulo de 30°.

La velocidad será:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = 5\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + 34{,}4\,\boldsymbol{j} \text{ m/s}} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_x^2} = 35{,}5 \text{ m/s}$$

$$4) \quad v_x = v_y \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{3} = 5 + 9{,}8\,t \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}4 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = 3{,}5 \text{ m} \\ y = 2{,}8 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = 3{,}5\boldsymbol{i} + 2{,}8\boldsymbol{j} \ \text{ m}}$$

Problema 67. Demostrar por cinemática que cualquiera que sea el ángulo de lanzamiento de un proyectil arrojado desde lo alto de un acantilado de altura h con la misma velocidad inicial, la velocidad de llegada al suelo es siempre la misma.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \end{array} \right| \quad v = \sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + (v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt)^2}$$

operando queda:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 g v_0 t \operatorname{sen}\varphi}$$

pero:

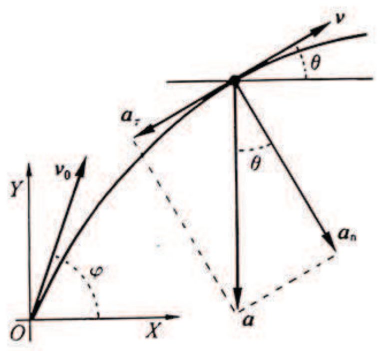
$$-h = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad g^2 t^2 = 2gh + 2 v_0 g t \operatorname{sen}\varphi$$

sustituyendo:

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

velocidad que es independiente del ángulo de lanzamiento.

Problema 68. Se dispara un cañón con un ángulo φ por encima de la horizontal, saliendo la bala con una velocidad v_0. Determinar en función del tiempo las expresiones de los módulos de la aceleración tangencial y normal. Calcular el radio de curvatura de su trayectoria en cualquier instante.



Problema V-68

Solución

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \end{array} \right| \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos^2\varphi + [v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt]^2$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-g\,(v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + [v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt]^2}}$$

Se podía haber obtenido teniendo en cuenta que como sólo actúa el peso de la bala, $\boldsymbol{g}$ será la aceleración resultante de $\boldsymbol{a}_\tau$ y $\boldsymbol{a}_n$, con lo que de la figura obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a_\tau = -g \operatorname{sen}\theta = -g \dfrac{\operatorname{tag}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tag}^2\theta}} \\ \operatorname{tag}\theta = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt}{v_0 \cos\varphi} \end{array} \right| \quad \Rightarrow$$

$$a_\tau = -g \frac{\dfrac{v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt}{v_0 \cos\varphi}}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt}{v_0 \cos\varphi} \right]^2}} = -g \frac{v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + [v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt]^2}}$$

La aceleración normal se obtendrá:

$$a_n = -g\cos\theta = -g \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tag}^2\theta}} = -g \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt}{v_0 \cos\varphi} \right]^2}} = \frac{-g v_0 \cos\varphi}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + [v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt^2]^2}}$$

Igualando a v^2/ρ y despejando ρ:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = -\frac{[v_0^2 \cos^2\varphi + (v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt)^2]^{3/2}}{g v_0 \cos\varphi}$$

Problema 69. Con un proyectil queremos rebasar una colina de 300 m de alta desde 500 m de distancia a la cima. Calcular:

1. Angulo de lanzamiento.

2. Velocidad mínima necesaria.

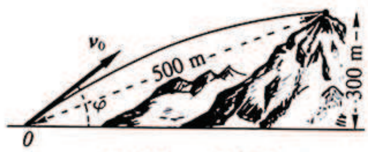
Solución

La ecuación de la trayectoria en forma explícita es:

$$y = x \operatorname{tag}\varphi - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} x^2$$

de la que se obtiene:

$$v_0^2 = \frac{g x^2}{2\cos^2\varphi\,(x \operatorname{tag}\varphi - y)} = \frac{g x^2}{x \operatorname{sen} 2\varphi - 2y\cos^2\varphi} \qquad (1)$$



Problema V-69

derivando e igualando a cero para obtener el valor de φ que hace mínima a v_0 para x e y determinados, nos queda:

$$2v_0 \frac{dv_0}{d\varphi} = -g x^2 \frac{2x\cos2\varphi + 4y\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{(x\operatorname{sen}2\varphi - 2y\cos^2\varphi)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\cos2\varphi + y\operatorname{sen}2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}2\varphi = -\frac{x}{y}$$

y como:

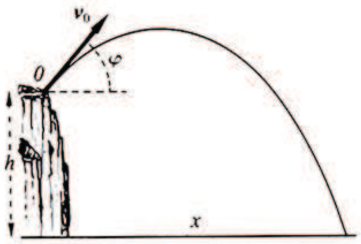
$$x = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}2\varphi = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 63^\circ\ 26'}$$

2) Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\boxed{v_0 = \frac{x}{\cos\varphi} \sqrt{\frac{g}{2\,(x\operatorname{tag}\varphi - y)}} \simeq 88{,}5 \text{ m/s}}$$

Problema 70. ¿Qué ángulo habrá que darle a la velocidad en el lanzamiento de un proyectil desde un muro de 10 m de altura para obtener el alcance máximo? Velocidad de salida del proyectil 10 m/s. Calcular también dicho alcance.

Solución



Problema V-70

$$x = v_0 t \cos\varphi \qquad\qquad y = -10 \text{ m}$$

$$y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \qquad\qquad g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$-10 = 10 t \operatorname{sen}\varphi - 5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2t\operatorname{sen}\varphi - 2 = 0$$

$$t = \frac{2\operatorname{sen}\varphi + \sqrt{4\operatorname{sen}^2\varphi + 8}}{2} = \operatorname{sen}\varphi + \sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi + 2}$$

(El signo menos que aparece en la solución a la ecuación de segundo grado no tiene sentido físico, puesto que al ser $2\operatorname{sen}\varphi < \sqrt{4\operatorname{sen}^2 + 8}$daría negativo.) Luego:

$$x = 10\cos\varphi\,(\operatorname{sen}\varphi + \sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi + 2}\,)$$

igualando a cero la derivada respecto a φ y tomando la solución conveniente da:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 30°}$$

con lo que: $\boxed{x = 10\sqrt{3} \text{ m}}$

Problema 71. Sobre la plataforma de un tren que se mueve sobre un terreno horizontal con una velocidad de 30 m/s, está montado rígidamente un cañón que lanza sus proyectiles a 500 m/s. Determinar las ecuaciones del movimiento del proyectil en los siguientes casos:

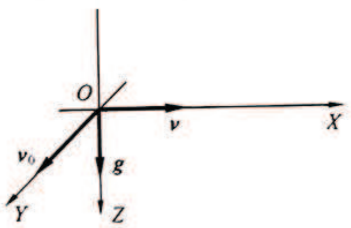
1. El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en dirección horizontal.

2. El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en dirección vertical y hacia arriba.

3. El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en el plano vertical a ella y formando un ángulo de 45° con la horizontal.

4. El disparo se efectúa formando un ángulo de 30° con la dirección del movimiento contado éste en el plano horizontal y 60° con el plano horizontal.

Solución



Problema V-71-1.ª

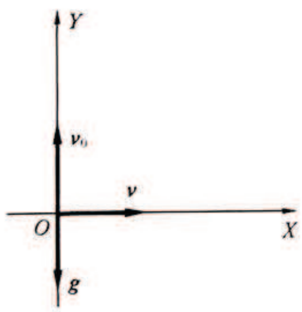
1)

$$a_x = 0 \qquad v_x = 30 \text{ m/s} \qquad x = 30t$$

$$a_y = 0 \qquad v_y = 500 \text{ m/s} \qquad y = 500t$$

$$a_z = 10 \text{ m/s}^2 \qquad v_z = gt = 10t \qquad z = \frac{1}{2} g t^2 = 5t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 10\boldsymbol{k} \text{ m/s}^2 \\ \boldsymbol{v} &= 30\boldsymbol{i} + 500\boldsymbol{j} + 10t\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r} &= 30t\boldsymbol{i} + 500t\boldsymbol{j} + 5t^2\boldsymbol{k} \end{aligned}}$$



Problema V-71-2.ª

2) El movimiento es plano:

$$a_x = 0 \qquad v_x = 30 \text{ m/s} \qquad x = 30t$$

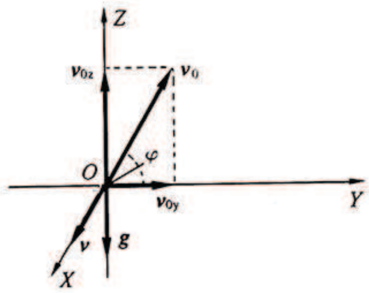
$$a_y = -10 \text{ m/s}^2 \qquad v_y = 500 - 10t \qquad y = 500t - 5t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{a} = -10\boldsymbol{j}\ \text{m/s}\\&\boldsymbol{v} = 30\boldsymbol{i} + (500 - 10t)\boldsymbol{j}\\&\boldsymbol{r} = 30t\boldsymbol{i} + (500t - 5t^2)\boldsymbol{j}\end{aligned}}$$

3)

$a_x = 0$	$v_x = 30$ m/s	$x = 30t$
$a_y = 0$	$v_y = 250\sqrt{2}$ m/s	$y = 250\sqrt{2}\,t$
$a_z = -10$ m/s²	$v_z = 250\sqrt{2} - 10t$	$z = 250\sqrt{2}\,t - 5t^2$

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{a} = -10\boldsymbol{k}\ \text{m/s}^2\\&\boldsymbol{v} = 30\boldsymbol{i} + 500\sqrt{2}\,\boldsymbol{j} + (250\sqrt{2} - 10t)\boldsymbol{k}\\&\boldsymbol{r} = 30t\boldsymbol{i} + 250\sqrt{2}t\boldsymbol{j} + (250\sqrt{2}t - 5t^2)\boldsymbol{k}\end{aligned}}$$



Problema V-71-3.ª

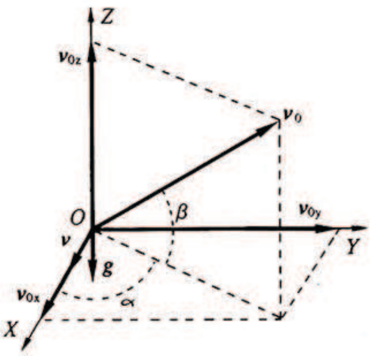
4)

$\alpha = 30°$	$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \cos\beta = 125\sqrt{3}$ m/s
$\beta = 60°$	$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta = 125$ m/s
	$v_{0z} = v_0 \operatorname{sen}\beta = 250\sqrt{3}$ m/s

Las componentes de $\boldsymbol{a}$ lo mismo que en 3).

$v_x = v + v_{0x} = 30 + 125\sqrt{3}$ m/s	$x = (30 + 125\sqrt{3})t$
$v_y = v_{0y} = 125$ m/s	$y = 125t$
$v_z = v_{0z} = 250\sqrt{3} - 10t$	$z = 250\sqrt{3}t - 5t^2$

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{a} = -10\boldsymbol{k}\ \text{m/s}^2\\&\boldsymbol{v} = (30 + 125\sqrt{3})\boldsymbol{i} + 125\boldsymbol{j} + (250\sqrt{3} - 10t)\boldsymbol{k}\\&\boldsymbol{r} = (30 + 125\sqrt{3})t\boldsymbol{i} + 125t\boldsymbol{j} + (250\sqrt{3}t - 5t^2)\boldsymbol{k}\end{aligned}}$$



Problema V-71-4.ª

Problema 72. Un proyectil es lanzado con una velocidad: $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ m/s desde un punto de coordenadas (2, 1, 1) (en metros). Si está sometido a la aceleración de la gravedad (dirección y sentido negativo del eje OZ) y a una fuerza debida al viento que le produce una aceleración en la dirección positiva del eje OX de 2 m/s². Calcúlese las ecuaciones del movimiento [$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ y $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$].

Solución

$$a_x = 2\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = 0 \qquad a_z = -g = -10\ \text{m/s}^2 \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{k}\ \text{m/s}^2}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 1 + 2t \qquad v_y = v_{0y} = -3\ \text{m/s} \qquad v_z = v_{0z} - gt = 2 - 10t$$

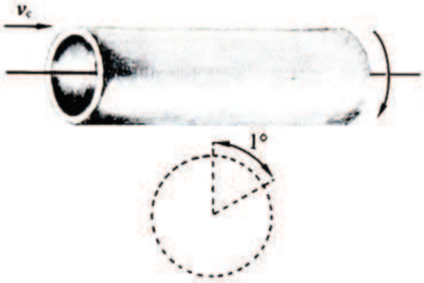
$$\boxed{\boldsymbol{v} = (1 + 2t)\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + (2 - 10t)\boldsymbol{k}}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 2 + t + t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t = 1 - 3t$$

$$z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = 1 + 2t - 5t^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (2 + t + t^2)\boldsymbol{i} + (1 - 3t)\boldsymbol{j} + (1 + 2t - 5t^2)\boldsymbol{k}}$$

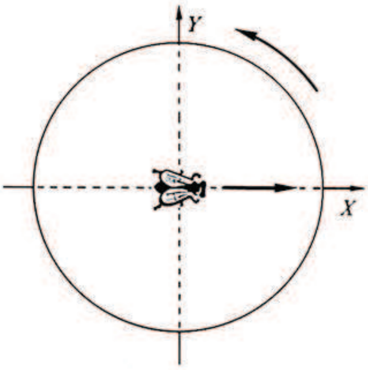


Problema V-73

Problema 73. Un cilindro de cartón de 20 m de altura gira alrededor de su eje a razón de 1 vuelta cada 10 segundos. En la dirección de la generatriz se hace un disparo y se observa que los radios que pasan por los impactos hechos en las bases forman un ángulo de un grado. Calcular la velocidad del proyectil.

Solución

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Si en 10 s gira el cilindro } 360^\circ \\ \text{en } t \text{ s} & 1^\circ\end{array}\right| \quad t = \frac{10}{360} = \frac{1}{36}\text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{s}{t} = \frac{20\text{ m}}{1/36\text{ s}} = 720\text{ m/s}}$$

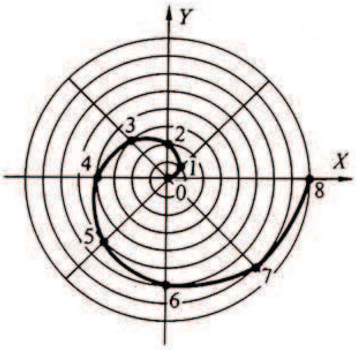


Problema V-74

Problema 74. Una mosca camina en línea recta con movimiento uniforme a lo largo del radio R del disco de vidrio de la figura al mismo tiempo que éste gira con velocidad angular constante. Suponiendo que el tiempo que tarda la mosca en recorrer el radio es el mismo que el período de giro del disco.
1. Dibujar la trayectoria de la mosca, con relación a los ejes fijos X e Y que se ven por transferencia a través del vidrio.
2. Determinar las ecuaciones horarias de éste movimiento en función de v (velocidad de la mosca) y ω (velocidad angular del disco) con relación a los ejes fijos.

Solución

1) Dividamos la circunferencia en un número de partes iguales (por ejemplo, 8). Cuando la mosca ha recorrido 1/8 de radio, el disco ha girado un ángulo de 1/8 de giro completo encontrándose el móvil en el punto 1, transcurrido otro intervalo igual de tiempo la mosca estará en 2, ... etc. La trayectoria será, por tanto, la dibujada en la Fig. 2.



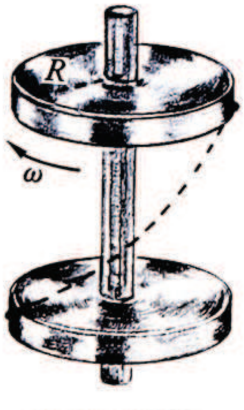
Problema V-74-1.ª

2) Transcurrido un tiempo t el camino recorrido por la mosca es $r = vt$ y el ángulo girado es ωt. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x = vt\cos\omega t \\ y = vt\,\text{sen}\,\omega t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = v\,(\boldsymbol{i}t\cos\omega t + \boldsymbol{j}t\,\text{sen}\,\omega t)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = v\,[(\cos\omega t - \omega t\,\text{sen}\,\omega t)\boldsymbol{i} + (\text{sen}\,\omega t + \omega t\cos\omega t)\boldsymbol{j}]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt = v\omega[-(2\,\text{sen}\,\omega t + \omega t\cos\omega t)\boldsymbol{i} + (2\cos\omega t - \omega t\,\text{sen}\,\omega t)\boldsymbol{j}]}$$



Problema V-75

Problema 75. El disco de radio R de la Fig. desliza sin rozamiento a lo largo de su eje; dejamos que caiga y a su vez le comunicamos en el instante inicial una velocidad angular constante ω. Determínense las ecuaciones horarias del movimiento de un punto situado en el borde del disco.

Solución

Tomando los ejes como se indica en la Fig. de tal forma que el punto que consideramos se encuentra en P_0 $(R, 0, 0)$ en el instante inicial, tendremos que las ecuaciones del movimiento según OZ serán:

$$a_z = g \qquad v_z = gt \qquad z = \frac{1}{2}gt^2$$

siendo g la aceleración de la gravedad y t un tiempo cualquiera contado a partir del instante inicial. Para el eje OX, tenemos:

$$v_x = -v_{xy}\,\text{sen}\,\omega t = -\omega R\,\text{sen}\,\omega t$$

$$a_x = dv_x / dt = -\omega^2 R \cos\omega t$$

$$\left.\begin{aligned} & x = -\omega R \int \text{sen}\,\omega t\, dt = R\cos\omega t + C_1 \\ & t = 0 \qquad x = R = R + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad x = R\cos\omega t$$

y para el eje OY, tendremos:

$$v_y = v_{xy}\cos\omega t = \omega R\cos\omega t$$

$$a_y = -\omega^2 R\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\left.\begin{aligned} & y = \omega R \int \cos\omega t\, dt = R\,\text{sen}\,\omega t + C_2 \\ & t = 0 \qquad y = 0 \qquad y = 0 = C_2 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad y = R\,\text{sen}\,\omega t$$

luego las ecuaciones del movimiento serán:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= R\left(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\omega t + \frac{g}{2R}\, t^2 \boldsymbol{k}\right) \\ \boldsymbol{v} &= \omega R\left(-\boldsymbol{i}\,\text{sen}\,\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t + \frac{g}{\omega R}\, t \boldsymbol{k}\right) \\ \boldsymbol{a} &= \omega^2 R\left(-\boldsymbol{i}\cos\omega t - \boldsymbol{j}\,\text{sen}\,\omega t + \frac{g}{\omega^2 R}\, \boldsymbol{k}\right) \end{aligned}}$$