

Ejercicio 1

- a) Para el siguiente semigrupo indicar si alcanza estructura de grupo. En caso afirmativo decir si es cíclico, dar los generadores y todos los subgrupos, su red. Es Algebra de Boole? Justificar cada afirmación.

*	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	5	4	7	6	1	8	3
3	3	8	5	2	7	4	1	6
4	4	3	6	5	8	7	2	1
5	5	6	7	8	1	2	3	4
6	6	1	8	3	2	5	4	7
7	7	4	1	6	3	8	5	2
8	8	7	2	1	4	3	6	5

- b) Sea $(G, *)$ grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G . Demuestre o refute que $H_1 \cup H_2$ es subgrupo de $(G, *)$. Justificar.

Ejercicio 2

- a) Sea $(A, +, \cdot)$ Algebra de Boole. Simplificar $(y \cdot z + x \cdot \bar{z}) \cdot (\bar{x} \cdot \bar{y} + z)$. Justificar.
- b) En $P(\{a, b, c\})$, (siendo P conjunto partes de $\{a, b, c\}$), $X R Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$. Probar que es relación de orden. Determinar si es orden total y buen orden? Sea $B = \{\{a\}, \{a, c\}\}$, hallar cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo. Justificar.

Ejercicio nº 3

- a) Resolver $24x \equiv 27 \pmod{33}$. Dar todas las soluciones. Justificar todos los pasos.
- b) Resolver $((39)^9)^6 - ((25)^3)^9 \equiv 0 \pmod{54}$. Justificar.

Ejercicio 4

- a) Sea $G = (V; A; \varphi)$ un grafo simple 3-regular y tal que $|A| = |V| + 6$. Hallar $|A|$. Justificar.
- b) La expresión $3 \cdot 1 + 2 \uparrow 4 \cdot 2 \div 3 \uparrow 4 \cdot 2 \cdot /$ está dada en notación polaca inversa. Recuperar el árbol y escribirla en notación polaca. Obtener el resultado. a lo der

Ejercicio 5

Sea $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = -25 \cdot 4^n$, $a_0 = 8 \wedge a_1 = 17$. Hallar la solución general y particular de la relación de recurrencia.

Ejercicio 1

a) Semigrupo: OP CERR + ASOCIATIVA ✓

Neutro? si: 1

Simétrico? si pues $\forall x \in G, \exists x' \in G \Rightarrow x + x' = x' + x = 1$ ✓

Subgrupos cíclicos:

$$\langle 1 \rangle = \{1\} = H_1$$

$$\langle 2 \rangle = \{1, 2, 5, 6, 3\} = \langle 6 \rangle = H_5$$

$$\langle 3 \rangle = \{1, 3, 5, 7\} = \langle 7 \rangle = H_4$$

$$\langle 4 \rangle = \{1, 4, 6, 8\} = \langle 8 \rangle = H_3$$

$$\langle 5 \rangle = \{1, 5, 3\} = H_2$$

Es grupo ya que tiene neutro (1) y cada elemento tiene inverso simétrico ✓

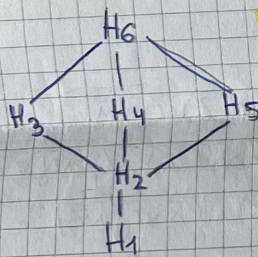
no es cíclico pues no tiene generadores

orden 8. $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$

Subgrupos no cíclicos:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = H_6$$

$$\begin{aligned} 2 &= 6 \\ 3 &= 7 \\ 4 &= 8 \\ 5 &= 5 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$



no es álgebra de Boole ya que no es distributivo por contener una subred isomorfa a



b) sea $(G, *)$ el grupo de 8 partes a del ejercicio

FAISO: $H_1 = \{1, 2, 5, 6\} \wedge H_2 = \{1, 3, 5, 7\}$

$H_1 \cup H_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ no es subgrupo de $(G, *)$ ✓

$$(3) a) ((39)^9)^6 - ((25)^3)^9 = 0(54)$$

POR DEFINICION DE CONGRUENCIA

$$((39)^9)^6 - ((25)^3)^9 = 0 = 54 \mathbb{R}$$

$$\text{congruente con } ((39^3)^3)^6 - ((25^3)^3)^3 = 54 \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (27^3)^6 - (19^3)^3 = 54 \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (27)^6 - 1^3 = 54 \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (27)^2 - 1 = 54 \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 27^2 - 1 = 54 \mathbb{R}$$

$$728 = 54 \mathbb{R}$$

$$26 = 54 \mathbb{R} \xrightarrow{\text{DEF DE CONGR}} 26(54)$$

$$\text{Rta } 26(54) =$$

$$\begin{array}{r} 39^3 | 54 \\ 27 \overline{) 1098} \end{array} \quad \begin{array}{r} 25^3 | 54 \\ 19 \overline{) 289} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27^3 | 54 \\ 27 \overline{) 364} \end{array} \quad \begin{array}{r} 19^3 | 54 \\ 1 \overline{) 127} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 728 | 54 \\ 26 \overline{) 13} \end{array}$$

La forma de multiplicar esta ecuacion, como es un campo de trabajo en $\mathbb{Z}_4$ es ir calculando los restos al dividir por 54 asi hasta reducir la expresion

(2) Ej 2

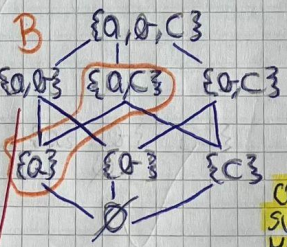
$$\begin{aligned} a) & (y \cdot z + x \cdot \bar{z}) \cdot (x \cdot y + z) \xrightarrow{\text{ASOCIAT}} (y \cdot z \vee x \cdot \bar{z}) \wedge (x \wedge y \vee z) = \\ & \xrightarrow{\text{ASOC: AT y COMM}} ((y \wedge x \vee z \wedge \bar{z}) \wedge (x \wedge y \vee z)) \xrightarrow{\text{COMPLE}} (y \wedge x \vee 0) \wedge (x \wedge y \vee z) = \\ & \xrightarrow{\text{NEUTRO}} (y \wedge x) \wedge (x \wedge y \vee z) \xrightarrow{\text{MORGAN}} (y \wedge x) \wedge (x \vee \bar{y} \wedge \bar{z}) = \\ & \xrightarrow{\text{INVOLUCION}} (y \wedge x) \wedge (x \vee y \wedge z) \xrightarrow{\text{ASOC}} (y \wedge x \wedge x \vee y \wedge z) = \\ & \xrightarrow{\text{CONN}} (y \wedge (x \wedge x) \vee y \wedge z) \xrightarrow{\text{COMPL Y ASOC}} (y \wedge 0) \vee y \wedge z = 0 \vee y \wedge z = \\ & \xrightarrow{\text{ASOC}} 0 \vee (y \wedge z) \xrightarrow{\text{NEUTRO}} (y \wedge z) \quad \text{N.D.} \end{aligned}$$

$$b) P(\{a, b, c\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$$

$$\text{Red Orden } (A, \subseteq) = (P(A), \subseteq) \text{ es Red Algebraica } (A, \vee, \wedge) = (P(A), \cup, \cap)$$

Orden total?

no es orden total
pues hay elementos
incompatibles



$$\exists x, y \in P(A): x \leq y \wedge y \not\leq x$$

Por ejemplo $\{a\} \parallel \{b\}$
"a" es incompatible
con "b"

Buen orden? No es buen orden
ya que existe al menos un
subconjunto que no tiene
primer elemento:
 $C = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$

$$\text{COTA SUPERIOR DE } B = \{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\text{SUPREMO} = \{a, c\}$$

$$\text{MAXIMO} = \{a, c\}$$

$$\text{COTA INFERIOR DE } B = \{\{a, b\}, \emptyset\}$$

$$\text{INFIMO} = \{a\}$$

$$\text{MINIMO} = \{a\}$$

Ej 4

a) GRATO SIMPLE 3 REGULAR
todos v grado 3

$$|A| = |V| + 6 \quad (1)$$

$$2|A| = \sum g(v) \Rightarrow 2|A| = |V| \cdot 3$$

Justificación: más caso al ser 3 regular tiene todos los vértices de grado 3

$$\Rightarrow |A| = \frac{|V| \cdot 3}{2} \quad (2)$$

(2) en (1)

$$|V| + 6 = \frac{|V| \cdot 3}{2}$$

$$(|V| + 6) \cdot 2 = |V| \cdot 3$$

$$2|V| + 12 = 3|V|$$

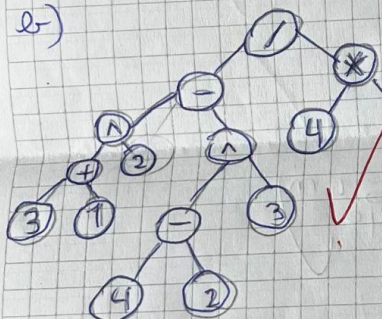
$$12 = 3(|V| - 2|V|)$$

$$12 = |V|$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{12 \cdot 3}{2} \Rightarrow |A| = 18$$

Rta: $|A|$ es 18

b)



NOTACION POLACA:

$1 - 4 + 3 1 2 \wedge - 4 2 3 \wedge 4 2$

RESULTADO

$$\frac{(3+1)^2 - (4-2)^3}{4 \cdot 2} = \frac{8}{8} = 1$$

Resultado es 1

Ej 3

a) $24x \equiv 27(33)$

$$\gcd(24, 33) = 3$$

$3|27$? Si $\Rightarrow$ hay 3 soluciones

$$\frac{24}{3}x \equiv \frac{27}{3} \pmod{\frac{33}{3}}$$

$$8x \equiv 9 \pmod{11}$$

se divide la ecuación por el MCD para obtener una ecuación simplificada con una sola solución

$$X = 8^{\phi(11)-1} \cdot 9 = 8^{10-1} \cdot 9 = 8^9 \cdot 9 = (8^3)^3 \cdot 9 \equiv 6^3 \cdot 9 \equiv 7 \cdot 9 \equiv 63 \equiv 8 \pmod{11}$$

$$S = \{8, 19, 30\}$$

Se le suma 11 porq al trabajar en $\mathbb{Z}_{11}$, si x es solución $\Rightarrow x+11.m$ también lo es

Comprobación: $24 \cdot 8 = 192 \Rightarrow 33|192-27$? Si

$24 \cdot 19 = 456 \Rightarrow 33|456-27$? Si

$24 \cdot 30 = 720 \Rightarrow 33|720-27$? Si

CA: $\phi(11) = 10$ (porq 11 es primo)

$$8^3 = 512$$

$$\begin{array}{r} 512 \overline{) 11} \\ 6 \overline{) 46} \end{array}$$

$$6^3 = 216$$

$$\begin{array}{r} 216 \overline{) 11} \\ 7 \overline{) 19} \end{array}$$

$$= 7 \cdot 63 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5$$

Ejercicio 5

(1)

$$a_{m+2} - 4a_{m+1} - 5a_m = -25 \cdot 4^m, a_0 = 8 \wedge a_1 = 17$$

① Polinomio característico $x^2 - 4x - 5 = 0$
 $x_1 = 5$; $x_2 = x = -1$

Por teorema

$$a_m^H = \alpha 5^m + \beta (-1)^m$$

② $p_m = -25 \cdot 4^m \Rightarrow$ propongo $B \cdot 4^m$

$$a_m^P = B \cdot 4^m; a_{m+1}^P = B \cdot 4^{m+1}; a_{m+2}^P = B \cdot 4^{m+2}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$B \cdot 4^{m+2} - 4(B \cdot 4^{m+1}) - 5(B \cdot 4^m) = -25 \cdot 4^m$$

$$B \cdot 4^m \cdot 4^2 - 4(B \cdot 4^m \cdot 4) - 5(B \cdot 4^m) = -25 \cdot 4^m$$

$$16B \cdot 4^m - 16B \cdot 4^m - 5B \cdot 4^m = -25 \cdot 4^m$$

$$-5B \cdot 4^m = -25 \cdot 4^m$$

$$\begin{cases} -5B = -25 \\ B = 5 \end{cases} \Rightarrow a_m^P = 5 \cdot 4^m$$

$$a_m = a_m^P + a_m^H = \alpha 5^m + \beta (-1)^m + 5 \cdot 4^m$$

Con $a_0 = 8 \Rightarrow 8 = \alpha \cdot 5^0 + \beta (-1)^0 + 5 \cdot 4^0$

$$8 = \alpha + \beta + 5$$

$$3 = \alpha + \beta$$

$$3 - \alpha = \beta$$

Con $a_1 = 17 \Rightarrow 17 = \alpha \cdot 5^1 + \beta (-1)^1 + 5 \cdot 4^1$

$$17 = \alpha \cdot 5 + (3 - \alpha)(-1) + 20$$

$$17 = 5\alpha - 3 + \alpha + 20$$

$$17 = 6\alpha + 17$$

$$0 = 6\alpha$$

$$0 = \alpha \wedge \beta = 3 - 0 = 3$$

Rta $a_m = \alpha \cdot 5^m + \beta (-1)^m + 5 \cdot 4^m$

Sp: $a_m = 3(-1)^m + 5 \cdot 4^m$