

PRIMEROS PARCIALES DISCRETA

THIAGO PEREZ

Aclaración: ¡Ninguna resolución es oficial, por lo que recomiendo hacer los parciales con varios compañeros y comparan con las respuestas!

Recomendación:

- Tener las guías hechas al día, si bien hay ejercicios que nunca se toman en parciales esos se pueden saltar, ayuda mucho a llegar al parcial más tranquilo.
- Hay un chico que da clases particulares, Juan Brea, lo buscan en los grupos y lo van a encontrar. Da muy bien la materia y no es caro, lo digo porque me ayudó mucho para promocionarla con kasten.

REPASO PARCIAL KASTEN

U.T.N. F.R.B.A. - MATEMÁTICA DISCRETA Repaso primer parcial

Ej. n°1: En el conjunto $L = \{101, 110, 0110, 0111, 11011, 11100\}$, se define la siguiente relación: $w_1 R w_2 \Leftrightarrow$ el número de unos de w_1 es igual al de w_2 .

- Haga la matriz de R y mediante operaciones matriciales demuestre que es una relación de equivalencia.
- Halle las clases y el conjunto cociente.

Ej. n°2: Demuestre:

- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}: 5^{2n} - 7$ es múltiplo de 6
- Demuestre la validez del siguiente razonamiento, utilizando reglas de inferencia:
 $(p \wedge q) \Rightarrow r; \sim r \vee t; \sim t \wedge q \therefore \sim p$

Ej. n°3:

Analice las propiedades de la relación R definida en Naturales: " $xRy \Leftrightarrow \text{m.c.d.}(x,y) = 1$ ".

Ej. n°4:

Dadas 2 rectas paralelas del plano y n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos quedan determinados con vértices en esos puntos?

Ejercicio n°5:

Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, demostrando o justificando:

- Hallar el mcd (435, 340) y escribirlo como combinación lineal entera de ellos.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$

U.T.N. F.R.B.A. - MATEMÁTICA DISCRETA
Repaso primer parcial

Ej. n°1: En el conjunto $L = \{101, 110, 011, 0111, 11011, 11100\}$, se define la siguiente relación: $w_1 R w_2 \Leftrightarrow$ el número de unos de w_1 es igual al de w_2 .

- Haga la matriz de R y mediante operaciones matriciales demuestre que es una relación de equivalencia.
- Halle las clases y el conjunto cociente.

Ej. n°2: Demuestre:
 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
 $\forall n \in \mathbb{N}: 5^{2n} - 7$ es múltiplo de 6
 Demuestre la validez del siguiente razonamiento, utilizando reglas de inferencia:
 $(p \wedge q) \Rightarrow r; \sim r \vee t; \sim t \wedge q \therefore \sim p$

Ej. n°3: Analice las propiedades de la relación R definida en Naturales: " $xRy \Leftrightarrow \text{m.c.d.}(x,y) = 1$ ".

Ej. n°4: Dadas 2 rectas paralelas del plano y n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos quedan determinados con vértices en esos puntos?

Ejercicio n°5: Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, demostrando o justificando:
 a) Hallar el mcd (435, 340) y escribirlo como combinación lineal entera de ellos.
 b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$

$$\begin{aligned} 2) \quad A - B \cap C &\equiv A \cap (\overline{B \cap C}) \\ &\equiv A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \quad \text{De Morgan} \\ &\equiv (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \quad \text{Distributiva} \\ &\equiv (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

$$1) (p, q) \Rightarrow r$$

$$2) r \vee t$$

$$3) \sim t \wedge q$$

$$\sim p$$

$$4) \sim t \quad \text{Sim} \quad 3$$

$$5) q \quad \text{Sim} \quad 2$$

$$6) r \vee t \quad \text{Conj} \quad 4, 5$$

$$7) \sim r \quad \text{SD} \quad (4, 6)$$

$$8) \sim (p, q) \quad \text{MT} \quad (1, 7)$$

$$9) p \vee q \quad \text{DM} \quad (8)$$

$$10) \sim q \vee \sim r \quad \text{Conj} \quad (9)$$

$$11) \sim p \quad \text{SD} \quad (10, 9)$$

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N}: 5^{2n} - 7 \text{ es mlt } 6$$

$$p) \quad 5^2 - 7 = 18 = 6 \cdot 3 \quad \checkmark$$

$$p \pm) \quad n = h$$

$$5^{2h} - 7 = 6K, K \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5^{2(h+1)} - 7 = 6t \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$5^{2h} = 6K + 7$$

$$5^{2h+2} - 7 = 5^{2h} \cdot 5^2 - 7$$

$$= (6K + 7) \cdot 25 - 7 = 150K + 168$$

$$= 6(25K + 28) = 6t, t \in \mathbb{Z}$$

Ej. n°3: Analice las propiedades de la relación R definida en Naturales: " $xRy \Leftrightarrow \text{m.c.d.}(x,y) = 1$ ".

$$\text{REFLEXIVA} \quad \forall x: (x,x) \in R$$

$$\text{mcd}(x,x) = x \quad \text{FALSO}$$

$$\text{mcd}(9,9) = 9 \neq 1$$

o.o. NO ES REFLEXIVA

$$\text{SIMETRICA} \quad \forall x,y: (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

$$\forall x,y: \text{mcd}(x,y) = 1 \Rightarrow \text{mcd}(y,x) = 1 \Rightarrow (y,x) \in R$$

$$\text{ASIMETRICA} \quad \forall x,y: (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x=y$$

$$x=7 \quad \text{FALSO}$$

$$y=4 \quad \text{mcd}(7,4)=1 \wedge \text{mcd}(4,7)=1 \Rightarrow 7=4$$

$$\text{TRANSITIVA} \quad \forall x,y: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

$$\text{FALSO}$$

$$\text{mcd}(4,7)=1 \wedge \text{mcd}(7,16)=1 \Rightarrow \text{mcd}(4,16)=1$$

$$x=4$$

$$y=7$$

$$z=16$$

Ej. n°4: Dadas 2 rectas paralelas del plano y n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra, ¿cuántos triángulos quedan determinados con vértices en esos puntos?

$$n \quad \text{CASO 1}$$

$$m \quad (C_{n,1} \cdot C_{m,2}) + (C_{n,2} \cdot C_{m,1})$$

$$n \quad \text{CASO 2}$$

$$m \quad \text{CASO 2}$$

Ejercicio nº5:

Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, demostrando o justificando:

- a) Hallar el mcd (435, 340) y escribirlo como combinación lineal entera de ellos.
b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$

$$\begin{array}{r} 435 \overline{) 340} \\ 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 340 \overline{) 95} \\ 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 95 \overline{) 55} \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55 \overline{) 40} \\ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 15} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 10} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{mcd}(435, 340) = 5}$$

$$5 = -25(435) + 32(340)$$

$$1 \ 0 \ 435 \quad \mathbb{I}_1$$

$$0 \ 1 \ 340 \quad \mathbb{I}_2$$

$$1 \ -1 \ 95 \quad \mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2$$

$$-3 \ 4 \ 55 \quad \mathbb{I}_4 = \mathbb{I}_2 - 3\mathbb{I}_3$$

$$4 \ -5 \ 40 \quad \mathbb{I}_5 = \mathbb{I}_3 - \mathbb{I}_4$$

$$-7 \ 9 \ 15 \quad \mathbb{I}_6 = \mathbb{I}_4 - \mathbb{I}_5$$

$$18 \ -23 \ 10 \quad \mathbb{I}_7 = \mathbb{I}_5 - 2\mathbb{I}_6$$

$$-25 \ 32 \ 5 \quad \mathbb{I}_8 = \mathbb{I}_6 - \mathbb{I}_7$$

$$0 \quad \mathbb{I}_9 = \mathbb{I}_7 - 2\mathbb{I}_8$$

$$b) \forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid b+c$$

$$\underbrace{3 \mid 9 \vee 3 \mid 2}_{\text{V}} \Rightarrow 3 \mid 11 \quad \text{F}$$

$$\exists a, b, c : 3 \mid 9 \vee 3 \mid 2 \wedge 3 \nmid 11$$

En el conjunto $L = \{101, 110, 011, 1101, 11011, 1100\}$, se define la siguiente relación: $a \sim b$ si y sólo si el número de unos de a es igual al de b .

a) Hacer la matriz de R y mediante operaciones matriciales demostrar que es una relación de equivalencia.

b) Hallar las clases y el conjunto cociente.

$$A) R = \left\{ \begin{array}{l} (101, 101) \ (101, 110) \ (101, 0110) \\ (110, 110) \ (110, 101) \ (110, 0110) \\ (0110, 0110) \ (0110, 101) \ (0110, 110) \\ (0111, 0111) \ (0111, 11100) \\ (11011, 11011) \\ (111000, 111000) \ (111000, 0111) \end{array} \right.$$

$$M(R) = \begin{array}{c|cccccc} & 101 & 110 & 011 & 0110 & 1101 & 11100 \\ \hline 101 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0110 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0111 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 11100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{REFLEXIVA: } \mathbb{I} \leq M(R)$$

$$\text{SIMPETRIA: } M(R)^T = M(R)$$

$$M(R) = \begin{array}{c|cccccc} & 101 & 110 & 011 & 0110 & 1101 & 11100 \\ \hline 101 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0110 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0111 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 11100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M(R) = (M(R))^T \quad \text{ES SIMETRICA}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R \cdot M_R \leq M_R \quad \checkmark$$

$$\text{ES TRANSITIVA}$$

$$b) \overline{101} = \{ (101), (110), (0110) \} = \overline{110} = \overline{0110} \quad R = \left\{ \begin{array}{l} (101, 101) \ (101, 110) \ (101, 0110) \\ (110, 110) \ (110, 101) \ (110, 0110) \\ (0110, 0110) \ (0110, 101) \ (0110, 110) \\ (0111, 0111) \ (0111, 11100) \\ (11011, 11011) \\ (111000, 111000) \ (111000, 0111) \end{array} \right.$$

$$\overline{0111} = \{ (0111), (111000) \} = \overline{111000}$$

$$\overline{11011} = \{ (11011) \}$$

$$\frac{L}{R} = \{ \overline{101}, \overline{0111}, \overline{11011} \}$$

Parcial Kasten (Faltan terminar algunos ej)

Ejercicio 1: (todo debe estar justificado).

- Simplificar: $((q \vee \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)) \wedge (p \rightarrow ((p \vee \neg q) \wedge \neg p))$
- Demostrar: $(A - C) - (A \cap B) = (A - B) - C$.

Ejercicio 2:

Probar por inducción matemática, $\sum_{i=1}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3:

Sea la relación de equivalencia S definida en $\mathbb{R}$ tal que:

$x S y \Leftrightarrow |x - 1| = |y - 1|$. Hallar clases y conjunto cociente.

Ejercicio 4:

En $\mathbb{Z}$ (enteros). Demostrar o dar un contraejemplo según corresponda.

- Si a y b son coprimos entonces a y (a + b) son coprimos.
- Si $c/a, b \Rightarrow c/a \vee c/b$.

Ejercicio 5:

En cada caso marque la única opción correcta.

1 Sabiendo que p es divisor de q y que p es divisor de t, entonces NO se puede asegurar

1 p + t es divisor de q ²	2 p es divisor de q + t	3 p es divisor de t + q
--------------------------------------	-------------------------	-------------------------

2 Si H es un conjunto no vacío y H_1 y H_2 son dos particiones de H, entonces seguro se cumple:

1 $H_1 \cap H_2 \subseteq P(H)$	2 $H_1 \cap H_2 = \emptyset$	3 $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$
---------------------------------	------------------------------	---------------------------------

3 Sean R y S dos relaciones definidas en un mismo conjunto A, tales que ambas son reflexivas entonces se cumple que:

1 $\text{Dom}(R \cup S) = \text{Dom} R \cup \text{Dom} S$	2 $\text{Dom}(R \cap S) = \text{Dom} R \cap \text{Dom} S$	3 R y S transitivas, entonces R ∪ S es reflexiva
---	---	--

1b) $(A - C) - (A \cap B) = (A - B) - C$

$\Leftrightarrow (A \cap \bar{C}) \cap (\overline{A \cap B}) \Leftrightarrow (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$

$\Leftrightarrow [(A \cap \bar{C}) \cap \bar{A}] \cup [(A \cap \bar{C}) \cap \bar{B}] \Leftrightarrow [\bar{C} \cap (A \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{C}) \cap \bar{B}]$

$\Leftrightarrow [\bar{C} \cap \emptyset] \cup [(A \cap \bar{C}) \cap \bar{B}] \Leftrightarrow \emptyset \cup (A \cap \bar{C} \cap \bar{B})$

$\Leftrightarrow A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \Leftrightarrow (A - B) \cap \bar{C} \Leftrightarrow (A - B) - C$

Probar por inducción matemática, $\sum_{i=1}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Pb) $n=1$

$3^1 = \frac{3^{1+1} - 3}{2}$

$3 = 3 \quad \checkmark$

H) $\sum_{i=1}^h 3^i = \frac{3^{h+1} - 3}{2}$

T) $\sum_{i=1}^{h+1} 3^i = \frac{3^{h+1+1} - 3}{2}$

Dem

$\sum_{i=1}^h 3^i + 3^{h+1} = \frac{3^{h+1} - 3}{2} + 3^{h+1} = \frac{3^{h+1} - 3 + 2 \cdot 3^{h+1}}{2}$

$= \frac{3 \cdot 3^{h+1} - 3}{2} = \frac{3^{h+2} - 3}{2}$

Ejercicio 4:

En $\mathbb{Z}$ (enteros). Demostrar o dar un contraejemplo según corresponda.

- Si a y b son coprimos entonces a y (a + b) son coprimos.
- Si $c/a, b \Rightarrow c/a \vee c/b$.

4b) $15 \mid 3 \cdot 5 \Rightarrow 15 \mid 3 \vee 15 \mid 5$

$\checkmark \quad \downarrow \quad \checkmark$

4a) $\text{mcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{mcd}(a, a+b) = 1$

Dem

$\forall a, b \quad 1 = s \cdot a + t \cdot b \Rightarrow 1 = s \cdot a + t \cdot (b+a-a)$

$\Rightarrow 1 = s \cdot a + t \cdot b + t \cdot a - t \cdot a \Rightarrow 1 = a \cdot (s+t) + (a+b) \cdot t$

$\Rightarrow \text{mcd}(a, a+b) = 1$

Ejercicio 5:
En cada caso marque la única opción correcta.
Sabiendo que p es divisor de 6 y q es divisor de 1, entonces NO se puede asegurar:

1) $p \vee q$ es divisor de 6? 2) $p \wedge q$ es divisor de 6? 3) $p \vee q$ es divisor de 1?

$p \mid 6 \wedge p \mid 1 \Rightarrow p \mid 6^2 \quad 3 \cdot 9 \mid 3^2$
 $3 \mid 3 \quad 3 \mid 9 \quad 2 \mid 9$
 ② $p \mid q$ ③ $p \mid 6+q$ ✓

NO SE PUEDE ASEGURAR LA PRIMERA OPCIÓN

Ejercicio 3:
Sea la relación de equivalencia S definida en $\mathbb{R}$ tal que:
 $x S y \Leftrightarrow |x-1| = |y-1|$. Hallar clases y conjunto cociente.

$\forall y \in \mathbb{R}: \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x S y\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} / |x-1| = |y-1|\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} / x-1 = y-1 \vee x-1 = -(y-1)\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} / x = y \vee x = -y+2\}$

CONS. COCIENTE

$\frac{\mathbb{R}}{S} = \left\{ \bar{x} : x \in [1, +\infty) \right\}$

$y = x \Rightarrow x = -x+2$
 $x = -x+2$
 $2x = 2$
 $x = 1$

PARCIAL KASTEN 2019

Ejercicio n1:
a) Demostrar: $(A - B) \cup (A \cap B) = B \Rightarrow B \subset A$.
 b) Analice la validez del siguiente razonamiento categórico, indicando la propiedad utilizada:
 $\exists x: (p(x) \vee q(x)); \forall x: (q(x) \Rightarrow r(x)); \exists x: \neg r(x) \therefore \exists x: (p(x) \vee r(x))$.

b) Analice la validez del siguiente razonamiento categórico, indicando la propiedad utilizada:
 $\exists x: (p(x) \vee q(x)); \forall x: (q(x) \Rightarrow r(x)); \exists x: \neg r(x) \therefore \exists x: (p(x) \vee r(x))$.

Ejercicio n3:
Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. En $\mathbb{R}$ se define la relación $S: a S b \Leftrightarrow |x-1| = |y-1|$.
 a) Probar que S es una relación de equivalencia.
 b) Dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Ejercicio n5:
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, demostrando las verdaderas y dando contraejemplo si son falsas:
 a) $\forall a, b \in \mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales), si a y b son coprimos $\wedge c \mid a$ entonces b y c son coprimos.
 b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$.

Ejercicio n.1

a) Demostrar: $(A - B) \cup (A \cap B) = B \Rightarrow B \subset A$.b) Analice la validez del siguiente razonamiento categórico, indicando la propiedad utilizada:
 $\exists x: (p(x) \vee q(x)); \forall x: (q(x) \Rightarrow r(x)); \exists x: \neg r(x) \wedge \exists x: (p(x) \vee r(x))$.

$$1A) \quad x \in B \Rightarrow x \in (A-B) \cup (A \cap B) \underset{U}{\Rightarrow} x \in (A-B) \vee x \in A \cap B$$

$$\underset{A \cap B}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \underset{DIST}{\Rightarrow} x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)$$

$$\underset{COMP}{\Rightarrow} x \in A \vee x \in \emptyset \underset{MUTUA}{\Rightarrow} x \in A$$

b) Analice la validez del siguiente razonamiento categórico, indicando la propiedad utilizada:
 $\exists x: (p(x) \vee q(x)); \forall x: (q(x) \Rightarrow r(x)); \exists x: \neg r(x) \wedge \exists x: (p(x) \vee r(x))$.

- 1) $\exists x: (p(x) \vee q(x))$
 4) $\forall x: (q(x) \Rightarrow r(x))$
 3) $\exists x: \neg r(x)$
 $\exists x: (p(x) \vee r(x))$
- 4) $p(a) \vee q(a)$ P.E ①
 - 5) $q(a) \Rightarrow r(a)$ P.U ②
 - 6) $\neg p(a) \Rightarrow q(a)$ COND ④
 7) $\neg p(a) \Rightarrow r(a)$ S.H (6 $\wedge$ 5)
 8) $\neg(\neg p(a)) \vee r(a)$ CONDICIONAL ⑦
 9) $p(a) \vee r(a)$ INVOLUCIÓN ⑧
 10) $\exists x: p(x) \vee r(x)$ G.E ⑨

Ejercicio n.2

Sea R el conjunto de los números reales. En R se define la relación $S: aSb \Leftrightarrow |x-1| = |y-1|$.a) Probar que S es una relación de equivalencia.

b) Dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

a) REFLEXIVA $\forall x: xRx$

$$\forall x: xRx \Rightarrow |x-1| = |x-1| \Rightarrow xRx$$

SIMETRICA $\forall x, y: xRy \Rightarrow yRx$

DEM

$$\forall x, y: xRy \Rightarrow |x-1| = |y-1| \Rightarrow |y-1| = |x-1| \Rightarrow yRx$$

TRANSITIVA $\forall x, y, z: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

DEM

$$\forall x, y, z: |x-1| = |y-1| \wedge |y-1| = |z-1| \Rightarrow |x-1| = |z-1| \Rightarrow xRz$$

CLASES EQ

$$\bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / xRy\}$$

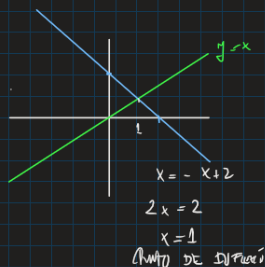
$$= \{x \in \mathbb{R} / |x-1| = |y-1|\} = \{x \in \mathbb{R} / x-1=y-1 \vee x-1=-(y-1)\}$$

$$y-1 = -x+1$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / y=x \vee y=-x+2\}$$

CONJUNTO COCIENTE

$$\frac{\mathbb{R}}{R} = \{\bar{x}: x \in [1, +\infty)\}$$



Ejercicio n.3

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, demostrando las verdaderas y dando contraejemplos si son falsas.

a) $\forall a, b \in \mathbb{N} (a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a=b)$ b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} (a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c))$

$$a) \quad mcd(a, b) = 1 \wedge c/a \Rightarrow mcd(b, c) = 1$$

$$H) \quad c/a \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a = c \cdot k$$

$$H) \quad mcd(a, b) = 1 \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z}: 1 = sa + tb$$

DEM

$$\forall a, s, c \in \mathbb{N}: 1 = sa + tb \Rightarrow 1 = s \cdot c \cdot k + t \cdot b$$

$$\Rightarrow 1 = (s \cdot k) \cdot c + t \cdot b \Rightarrow mcd(b, c) = 1$$

$$b) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}: a \mid b \vee a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$$

FALSO

$$a = 2$$

$$b = 3$$

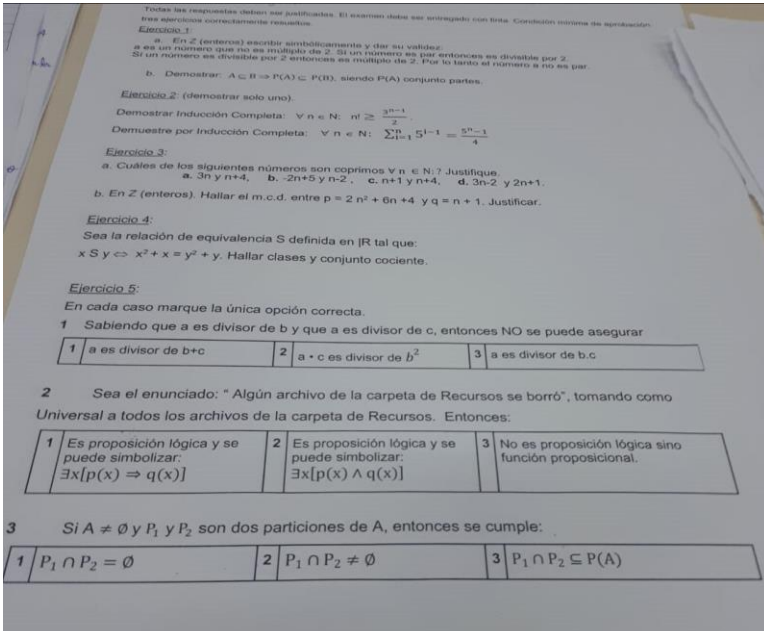
$$c = 4$$

$$\begin{array}{ccc} 2 \mid 3 & \vee & 2 \mid 4 \\ \text{F} & & \text{V} \end{array} \Rightarrow 2 \mid 3+4$$

F

(F)

PARCIAL KASTEN



Ejercicio 1:
a. En $\mathbb{Z}$ (enteros) escribir simbólicamente y dar su validez:
a es un número que no es múltiplo de 2. Si un número es par entonces es divisible por 2. Si un número es divisible por 2 entonces es múltiplo de 2. Por lo tanto el número a no es par.

$1A) U: \{x: x \text{ es un número entero}\}$ 1) $\sim r(a)$
 $P(x): "x \text{ es par}"$ 4) $\forall x: p(x) \Rightarrow q(x)$
 $q(x): "x \text{ es divisible por } 2"$ 3) $\forall x: q(x) \Rightarrow r(x)$
 $r(x): "x \text{ es múltiplo de } 2"$
 $a: a \in U$

$\neg p(a) \Rightarrow q(a)$ 2) $\neg p(a)$
 $q(a) \Rightarrow r(a)$ 3) $q(a)$
 $p(a) \Rightarrow r(a)$ 4) $p(a)$
 $\neg p(a)$ 5) $\neg p(a)$
 $m.T$

RAZ. VALIDO

b. Demostrar: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$, siendo $P(A)$ conjunto partes.

$HIP) A \subseteq B$
 $T) x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$

DEM
 $\forall x: x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \xrightarrow{HIP} x \subseteq B \xrightarrow{P4} x \in P(B)$

Ejercicio 2: (demostrar solo uno).
Demostrar Inducción Completa: $\forall n \in \mathbb{N}: n! \geq \frac{3^{n-1}}{2}$.
Demuestre por Inducción Completa: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n 5^{i-1} = \frac{5^n - 1}{4}$.

1) $P(1) 1 \geq \frac{1}{2}$
 $PI) n=h \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $h! \geq \frac{3^{h-1}}{2} \Rightarrow (h+1)! \geq \frac{3^h}{2}$

DEM
 $(h+1)! = (h+1) \cdot h! \geq (h+1) \cdot \frac{3^{h-1}}{2}$
 $= \frac{3^{h-1} \cdot h + 3^{h-1}}{2} = \frac{3^{h-1} \cdot h + 3^{h-1}}{2}$
 $= \frac{3^h (3^{-1} \cdot h + 3^{-1})}{2} = \frac{3^h}{2} \cdot (3^{-1} \cdot h + 3^{-1}) \geq \frac{3^h}{2}$
 $3^{-1} \cdot h + 3^{-1} \geq 1$

Ejercicio 4
Sea la relación de equivalencia $\sim$ definida en $\mathbb{R}$ tal que:
 $x \sim y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$. Hallar clases y conjunto cociente.

a. Cuáles de los siguientes números son coprimos $\forall n \in \mathbb{N}$? Justifique.
a. $3n$ y $n+4$, b. $2n+5$ y $n-2$, c. $n+1$ y $n+4$, d. $3n-2$ y $2n+1$

a) $n=2$ $(6,6) = 6 \neq 1$
 c) $n=5$ $(6,9) = 3 \neq 1$
 d) $n=3$ $(7,7) = 7 \neq 1$

$d \mid -2n+5 \wedge d \mid n-2 \Rightarrow d \mid -2n+5 \wedge d \mid 2n-4$
 $\Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d=1$ $\therefore \text{mcd}(-2n+5, n-2) = 1$

Demuestre por Inducción Completa: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n 5^{i-1} = \frac{5^n - 1}{4}$

Pb) $n=1$ $S^0 = \frac{5^1 - 1}{4}$
 $1 = 1 \quad \checkmark$

P $\pm$) $\sum_{i=1}^n 5^{i-1} = \frac{5^n - 1}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} 5^{i-1} = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

D $\Rightarrow$
 $\sum_{i=1}^n 5^{i-1} + 5^n = \frac{5^n - 1}{4} + 5^n$
 $= \frac{5^n - 1 + 4 \cdot 5^n}{4} = \frac{5 \cdot 5^n - 1}{4} = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

Ejercicio 4
 $\forall y \in \mathbb{R} : \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x \sim y\}$
 $= \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x = y^2 + y\}$
 $= \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + \frac{1}{4} = y^2 + y + \frac{1}{4}\}$
 $= \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / (x + \frac{1}{2})^2 = (y + \frac{1}{2})^2\}$
 $= \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / |x + \frac{1}{2}| = |y + \frac{1}{2}|\}$
 $= \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x + \frac{1}{2} = y + \frac{1}{2} \vee x + \frac{1}{2} = -(y + \frac{1}{2})\}$
 $= \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x = y \vee y = -x - \frac{1}{2}\}$

$\bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x \in [-\frac{1}{2}, +\infty)\}$

$y = -x - \frac{1}{2}$
 $2x = -\frac{1}{2}$
 $x = -\frac{1}{4}$
 $x = -\frac{1}{4} : 2$
 $x = -\frac{1}{8}$

PARCIAL KASTEN 2022 (Faltan ejs)

tres ejercicios correctamente resueltos.

Ejercicio 1:

a. Analizar la validez del razonamiento y, en caso de ser válido, demostrar usando leyes lógicas y reglas de inferencia:
 $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x)) ; \exists x: (s(x) \Rightarrow \neg q(x)) ; \forall x: s(x) \therefore \exists x: \neg p(x)$

b. Demostrar: $A = \bar{C} \cap (B \cup C) \Rightarrow A \subset B$.

Ejercicio 2:
 Probar por inducción matemática: $2^{4n} - 1$ es múltiplo de 15, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3:

a. En $\mathbb{Z}$ (enteros): si c es impar entonces $8 \mid (c^2 - 1)$.

b. En $P(A)$ se define la relación: $X R Y \Leftrightarrow \#(X \cap Y) = 1$.
 Si $A = \{1, 2\}$ haga el digrafo de la relación R y analice las propiedades.

Ejercicio 4:

a. En $\mathbb{Z}$, (enteros), se define la relación R : $x R y \Leftrightarrow 5 \mid (x - y)$.
 R es relación de equivalencia, dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

b. Sean R y S relaciones en A : Si $R \subset S$ y R reflexiva $\Rightarrow S^{-1}$ es reflexiva.

Ejercicio 5:

a. El máximo común divisor entre 184 y 228 es 4

b. En el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, considerar $p(x, y) : [(x < y) \Rightarrow x \mid y]$. Se pide dar el valor de verdad de $\forall x \exists y: p(x, y)$. Justificar.

Ejercicio 1:

- a. Analizar la validez del razonamiento y, en caso de ser válido, demostrar usando leyes lógicas y reglas de inferencia:
 $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x)) : \exists x: (x(x) \Rightarrow \neg q(x)) : \forall x: x(x) : \exists x: \neg p(x)$

- b. Demostrar: $A = \bar{C} \cap (B \cup C) \Rightarrow A \subset B$.

Ejercicio 2:

Probar por inducción matemática: $2^{4n} - 1$ es múltiplo de 15, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3:

- a. En $\mathbb{Z}$ (enteros): si c es impar entonces $8 \mid (c^2 - 1)$.
 b. En $P(A)$ se define la relación: $XRY \Leftrightarrow \#(X \cap Y) = 1$.
 Si $A = \{1, 2\}$ haga el digrafo de la relación R y analice las propiedades.

Ejercicio 4:

- a. En $\mathbb{Z}$ (enteros), se define la relación R : $xRy \Leftrightarrow 5 \mid (x - y)$.
 R es relación de equivalencia, dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.
 b. Sean R y S relaciones en A . Si $R \subset S$ y R reflexiva $\Rightarrow S$ es reflexiva.

Ejercicio 5:

- a. El máximo común divisor entre 184 y 228 es 4.
 b. En el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, considere $p(x, y) \{ (x < y) \Rightarrow x \mid y \}$. Se pide dar el valor de verdad de $\forall x \exists y (p(x, y))$. Justificar.

b. Demostrar: $A = \bar{C} \cap (B \cup C) \Rightarrow A \subset B$.

$$H) A = \bar{C} \cap (B \cup C)$$

DEM

$$\forall x: x \in A \Rightarrow x \in \bar{C} \cap (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \notin C \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \notin C \wedge x \in B) \vee (x \notin C \wedge x \in C) \Rightarrow (x \notin C \wedge x \in B) \vee x \in \emptyset$$

$$\Rightarrow x \in B \quad \therefore A \subset B$$

$$1) \forall x: p(x) \Rightarrow q(x)$$

$$2) \exists x: s(x) \Rightarrow \neg q(x)$$

$$3) \forall x: s(x)$$

$$\exists x: \neg p(x)$$

$$4) s(a) \Rightarrow \neg q(a) \quad P.E \text{ (2)}$$

$$5) s(a) \quad P.U \text{ (3)}$$

$$6) p(a) \Rightarrow q(a) \quad P.U \text{ (1)}$$

$$7) \neg q(a) \quad MP \text{ (4, 5)}$$

$$8) \neg p(a) \quad MT \text{ (6, 7)}$$

$$9) \exists x: \neg p(x)$$

Ejercicio 2:

Probar por inducción matemática: $2^{4n} - 1$ es múltiplo de 15, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$P_b) 2^4 - 1 = 15 = 15 \cdot 1 \quad \checkmark$$

$$P_I) 2^{4k} - 1 = 15K, K \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^{4(k+1)} - 1 = 15t, t \in \mathbb{Z}$$

DEM

$$2^{4k+4} - 1 = 2^{4k} \cdot 2^4 - 1 = (15K + 1) \cdot 16 - 1 = 16 \cdot 15K + 16 - 1 = 15(16K + 1) = 15t, t \in \mathbb{Z}$$

a. En $\mathbb{Z}$ (enteros): si c es impar entonces $8 \mid (c^2 - 1)$.

$$A) c \text{ impar} \Rightarrow 8 \mid c^2 - 1$$

$$c^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2 + k) = 4 \cdot 2T = 8T \quad \therefore 8 \mid c^2 - 1$$

Ejercicio 4:

- a. En $\mathbb{Z}$ (enteros), se define la relación R : $xRy \Leftrightarrow 5 \mid (x - y)$.
 R es relación de equivalencia, dar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.
 b. Sean R y S relaciones en A . Si $R \subset S$ y R reflexiva $\Rightarrow S$ es reflexiva.

$$\bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x - y = 5k\}$$

$$\bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / x = 5k + y\}$$

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{R} / x = 5k\}$$

$$\bar{2} = \{x \in \mathbb{R} / x = 5k + 2\}$$

$$\bar{4} = \{x \in \mathbb{R} / x = 5k + 4\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{R} / x = 5k + 1\}$$

$$\bar{3} = \{x \in \mathbb{R} / x = 5k + 3\}$$

$$\bar{5} = \{5, 10\} \text{ se repite a } 10$$

$$\frac{\mathbb{R}}{R} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

Parcial ¿? (No se de que profe fue)

Ejercicio No 1
 Demostrar si es verdadera o dar un contraejemplo si es falsa
 1.1 $(A \cap B) \cup (A - B) = A$
 1.2 $\text{Im}g(R \cap S) = \text{Im}g R \cap \text{Im}g S$

Ejercicio No 2
 Sea el conjunto $A = \{-8, -7, 0, 1, 2\}$ y R una relación definida en $A / x R y \Leftrightarrow |x + 3| = |y + 3|$
 2.1. Estudiar matricialmente las propiedades de R y escribir un contraejemplo en el caso de no cumplir con la propiedad. Si es posible clasificarla.
 2.2. Si la relación R del punto 2.1 es de equivalencia hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente, si es de orden realizar el diagrama de Hasse.

Ejercicio No 3
 3.1 Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
 a) $a = b(n) \wedge c = d(n) \Rightarrow a + c = b + d(n)$
 b) En $\mathbb{Z}$ si $a \neq 0, a | b^n \Rightarrow a | b$
 3.2. Probar por inducción que $\sum_{i=1}^n (i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

Ejercicio No 4
 4.1. Indicar cuántas relaciones binarias distintas definidas en A se pueden realizar siendo $A = \{x, y\}$. Dar una esas relaciones y que sea de equivalencia (justificar)
 4.2. Mostrar si la siguiente expresión es una tautología, contradicción $(p \vee (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \vee r)$

Ejercicio No 5
 5.1 58 mujeres y 6 hombres se inscriben para formar parte del comité directivo de una ONG, formado por 4 miembros.
 a. ¿De cuántas formas distintas será posible elegir a esos cuatro miembros si debe haber exactamente 3 mujeres?
 b. ¿De cuántas formas distintas será posible elegir a esos cuatro miembros si debe haber por lo menos 3 mujeres?
 5.2 Simboliza este razonamiento y analiza su validez, demostrando o justificando correctamente:
 "Algunos fertilizantes tienen pesticidas. Algunos pesticidas son tóxicos. Por lo tanto, algunos fertilizantes son tóxicos."

$$1.1) (A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$\stackrel{\text{Distributiva}}{=} A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap U = A$$

$$U = \{1, 2, 3, 4\} \quad R \cap S = \emptyset$$

$$R = \{(1, 2), (1, 4)\} \quad I_m(R) = \{2, 4\}$$

$$S = \{(2, 4)\} \quad I_m(S) = \{4\}$$

$$\emptyset = \{2, 4\} \cap \{4\}$$

Ejercicio No 2
 Sea el conjunto $A = \{-8, -7, 0, 1, 2\}$ y R una relación definida en $A / x R y \Leftrightarrow |x + 3| = |y + 3|$
 2.1. Estudiar matricialmente las propiedades de R y escribir un contraejemplo en el caso de no cumplir con la propiedad. Si es posible clasificarla.
 2.2. Si la relación R del punto 2.1 es de equivalencia hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente, si es de orden realizar el diagrama de Hasse.

$R = \{(-8, -8), (-8, 2), (2, -8), (0, 0), (2, 2), (-7, -7), (-7, 1), (1, -7), (1, 1)\}$

2.1)

	-8	-7	0	1	2
-8	1	0	0	0	1
-7	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
2	1	0	0	0	1

• REFLEXIVA $I \leq M_R$
 • SIMETRICA $M_R \leq (M_R)^t$

REFLEXIVA: $\forall x \in A: x R x$
 DEM: $|x + 3| = |x + 3| \Rightarrow x R x$

SIMETRICA: $\forall x, y \in A: x R y \Rightarrow y R x$
 DEM: $\forall x, y: x R y \Rightarrow |x + 3| = |y + 3| \Rightarrow |y + 3| = |x + 3| \Rightarrow y R x$

TRANSITIVA: $\forall x, y, z \in A: x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$
 DEM: $\forall x, y, z: x R y \wedge y R z \Rightarrow |x + 3| = |y + 3| \wedge |y + 3| = |z + 3| \Rightarrow |x + 3| = |z + 3| \Rightarrow x R z$

CLASES DE EQUIVALENCIA:
 $\bar{-8} = \{-8, 2\} = \bar{2}$
 $\bar{-7} = \{-7, 1\} = \bar{1}$
 $\bar{0} = \{0\}$

CONJUNTO COCIENTE:
 $\frac{R}{A} = \{\bar{-8}, \bar{-7}, \bar{0}\}$

2.2. Si la relación R del punto 2.1 es de equivalencia hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente, si es de orden realizar el diagrama de Hasse.

CLASES DE EQUIVALENCIA

CONJUNTO COCIENTE

$$\bar{-8} = \{-8, 2\} = \bar{2}$$

$$\bar{-7} = \{-7, 1\} = \bar{1}$$

$$\bar{0} = \{0\}$$

$$\frac{R}{A} = \{\bar{-8}, \bar{-7}, \bar{0}\}$$

3.2. Probar por inducción que: $\sum_{i=1}^n (i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

Pb) $n=1$

$$(1+2) \cdot 1 = \frac{1(4)(2 \cdot 1 + 7)}{6}$$

$$3 = 3 \checkmark$$

P₁) $\sum_{i=1}^h (i+2)i = \frac{h(h+1)(2h+7)}{6} \Rightarrow \sum_{i=1}^{h+1} (i+2)i = \frac{(h+1)(h+2)(2h+9)}{6}$

Dem

$$\sum_{i=1}^h (i+2)i + (h+3)(h+1) = \frac{h(h+1)(2h+7)}{6} + (h+3)(h+1)$$

$$= \frac{h(h+1)(2h+7) + 6(h+3)(h+1)}{6} = \frac{(h+1) \cdot [h(2h+7) + 6(h+3)]}{6}$$

$$= \frac{(h+1) \cdot (2h^2 + 13h + 18)}{6} = \frac{(h+1) \cdot [2(h+2) \cdot (h+3)]}{6}$$

$$= \frac{(h+1) \cdot (h+2) \cdot (2h+9)}{6}$$

Ejercicio N° 3

3.1 Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) $a = b(n) \wedge c = d(n) \Rightarrow a + c = b + d(n)$

b) En $\mathbb{Z}$ si $a \neq 0, a \mid b' \Rightarrow a \mid b$

$n \mid a-b$

b) $a = 9$
 $b = 3$
 $n = 2$

$9 \mid 3^2 \Rightarrow 9 \mid 3$

Ejercicio N° 4
 4.1. Indicar cuántas relaciones binarias distintas definidas en A se pueden realizar siendo $A = \{x, y\}$. Dar una lista de relaciones y que sea de equivalencia (cuantificar).
 4.2. Mostrar si la siguiente expresión es una tautología, contradicción $(p \vee (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (p \vee r))$

4.1) $2^{|A|} = 2^2 = 4$ RELACIONES

$R = \{(x, x)\}$ REFLEXIVA xRx
 SIMETRICA $xRy \Rightarrow yRx$
 TRANSITIVA (LA ANTECEDENTE FALSA)

4.2) $(p \vee (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (p \vee r))$

$$\begin{aligned} & [p \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \vee r) \\ \equiv & [p \vee \neg q \vee r] \Rightarrow (p \vee r) \quad \text{COND} \\ \equiv & [\neg p \wedge (\neg \neg q \wedge \neg r)] \vee (p \vee r) \quad \text{COND} \\ \equiv & [\neg p \wedge (q \wedge \neg r)] \vee p \vee r \quad \text{COND} \\ \equiv & [(\neg p \vee p) \wedge (q \wedge \neg r) \vee p] \vee r \quad \text{COND} \\ \equiv & [T \wedge (q \wedge \neg r) \vee p] \vee r \quad \text{COND} \\ \equiv & (q \wedge \neg r) \vee p \vee r \quad \text{COND} \\ \equiv & ((q \wedge \neg r) \vee r) \vee p \quad \text{COND} \\ \equiv & [(q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)] \vee p \quad \text{COND} \\ \equiv & [(q \vee r) \wedge T] \vee p \quad \text{COND} \\ \equiv & (q \vee r) \vee p \quad \text{COND} \end{aligned}$$

CONTINGENCIA

PARCIAL ISOLA

Matemática Discreta UNIB **PRIMER PARCIAL** Fecha: Julio de 2020

APELLIDO: LASAGUE NOMBRE: FABRICO CURSO: 1002 T2

PARA APROBAR ES NECESARIO TENER UN 60% CORRECTAMENTE RESUELTO Y JUSTIFICADO

1	2	3	4	5	Nota Final

Ejercicio n° 1
Analice la validez de los siguientes razonamientos. Justifique adecuadamente:

a) $[(p \vee \neg q) \wedge (s \wedge t) \wedge (t \Rightarrow q)] \Rightarrow p$
b) $\exists x: [r(x) \vee t(x)]; \neg t(a) \therefore \exists x: r(x)$

Ejercicio n° 2
a) Demuestre usando el Principio de Inducción Completa: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n 9 \cdot i = \frac{9n(n+1)}{2}$
b) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Sea $A = \{ \emptyset, a, \{a\} \}$ y $B = \{ a, b \}$;
i) $\emptyset \in A \cup B$
ii) $\{a\} \in A \cap B$

Ejercicio n° 3
a) Indique la cantidad de números 5 cifras, múltiplos de 5 que se pueden formar con los dígitos impares (1, 3, 5, 7, 9).
b) Halle el o los términos centrales en el desarrollo de: $(3 \cdot x + \frac{1}{2})^8$

Ejercicio n° 4
a) Demuestre justificando cada paso: $\forall x \in \mathbb{Z}: a = (x+1)^2$ y $b = x(x+2)$ son coprimos: $\text{mcd}(a; b) = 1$.
b) Halle m.c.m.(a;b) y escriba al m.c.d.(a;b) como combinación lineal entera de a y b: $a=210$ y $b=537$.

Ejercicio n° 5
Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y una relación R definida en el conjunto A:
 $a R b \Leftrightarrow 3 \mid a - b$.
i) Pruebe que R es una relación de equivalencia.
ii) Halle las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Matemática Discreta UNIB **PRIMER PARCIAL** Fecha: Julio de 2020

APELLIDO: LASAGUE NOMBRE: FABRICO CURSO: 1002 T2

PARA APROBAR ES NECESARIO TENER UN 60% CORRECTAMENTE RESUELTO Y JUSTIFICADO

1	2	3	4	5	Nota Final

Ejercicio n° 1
Analice la validez de los siguientes razonamientos. Justifique adecuadamente:
a) $[(p \vee \neg q) \wedge (s \wedge t) \wedge (t \Rightarrow q)] \Rightarrow p$
b) $\exists x: [r(x) \vee t(x)]; \neg t(a) \therefore \exists x: r(x)$

Ejercicio n° 2
a) Demuestre usando el Principio de Inducción Completa: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n 9 \cdot i = \frac{9n(n+1)}{2}$
b) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Sea $A = \{ \emptyset, a, \{a\} \}$ y $B = \{ a, b \}$;
i) $\emptyset \in A \cup B$
ii) $\{a\} \in A \cap B$

Ejercicio n° 3
a) Indique la cantidad de números 5 cifras, múltiplos de 5 que se pueden formar con los dígitos impares (1, 3, 5, 7, 9).
b) Halle el o los términos centrales en el desarrollo de: $(3 \cdot x + \frac{1}{2})^8$

Ejercicio n° 4
a) Demuestre justificando cada paso: $\forall x \in \mathbb{Z}: a = (x+1)^2$ y $b = x(x+2)$ son coprimos: $\text{mcd}(a; b) = 1$.
b) Halle m.c.m.(a;b) y escriba al m.c.d.(a;b) como combinación lineal entera de a y b: $a=210$ y $b=537$.

Ejercicio n° 5
Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y una relación R definida en el conjunto A:
 $a R b \Leftrightarrow 3 \mid a - b$.
i) Pruebe que R es una relación de equivalencia.
ii) Halle las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

a) $[(p \vee \neg q) \wedge (s \wedge t) \wedge (t \Rightarrow q)] \Rightarrow p$

$V(p)=F \Rightarrow V(\neg q)=V$

$V(q)=F \Rightarrow V(s)=F$ (RAZ. VALIDO)

$V(s)=V \Rightarrow V(t)=V$

b)

1) $p \vee \neg q$	4) $\neg q \vee p$ CONN 1)
2) $s \wedge t$	5) $q \Rightarrow p$ COND 4)
3) $t \Rightarrow q$	6) $t \Rightarrow p$ S.H (3 y 5)
$\frac{p}{\exists x: r(x)}$	7) t SIMP 2)
	8) p MP (6 y 7)

RAZ. VALIDO

$r(x) = x \in \mathbb{P} \text{ AR}$

$t(x) = x \geq 5$

$U = \{1, 7\} \quad a = 1, a \in U$

Ejercicio n° 2
a) Demuestre usando el Principio de Inducción Completa: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n 9 \cdot i = \frac{9n(n+1)}{2}$

Pb) $n=1$
 $9 = \frac{9(1+1)}{2}$
 $9 = 9$ ✓

Pi) $n=h$
 $\sum_{i=1}^h 9 \cdot i = \frac{9h(h+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{h+1} 9 \cdot i = \frac{9(h+1) \cdot (h+2)}{2}$

Dem
 $\sum_{i=1}^h 9 \cdot i + 9(h+1) = \frac{9h(h+1)}{2} + 9h + 9$
 $= \frac{9h(h+1) + 18h + 18}{2} = \frac{9h^2 + 27h + 18}{2} = \frac{9(h+1) \cdot (h+2)}{2}$

Ejercicio n° 3
a) Indique la cantidad de números 5 cifras, múltiplos de 5 que se pueden formar con los dígitos impares (1, 3, 5, 7, 9).
b) Halle el o los términos centrales en el desarrollo de: $(3 \cdot x + \frac{1}{2})^8$

a) $\frac{5}{4} \frac{5}{3} \frac{5}{2} \frac{5}{1} \frac{1}{1}$ con 1EP
 $\frac{4}{3} \frac{3}{2} \frac{2}{1} \frac{1}{1}$ sin 1EP

b) $(3x + \frac{1}{2})^8 =$

$\binom{8}{4} \cdot (3x)^4 \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{2835}{8} x^4$

$T_4, T_1, T_2, T_3, T_5, T_6, T_7, T_8$

Ejercicio nº 4

- a) Demuestre justificando cada paso: $\forall x \in \mathbb{Z}: a = (x+1)^2$ y $b = x(x+2)$ son coprimos: $\text{mcd}(a, b) = 1$.
 b) Halle m.c.m.(a, b) y escriba al m.c.d.(a, b) como combinación lineal entera de a y b: $a=210$ y $b=537$.

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad \text{mcd}(a, b) &= d \\ \Rightarrow d \mid (x+1)^2 \quad \wedge \quad d \mid x(x+2) &\Rightarrow d \mid x^2 + 2x + 1 \quad \wedge \quad d \mid -(x^2 + 2x) \\ &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} d \mid x^2 + 2x + 1 + (-x^2 - 2x) \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \\ &\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{mcd}(x^2 + 2x + 1, x(x+2)) = 1}$$

$$\text{b)} \quad \text{mcm}(210, 537) =$$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 537 & 3 \\ 179 & 179 \\ 1 & \end{array}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 179 = 37510$$

mcm

$$\text{mcd}(210, 537) = -23 \cdot 210 + 9 \cdot 537$$

$$\cdot \text{mcd}(210, 537) = 3$$

Talco que hacer

$$\begin{array}{lll} 1 & 0 & 537 \quad F_1 \\ 0 & 1 & 210 \quad F_2 \\ 1 & -2 & 117 \quad F_3 = F_1 - 2F_2 \\ -1 & 3 & 93 \quad F_4 = F_2 - F_3 \\ 2 & -5 & 24 \quad F_5 = F_3 - F_4 \\ -7 & 18 & 21 \quad F_6 = F_4 - 3F_5 \\ 9 & -23 & 3 \quad F_7 = F_5 - F_6 \\ 0 & & 0 \quad F_8 = F_6 - 7F_7 \end{array}$$

Ejercicio nº 5

- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y una relación R definida en el conjunto A :
 $a R b \Leftrightarrow 3 \mid a - b$.
 i) Pruebe que R es una relación de equivalencia.
 ii) Halle las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad (1,1) (1,4) (1,7) (1,10) &= \overline{1} = \overline{7} = \overline{10} \\ (2,2) (2,5) (2,8) &= \overline{2} = \overline{8} \\ (3,3) (3,6) (3,9) &= \overline{3} = \overline{9} \\ \overline{1} &= \{1, 4, 7, 10\} \quad \overline{2} = \{2, 5, 8\} \quad \overline{3} = \{3, 6, 9\} \end{aligned}$$

CONS COCIENTE

$$\frac{A}{R} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$$

$$\text{i)} \quad \text{REFLEXIVA: } \forall a, a R a$$

ben

$$\forall a, 3 \mid a - a \Rightarrow 3 \mid 0 \Rightarrow a R a$$

$$\text{SIMETRICA: } \forall a, b: a R b \Rightarrow b R a$$

DEM

$$\forall a, b: 3 \mid a - b \Rightarrow 3 \mid -(a - b) \Rightarrow 3 \mid b - a \Rightarrow b R a$$

$$\text{TRANSITIVA: } \forall a, b, c: a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$

DEM

$$\forall a, b, c: 3 \mid a - b \wedge 3 \mid b - c \Rightarrow 3 \mid a - b + b - c \Rightarrow 3 \mid a - c$$

$$\Rightarrow \boxed{a R c}$$

PARCIAL ISOLA

Ejercicio nº 1:

Analice la validez de los siguientes razonamientos, demostrando por reglas de inferencia los que sean válidos y justificando correctamente los que no lo sean:

- a) Razonamiento 1: $p \vee q$; $p \Rightarrow r$; $\sim r \Rightarrow q$
- b) Razonamiento 2: $\exists x: p(x)$; $\forall x: [q(x) \Rightarrow p(x)] \therefore \exists x: q(x)$

Ejercicio nº 2

- a) Demuestre usando inducción completa la siguiente propiedad:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

- b) Demuestre que $[(A \cup C) \cap B] \cup [A \cup (C \cap B) \cup C] = (A \cap C) \cup B$

Ejercicio nº 3

- a) Indique la cantidad de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra UNIVERSIDAD.
- b) Halle el o los términos centrales en el desarrollo de: $(2a^2 + \frac{1}{b})^{14}$

Ejercicio nº 4

- a) Halle m.c.d.(3234, 1400) usando el Algoritmo de Euclides y escríbalo como combinación lineal entera de ambos.
- b) Analice la validez de los siguientes enunciados, justificando adecuadamente:
 - i. $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0: c \mid (a-b) \Rightarrow c \mid a \vee c \mid b$
 - ii. $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0: a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b-c)$

Ejercicio nº 5

Sea $X = \{a, b, c, d\}$ en $P(X)$, se define la siguiente relación:

$$Y R T \Leftrightarrow Y \cap B = T \cap B \text{ con } B = \{a, c\}$$

- a) Pruebe que R es una relación de equivalencia.
- b) Halle las clases y el conjunto cociente.

Ejercicio nº 1

Analiza la validez de las siguientes proposiciones, demostrando por reglas de inferencia las que sean válidas y justificando correctamente las que no lo sean.

a) Razonamiento 1: $p \vee q, p \vee r, \neg p \vdash r$
 Razonamiento 2: $\neg (p \vee q) \vee \neg (p \vee r) \vdash \neg (p \vee r)$

Ejercicio nº 2

a) Demuestra usando inducción completa la siguiente propiedad:
 $n \in \mathbb{N}, 3 \mid 2^n - 1 \iff n \text{ es impar}$
 b) Demuestra que $\neg (A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

Ejercicio nº 3

a) Indica la cantidad de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".
 b) Halla el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".

Ejercicio nº 4

a) Halla $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n \equiv 1 \pmod{10}$ usando el Algoritmo de Euclides y el método de las potencias sucesivas.
 b) Halla el número de los siguientes sucesiones, justificando adecuadamente:
 - 1. $a_1 = 1, a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$
 - 2. $a_1 = 1, a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$
 - 3. $a_1 = 1, a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$

Ejercicio nº 5

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Se define la siguiente sucesión:
 $x_1 = 1, x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \geq 1)$
 a) Halla el valor de x_5 .
 b) Halla los términos de la sucesión.

1) $p \vee q$
 $p \Rightarrow r$
 $\neg p$

 q

4) $\neg p$ MT 2,3
 5) q SD 1,4
RAZ. VÁLIDO

1b) $\exists x: P(x)$ ✓ $q(x): "x \text{ es Par}"$
 $\forall x: [q(x) \Rightarrow P(x)]$ ✓ $P(x): "x \text{ es impar}"$
 $\exists x: q(x)$ F $U = \{3\}$

b) Demuestra que $\neg (A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

$$\begin{aligned} & \neg (A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \end{aligned}$$

Ejercicio nº 2

a) Demuestra usando inducción completa la siguiente propiedad:
 $n \in \mathbb{N}, 3 \mid 2^n - 1 \iff n \text{ es impar}$
 b) Demuestra que $\neg (A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

2a) $P_b) \quad i=1$
 $3^1 = 3^{1+1} - 3$
 $3 = 3^2 - 3$ ✓

$P_i) \quad \sum_{i=1}^n 3^i = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$ $\implies \sum_{i=1}^{h+1} 3^i = \frac{3^{h+2} - 3}{2}$

DEM $\sum_{i=1}^h 3^i + 3^{h+1} \xrightarrow{H+P} \frac{3^{h+1} - 3}{2} + 3^{h+1}$
 $\implies \frac{3^{h+1} - 3 + 2 \cdot 3^{h+1}}{2} \implies \frac{3^{h+1} - 3 + 2 \cdot 3^{h+1}}{2} \implies \frac{3^{h+2} - 3}{2}$

$$\begin{aligned} & \neg (A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \\ & \iff \neg A \wedge \neg B \end{aligned}$$

Ejercicio nº 3

a) Indica la cantidad de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".
 b) Halla el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".

U=1, N=1, I=2, V=1, E=1, R=1, S=1, D=2

A) $P_{2,2} = \frac{11!}{2! \cdot 2!} = 9.979.200$ PALABRAS

B) $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}$

$\left(\frac{14}{7}\right) \cdot (2 \cdot a^2)^7 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^7$
 $3432 \cdot 128 \cdot a^{14} \cdot \frac{1}{b^7} = \frac{439296 a^{14}}{b^7}$

Ejercicio nº 4

a) Indica la cantidad de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".
 b) Halla el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".

1 0 3234 T_1
 0 1 1400 T_2
 1 -2 434 $T_3 = T_1 - 2T_2$
 -3 7 98 $T_4 = T_2 - 3T_3$
 13 -30 42 $T_5 = T_3 - 4T_4$
 -29 67 14 $T_6 = T_4 - 2T_5$
 0/ $T_7 = T_5 - 3T_6$

14 = (-29) \cdot 3234 + 67 \cdot 1400

Ejercicio nº 5

a) Indica la cantidad de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".
 b) Halla el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "COMERCIALIZAS".

1 0 3234 T_1
 0 1 1400 T_2
 1 -2 434 $T_3 = T_1 - 2T_2$
 -3 7 98 $T_4 = T_2 - 3T_3$
 13 -30 42 $T_5 = T_3 - 4T_4$
 -29 67 14 $T_6 = T_4 - 2T_5$
 0/ $T_7 = T_5 - 3T_6$

14 = (-29) \cdot 3234 + 67 \cdot 1400

b) i. $c \mid a-b \implies c \mid a \vee c \mid b$

$c=10, a=13, b=3$
 $10 \mid 13-3 \implies 10 \mid 13 \vee 10 \mid 3$
V F

$\exists a, b, c: 10 \mid 13-3 \wedge 10 \nmid 13 \wedge 10 \nmid 3$

ii. $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid b-c$

DEM $a \mid b \wedge a \mid c \xrightarrow{(4) \text{ PEAT}} a \mid b \wedge a \mid -c \xrightarrow{(3) \text{ PEAT}} a \mid b-c$

PROPIEDAD 4: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: a \mid b \implies a \mid b \cdot c$
 PROPIEDAD 3: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid b+c$

Ejercicio nº 8
Sea $X = \{a, b, c, d\}$ en $P(X)$, se define la siguiente relación:
 $\forall R, T \subseteq X \Rightarrow R \cap B = T \cap B$ con $B = \{a, c\}$
a) Probar que R es una relación de equivalencia.
b) Hallar las clases y el conjunto cociente.

$$\cdot P(X) = \left\{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \emptyset, \{a,b,d\} \right\}$$

$$\cdot B = \{a, c\}$$

$$\bar{\emptyset} = \{ \{ \emptyset \}, \{ b \}, \{ d \}, \{ b, d \} \} = \bar{\emptyset}$$

$$\bar{\{a\}} = \{ \{a\}, \{a,b\}, \{a,d\}, \{a,b,d\} \}$$

$$\bar{\{c\}} = \{ \{c\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{b,c,d\} \}$$

$$\bar{\{a,c\}} = \{ \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\} \}$$

$$\text{REFLEXIVA: } \forall y: y \in P(X)$$

DEM

$$\forall y \in P(X): y \cap B = y \cap B \Rightarrow y R y$$

$$\text{SIMETRICA: } \forall y, T: (y, T) \in R \Rightarrow (T, y) \in R$$

DEM

$$\forall y, T \in P(X): (y, T) \in R \Rightarrow y \cap B = T \cap B \Rightarrow T \cap B = y \cap B \Rightarrow (T, y) \in R$$

$$\text{TRANSITIVA: } \forall y, T, Z: (y, T) \in R \wedge (T, Z) \in R \Rightarrow (y, Z) \in R$$

DEM

$$\forall y, T, Z: (y, T) \in R \wedge (T, Z) \in R \Rightarrow y \cap B = T \cap B \wedge T \cap B = Z \cap B$$

$$\Rightarrow y \cap B = Z \cap B \Rightarrow y R z$$

CLASES DE EQUIVALENCIA

$$\bar{\emptyset} = \{ \{ \emptyset \}, \{ b \}, \{ d \}, \{ b, d \} \} = \bar{\emptyset}$$

$$\bar{\{a\}} = \{ \{a\}, \{a,b\}, \{a,d\}, \{a,b,d\} \}$$

$$\bar{\{c\}} = \{ \{c\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{b,c,d\} \}$$

$$\bar{\{a,c\}} = \{ \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\} \}$$

CONJUNTO COCIENTE

$$\frac{P(X)}{R} = \{ \bar{\emptyset}, \bar{a}, \bar{c}, \bar{a,c} \}$$

PARCIAL CARMONA

Comisión: K1102

1. Escribe en lenguaje simbólico el siguiente razonamiento, indicando el diccionario utilizado, luego analiza la validez del mismo $\forall$, en caso de ser válido, demuestra usando reglas de inferencia: "En una empresa si un empleado tiene buen presentismo o buenas evaluaciones internas entonces cobra un bono a fin de año. Si un empleado cumple con sus tareas asignadas entonces tiene buenas evaluaciones internas. Hay un empleado que no cobra bono anual a fin de año. Luego hay un empleado que no cumple con sus tareas asignadas."

2.

(a) Demuestre:

$$A \cup B \subseteq B \cup C \Rightarrow A - C \subseteq B$$

(b) Probar, usando el principio de Inducción Completa, $\sum_{k=1}^n (3k - 2) = \frac{3n^2 - n}{2}$

3. 8 alumnos se inscriben en una facultad de ingeniería donde hay 12 carreras disponibles.

(a) ¿De cuántas formas pueden elegir su carrera? ¿De cuántas formas si todos eligen carreras distintas?

(b) ¿De cuántas formas si exactamente 4 eligen ingeniería electrónica?

4.

(a) Hallar el $\text{mcd}(4698, 353)$ y expresarlo como combinación lineal entera de ambos números.

(b) Probar que $\text{mcd}(6 + 9n, 5 + 6n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Decidir si las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$ son relaciones de equivalencia. Justificar.

(a) $x R y \iff \text{ent}(x) = \text{ent}(y)$

(b) $x S y \iff |x - y| \leq 2$

Hallar clases, conjunto de índices y conjunto cociente para la o las que resulten de equivalencia.

$$A \cup B \subseteq B \cup C \Rightarrow A - C \subseteq B$$

$$T) \forall x: x \in A - C \Rightarrow x \in B$$

DEM

$$\forall x: x \in A - C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee x \in B$$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin C \vee x \in B)$$

$$\Rightarrow (x \in B \cup C) \wedge (x \notin C \vee x \in B)$$

$$\Rightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge (x \notin C \vee x \in B)$$

$$\Rightarrow (x \in C \wedge x \notin C) \vee x \in B$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset \vee x \in B \Rightarrow x \in B$$

DET
VACIO

MANEJO

(b) Probar, usando el principio de Inducción Completa, $\sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{3n^2-n}{2}$

$$P_b) \quad k=1 \quad (3-2) = \frac{3-1}{2}$$

$$\underline{1 = 1}$$

$$P_i) \quad n = h$$

$$\sum_{k=1}^h (3k-2) = \frac{3h^2-h}{2} \implies \sum_{k=1}^{h+1} 3k-2 = \frac{3(h+1)^2 - (h+1)}{2}$$

DEM

$$= \frac{3h^2 + 5h + 2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^h (3k-2) + 3(h+1) - 2$$

$$= \frac{3h^2-h}{2} + 3h+1$$

$$= \frac{3h^2-h + 6h+2}{2}$$

$$= \frac{3h^2 + 5h + 2}{2}$$

1. Escribe en lenguaje simbólico el siguiente razonamiento, indicando el diccionario utilizado, luego analiza la validez del mismo y, en caso de ser válido, demuestra usando reglas de inferencia: "En una empresa si un empleado tiene buena presentación o buenas evaluaciones internas entonces cobra un bono a fin de año. Si un empleado cumple con sus tareas asignadas entonces tiene buenas evaluaciones internas. Hay un empleado que no cobra bono anual a fin de año. Luego hay un empleado que no cumple con sus tareas asignadas."

$U = \{x / x \text{ es empleado}\}$

$P(x)$: "x tiene buena presentación"

$E(x)$: "x tiene buenas evaluaciones internas"

$B(x)$: "x cobra un bono a fin de año"

$T(x)$: "x cumple con sus tareas"

$$1) \forall x: P(x) \vee E(x) \implies B(x)$$

$$2) \forall x: T(x) \implies E(x)$$

$$3) \exists x: \sim B(x)$$

$$\exists x: \sim T(x)$$

$$4) \sim B(a) \quad P.E. 3)$$

$$5) P(a) \vee E(a) \implies B(a) \quad P.V. 1)$$

$$6) T(a) \implies E(a) \quad P.V. 2)$$

$$7) \sim (P(a) \vee E(a)) \quad M.T. 5, 6)$$

$$8) \sim P(a) \wedge \sim E(a) \quad D.M. 7)$$

$$9) \sim E(a) \quad Simp. 8)$$

$$10) \sim T(a) \quad M.T. 6, 9)$$

$$11) \exists x: \sim T(x) \quad P.E. 10)$$

2. Dado el las siguientes relaciones en R son reflexivas de simetría. Justifica:
a) $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$
b) $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$
c) $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$

b) $xSy \iff |x-y| \leq 2$ NO CUMPLE TRANSITIVIDAD

$$\exists 1,3,5 \in \mathbb{R} \quad (1,3) \in R \quad \wedge \quad (3,5) \in R \quad \wedge \quad (1,5) \notin R$$

$$\underbrace{1R3 \quad \wedge \quad 3R5}_{\text{V}} \not\Rightarrow 1R5$$

$$a) \quad xRy \iff \text{ENT}(x) = \text{ENT}(y)$$

$$\text{REFLEX: } \forall x: (x,x) \in R$$

$$\text{DEM} \quad \forall x: \text{ENT}(x) = \text{ENT}(x) \implies xRx$$

$$\text{SIMETRICA: } \forall x,y: xRy \implies yRx$$

$$\text{DEM} \quad \forall x,y: xRy \implies \text{ENT}(x) = \text{ENT}(y) \implies \text{ENT}(y) = \text{ENT}(x) \implies yRx$$

$$\text{TRANSITIVA: } \forall x,y,z: xRy \wedge yRz \implies xRz$$

DEM

$$\forall x,y,z: xRy \wedge yRz \xrightarrow{\text{D.M.}} \text{ENT}(x) = \text{ENT}(y) \quad \wedge \quad \text{ENT}(y) = \text{ENT}(z)$$

$$\implies \text{ENT}(x) = \text{ENT}(z) \xrightarrow{\text{D.M.}} xRz$$

CLASES DE EQUIVALENCIA

$$\forall y \in \mathbb{R}: \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} / xRy\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / \text{ENT}(x) = \text{ENT}(y)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / \text{ENT}(x) = y\}$$

COCIENTE

$$\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}\}$$