Es obvio que nos convendrá ordenar unidades adicionales siempre que las respectivas ganancias incrementales se mantengan positivas. La Tabla 2.37, que muestra las ganancias incrementales y las acumuladas para las distintas alternativas, nos permite verificar que la óptima es A_4 ($Q_0 = 3$) puesto que le corresponde la mayor ganancia acumulada.

Es conveniente señalar que los valores de ganancia incremental se computan a partir de $Q_0 = 1$, pues Q_0 era la cantidad ordenada con inclusión de la unidad adicional, de modo que no tiene sentido considerar $Q_0 = 0$.

Nota: Debemos llamar la atención sobre la ligera diferencia que existe entre el modo en que hemos encarado el análisis incremental en este problema y en el ejemplo desarrollado en el punto 2.8 de este Capítulo: en dicho ejemplo el S_0 que considerábamos no incluía la unidad adicional, y por lo tanto nos convenía ordenar más unidades hasta llegar al primer valor de S_0 para el cual la ganancia incremental se hacía negativa, mientras que en este problema llegamos a la conclusión de que había que ordenar más unidades hasta llegar al último valor de Q_0 para el cual la ganancia incremental seguía positiva. Es fácil ver que ambos razonamientos son completamente equivalentes.

3. DECISION BAJO CONDICIONES DE RIESGO CON ALTERNATIVAS INTERDEPENDIENTES – ARBOL DE DECISIONES

3.1 Problemas de decisión con consecuencias inmediatas y mediatas

En muchos casos las consecuencias de una determinada decisión no sólo tienen que ser consideradas desde un punto de vista inmediato sino también desde un punto de vista mediato, vale decir, a más de las consecuencias inmediatas hay que considerar las menos inmediatas o a más largo plazo. El criterio del valor esperado puede usarse también en estos casos, pero calculado en función de las consecuencias inmediatas y mediatas.

Veamos un ejemplo suficientemente ilustrativo. Vamos a suponer que a una persona le ofrecen un negocio que implica la posibilidad de ganar 8.000 \$ o de perder 7.000 \$ con una probabilidad de 0,5 para cada una de esas posibilidades. Al mismo tiempo, supondremos que esa persona tiene cierta restricción financiera: su disponibilidad en caja es de 25.000 \$, por lo que en caso de perder en ese primer negocio, dicha disponibilidad se reduciría a 18.000 \$. Es decir que:

$$\text{Negocio I}\ \begin{cases} +\,8.000\ \$ & p = 0{,}50 \\ -\,7.000\ \$ & p = 0{,}50 \end{cases} \qquad \text{Disponibilidad en caja: } 25.000\ \$$$

Supondremos también que, dentro de uno o dos meses, tiene la posibilidad de intervenir en un nuevo negocio en el que puede ganar 9.000 \$ o perder 2.000 \$, también con una probabilidad para cada evento de 0,5. Pero este segundo negocio tiene como

K14/87

condición especial la de que para poder intervenir en él, la persona involucrada debe tener una disponibilidad mínima en caja de 20.000 \$ sin la cual no puede tener acceso al mismo. Por lo tanto:

$$\text{Negocio II} \begin{cases} +9.000\ \$ & p = 0{,}50 \\ -2.000\ \$ & p = 0{,}50 \end{cases}$$

Disponibilidad mínima necesaria en caja: 20.000 \$

Es fácil verificar la existencia de una situación encadenada: la posibilidad de que pueda darse el segundo negocio, está en función de lo que ocurra con el primero, y por lo tanto hay una relación de dependencia entre las distintas alternativas (aceptar o no el negocio I, aceptar o no el negocio II).

El problema, entonces, está en definir hoy, en este momento, qué es lo que tiene que hacer la persona en cuestión frente a esta situación de alternativas interdependientes, es decir, si debe o no entrar en el negocio I, de acuerdo con el resultado que corresponda a cada uno de los eventos, condicionado a su valor probabilístico, la restricción financiera que tiene y las necesidades mínimas de fondos requeridos para poder intervenir en el segundo negocio.

3.2 Arboles de decisión

El primer paso para hallar respuesta al interrogante planteado por problemas como el descripto que involucran la consideración de consecuencias tanto inmediatas como mediatas, consiste en proceder a la construcción de un "diagrama árbol" que se indica en la Figura 3.1, las ramas dibujadas con línea llena representan los varios eventos que pueden ocurrir con sus respectivas probabilidades, mientras que las ramas dibujadas con líneas de trazos representan las varias alternativas entre las que puede elegir la persona encargada de tomar la decisión, lo que implica que los nodos de los que parten las ramas dibujadas con línea de trazos, representarán el acto de elegir entre dichas alternativas.

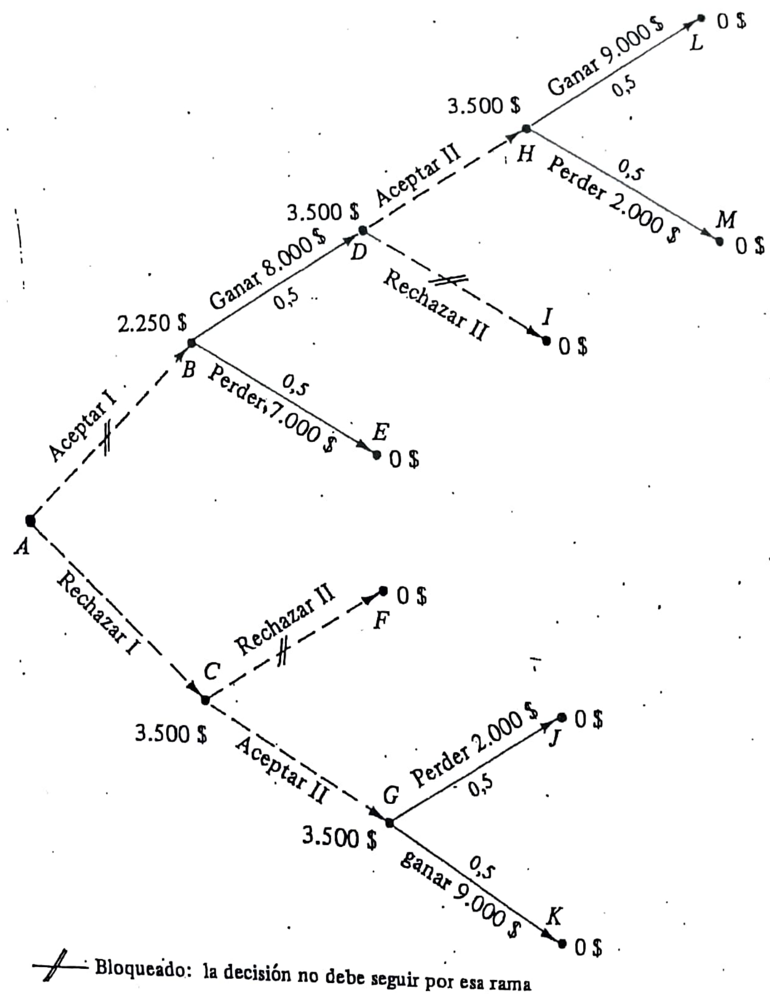

FIGURA 3.1

Lo que el "árbol" de la Figura 3.1 nos indica, es que en primer lugar existe la posibilidad de aceptar o rechazar el contrato I (nodo A), dependiendo de lo que se considere más conveniente.

En el caso de aceptarlo (nodo *B*), las consecuencias inmediatas pueden ser dos: ganar 8.000 $ o perder 7.000 $, (con un valor probabilístico para ambas posibilidades de 0,5) que permiten arribar respectivamente a los nodos *D* y *E*.

Si se pierden los 7.000 $ (nodo *E*) no hay posibilidad de optar por el segundo negocio porque las disponibilidades financieras estarían por debajo del mínimo exigido, y por lo tanto el proceso no seguiría ramificándose.

Si con el primer negocio gana 8.000 $ (nodo *D*), tiene la posibilidad de aceptar o rechazar el segundo negocio puesto que cuenta con el nivel de disponibilidades exigido. Si lo rechaza, el proceso termina en el nodo I. En cambio, aceptando el segundo negocio (nodo *H*), puede ganar 9.000 $ (nodo *L*) o perder 2.000 $ (nodo *M*) con probabilidades 0,5.

Para el caso de rechazar el negocio I (nodo *C*), la persona en cuestión puede intervenir en el negocio II, puesto que cuenta con los fondos suficientes para ello. Si rechaza también el negocio II, el proceso termina en el nodo *F*, mientras que, por el contrario, si acepta el negocio II (nodo *G*) puede ocurrir que gane 9.000 $ (nodo *K*) o que pierda 2.000 $ (nodo *J*), ambos eventos con probabilidad 0,5.

Para determinar si a esa persona le conviene aceptar o rechazar el negocio I, tendremos que hallar el valor esperado para ambas estrategias.

En otras palabras, hay que calcular el valor esperado para los nodos *B* y *C*, lo cual puede hacerse con mucha facilidad si se analiza el árbol de decisiones de derecha a izquierda, es decir, yendo de los últimos nodos a los primeros.

En efecto, si nos encontramos en el nodo *H*, los dos eventos que pueden ocurrir aleatoriamente son perder 2.000 $ o ganar 9.000 $, ambos con probabilidad 0,5 de modo que el valor esperado en el nodo *H* en función de los eventos futuros es:

$$VE\ (H) = -2.000 \cdot 0,5 + 9.000 \cdot 0,5 = 3.500\ \$.$$

Por su parte, el valor esperado en el nodo I es nulo, dado que al rechazar el negocio II no hay eventos posteriores:

VE(L)=0
VE(M)=0

$$VE\ (I) = 0\ \$.$$

VE(H) = (9000 + VE(L)) * 0,5 + ((-2000) + VE(M)) * 0,5 =

A continuación supondremos que hemos alcanzado el nodo *D* y que debemos elegir entre aceptar o rechazar el negocio II. Aceptando, pasaríamos al nodo *H* cuyo valor esperado es de 3.500 $, mientras que rechazando pasaríamos al nodo *I* con un valor esperado de 0 $. Por lo tanto, conviene aceptar dicho negocio, con lo que el valor esperado para el nodo *D* pasa a ser de 3.500 $:

$$VE\ (D) = 3.500\ \$.$$

En cambio, el valor esperado en el nodo *E* en función de los eventos futuros es nulo puesto que al perder en el primer negocio no se puede entrar en el otro:

$$VE\ (E) = 0\ \$.$$

Vistos desde *B*, entonces, los nodos *D* y *E* tienen respectivamente el valor 3.500 + 8.000 = 11.500 $, y 0 − 7.000 = − 7.000 $, de modo que el valor esperado de *B* es:

$$VE\ (B) = 11.500 \cdot 0,5 - 7.000 \cdot 0,5 = 2.250\ \$.$$

Para hallar el valor esperado para el nodo *C*, haremos un razonamiento semejante: El valor esperado para el nodo *G* es:

$$VE\ (G) = -2.000 \cdot 0,5 + 9.000 \cdot 0,5 = 3.500\ \$,$$

mientras que el valor esperado para el nodo *F* en función de los eventos posteriores es nulo:

$$VE\ (F) = 0\ \$.$$

Por lo tanto, si estuviéramos en el nodo *C* y tuviéramos que optar entre pasar al nodo *F* o al nodo *G*, siguiendo el criterio del valor esperado nos decidiríamos por este último, con lo que el valor esperado para el nodo *C* resulta ser:

$$VE\ (C) = 3.500\ \$.$$

De acuerdo con estos valores, y aplicando la regla decisoria del valor esperado, lo que a esta persona le conviene es rechazar el negocio I (y aceptar luego el II).

Recapitulando, podemos ver que el método seguido se basa en ciertas premisas:

F 14/8/5

2

—La determinación del valor esperado para cada nodo se hace partiendo de los últimos nodos y retrocediendo en los cálculos hacia los primeros.

—En los nodos que no implican decisión entre alternativas por parte de la persona (es decir, en los nodos en los que "decide la naturaleza", como por ejemplo el *B* o el *H*), el valor sólo depende de los eventos futuros y no de las decisiones previas.

—En los nodos que se encuentran bajo el control del decididor (por ejemplo el *C* o el *D*), la elección se realiza entre los nodos que se encuentran inmediatamente a continuación en base al mayor valor. El valor que se atribuye al nodo es el que corresponde al nodo siguiente de mayor valor, menos el costo de la transición de un nodo a otro, si existe dicho costo (por ejemplo, si para aceptar el negocio II hubiera que firmar un contrato ante escribano, y los honorarios de éste fueran 500 \$, el valor a asignar al nodo *D* sería 3.500 − 500 = 3.000 \$).

Volviendo al problema que hemos estado considerando, hay que tener presente que si la persona en cuestión no tuviera restricciones financieras, su decisión sería justamente la contraria a la ya vista, puesto que aún perdiendo 7.000 \$ en el negocio I, podría también intervenir en el negocio II, En tal caso, el árbol de decisiones sería el de la Figura 3.2.

Si comparamos con la Figura 3.1, vemos que la única diferencia radica en la ramificación adicional a partir del nodo *E*, en virtud de la cual el valor esperado de éste es de 3.500 \$ (valor éste que puede obtenerse siguiendo el mismo razonamiento hecho para el nodo *D*).

Por lo tanto, a diferencia del caso anterior, ahora tenemos que, vistos desde *B*, los nodos *D* y *E* tienen respectivamente el valor 3.500 + 8.000 = 11.500 \$, y 3.500 − 7.000 = − 3.500 \$, de modo que el valor esperado de *B* pasa a ser:

$$\text{VE}(B) = 11.500 \cdot 0{,}5 - 3.500 \cdot 0{,}5 = 4.000\ \$\,,$$

y comparando con el valor esperado del nodo *C*:

$$\text{VE}(C) = 3.500\ \$\,,$$

resulta más conveniente aceptar el negocio I.

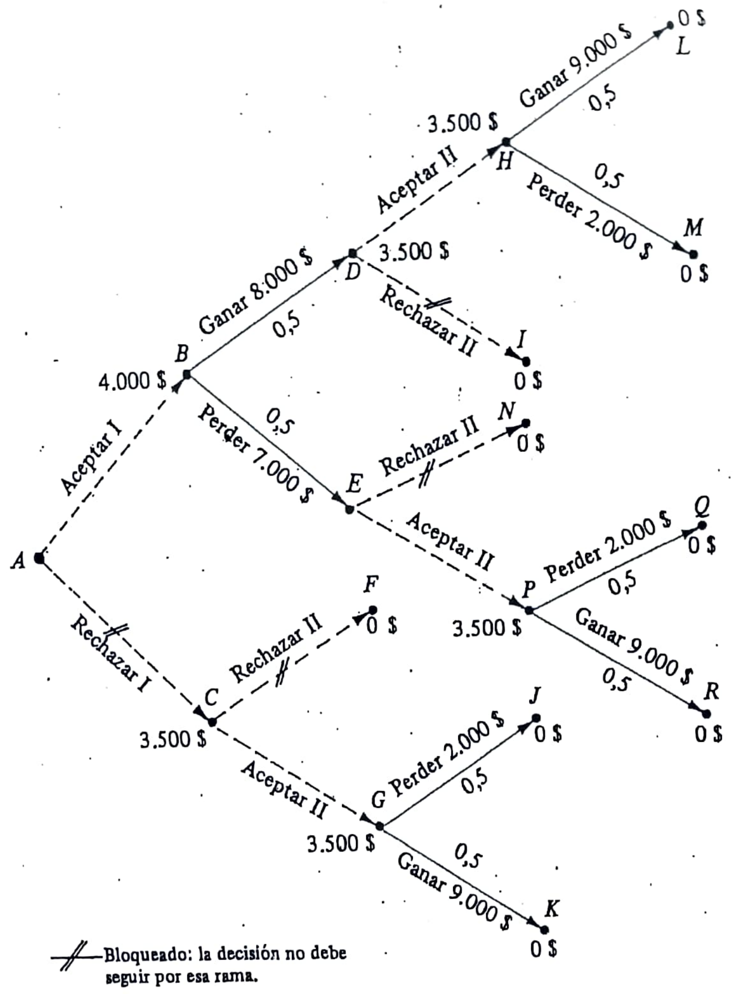

FIGURA 3.2

Vale decir entonces que para el caso de no existir restricción financiera, la estrategia óptima consiste en aceptar el primer negocio, con una ganancia total esperada de 4.000 \$.

Esto es por otra parte lógico, ya que si no hay restricciones financieras el negocio II no está condicionado al I, y por lo tanto la ganancia total esperada pasa a ser la suma de las ganancias esperadas para cada negocio por separado:

$$\text{Ganancia negocio I} = 8.000 \cdot 0{,}5 - 7.000 \cdot 0{,}5 = 500\ \$$$

$$\text{Ganancia negocio II} = 9.000 \cdot 0{,}5 - 2.000 \cdot 0{,}5 = 3.500\ \$$$

En cambio, si hay restricciones financieras, no conviene entrar en el negocio I pues su ganancia esperada no compensa el riesgo de perder el negocio II, que es el más lucrativo. De allí que se aconseje intervenir solamente en el negocio II, con lo cual la ganancia total esperada se hace igual a la ganancia del negocio II.

3.3 Desarrollo de un caso de decisiones interdependientes

El siguiente es el resumen de un caso especialmente interesante por el gran número de alternativas involucradas (que imposibilita el trazado del árbol de decisiones), planteado por I B. Boulden y E. S. Buffa, en "La estrategia de decisiones interdependientes", *California Management Review*, Vol. I, Número 4, 1959, pp. 94–100.

3.3.1. Planteo del problema

Piense que Ud. es presidente de una compañía que produce *relays* eléctricos. La posición en que Ud. se encontrará requerirá algunas decisiones interrelacionadas. La forma esencial de este problema está determinada por las decisiones que Ud. tomará en una disputa con el sindicato y sobre dos ofertas para dos contratos gubernamentales. La situación se describe como sigue:

Ud. está actualmente envuelto en una disputa laboral. El sindicato ha puesto un límite para iniciar una huelga a las doce de la medianoche del día de la fecha, si Ud. no acepta su requerimiento de un aumento del 10% en el jornal. Ud. tiene la certeza

de que el sindicato llevará a cabo su amenaza y que la huelga resultante le costará alrededor de 300.000 \$. Si Ud. se acoje a sus demandas, el costo total por unidad de *relay* se aumentará a 4,05 \$, comparado con el valor actual de 3,80 \$ por unidad. Ud. tiene la certeza de que el sindicato será derrotado si va a la huelga y, por lo tanto, sus costos presentes no variarán por el año próximo. Ud. deberá decidir:

Disputa laboral – Decisiones tácticas:

A. Dar a los empleados el aumento de jornal y sufrir el costo elevado de producción.

B. Mantener la presente escala de jornales y sufrir la pérdida resultante de la huelga.

La táctica de su sindicato se ve complicada por el hecho de que el gobierno ha lanzado un gran contrato por 10.000.000 de unidades de *relays* dentro del próximo mes, y Ud. no estará en una posición de presupuestar o de ofertar sobre la base de ese contrato si sus empleados van a la huelga. No obstante, Ud. no tendrá la seguridad de obtener el contrato, salvo que oferte por debajo del precio de la competencia. Las posibles ofertas y las probabilidades resultantes de ganar el contrato, son las que siguen:

Primer Contrato Gubernamental – Decisiones tácticas:

X. Imposibilidad de ofertar por estar la compañía en huelga (Veáse la decisión *B*).

Precio / Unidad		Probabilidades de obtener el contrato
C. Oferta	4,15 \$	30%
D. Oferta	4,12 \$	50%
E. Oferta	4,10 \$	60%
F. Oferta	4,07 \$	80%

Afortunadamente se anticipa un segundo contrato del gobierno para la última parte del año por si Ud. no recibe el lucrativo contrato mencionado precedentemente.

Debido a las limitaciones de producción no será posible para Ud. comprometerse con ambos contratos en el caso de que recibiera el primer contrato. Para estar en posición de oferta en el segundo contrato, es necesario que Ud. cuente con un adecuado soporte financiero para garantizar al gobierno que puede proveer cierto valioso equipo de prueba, en caso de que sea adjudicatario del contrato.

Cuanto mayores sean los equipos de prueba que se puedan proveer, mayor será la posibilidad de obtener el contrato. La utilidad neta anticipada para este segundo proyecto, es de 3.000.000 $ si el costo unitario es de 4,05 $ y de 4.000.000 $ si el costo unitario es de 3,80 $. Esta cifra no incluye la gran inversión en el equipo especial de prueba que debemos amortizar durante la vida del contrato.

Segundo Contrato Gubernamental – Decisiones tácticas:

Inversión	Probabilidades de obtener el contrato
G. 2.000.000 $	20%
H. 2.400.000 $	40%
I. 2.600.000 $	50%
J. 2.900.000 $	60%

3.3.2. *Resolución*

a) *Estructura de decisiones alternativas*

Si en la disputa laboral nos inclinamos por la decisión *A*, en el primer contrato podremos optar por las decisiones *C, D, E* ó *F*, y en el segundo contrato podremos elegir entre *G, H, I* y *J*. Es decir, en total tendremos 16 combinaciones posibles entre las alternativas (*ACG, ACH, ACI, ACJ, ADG*, etc.).

En cambio, si en la disputa laboral optamos por la decisión

B, en el primer contrato tendremos que caer en la decisión *X*, mientras que en el segundo contrato podremos como antes seleccionar entre *G, H, I* y *J*. Es decir, en total tendremos 4 combinaciones posibles entre las alternativas *BXG, BXH, BXI* y *BXJ*.

b) *Resultados para la alternativa de huelga*

La Tabla 3.1, cuyo encabezamiento es autoexplicativo, muestra el proceso de cálculo de los resultados esperados para las distintas combinaciones de alternativas, y nos permite ver que la alternativa *BXI* es la mejor en la hipótesis de aceptar la huelga.

Alternativas 1	Utilidad según contrato 2	Inversión a amortizar 3	Utilidad Neta 4 = 2 − 3	Probabilidad 5	Valor esperado 6 = 4 · 5	Pérdida por huelga 7	Valor esperado neto 8 = 6 − 7
BXG	4.000.000 $	2.000.000 $	2.000.000 $	20%	400.000 $	300.000 $	100.000 $
BXH	4.000.000 $	2.400.000 $	1.600.000 $	40 %	640.000 $	300.000 $	340.000 $
BXI	4.000.000 $	2.600.000 $	1.400.000 $	50%	700.000 $	300.000 $	400.000 $
BXJ	4.000.000 $	2.900.000 $	1.100.000 $	60%	660.000 $	300.000 $	360.000 $

TABLA 3.1

c) *Resultados para la alternativa de no huelga*

Como ejemplo, desarrollaremos el cálculo para la alternativa *ACG*:

Contrato I
- 10.000.000 unidades de *relays*
- Precio por unidad: 4,15 $
- Costo por unidad: 4,05 $
- Probabilidad: 30%

Contrato II
- Utilidad: 3.000.000 $
- Inversión: 2.000.000 $
- Probabilidad: 20%

Al seguir la combinación de alternativas *ACG* puede ocurrir:

1) Recibir el primer contrato, abandonar el segundo

$$\text{Valor esperado} = 10.000.000 \cdot (4{,}15 - 4{,}05) \cdot 0{,}30$$

2) Perder el primer contrato, recibir el segundo

Probabilidad de obtener II y perder I =

$$= (1 - 0{,}30) \cdot 0{,}20 = 0{,}14$$

Valor esperado = $(3.000.000 - 2.000.000) \cdot 0{,}14$

3) Perder ambos contratos

Valor esperado = 0

Luego, el valor esperado para la combinación de alternativas *ACG* es:

$$\text{VE}(ACG) = 10.000.000 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}30 + \\ + 1.000.000 \cdot 0{,}14 = 440.000 \text{ \$}$$

Con análogo cálculo podemos obtener los restantes valores:

VE (*ACG*) = 440.000 $	VE (*AEG*) = 380.000 $
VE (*ACH*) = 468.000 $	VE (*AEH*) = 296.000 $
VE (*ACI*) = 440.000 $	VE (*AEI*) = 380.000 $
VE (*ACJ*) = 342.000 $	VE (*AEJ*) = 324.000 $
VE (*ADG*) = 450.000 $	VE (*AFG*) = 200.000 $
VE (*ADH*) = 470.000 $	VE (*AFH*) = 208.000 $
VE (*ADI*) = 450.000 $	VE (*AFI*) = 200.000 $
VE (*ADJ*) = 380.000 $	VE (*AFJ*) = 172.000 $

De este modo vemos que supuesta rechazada la huelga, la alternativa *ADH* es la mejor

d) *Alternativa Optima*

Como:

$$\text{VE}(ADH) > \text{VE}(BXI),$$

concluimos que la alternativa óptima de acuerdo al valor esperado de las alternativas mediatas e inmediatas es la *ADH*. Vale decir, entonces, que la sucesión de decisiones a tomar debe ser la siguiente:

A. Dar a los empleados el aumento de jornal.

D. Ofertar un precio de 4,12 $/u en el contrato I.

H. Proveer un equipo de prueba de 2.400.000 $.

E 14/8/5

4

4. DECISION BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

4.1 Criterios de decisión bajo condiciones de incertidumbre

Este tipo de problemas de decisión aparece cuando conociendo los varios futuros posibles, no se puede determinar su distribución de probabilidades. A título de ejemplo, puede citarse el problema de la fijación del precio de un nuevo producto para el cual no se conocen las probabilidades asociadas a los distintos niveles de demanda posibles, o el problema de determinar el período óptimo de reemplazo de piezas en una maquinaria (mantenimiento preventivo) cuando no se conocen las probabilidades asociadas a los distintos valores posibles de la vida útil de dichas piezas.

En tales casos, la construcción de la matriz de resultados se reduce a la enunciación de las diferentes alternativas A_i y de los futuros F_j, y la determinación de los resultados X_{ij}.

El desconocimiento de las probabilidades no permite calcular el resultado esperado de cada alternativa, y por lo tanto hay que acudir a otros criterios de decisión que aplicados a un mismo problema pueden conducir a la selección de alternativas distintas. Nos enfrentamos entonces con la disyuntiva de elegir el criterio a aplicar en cada problema de decisión: la respuesta dependerá de la política de la empresa y/o la actitud del encargado de tomar las decisiones.

Cabe destacar sin embargo que al igual que en los problemas de decisión bajo riesgo, es posible hacer una primera selección que simplifica el problema, observando si existen alternativas dominadas, para eliminarlas.

K 14/84 5

5

	D < C	D = C	D > C	
Semd No Vend	(-21) (C-D)	—	—	
Semd Vend.	9 D	9D	9D	$C \leq 500$
Adorozo	(-2) D	(-2) D	(-2) D	
	(-21) C + 21D + 7D	7D	7D	
	21C + 28D			

Semd No Vend	(-20) (C-D)	—	—	
	10 D	10D	10D	$C > 500$
	(-2) D	(-2) D	(-2) D	
	(20C+20D+8D	8D	8D	
	20C+28D			

Panadero

$F \leq 500$ PV 60
PM 20
CP (-40)
OF (-1500)
AY (-1000)
CF (-1500)
D > F (-30) (D-F)
F > D 20 (F-D)

		D < F	D = F	D > F
	Venta	60D	60F	60F
	Sobrante	20 (F-D)	—	—
$F \leq 500$	Costo Pan	(-40) F	(-40)F	(-40)F
	Costo Fijo	-4000	-4000	-4000
	Clie Insatis	—	—	(-30) (D-F)
$F > 500$		+1000	+1000	+1000

4.2. Criterio de Laplace

El *criterio de Laplace*, también llamado criterio de racionalidad presume que, puesto que no se conocen las probabilidades de los distintos futuros posibles, ni aún la importancia relativa de cada una de ellas, "es dable suponer que todos esos futuros son equivalentes en lo que a sus probabilidades de aparición se refiere" (principio de la razón insuficiente).

En otras palabras, si hay n futuros posibles supondremos que la probabilidad de cada uno de ellos es $1/n$, con lo cual el problema en condiciones de incertidumbre pasa a ser un problema en condiciones de riesgo, que podemos encarar con el criterio del valor esperado adoptando la alternativa de mayor valor esperado.

A fin de ejemplificar, podemos considerar el siguiente problema:

Una empresa debe optar entre dos máquinas (A y B) para procesar una pieza. Para una de ellas (la A), el costo de preparación es de 2.000 \$ y el costo unitario de producción 20 \$. Para la otra (la B), dichos costos son respectivamente 5.000 \$ y 10 \$ por unidad.

¿Qué máquina es la más conveniente si el precio de venta es de 30 \$/unidad y la producción requerida está en el rango $100 \leqslant Q \leqslant 400$ unidades?

La ganancia bruta total que se obtiene con una producción de Q unidades en una y otra máquina está dada por:

$$G_A\ (\$) = 30 \cdot Q - (2.000 + 20 \cdot Q) = 10\,Q - 2.000$$
$$G_B\ (\$) = 30 \cdot Q - (5.000 + 10 \cdot Q) = 20\,Q - 5.000.$$

Por lo tanto, si consideramos como únicos futuros posibles los siguientes niveles de demanda:

$F_1 = 100$ unidades $\quad F_2 = 250$ unidades $\quad F_3 = 400$ unidades

podemos construir la matriz de ganancias indicada en la TABLA 4.1

	F_1	F_2	F_3
A_1 (máq. A)	−1.000	500	2.000
A_2 (máq. B)	−3.000	0	3.000

TABLA 4.1

Aplicando el criterio de Laplace, supondremos que las probabilidades asociadas a los futuros enumerados son iguales, y por lo tanto valen $p = 0{,}33$. El valor esperado de cada alternativa resultará así:

$$\text{VE}\,(A_1) = -1.000 \cdot 0{,}33 + 500 \cdot 0{,}33 + 2.000 \cdot 0{,}33 = 500$$
$$\text{VE}\,(A_2) = -3.000 \cdot 0{,}33 + 0 \cdot 0{,}33 + 3.000 \cdot 0{,}33 = 0.$$

El criterio del valor esperado conduce a la elección de la alternativa A_1 (máquina A).

Sin embargo, puede objetarse el conjunto de futuros que se ha enunciado. En efecto, si en lugar de los anteriores, se considera el siguiente conjunto de futuros:

$F_1' = 100$ u $\quad F_2' = 150$ u $\quad F_3' = 300$ u $\quad F_4' = 400$ u.

que también cumplen la condición $100 \leqslant Q \leqslant 400$, tendremos la matriz de resultados indicada en la Tabla 4.2.

	F_1'	F_2'	F_3'	F_4'	VE
A_1 (máq. A)	− 1.000	− 500	1.000	2.000	375
A_2 (máq. B)	− 3.000	− 2.000	1.000	3.000	− 250

TABLA 4.2

Los valores esperados consignados en dicha tabla, que fueron calculados en base a una distribución de probabilidades uniforme $p_1' = p_2' = p_3' = p_4' = 0{,}25$, conducen también a la elección de la alternativa A_1 a pesar de que el valor esperado de la ganancia para dicha alternativa difiere del obtenido antes.

Esto nos muestra uno de los inconvenientes del criterio de Laplace: la decisión a tomar se ve condicionada a la forma en que se plantean los futuros posibles.

Podemos ver otro ejemplo que corrobora la antedicho:

Supongamos que se desea renovar toda la maquinaria de una empresa de construcciones viales y que se debe para ello decidir entre dos fabricantes (M y N) que ofrecen equipos de distintas características con distinta financiación.

Supongamos además que se pretende amortizar las maquinarias sobre alguna de las tres licitaciones (R, S y T) de obras a las que se presentó la empresa, sabiendo que por razones legales sólo puede ser adjudicataria de una sola licitación, que significaría una ganancia neta de 15 millones de \$ para las maquinarias M, o de 10 millones para las N, en tanto que si no resultara adjudicataria de ninguna licitación, sus ganancias serían de -2 ó 5 millones de pesos respectivamente.

De acuerdo a estas condiciones, podemos construir dos matrices de ganancias distintas según el criterio que adoptemos para enunciar los futuros posibles:

a) F_1 = no ganar ninguna licitación
F_2 = ganar la licitación R
F_3 = ganar la licitación S
F_4 = ganar la licitación T

	F_1	F_2	F_3	F_4
A_1 (M)	-2	15	15	15
A_2 (N)	5	10	10	10

TABLA 4.3

b) F_1' = no ganar ninguna licitación
F_2' = ganar una licitación

	F_1'	F_2'
A_1 (M)	-2	15
A_2 (N)	5	10

TABLA 4.4

Aplicando el criterio de Laplace a una y otra matriz, tenemos:

a) $$\text{VE}(A_1) = -2 \cdot 0{,}25 + 15 \cdot 0{,}25 + 15 \cdot 0{,}25 + 15 \cdot 0{,}25 = 10{,}75$$

$$\text{VE}(A_2) = 5 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}25 = 8{,}75$$

b) $\text{VE}(A_1) = -2 \cdot 0{,}50 + 15 \cdot 0{,}50 = 6{,}50$.
$\text{VE}(A_2) = 5 \cdot 0{,}50 + 10 \cdot 0{,}50 = 7{,}50$.

Por lo tanto, en el primer caso la decisión recaería en el fabricante M, mientras que en el segundo sobre el N, lo cual muestra que la decisión queda supeditada a la forma en que se enumeren los futuros posibles, no habiendo en principio razón alguna que nos haga inclinar por uno de los dos puntos de vista planteados.

4.3. Criterio de optimismo

Si una persona se siente completamente optimista respecto al resultado de una decisión que ha tomado, significa que espera que se presente el futuro que le depare el mejor resultado, para la alternativa que ha seleccionado. Por lo tanto, para tomar la decisión analizará el mejor resultado para cada alternativa y escogerá la alternativa que tenga el mejor de esos resultados.

Por ejemplo, si consideramos la matriz de ganancias indicada en la Tabla 4.1, un "decididor" completamente optimista comenzaría por buscar la mayor compensación para cada alternativa (Tabla 4.5).

Máx(Máx) Matriz Ganancia

Mín(Mín) Matriz costos

Alternativa	Compensación mejor o máxima
A_1 (máq. A)	2.000
A_2 (máq. B)	3.000

TABLA 4.5

y luego elegiría la alternativa que le permita obtener la mayor de esas compensaciones (el máximo máximo o "maximax"), vale decir la alternativa A_2 (máquina B).

En otras palabras, el *criterio optimista* elige como solución óptima aquella alternativa que posea el mejor X_{ij} de entre los mejores X_{ij} de cada una de las alternativas posibles; vale decir, en una matriz de ganancias elige como solución óptima la alternativa A_i asociada con el

$$\underset{i}{\text{máx.}}\ (\underset{j}{\text{máx.}}\ X_{ij})$$

y en una matriz de costos, la A_i asociada con el

$$\underset{i}{\text{mín.}}\ (\underset{j}{\text{mín.}}\ X_{ij})$$

Es por esto que este criterio recibe también el nombre de máximax o minimín.

4.4. Criterio de pesimismo

El *criterio de pesimismo* propuesto por Abraham Wald, interpreta la posición de una persona que se siente completamente pesimista respecto a los resultados a obtener tras una decisión. Esta persona ante un problema como el indicado en la matriz de la Tabla 4.1, comenzaría por analizar el peor resultado que puede obtener para cada una de las alternativas, es decir la mínima ganancia que tendría para cada una de ellas (Tabla 4.6).

Max(Min) Matriz Ganancias

Min(Max) Matriz Costos

Alternativa	Compensación peor o mínima
A_1 (máq. A)	− 1.000
A_2 (máq. B)	− 3.000

TABLA 4.6

Eligiendo luego la alternativa que tenga la compensación mayor de entre todas esas mínimas (la maximín), el "decididor" se asegura que el peor resultado que puede esperar es al menos el mejor de todos los peores. Concretamente, si elige la alternativa A_1, puede estar seguro de que su ganancia nunca va a ser menor de − 1.000, mientras que con la alternativa A_2 corre el riesgo de que su ganancia valga − 3.000.

En términos generales, el criterio pesimista (maximín o minimax) selecciona como solución óptima aquella alternativa que

posea el mejor X_{ij} de entre los peores X_{ij} de cada una de las alternativas A_i; es decir, en una matriz de ganancias elige la alternativa A_i asociada con el

$$\underset{i}{\text{máx}}\ (\underset{j}{\text{mín.}}\ X_{ij})$$

mientras que en una matriz de costos elige la A_i asociada con el

$$\underset{i}{\text{mín}}\ (\underset{j}{\text{máx.}}\ X_{ij})$$

En los casos corrientes, el empleo del criterio maximín garantizará a quien toma la decisión una compensación cuando menos tan grande como la compensación maximín, y algunas veces hasta podrá resultarle mayor.

4.5. Criterio de Hurwicz

Leonid Hurwicz propuso un criterio que puede considerarse intermedio entre los dos anteriores, y que se basa en la consideración de un *coeficiente de optimismo* α, indicativo del grado de optimismo de quien debe tomar una decisión $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

De acuerdo al criterio de Hurwicz, se debe calcular para cada alternativa A_i un valor H_i dado por:

$$H_i = \alpha \cdot (\underset{j}{\text{mejor}}\ X_{ij}) + (1 - \alpha) \cdot (\underset{j}{\text{peor}}\ X_{ij})$$

y luego se elige como óptima la alternativa que posea el mejor H_i (mayor en matriz de ganancias o menor en matriz de costos).

Vemos entonces que como casos particulares tenemos para $\alpha = 0$ el criterio de pesimismo, y para $\alpha = 1$ el criterio de optimismo.

Por ejemplo, si tomamos $\alpha = 0{,}7$; para el problema de la Tabla 4.1, resulta:

$$H_1 = 0{,}7 \cdot 2.000 + 0{,}3 \cdot (-1.000) = 1.100$$
$$H_2 = 0{,}7 \cdot 3.000 + 0{,}3 \cdot (-3.000) = 1.200$$

y siguiendo el criterio de Hurwicz, habría que elegir la alternativa

K 14/8/5

7

A_2 (igual resultado que con el criterio optimista). En cambio, tomando $\alpha = 0{,}2$ resulta:

$$H_1 = 0{,}2 \cdot 2.000 + 0{,}8 \cdot (-1.000) = -400$$
$$H_2 = 0{,}2 \cdot 3.000 + 0{,}8 \cdot (-3.000) = -1.800$$

y por lo tanto habría que elegir la alternativa A_1 dado que es la que tiene el mayor valor de H_i, que en este caso, por ser una matriz de ganancias, es el mejor (para la aplicación del criterio de Hurwicz a una matriz de costos, ver Problema 4.8.2). Vemos además que llegamos así al mismo resultado que con el criterio pesimista.

Un punto muy importante en la aplicación práctica de este criterio, es la determinación del valor que tiene el coeficiente de optimismo α para la persona encargada de la toma de decisión.

Para ello, puede utilizarse un método semejante al de la "apuesta tipo", que vimos al tratar la utilidad subjetiva del dinero. En efecto, nos basta plantear al "decididor" el problema representado por la siguiente matriz de ganancias (Tabla 4.7).

	F_1	F_2
A_1	0	1
A_2	X	X

TABLA 4.7

y preguntarle "para qué valor de X $(0 \leqslant X \leqslant 1)$ le es indiferente elegir una alternativa u otra".

De acuerdo a los valores consignados en la matriz, la alternativa A_1 puede dar lugar a las ganancias 0 ó 1, mientras que la A_2 es tal que la ganancia es la misma cualquiera sea el futuro.

Llamando α al coeficiente de optimismo del "decididor", tendremos:

$$H_1 = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 0 = \alpha$$
$$H_2 = \alpha \cdot X + (1-\alpha) \cdot X = X$$

y, para el valor de X, que hace indiferentes las alternativas, será $H_1 = H_2$, (puesto que si fuera $H_1 \neq H_2$, por el criterio de Hurwicz se inclinaría por la alternativa de mayor H_i), y por lo tanto:

$$\alpha = X.$$

Por ejemplo, si quien debe tomar la decisión considera que le es indiferente elegir entre las alternativas A_1 y A_2 cuando $X = 0{,}35$, significa que su coeficiente de optimismo es $\alpha = 0{,}35$.

4.6. Criterio de Savage (Matriz de los lamentos).-

L. J. Savage ha propuesto un enfoque completamente distinto. Considera el caso de aquellas personas que al enfrentarse con un problema de decisión y elegir una de las alternativas posibles, cuando posteriormente se enteran de lo realmente acontecido, tienden a lamentarse por no haber elegido la alternativa óptima.

Savage considera que un buen índice del grado de insatisfacción o aflicción está dado por "la diferencia existente entre la compensación que realmente recibió y la que le habría correspondido si hubiera sabido con antelación el estado natural que había de producirse", que no es otra cosa que los costos de oportunidad que ya habíamos visto al tratar decisiones bajo condiciones de riesgo.

Por ejemplo, en el problema de la Tabla 4.1 tenemos que si el futuro que se ha producido es el F_3, quien haya elegido la alternativa A_1 se lamentará por los 3.000 \$ − 2.000 \$ = 1.000 \$ que se ha perdido de ganar, mientras que si hubiera elegido la alternativa A_2, no experimentaría aflicción alguna puesto que le correspondería la mayor compensación posible para ese futuro (3.000 \$ − 3.000 \$ = 0 \$ de lamento).

Repitiendo el razonamiento para los restantes futuros, podemos construir la matriz de costos de oportunidad indicada en la Tabla 4.8, que por el especial significado que se le da en este tipo de problemas, se conoce bajo el nombre de *matriz de aflicciones* o *matriz de lamentos*.

Dado que la matriz de aflicciones indica el pesar por lo que dejamos de ganar en cada caso, al que queremos hacer lo más pequeño posible, Savage aconseja seleccionar la solución óptima

(-1000) - (-1000)
(-1000) - (-3000)

	F_1	F_2	F_3
A_1 (máq. A)	0	0	1.000
A_2 (máq. B)	2.000	500	0

TABLA 4.8

aplicando el criterio de pesimismo, es decir buscando para cada alternativa la aflicción peor o máxima y eligiendo de entre todas las alternativas aquella que nos asegure la menor de todas esas aflicciones máximas.

Concretamente, para el problema que estábamos analizando tendríamos (Tabla 4.9):

Alternativa	Aflicción peor o máxima
A_1 (máq. A)	1.000
A_2 (máq. B)	2.000

TABLA 4.9

y la elección recaería en la alternativa A_1, que es la que tiene la aflicción mínima de las máximas (minimax). De este modo, quien toma la decisión se asegura que nunca se lamentará por más de 1.000 \$, pudiendo incluso experimentar un pesar menor (sería el caso en que ocurran los futuros F_1 y F_2).

En resumen entonces, el criterio de Savage o criterio de los mínimos lamentos, comienza por construir la matriz de lamentos calculando los costos de oportunidad a partir de la matriz de resultados

CO_{ij} = (máximo $X_{ij} - X_{ij}$), para cada futuro F_j en una matriz de ganancias, o:

CO_{ij} = (X_{ij} − mínimo X_{ij}), para cada futuro F_j en una matriz de costos.

La alternativa óptima se determina luego aplicando a esta nueva matriz el criterio minimax.

4.7. Análisis de un problema especial

En su obra *Games against Nature*, John Milner diseñó la matriz de resultados (ganancias) indicada en la Tabla 4.10, cuya resolución presenta especial interés porque muestra las distintas soluciones a que puede arribarse aplicando los distintos criterios de decisión bajo condiciones de incertidumbre a un mismo problema.

	F_1	F_2	F_3	F_4
A_1	2	2	0	1
A_2	1	1	1	1
A_3	0	4	0	0
A_4	1	3	0	0

100/4
✓ 0,25

TABLA 4.10

a) *Criterio de Laplace*

VE $(A_1) = 2 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$
VE $(A_2) = 1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 = 1$
VE $(A_3) = 0 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}25 = 1$
VE $(A_4) = 1 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}25 = 1.$

El mayor VE corresponde a la alternativa A_1, y por lo tanto elegimos *alternativa* A_1.

b) *Criterio pesimista (maximín)*

La Tabla 4.11 indica los peores valores para cada alternativa

Alternativa	Valor mínimo
A_1	0
A_2	1
A_3	0
A_4	0

TABLA 4.11

K/815
8

El máximo de los mínimos corresponde a A_2, es decir que elegimos *alternativa* A_2.

c) *Criterio optimista (maximax)*

La Tabla 4.12 indica el mejor valor para cada alternativa

Alternativa	Valor máximo
A_1	2
A_2	1
A_3	4
A_4	3

TABLA 4.12

El máximo de los máximos corresponde a A_3, es decir que elegimos *alternativa* A_3.

d) *Criterio de Hurwicz*

Para un coeficiente de optimismo $\alpha = 0{,}6$ tenemos (Tabla 4.13)

Alternativa	Valor máximo.	Valor mínimo	H_i
A_1	2	0	$0{,}6 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 0 = 1{,}2$
A_2	1	1	$0{,}6 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 1 = 1$
A_3	4	0	$0{,}6 \cdot 4 + 0{,}4 \cdot 0 = 2{,}4$
A_4	3	0	$0{,}6 \cdot 3 + 0{,}4 \cdot 0 = 1{,}8$

TABLA 4.13

Elegimos la alternativa con mayor valor de H_i, vale decir la *alternativa* A_3.

e) *Criterio de Savage*

La matriz de costos de oportunidad o matriz de lamentos es la indicada en la Tabla 4.14.

En base a dicha matriz, podemos construir la Tabla 4.15 en la que se consigna el máximo "lamento" para cada alternativa.

	F_1	F_2	F_3	F_4
A_1	0	2	1	0
A_2	1	3	0	0
A_3	2	0	1	1
A_4	1	1	1	1

TABLA 4.14

Alternativa	Valor máximo
A_1	2
A_2	3
A_3	2
A_4	1

TABLA 4.15

La elección recae en el mínimo de los máximos costos de oportunidad: elegimos *alternativa* A_4.

f) *Comentario general sobre el problema*

En esta matriz la elección de la alternativa adecuada ha sido distinta para cada uno de los criterios empleados. Esto nos recuerda que la validez de cualquier regla para la toma racional de decisiones en estado de incertidumbre tiene que ser contingente al menos con respecto a la configuración psicológica del "decididor" y a las circunstancias pecuniarias del mismo.

En otras palabras, el criterio apropiado para la toma de decisión tiene que variar de una persona a otra y de una situación a otra; en términos generales, los criterios enunciados interpretan respectivamente los modos de pensar de individuos racionales (Laplace), cautos (maximín), osados (maximax) y malos perdedores (Savage).

4.8. Problemas de aplicación

4.8.1. *Problema No. 1*

Una empresa que quiere introducir un producto en un mercado competitivo cuyas características son imposibles de conocer, está estudiando la posibilidad de venderlo a 8, 10, 12, 14, 16, 18 o 20 \$/unidad. Se considera que el precio del mercado puede ser inferior a 10 \$/u, superior a 18 \$/u o situarse en algún valor del intervalo 10–18 \$/u, en cuyo caso el beneficio de la empresa sería distinto, variando tal como se indica en la matriz de ganancias (en millones de pesos) de la Tabla 4.16.

	Precios de la competencia				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
A_1 (8 \$/u)	−30	10	15	20	20
A_2 (10 \$/u)	−20	20	20	30	40
A_3 (12 \$/u)	−10	10	20	30	60
A_4 (14 \$/u)	−15	0	20	40	80
A_5 (16 \$/u)	−20	−15	10	40	90
A_6 (18 \$/u)	−30	−20	0	20	100
A_7 (20 \$/u)	−50	−30	−20	0	40

TABLA 4.16

Se pide determinar cuál es la estrategia óptima con los distintos criterios, comentando las respectivas soluciones.

Solución:

A la luz de los datos consignados en la Tabla 4.16, debemos primero observar si existe alguna relación de dominio entre las diferentes A_i.

Se cumple que: $X_{2j} > X_{1j}$ para todo j, lo que implica que A_2 domina a A_1 y ésta puede ser eliminada. La razón de esta situación tal vez radique en que 8 \$/unidad no es un precio compatible con la estructura de costos de la empresa en cuestión.

Además se cumple que $X_{6j} > X_{7j}$ para todo j, lo que significa que A_6 domina a A_7 y ésta también puede ser eliminada. Esto puede deberse a que el precio de 20 \$/u es demasiado elevado para el mercado de manera que produce una gran disminución del volumen de ventas y por ende una merma considerable en las ganancias.

De este modo, nuestra matriz queda reducida a la que se indica en la Tabla 4.17.

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
A_2 (10 \$/u)	−20	20	20	30	40
A_3 (12 \$/u)	−10	10	20	30	60
A_4 (14 \$/u)	−15	0	20	40	80
A_5 (16 \$/u)	−20	−15	10	40	90
A_6 (18 \$/u)	−30	−20	0	20	100

TABLA 4.17

a) Aplicando el criterio de Laplace resulta:

$$\text{VE}(A_2) = (-20 + 20 + 20 + 30 + 40) \cdot 0{,}2 = 18$$
$$\text{VE}(A_3) = (-10 + 10 + 20 + 30 + 60) \cdot 0{,}2 = 22$$
$$\text{VE}(A_4) = (-15 + 0 + 20 + 40 + 80) \cdot 0{,}2 = 25$$
$$\text{VE}(A_5) = (-20 - 15 + 10 + 40 + 90) \cdot 0{,}2 = 21$$
$$\text{VE}(A_6) = (-30 - 20 + 0 + 20 + 100) \cdot 0{,}2 = 14$$

Luego, según este criterio, la decisión recae sobre A_4 (máximo valor esperado de la ganancia).

b) Aplicando el criterio optimista resulta (Tabla 4.18):

Alternativa	Valor máximo
A_2	40
A_3	60
A_4	80
A_5	90
A_6	100

14/8/5

9

Luego, el máximo de los máximos es 100, y corresponde a la alternativa A_6 que debe ser elegida al aplicar este criterio.

c) Aplicando al criterio pesimista resulta (Tabla 4.19)

Alternativa	Valor mínimo
A_2	-20
A_3	-10
A_4	-15
A_5	-20
A_6	-30

TABLA 4.19

Luego, el máximo de los mínimos es -10, que corresponde a la alternativa A_3 que con este criterio aparece como óptima.

d) Aplicando el criterio de Hurwicz para distintos valores del coeficiente α (0,2; 0,5; 0,8) se obtiene:

1. Para $\alpha = 0{,}2$

$$H_2 = 0{,}2 \cdot 40 + 0{,}8 \cdot (-20) = -8$$
$$H_3 = 0{,}2 \cdot 60 + 0{,}8 \cdot (-10) = 4$$
$$H_4 = 0{,}2 \cdot 80 + 0{,}8 \cdot (-15) = 4$$
$$H_5 = 0{,}2 \cdot 90 + 0{,}8 \cdot (-20) = 2$$
$$H_6 = 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}8 \cdot (-30) = -4$$

Luego, debe elegirse indistintamente A_3 o A_4, cuyos H_i son los máximos.

2. Para $\alpha = 0{,}5$

$$H_2 = 0{,}5 \cdot 40 + 0{,}5 \cdot (-20) = 20$$
$$H_3 = 0{,}5 \cdot 60 + 0{,}5 \cdot (-10) = 25$$
$$H_4 = 0{,}5 \cdot 80 + 0{,}5 \cdot (-15) = 32{,}5$$
$$H_5 = 0{,}5 \cdot 90 + 0{,}5 \cdot (-20) = 35$$
$$H_6 = 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot (-30) = 35.$$

Aquí debe optarse por A_5 o A_6, cuyos H_i son los máximos.

3. Para $\alpha = 0{,}8$

$$H_2 = 0{,}8 \cdot 40 + 0{,}2 \cdot (-20) = 28$$
$$H_3 = 0{,}8 \cdot 60 + 0{,}2 \cdot (-10) = 46$$
$$H_4 = 0{,}8 \cdot 80 + 0{,}2 \cdot (-15) = 61$$
$$H_5 = 0{,}8 \cdot 90 + 0{,}2 \cdot (-20) = 68$$
$$H_6 = 0{,}8 \cdot 100 + 0{,}2 \cdot (-30) = 72$$

Lo cuál indica que debe elegirse A_6.

e) Podemos observar entonces que:

Ninguno de los criterios ni aún el más pesimista se inclina por A_2.

A medida que se analiza el problema con espíritu más optimista, las alternativas a elegir son A_5 o A_6.

El criterio optimista se inclina por A_6 (maximax = 100) sin tener en cuenta las fuertes pérdidas en F_1 y F_2 (30 y 20 millones respectivamente) que estimamos tienen gran importancia.

Es así que nuestra decisión queda ahora reducida a la elección entre A_3, A_4, A_5, ó A_6.

f) Apliquemos el criterio de Savage para tratar de acotar más, si cabe, los términos de la posible solución.

Nuestra matriz de lamentos será la siguiente (Tabla 4.20):

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
A_2	10	0	0	10	60
A_3	0	10	0	10	40
A_4	5	20	0	0	20
A_5	10	35	10	0	10
A_6	20	40	20	20	0

TABLA 4.20

Aplicando el criterio pesimista a esta matriz debe elegirse aquella alternativa que posea el mínimo entre los máximos "lamentos".

Alternativa	Valor máximo
A_2	60
A_3	40
A_4	20
A_5	35
A_6	40

TABLA 4.21

Resulta así como alternativa óptima la A_4.

Cabe destacar que adoptar A_4 significa:

Tener un grado de optimismo algo superior al 20% (comparar con el resultado de aplicar el criterio de Hurwicz para $\alpha = 0{,}20$ y $\alpha = 0{,}50$).

Asegurarnos que no nos "lamentaremos" por lo menos en dos futuros (F_3 y F_4) dado que para ellos la alternativa A_4 es la mejor.

Poder ganar hasta un máximo de 80 millones de \$ (para F_5) con el riesgo de poder perder a lo sumo 15 millones (para F_1).

Es de hacer notar que para la total resolución del problema sería útil poder conocer algunos otros datos: solvencia financiera y rendimiento económico de la empresa en cuestión, rendimiento del capital en la fabricación y venta del producto que se pretende lanzar, etc. Pero a la luz de los valores disponibles según el enunciado inicial aparece como más aceptable la adopción de la alternativa A_4 como solución óptima, aunque la misma puede cuestionarse con criterio más optimista o pesimista que el nuestro.

4.8.2. Problema No. 2

Un problema de decisión tiene la siguiente matriz de resultados (Tabla 4.22).

	F_1	F_2
A_1	0	5
A_2	10	-15

TABLA 4.22

a) Asumiendo que la matriz es de ganancias, cuál sería la alternativa seleccionada según el criterio de Wald.

b) Asumiendo que la matriz es de ganancias, cuál sería la alternativa seleccionada según el criterio de Savage.

c) Asumiendo que la matriz es de ganancias, cuál sería la alternativa seleccionada según el criterio de Hurwicz con $\alpha = 0{,}40$.

d) Asumiendo que la matriz es de costos, cuál sería la alternativa seleccionada según el criterio de Wald.

e) Asumiendo que la matriz es de costos, cuál sería la alternativa seleccionada según el criterio de Savage.

f) Asumiendo que la matriz es de costos, cuál sería la alternativa seleccionada según el criterio de Hurwicz con $\alpha = 0{,}40$.

g) ¿Cuáles son las probabilidades de indiferencia? Indique qué significado tienen.

Solución:

a) Según el criterio de Wald (criterio pesimista), debemos seleccionar el peor resultado para cada alternativa; y como la matriz es de ganancias, el peor resultado será la menor ganancia:

Alternativa	Ganancia mínima
A_1	0
A_2	-15

TABLA 4.23

Vemos así que la mayor de las ganancias mínimas corresponde a la alternativa A_1, que debe entonces elegirse como alternativa óptima.

b) Para aplicar el criterio de Savage, debemos construir la matriz de costos de oportunidad (Tabla 4.24), teniendo en cuenta que la matriz dato es una matriz de ganancias. Así, si ocurre el futuro F_1, el mejor resultado sería el correspondiente a la alternativa A_2 (ganancia máxima = 10) y por lo tanto a dicha alternativa le corresponde un costo de oportunidad nulo, mientras

10

que a la alternativa A_1 le corresponde un costo de oportunidad 10 (que es lo que se deja de ganar si ocurre el futuro F_1 y no se ha elegido la mejor alternativa para ese futuro, es decir A_2). Por el contrario, si ocurre el futuro F_2, el mejor resultado correspondería a la alternativa A_1 (ganancia máxima = 5) que por lo tanto tiene un costo de oportunidad nulo, mientras que a la alternativa A_2 le corresponde un costo de oportunidad $5 - (-15) = 20$.

	F_1	F_2
A_1	10	0
A_2	0	20

TABLA 4.24

Puesto que el criterio de Savage implica aplicar el criterio pesimista a la matriz de costos de oportunidad, debemos seleccionar el peor resultado para cada alternativa (costo de oportunidad máximo) y luego elegir el mejor de ellos:

Alternativa	Costo de oportunidad máximo
A_1	10
A_2	20

TABLA 4.25

Vemos así que el menor de los costos de oportunidad máximos corresponde a la alternativa A_1, que debe entonces elegirse como alternativa óptima.

c) En la hipótesis de que la matriz es de ganancias, el mejor resultado para cada alternativa será la mayor ganancia, de modo que:

$$H_1 = 0{,}40 \cdot 5 + (1 - 0{,}40) \cdot 0 = 2$$
$$H_2 = 0{,}40 \cdot 10 + (1 - 0{,}40) \cdot (-15) = -5$$

y siguiendo el criterio de Hurwicz habrá que elegir la alternativa

A_1, puesto que le corresponde el mayor valor de H_1.

d) Si la matriz es de costos, el peor resultado para cada alternativa será el máximo costo, vale decir:

Alternativa	Máximo costo
A_1	5
A_2	10

TABLA 4.26

Luego, como el menor de esos costos máximos corresponde a la alternativa A_1, vemos que de acuerdo al criterio de Wald, ésa sería la alternativa seleccionada.

e) Si la matriz de la Tabla 4.22 es una matriz de costos, el mejor resultado para cada futuro sería obviamente 0 para F_1, y -15 para F_2, por lo tanto la matriz de costos de oportunidad resulta ser la indicada en la Tabla 4.27.

	F_1	F_2
A_1	0	20
A_2	10	0

TABLA 4.27

Seleccionando el mayor costo de oportunidad para cada alternativa (Tabla 4.28) vemos que el menor de dichos costos de oportunidad máximos corresponde a la alternativa A_2, que sería entonces la seleccionada por el criterio de Savage.

Alternativa	Costo de oportunidad máximo
A_1	20
A_2	10

TABLA 4.28

f) Si la matriz es de costos, el mejor resultado para cada alternativa será el menor de los costos correspondientes a cada una; por lo tanto:

$$H_1 = 0{,}40 \cdot 0 + (1 - 0{,}40) \cdot 5 = 3$$
$$H_2 = 0{,}40 \cdot (-15) + (1 - 0{,}40) \cdot 10 = 0$$

y siguiendo el criterio de Hurwicz habrá que elegir la alternativa A_2, dado que le corresponde el menor valor de H_i.

g) Si como en nuestro caso tenemos varias alternativas cuyos resultados están sujetos a un riesgo que podríamos determinar probabilísticamente, es obvio que las preferencias del que decide con respecto a una u otra alternativa, variarían en concordancia con las probabilidades asociadas a los distintos futuros posibles.

No obstante, al comparar dos alternativas, siempre habrá un punto común a las dos distribuciones de probabilidades, en que quien decide será totalmente indiferente a elegir una u otra alternativa. Ese punto es el que se denomina "de indiferencia".

En el supuesto de indiferencia debe cumplirse que:

$$0 \cdot p_1 + 5 \cdot p_2 = 10 \cdot p_1 + (-15) \cdot p_2 ,$$

siendo p_1 la probabilidad asociada al futuro F_1 y p_2 la asociada al futuro F_2 (ver Tabla 4.22); y como además sabemos que se deberá cumplir que:

$$p_1 + p_2 = 1,$$

resulta:

$$0 \cdot p_1 + 5 \cdot (1 - p_1) = 10 \cdot p_1 + (-15) \cdot (1 - p_1),$$

de donde puede despejarse p_1:

$$p_1 = \frac{20}{30} = 0{,}66 ,$$

y por lo tanto:

$$p_2 = 1 - p_1 = 0{,}34 .$$

Quiere decir entonces que si las probabilidades de presentación

de los futuros F_1 y F_2 fueran respectivamente $p_1 = 0{,}66$ y $p_2 = 0{,}34$, al tomador de la decisión le sería indistinto optar por una u otra alternativa, ya que el valor esperado para ambas sería el mismo.

En todo problema de decisión bajo condiciones de incertidumbre es importante conocer las probabilidades de indiferencia pues así el problema se reduce a evaluar la posibilidad de que la probabilidad de aparición de un determinado futuro esté por encima o por debajo de la correspondiente probabilidad de indiferencia. Por ejemplo, al saber que la probabilidad de indiferencia correspondiente al futuro F_1 es $p_1 = 0{,}66$, si se estima que la probabilidad real de aparición de F_1 es menor que 0,66 (por ejemplo 0,50), significa que habrá que optar por la alternativa A_1, pues en ese caso su valor esperado sería mayor que el de A_2:

$$\text{VE}(A_1) = 0 \cdot p_1 + 5 \cdot (1 - p_1) > \text{VE}(A_2) = 10 \cdot p_1 + (-15) \cdot (1 - p_1)$$

para $p_1 < 0{,}66$.

Todo lo antedicho responde a lo que en términos más generales establece el *principio de la reducción del discernimiento requerido.* "Cuando se debe establecer por discernimiento la magnitud de una de las variables que entran en el análisis de una decisión, debe hallarse el valor de la misma para el cual la elección pasa de una alternativa a otra. Una vez hallado ese valor crítico, el discernimiento requerido se reduce a estimar si la magnitud de la variable es mayor o menor que dicho valor crítico."

4.8.3. Problema No. 3

La siguiente es una matriz de ganancias (Tabla 4.29).

	F_1	F_2
A_1	1.000	1.000
A_2	600	1.500

TABLA 4.29

a) El tomador de la decisión utiliza el criterio de von Neumann y Morgenstern y halla que la utilidad de 1.000 $ es 0,50. ¿Es un optimista o un pesimista? ¿Por qué?

b) Suponga que la matriz se refiere a la compra de un producto agrícola: F_1 significa buena cosecha; F_2 mala cosecha; A_1 comprar antes de la siembra; A_2 comprar después de la cosecha. Agregamos una tercera alternativa, A_3, comprar una proporción k antes de la siembra, y $1-k$ después de la cosecha. Usando el criterio de Savage, ¿qué valor de k es óptimo?

c) Suponga que la matriz se refiere a una campaña de publicidad: F_1 campaña inefectiva; F_2 campaña efectiva; A_1 no llevar a cabo la campaña; A_2 llevarla a cabo. La probabilidad de F_2 es p. Si utilizamos una función de utilidad del dinero logarítmica ($U_x = \log x$, donde $x = \$$), ¿cuál debe ser el valor de p para que el tomador de la decisión adopte A_2? P=0,50

Solución:

a) Según el criterio de von Neumann y Morgenstern, las utilidades subjetivas conferidas al mejor y peor resultados respectivamente, son:

$$U_{600} = 0 \qquad U_{1.500} = 1.$$

Luego, como para el tomador de la decisión es

$$U_{1.000} = 0{,}5,$$

vemos que al representar la curva de utilidad para este individuo (Figura 4.1), ésta indica utilidad marginal del dinero decreciente, lo que implica que el individuo en cuestión es en cierto modo conservador o pesimista.

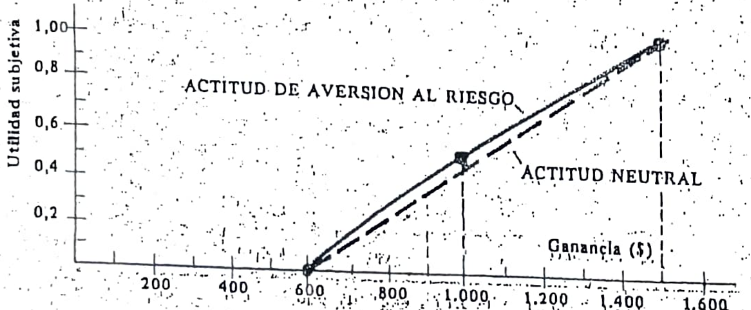

FIGURA 4.1

b) Si agregamos la tercera alternativa, la matriz de ganancias pasa a ser la indicada en la Tabla 4.30.

	F_1	F_2
A_1	1.000	1.000
A_2	600	1.500
A_3	$1.000 \cdot k + 600 \cdot (1-k)$	$1.000 \cdot k + 1.500 \cdot (1-k)$

TABLA 4.30

Luego, como las ganancias para la alternativa A_3 están comprendidas entre las correspondientes a A_1 y A_2 ($0 \leqslant k \leqslant 1$), vemos que el mejor valor para cada columna es respectivamente 1.000 para F_1 (máxima ganancia para ese futuro) y 1.500 para F_2, y por lo tanto la matriz de costos de oportunidad (o matriz de "lamentos") resulta ser la indicada en la Tabla 4.31, obtenida restando cada valor del mejor de su columna.

	F_1	F_2
A_1	0	500
A_2	400	0
A_3	$400 \cdot (1-k)$	$500 \cdot k$

TABLA 4.31

De acuerdo al criterio de Savage, debemos aplicar el criterio pesimista, esto es, seleccionar el mayor costo de oportunidad para cada alternativa, y elegir la alternativa que tenga el menor de dichos costos de oportunidad máximos.

Vemos que para $k = 0$ las alternativas A_2 y A_3 se hacen coincidentes y la elección recaería sobre ellas, con un costo de oportunidad de 400, mientras que para $k = 1$ las alternativas que se hacen coincidentes son A_1 y A_3, con un costo de oportunidad de 500, es decir mayor que el correspondiente a A_2, por lo cual la elección recaería en esta última. La alternativa A_2 sigue siendo la elegida mientras el costo de oportunidad de A_3 sea mayor de 400, o sea mientras se mantenga $k > 0{,}8$. Para $k = 0{,}8$

será indiferente elegir entre A_2 y A_3, y para $k < 0,8$ la alternativa que pasa a ser la elegida es A_3.

En particular, hay un valor de k para el cual es:

$$400 \cdot (1 - k) = 500 \cdot k.$$

Despejando:

$$k = \frac{400}{900} = 0,44.$$

Para dicho valor de k, el costo de oportunidad de A_3 para ambos futuros tendrá el mismo valor:

$$400 \cdot (1 - 0,44) = 500 \cdot 0,44 = 222,$$

de modo que al aplicar el criterio pesimista a la matriz de "lamentos", resultaría elegida la alternativa A_3 con un costo de oportunidad o "lamento" de 222.

Es fácil ver que si tomamos un valor de $k < 0,44$, el costo de oportunidad de A_3 se haría mayor de 222 para F_1 y menor de 222 para F_2, con lo cual al aplicar el criterio pesimista resultaría elegida la alternativa A_3 con un "lamento" mayor de 222; y algo semejante sucedería tomando $k > 0,44$. Luego, el valor óptimo de k es 0,44 puesto que le corresponde el menor "lamento", cualquiera sea el futuro que ocurra.

(c) Utilizando una función de utilidad logarítmica, tendremos:

$$U_{600} = \log. \quad 600 = 2,778$$
$$U_{1.000} = \log. \ 1.000 = 3,000$$
$$U_{1.500} = \log. \ 1.500 = 3,176,$$

de modo que la matriz de resultados puede convertirse en la matriz de utilidades indicada en la Tabla 4.32.

	F_1	F_2
A_1	3,000	3,000
A_2	2,778	3,176

TABLA 4.32

Si llamamos p a la probabilidad asociada al futuro F_2, y utilizamos como criterio de decisión el valor esperado de la utilidad, para que la elección recaiga en la alternativa A_2 deberá cumplirse:

$$\text{UE}(A_1) = 3,000 < \text{UE}(A_2) = 2,778\,(1 - p) + 3,176 \cdot p,$$

es decir:

$$3,000 < 2,778 + 0,398 \cdot p$$

y despejando p:

$$p > \frac{3,000 - 2,778}{0,398} = 0,558.$$

Vale decir que para que el tomador de la decisión adopte A_2, el valor de p debe ser $p > 0,558$.

4.8.4. Problema No. 4

El propietario de una panadería desea conocer el número de panecillos que debe fabricar cada día. Tiene dos empleados, un oficial panadero al que paga (con todas las cargas incluidas) 1.500 \$ por día, y un ayudante que trabaja por 1.000 \$ diarios. Por otra parte, los gastos diarios fijos (impuestos, alquiler del negocio y de las instalaciones) se elevan a 1.500 \$, y el costo de la harina y demás ingredientes es de 40 \$ por panecillo.

El precio de venta de los panecillos es de 60 \$, pudiendo venderse los que quedan al fin de cada día a 20 \$ cada uno.

El panadero notó que vendía por lo menos 300 panecillos por día y como máximo 800. Para fabricar más de 500 panecillos por día el oficial panadero debe trabajar horas extras que mejoran su salario en 1.000 \$.

Además, el panadero calcula que un cliente no satisfecho le causa un perjuicio que estima en 30 \$ por cada panecillo.

Se pide:

a) Determinar el número de panecillos que se deben fabricar

12

diariamente aplicando el criterio de Laplace y de Hurwicz con $\alpha = 0{,}4$.

b) De acuerdo al criterio de Hurwicz dibujar un gráfico que muestre entre qué valores puede variar el coeficiente de optimismo para que la alternativa elegida con $\alpha = 0{,}4$ se mantenga como válida.

c) Para mejorar los resultados anteriores el panadero observó las demandas diarias y pudo establecer el siguiente cuadro (Tabla 4.33).

Nº de panes demandados por día	Probabilidad de demanda
300	0,1
400	0,1
500	0,1
600	0,3
700	0,3
800	0,1

TABLA 4.33

¿Qué cantidad de panecillos tendría que fabricar ahora el panadero?

Solución:

a) Llamemos Q a la cantidad de panecillos fabricada diariamente y D a la cantidad demandada. Si nos atenemos a los costos consignados en el enunciado, para $Q \leqslant 500$ las ganancias estarán dadas por:

$$G = 60 \cdot Q - 1.500 - 1.000 - 1.500 - 30 \cdot (D - Q) - 40 \cdot Q \qquad \text{si } Q \leqslant D$$

$$G = 60 \cdot D + 20 \cdot (Q - D) - 1.500 - 1.000 - 1.500 - 40 \cdot Q \qquad \text{si } Q > D,$$

es decir:

$$G = \begin{cases} 50 \cdot Q - 30 \cdot D - 4.000 & \text{si } Q \leqslant D \text{ y } Q \leqslant 500 \\ -20 \cdot Q + 40 \cdot D - 4.000 & \text{si } Q > D \text{ y } Q \leqslant 500 \end{cases}$$

mientras que para cantidades $Q > 500$, hay que tomar en cuenta el salario extra del oficial panadero y por lo tanto las ganancias pasan a ser:

$$G = \begin{cases} 50 \cdot Q - 30 \cdot D + 5.000 & \text{si } Q \leqslant D \text{ y } Q > 500 \\ -20 \cdot Q + 40 \cdot D - 5.000 & \text{si } Q > D \text{ y } Q > 500 \end{cases}$$

En base a estas ecuaciones, y tomando como alternativas los niveles de producción de 300, 400, 500, 600, 700 y 800 panecillos por día, podemos construir la matriz de resultados (ganancias) indicada en la Tabla 4.34.

	F_1 ($D = 300$)	F_2 ($D = 400$)	F_3 ($D = 500$)	F_4 ($D = 600$)	F_5 ($D = 700$)	F_6 ($D = 800$)
A_1 ($Q = 300$)	2.000	− 1.000	− 4.000	− 7.000	− 10.000	− 13.000
A_2 ($Q = 400$)	0	4.000	1.000	− 2.000	− 5.000	− 8.000
A_3 ($Q = 500$)	− 2.000	2.000	6.000	3.000	0	− 3.000
A_4 ($Q = 600$)	− 5.000	− 1.000	3.000	7.000	4.000	1.000
A_5 ($Q = 700$)	−7.000	− 3.000	1.000	5.000	9.000	6.000
A_6 ($Q = 800$)	− 9.000	− 5.000	− 1.000	3.000	7.000	11.000

TABLA 4.34

Aplicando el criterio de Laplace, habrá que suponer equiprobabilidad para los distintos futuros F_j (es decir $p_j = 1/6 = 0{,}166$) y por lo tanto los valores esperados resultan ser:

$$\text{VE}(A_1) = (2.000 - 1.000 - 4.000 - 7.000 - 10.000 - 13.000) \cdot 0{,}166 = -5.500$$

$$\text{VE}(A_2) = (0 + 4.000 + 1.000 - 2.000 - 5.000 - 8.000) \cdot 0{,}166 = -1.666$$

$$\text{VE}(A_3) = (-2.000 + 2.000 + 6.000 + 3.000 + 0 - 3.000) \cdot 0{,}166 = 1.000$$

$$VE(A_4) = (-5.000 - 1.000 + 3.000 + 7.000 + 4.000 + 1.000) \cdot 0{,}166 = 1.500$$

$$VE(A_5) = (-7.000 - 3.000 + 1.000 + 5.000 + 9.000 + 6.000) \cdot 0{,}166 = 1.833$$

$$VE(A_6) = (-9.000 - 5.000 - 1.000 + 3.000 + 7.000 + 11.000) \cdot 0{,}166 = 1.000.$$

Luego, según el criterio de Laplace hay que optar por la alternativa A_5, es decir fabricar diariamente 700 panecillos.

En cambio, aplicando el criterio de Hurwicz con un coeficiente de optimismo $\alpha = 0{,}4$ tendríamos:

$$H_1 = 0{,}4 \cdot 2.000 + 0{,}6 \cdot (-13.000) = -7.000$$
$$H_2 = 0{,}4 \cdot 4.000 + 0{,}6 \cdot (-8.000) = -3.200$$
$$H_3 = 0{,}4 \cdot 6.000 + 0{,}6 \cdot (-3.000) = 600$$
$$H_4 = 0{,}4 \cdot 7.000 + 0{,}6 \cdot (-5.000) = -200$$
$$H_5 = 0{,}4 \cdot 9.000 + 0{,}6 \cdot (-7.000) = -600$$
$$H_6 = 0{,}4 \cdot 11.000 + 0{,}6 \cdot (-9.000) = -1.000$$

y por lo tanto la alternativa elegida sería A_3, esto es, fabricar 500 panecillos diarios.

b) Si representamos los valores de H_i para distintos valores del coeficiente de optimismo α (figura 4.2), vemos que para valores de α comprendidos entre 0 y 0,54, la alternativa elegida resulta ser A_3, mientras que para valores de α entre 0,54 y 1, la elección por el criterio de Hurwicz recae en A_6.

c) Conociendo la distribución de probabilidades consignada en la Tabla 4.33, podemos calcular los valores esperados para las distintas alternativas:

$$VE(A_1) = 2.000 \cdot 0{,}1 - 1.000 \cdot 0{,}1 - 4.000 \cdot 0{,}1 - 7.000 \cdot 0{,}3 - 10.000 \cdot 0{,}3 - 13.000 \cdot 0{,}1 = -6.600$$

$$VE(A_2) = 0 \cdot 0{,}1 + 4.000 \cdot 0{,}1 + 1.000 \cdot 0{,}1 - 2.000 \cdot 0{,}3 - 5.000 \cdot 0{,}3 - 8.000 \cdot 0{,}1 = -2.400$$

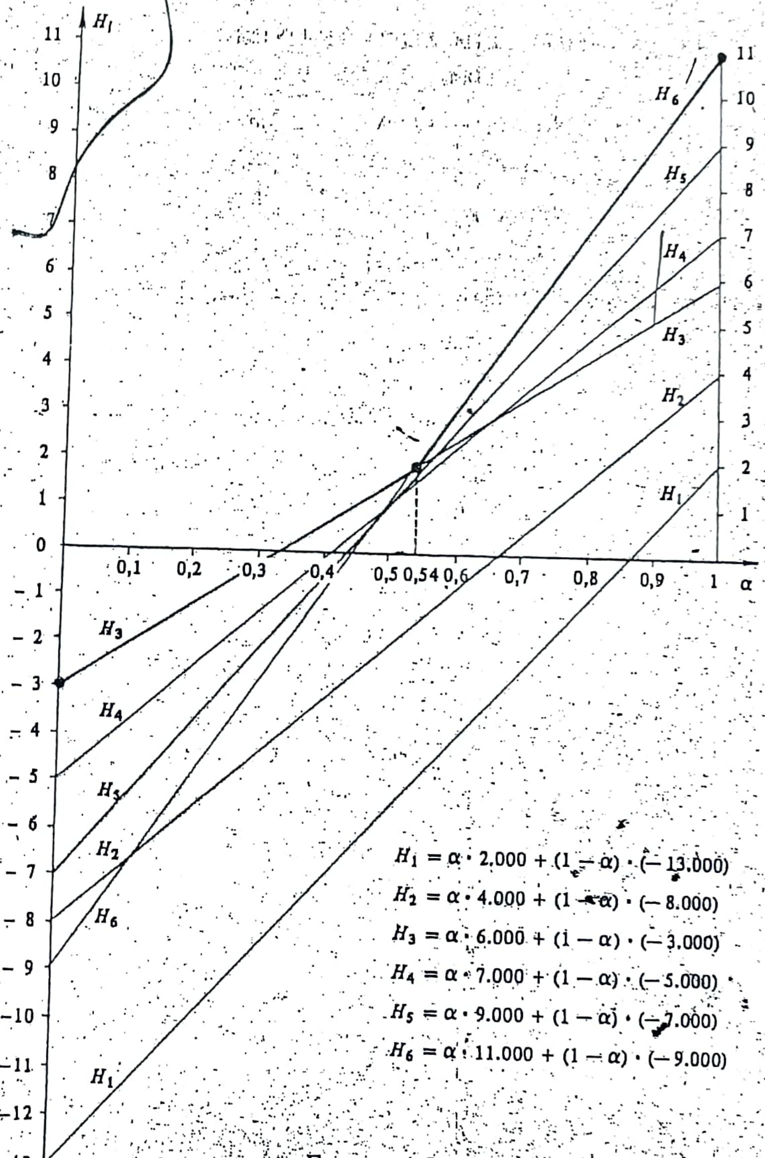

FIGURA 4.2

13

$$VE(A_3) = -2.000 \cdot 0{,}1 + 2.000 \cdot 0{,}1 + 6.000 \cdot 0{,}1 + 3.000 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}3 - 3.000 \cdot 0{,}1 = 1.200$$

$$VE(A_4) = -5.000 \cdot 0{,}1 - 1.000 \cdot 0{,}1 + 3.000 \cdot 0{,}1 + 7.000 \cdot 0{,}3 + 4.000 \cdot 0{,}3 + 1.000 \cdot 0{,}1 = 3.100$$

$$VE(A_5) = -7.000 \cdot 0{,}1 - 3.000 \cdot 0{,}1 + 1.000 \cdot 0{,}1 + 5.000 \cdot 0{,}3 + 9.000 \cdot 0{,}3 + 6.000 \cdot 0{,}1 = 3.900$$

$$VE(A_6) = -9.000 \cdot 0{,}1 - 5.000 \cdot 0{,}1 - 1.000 \cdot 0{,}1 + 3.000 \cdot 0{,}3 + 7.000 \cdot 0{,}3 + 11.000 \cdot 0{,}1 = 2.600$$

lo cual nos permite afirmar que, de ser correcta la distribución de probabilidades, la decisión óptima es fabricar 700 panecillos por día (alternativa A_5).

FIN

5. DECISION CON INFORMACION ADICIONAL – TEORIA BAYESIANA

5.1. Enfoque bayesiano de la decision

En los últimos años se ha desarrollado una corriente de pensamiento que se caracteriza por encarar los procesos decisorios dinámicamente asumiendo una posición diferente a la tradicional con respecto a lo que debe interpretarse como probabilidades.

Esta nueva corriente comienza por asignarle al concepto de probabilidad una connotación subjetiva, es decir, supone que toda decisión implica una "creencia" acerca de las probabilidades de presentación de los distintos futuros posibles, acorde con la estructura de probabilidades mental que tiene el tomador de la decisión, a diferencia de lo que sostienen los estadísticos clásicos u objetivistas, quienes oponen reparos a dicho concepto, afirmando que la probabilidad es el valor límite de una serie de pruebas repetidas. Esta objeción puede sin embargo soslayarse, si se tiene en cuenta que la experiencia de todos los días nos indica que por lo general cuando tomamos una decisión es porque "creemos" algo acerca de los acontecimientos que sobrevendrán.

El segundo aspecto que distingue a este enfoque es que considera especialmente la necesidad, por parte del tomador de la decisión que se encuentra ante información parcial, de obtener mayor información que le permita cambiar sus "creencias" acerca de la distribución de probabilidades.

Es precisamente por esta razón que este enfoque se conoce como *enfoque bayesiano* de la decisión, pues hace uso extensivo del Teorema de Bayes para el cálculo de probabilidades con información adicional.