INTEGRALES DE SUPERFICIE

Operador Nabla o de Hamilton

Es un pseudo vector que indica operaciones de derivación como sigue:

$$\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\delta}{\delta x}; \frac{\delta}{\delta y}; \frac{\delta}{\delta z})$$

Cuando se aplica a un Campo Escalar $w = f(x; y; z)$ se presenta como si fuese la multiplicación de un vector y un escalar, pero lo que calculamos con ello es el **Gradiente de la función**:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x; y; z) = \left(\frac{\delta}{\delta x}; \frac{\delta}{\delta y}; \frac{\delta}{\delta z}\right).f(x; y; z) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x; y; z); \frac{\delta f}{\delta y}(x; y; z); \frac{\delta f}{\delta z}(x; y; z)\right)$$

Ya hemos visto con anterioridad, que el vector $\boldsymbol{\nabla} f$ en un punto indica la dirección de máxima variación de la función en el punto y su derivada direccional máxima en ese punto es su módulo:

$$\left[\frac{\delta f}{\delta u}(x; y; z)\right]_{Máx} = |\boldsymbol{\nabla} f(x; y; z)|$$

Cuando se aplica a un Campo Vectorial $\boldsymbol{F}(x; y; z) = (F_1(x; y; z);\ F_2(x; y; z);\ F_3(x; y; z))$, se presenta como si fuese un producto escalar entre vectores, pero lo que calculamos con ello es, lo que se denomina, la **Divergencia de $\boldsymbol{F}(x; y; z)$**:

$$\boldsymbol{\nabla}\ \boldsymbol{F}(x; y; z) = \left(\frac{\delta}{\delta x}; \frac{\delta}{\delta y}; \frac{\delta}{\delta z}\right).\left(F_1(x; y; z);\ F_2(x; y; z);\ F_3(x; y; z)\right) =$$

$$\left(\frac{\delta F_1}{\delta x}(x; y; z) + \frac{\delta F_2}{\delta y}(x; y; z) + \frac{\delta F_3}{\delta z}(x; y; z)\right) = div\boldsymbol{F}(x; y; z)$$

Es un escalar y representa la capacidad del Campo Vectorial de ser "Fuente" o "Sumidero" del flujo del campo en un punto cuando la Divergencia es valuada en ese punto. Es el flujo resultante del Campo (o ente físico) por unidad de volumen que pasa por el punto.

Si $\boldsymbol{\nabla}\ \boldsymbol{F}(x; y; z) > 0$: el punto es una **Fuente**
Si $\boldsymbol{\nabla}\ \boldsymbol{F}(x; y; z) < 0$: el punto es un **Sumidero**
Si $\boldsymbol{\nabla}\ \boldsymbol{F}(x; y; z) = 0$: el flujo es **pasante**, no genera ni absorbe flujo del Campo en el punto. Es el caso por ejemplo de un fluido incompresible.

Cuando el operador nabla se aplica a un campo vectorial en forma de producto cruz, la operación se presenta como un producto vectorial entre vectores, pero lo que calculamos con ello es, lo que se denomina, el **Rotor de $\boldsymbol{F}(x; y; z)$**:

$$rot\boldsymbol{F}(x; y; z) = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{x}\boldsymbol{F}(x; y; z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z}; \frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x}; \frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y})$$

Superficies Orientables

Una superficie σ es orientable, si es posible elegir un versor normal $\boldsymbol{n}$ en cada punto que varía continuamente sobre σ, es decir, la superficie debe tener plano tangente en todos sus puntos.

Esto significa también, que hay dos orientaciones posibles.

Si σ es cerrada, se toma como orientación positiva la de los vectores $\boldsymbol{n}$ que indican hacia afuera y negativa la que indican hacia adentro.

Si la superficie viene dada por $z = f(x; y)$, ésta tiene una orientación natural dada por:

$$\boldsymbol{n} = \frac{(-\frac{\delta f}{\delta x}; -\frac{\delta f}{\delta y}; 1)}{\sqrt{(\frac{\delta f}{\delta x})^2 + (\frac{\delta f}{\delta y})^2 + 1}}$$

Si la superficie viene dada en forma paramétrica: $\boldsymbol{r}(u; v) = (x(u; v);\ y(u; v);\ z(u; v))$, la superficie adquiere automáticamente la orientación del vector normal unitario:

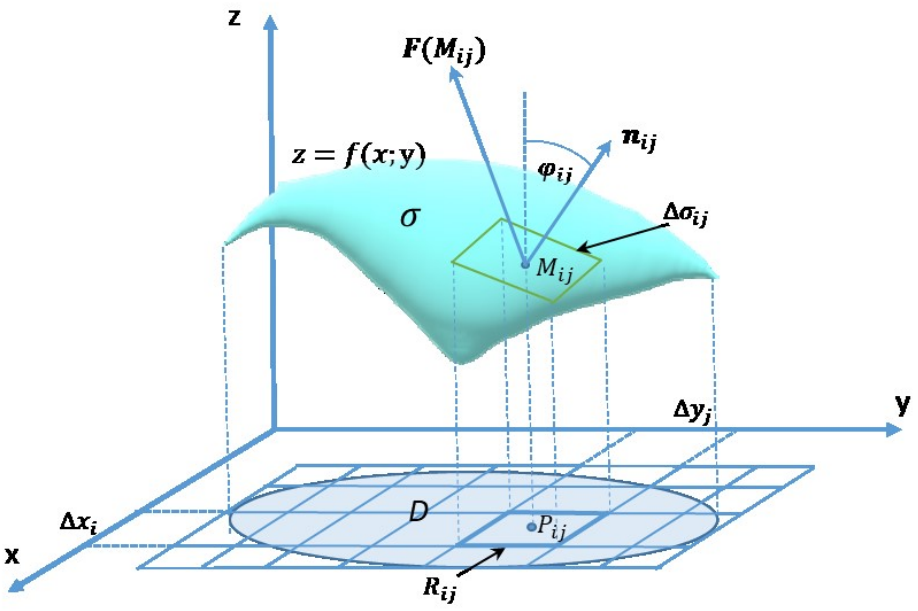
$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v|}$$

Integrales de Superficie

Queremos realizar la integral del Campo Vectorial $\boldsymbol{F}$ sobre un dominio superficial σ.

Sea $\boldsymbol{F}(x; y; z) = (F_1(x; y; z);\ F_2(x; y; z);\ F_3(x; y; z))$ un campo vectorial definido en un dominio espacial abierto $E \subseteq R^3$ que contiene la superficie σ: $z = f(x; y)$.

Queremos calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ a través de la superficie σ.



Para comprenderlo, supondremos que $\boldsymbol{F}$ es la velocidad de un fluido incompresible y queremos calcular la cantidad de fluido que atraviesa σ.

Si dividimos D en rectángulos R_{ij} de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, luego elegimos un punto P_{ij} interior a R_{ij}, cuyo punto en la superficie es $M_{ij} = (x_{ij};\ y_{ij}, z_{ij})$ en donde trazamos el plano tangente a la superficie:

$$z - z_{ij} = \frac{\delta f}{\delta x}(P_{ij})(x - x_{ij}) + \frac{\delta f}{\delta y}(P_{ij})(y - y_{ij})$$

Siendo $\Delta\sigma_{ij}$: parte del plano tangente en M_{ij} correspondiente a R_{ij} que es su proyección en el plano xy.

La cantidad de fluido que atraviesa $\Delta\sigma_{ij}$ es aproximadamente:

$$\boldsymbol{F}(M_{ij}).\boldsymbol{n}_{ij}.\Delta\sigma_{ij}$$

y la aproximación en toda la superficie:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{F}(M_{ij}).\boldsymbol{n}_{ij}.\Delta\sigma_{ij}$$

donde:

$$\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{(-\frac{\delta f}{\delta x}(P_{ij});\ -\frac{\delta f}{\delta y}(P_{ij});\ 1)}{\sqrt{(\frac{\delta f}{\delta x}(P_{ij}))^{\mathbf{2}} + (\frac{\delta f}{\delta y}(P_{ij}))^{\mathbf{2}} + 1}} = (\ cos\alpha_{ij}; cos\beta_{ij}; cos\varphi_{ij})$$

tomando a $M\acute{a}x\Delta\sigma$ como la mayor área entre los subrectángulos tangentes, nos queda:

$$Caudal(\sigma) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ (M\acute{a}x\Delta\sigma\to 0)}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{F}(M_{ij}).\boldsymbol{n}_{ij}.\Delta\sigma_{ij} = \iint_{\sigma} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iint_{\sigma} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{d\sigma} \quad (1)$$

Es la cantidad de fluido, su caudal que atraviesa por la superficie σ. Esta expresión es conceptual, para poder realizar el cálculo, es necesario relacionarlo con el dominio de la superficie. Al ver Cálculo de Áreas de Superficies en el Espacio, vimos que:

$$\Delta\sigma_{ij}.cos\varphi_{ij} = \Delta A_{ij} \ \ => \ \ \Delta\sigma_{ij} = \frac{\Delta A_{ij}}{cos\varphi_{ij}} = \sqrt{(\frac{\delta f}{\delta x}(P_{ij}))^{\mathbf{2}} + (\frac{\delta f}{\delta y}(P_{ij}))^{\mathbf{2}} + 1}\ .\Delta A_{ij} \quad (2)$$

φ_{ij}: es el ángulo director de $\boldsymbol{n}_{ij}$ respecto del eje z y es el mismo ángulo que hay entre las superficies $\Delta\sigma_{ij}$ y ΔA_{ij}.

Reemplazando (2) en (1) e incorporando la expresión de $\boldsymbol{n}$:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iint_D (F_1;\ F_2;\ F_3).\frac{(-\frac{\delta f}{\delta x};\ -\frac{\delta f}{\delta y};1)}{\sqrt{(\frac{\delta f}{\delta x})^2+(\frac{\delta f}{\delta y})^2+1}}\sqrt{(\frac{\delta f}{\delta x})^2+(\frac{\delta f}{\delta y})^2+1}\ .dA$$

$$\boxed{\iint_\sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{d\sigma} = \iint_D (-\frac{\delta f}{\delta x}\ F_1 - \frac{\delta f}{\delta y}\ F_2\ +\ F_3).dxdy}$$

Esta es la fórmula práctica para el cálculo del Flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la superficie σ, independientemente de la aplicación, cuando esta superficie viene dada por $z = f(x;y)$. El procedimiento consiste en valuar $\boldsymbol{F}$ en la superficie, es decir:

$$\begin{cases} F_1(x;y;z) = F_1\big(x;y;f(x;y)\big) \\ F_2(x;y;z) = F_2\big(x;y;f(x;y)\big) \\ F_3(x;y;z) = F_3\big(x;y;f(x;y)\big) \end{cases}$$

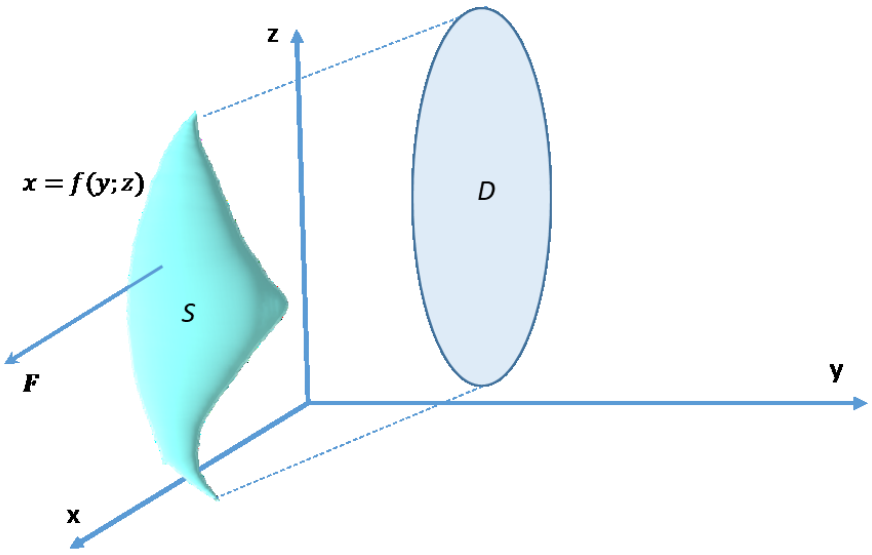
Es decir:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{d\sigma} = \iint_D (-\frac{\delta f}{\delta x}\ F_1\big(x;y;f(x;y)\big) - \frac{\delta f}{\delta y}\ F_2\big(x;y;f(x;y)\big)\ +\ F_3\big(x;y;f(x;y)\big)).dxdy$$

Luego se calcula la integral doble.

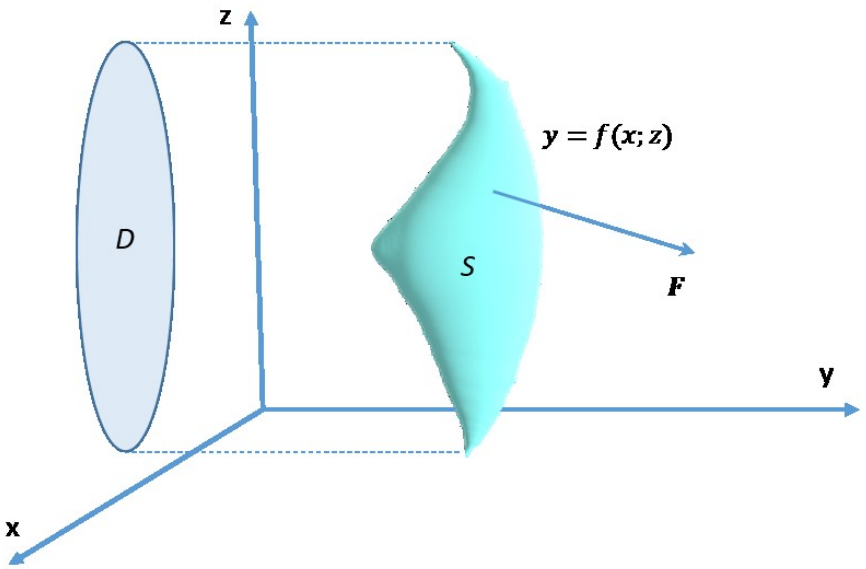
<u>Si la superficie viniera dada por la expresión $x = f(y;z)$</u>, la integral se ordenaría de la siguiente manera:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{d\sigma} = \iint_D (F_1(f(y;z);y;z) - \frac{\delta f}{\delta y}\ F_2(f(y;z);y;z)\ - \frac{\delta f}{\delta z}\ F_3(f(y;z);y;z)).dydz$$

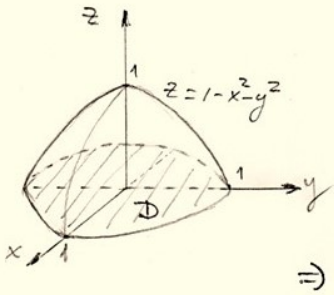


Si la superficie viniera dada por la expresión $y = f(x; z)$, la integral se expresaría de la siguiente manera:

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{d\sigma} = \iint_{D}(-\frac{\delta f}{\delta x}F_1(x; f(x; z); z) + F_2(x; f(x; z); z) - \frac{\delta f}{\delta z}\ F_3(x; f(x; z); z)).dxdz$$



Ejemplo: Calcular el flujo de $\bar{F} = (y; x; z)$ a través de la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$



$$\iint_{\sigma} \bar{F}.d\bar{\sigma} = \iint_{\sigma} \bar{F}.\bar{n}.d\sigma = \iint_{D}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}.F_1 - \frac{\partial z}{\partial y}F_2 + F_3\right)dxdy \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) = \iint_{D}(2x.y + 2yx + 1 - x^2 - y^2)dxdy =$$

$$= \iint_{D}(1 + 4xy - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + 4r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta - r^2)\,r\,dr =$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad |J| = r \qquad = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}(4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta - 1)\right]_0^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta - 1)\right] = \frac{\theta}{4}\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{\text{sen}^2\theta\Big|_0^{2\pi}}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\iint_{\sigma} \bar{F}.d\bar{s} = \frac{\pi}{2}}$$

Si la superficie σ viene dada en forma paramétrica:

$$\boldsymbol{r}(u;v) = (x(u;v);\ y(u;v);\ z(u;v))$$

La normal, como vimos es:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v|}$$

Y el $d\sigma$:

$$d\sigma = |\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v| dudv$$

Entonces:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u;v)).\frac{\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v|}\ |\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v| dudv$$

Simplificando:

$$\boxed{\iint_\sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{d\sigma} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u;v)).(\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v) dudv}$$

En esta integral debe hacerse un producto escalar entre los dos vectores para obtener la función escalar integrando, esos vectores son:

$$\boldsymbol{F}(x;y;z) = (F_1(x;y;z);\ F_2(x;y;z);\ F_3(x;y;z))$$

Este debe ser valuado en la superficie paramétrica:

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(u;v)\big) = \begin{cases} F_1(x;y;z) = F_1\big(x(u;v);y(u;v);z(u;v)\big) \\ F_2(x;y;z) = F_2\big(x(u;v);y(u;v);z(u;v)\big) \\ F_3(x;y;z) = F_3\big(x(u;v);y(u;v);z(u;v)\big) \end{cases}$$

El otro vector es:

$$\boldsymbol{r}_u \mathrm{x}\, \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{vmatrix}$$

Una vez hecho el producto escalar entre estos vectores se procederá a calcular la integral doble.

Ejemplo: Hallar el flujo de $\bar{F}(x,y,z) = (z;y;x)$ a través de la esfera de radio uno: $x^2+y^2+z^2=1$

Parametrizando la esfera: $\bar{F}(\varphi;\theta)$: $\begin{cases} x = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \cos\varphi \end{cases}$ $\rho = 1$

$$\iint_\sigma \bar{F}(\bar{r}(\varphi;\theta)).(\bar{r}_\varphi \times \bar{r}_\theta)\, d\varphi\, d\theta = ①$$

$$\bar{F}(\bar{r}(\varphi,\theta)) = (\cos\varphi;\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta;\ \operatorname{sen}\varphi\cos\theta)$$

$$\bar{r}_\varphi \times \bar{r}_\theta = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta\,\bar{i} - (-\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta)\bar{j} + (\cos^2\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\bar{r}_\varphi \times \bar{r}_\theta = (\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta;\ \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta;\ \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)$$

$$① = \iint_\sigma (\cos\varphi;\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta;\ \operatorname{sen}\varphi\cos\theta).(\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta;\ \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta;\ \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} (\cos\varphi.\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta.\cos\theta \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos\theta(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi} + \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right] d\theta + \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta \left(\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4}\Big|_0^{\pi}}_{=0}\right) =$$

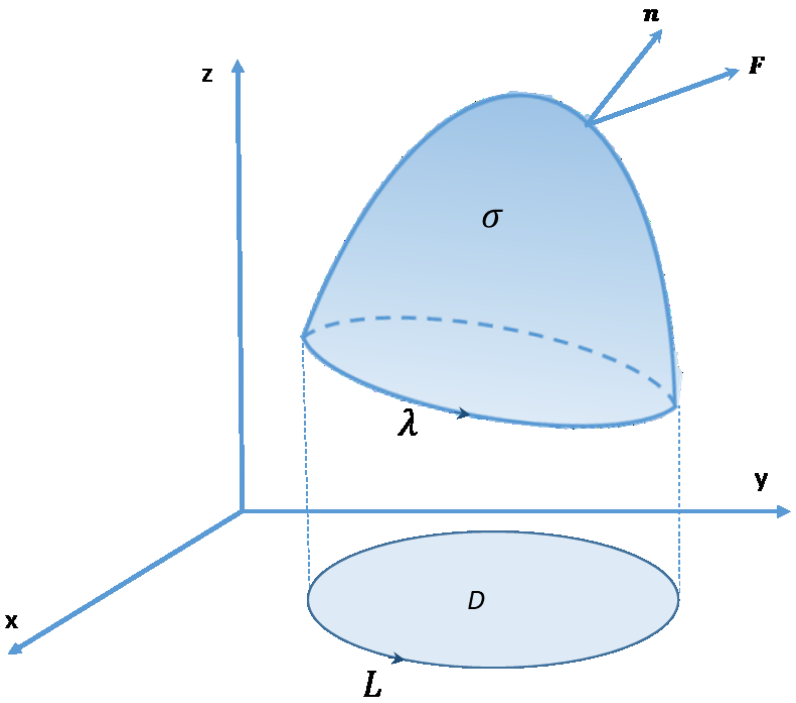
$$= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta + \underbrace{\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi}}_{=0} = \frac{4}{3}\left(\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} - \underbrace{\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\right)$$

$$\boxed{① = \frac{4}{3}\pi}$$

Teorema de Stokes

Sea $\boldsymbol{F}(x;y;z)$ un campo vectorial continuo, con derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a la superficie σ, orientable, cuyo borde λ es recorrido en sentido positivo, entonces:

$$\int_\lambda \boldsymbol{F}.\boldsymbol{ds} = \iint_\sigma \boldsymbol{\nabla x F}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iint_\sigma \boldsymbol{\nabla x F}.\boldsymbol{d\sigma}$$



Demostración:

Comenzamos con la integral $\int_\lambda \boldsymbol{F}.\boldsymbol{ds} = \int_\lambda F_1(x;y;z)dx + F_2(x;y;z)dy + F_3(x;y;z)dz$

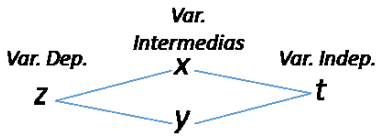
con ecuaciones paramétricas para λ:

$$\lambda: \begin{cases} x = g_1(t) \\ y = g_2(t) \\ z = f(g_1(t); g_2(t)) \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que λ es una curva que pertenece a la superficie $\sigma: z = f(x;y)$ y que es imagen de la curva L, contorno de la región D en el plano dominio xy:

$$L: \begin{cases} x = g_1(t) \\ y = g_2(t) \end{cases} \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

Teniendo en cuenta que:



Los diferenciales serán:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{dx}{dt}dt \\ dy = \dfrac{dy}{dt}dt \\ dz = (\dfrac{\delta z}{\delta x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\delta z}{\delta y}\dfrac{dy}{dt})dt \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_\lambda \boldsymbol{F}.\boldsymbol{ds} = \int_\lambda F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_L F_1 \frac{dx}{dt}dt + F_2\frac{dy}{dt}dt + F_3(\frac{\delta z}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{dy}{dt})dt$$

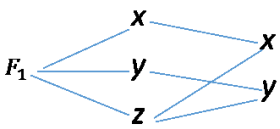
Reordenando el integrando:

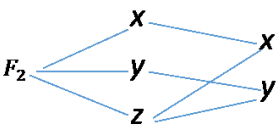
$$\int_L (F_1 + F_3\frac{\delta z}{\delta x})\frac{dx}{dt}dt + (F_2 + F_3\frac{\delta z}{\delta y})\frac{dy}{dt}dt \qquad (1)$$

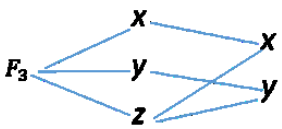
Es una integral curvilínea sobre la curva cerrada plana L, por lo cual, puede aplicarse el Teorema de Green, notemos que los paréntesis son funciones que están multiplicadas a los diferenciales $dx = \frac{dx}{dt}dt$ y $dy = \frac{dy}{dt}dt$, entonces:

$$(1) = \iint_D \left[\frac{\delta}{\delta x}\left(F_2 + F_3\frac{\delta z}{\delta y}\right) - \frac{\delta}{\delta y}(F_1 + F_3\frac{\delta z}{\delta x})\right]dxdy \quad (2)$$

La relación de dependencia en las componentes del campo:







$$\frac{\delta}{\delta x}\left(F_2 + F_3\frac{\delta z}{\delta y}\right) = \frac{\delta F_2}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta x} + \left(\frac{\delta F_3}{\delta x} + \frac{\delta F_3}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta x}\right)\frac{\delta z}{\delta y} + F_3\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} \quad (a)$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(F_1 + F_3\frac{\delta z}{\delta x}\right) = \frac{\delta F_1}{\delta y} + \frac{\delta F_1}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta y} + \left(\frac{\delta F_3}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta y}\right)\frac{\delta z}{\delta x} + F_3\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} \quad (b)$$

$$(a) - (b) = \frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y} + \frac{\delta F_2}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta x}\frac{\delta z}{\delta y} - \frac{\delta F_3}{\delta y}\frac{\delta z}{\delta x}$$

Sacando factor común y reordenando dentro de la integral:

$$(2) = \iint_D \left[-\frac{\delta z}{\delta x}\left(\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z}\right) - \frac{\delta z}{\delta y}\left(\frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x}\right) + (\frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y})\right]dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\left(\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z}\right); \left(\frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x}\right); \left(\frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y}\right) \right) . \left(-\frac{\delta z}{\delta x}; -\frac{\delta z}{\delta y}; 1 \right) dxdy =$$

$$= \iint_\sigma \boldsymbol{\nabla} \mathbf{x} \boldsymbol{F} . \boldsymbol{d\sigma}$$

Consideraciones:

1) Si la σ es una superficie plana paralela al plano xy, entonces, $\Delta z = 0$ y esto significa que:

$$\boldsymbol{d\sigma} = \left(-\frac{\delta z}{\delta x}; -\frac{\delta z}{\delta y}; 1 \right) dxdy = (0; 0; 1) dxdy$$

Luego el producto escalar dentro de la integral transforma el Teorema de Stokes en el Teorema de Green, por ello se dice que éste último teorema es un caso particular del T. de Stokes.

2) Si $\int_\lambda \boldsymbol{F} . \boldsymbol{ds} = \int_\lambda F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = 0 \ \ \forall \lambda$ cerrada, entonces, por T. de Stokes:

$\int_\lambda \boldsymbol{F} . \boldsymbol{ds} = \iint_\sigma \boldsymbol{\nabla} \mathbf{x} \boldsymbol{F} . \boldsymbol{d\sigma} = 0 \ \forall \lambda$ y $\forall \ \sigma$ según λ, implica que:

$$\boldsymbol{\nabla} \mathbf{x} \boldsymbol{F} = \left(\left(\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z}\right); \left(\frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x}\right); \left(\frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y}\right) \right) = (0; 0; 0) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Esto significa que la Integral de Línea es independiente del camino de integración de $\boldsymbol{F}$ entre dos puntos y **el cumplimiento de la expresión (3) es condición suficiente para afirmar la independencia del camino de integración** y, según vimos en "Integrales Curvilíneas", que el Campo Vectorial $\boldsymbol{F}$ **es un Campo Conservativo o Gradiente.**

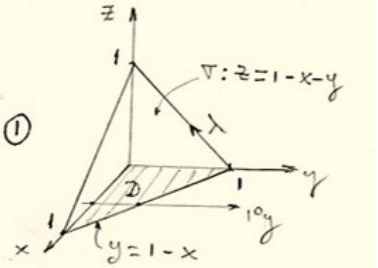
En este caso $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} u$, donde u es la **Función Potencial.**

3) De acuerdo a lo visto en la consideración 2); podemos afirmar que el rotor de un campo gradiente es igual a cero:

$$\boldsymbol{\nabla} \mathbf{x} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{x} (\boldsymbol{\nabla} u) = \mathbf{0} \quad (\text{vector nulo})$$

En este caso decimos que $\boldsymbol{F}$ **es un Campo Vectorial Irrotacional**, pues la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva cerrada λ es "0".
Si se tratara de un campo de fuerzas, decimos que $\boldsymbol{F}$ **es Irrotacional**, pues el trabajo de circulación del campo sobre la curva cerrada λ es nulo, lo que significa que el campo de fuerzas no intenta rotar a ningún elemento bajo su acción.

Ejemplo: Mediante T. de Stokes calcula $\int_\lambda \bar{F}.\,d\bar{s}$ donde λ está orientada en sentido contrario a las agujas del reloj cuando se ve desde arriba λ es el triángulo de vértices $(1;0;0)$; $(0;1;0)$ y $(0;0;1)$ y $\bar{F}=(x+y^2;\ y+z^2;\ z+x^2)$



$$\int_\lambda F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = \iint_\sigma \overline{\nabla \times F}.\,d\bar{\sigma} = ①$$

$$\overline{\nabla \times F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z};\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x};\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (-2z;\ -2x;\ -2y)$$

σ: $x+y+z=1 \Rightarrow z=1-x-y$

$$d\bar{\sigma} = \bar{n}.\,d\sigma = \frac{(1;1;1)}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}\,dxdy = (1;1;1)\,dxdy$$

$$\overline{\nabla \times F}.\,d\bar{\sigma} = (-2z;\ -2x;\ -2y)(1;1;1)\,dxdy = (-2x-2y-2z)\,dxdy$$

A z le he valido con la ecuación de la superficie σ:

$$\overline{\nabla \times F}.\,d\bar{\sigma} = (-2x-2y-2(1-x-y))\,dxdy = -2\,dxdy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ① = -2\iint_D dxdy = -2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = -2\int_0^1 (1-x)\,dx = -2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)_0^1 =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{① = -1}$$

Teorema de la Divergencia (o Teorema de Gauss)

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo con derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio que contiene a V sólido limitado por una superficie cerrada σ orientable, entonces:

$$\iint_\sigma \boldsymbol{F}.\boldsymbol{n}.\,d\sigma = \iiint_V div\boldsymbol{F}\,dV \quad (4)$$

Demostración:

Suponemos que V es proyectable sobre los tres planos coordenados, es decir, que es triplemente simple.

Desarrollando la ecuación (4):

$$\iint_\sigma (F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}).\boldsymbol{n}.d\sigma = \iiint_V (\frac{\delta F_1}{\delta x} + \frac{\delta F_2}{\delta y} + \frac{\delta F_3}{\delta z})dV$$

Quedará demostrado si se cumple:

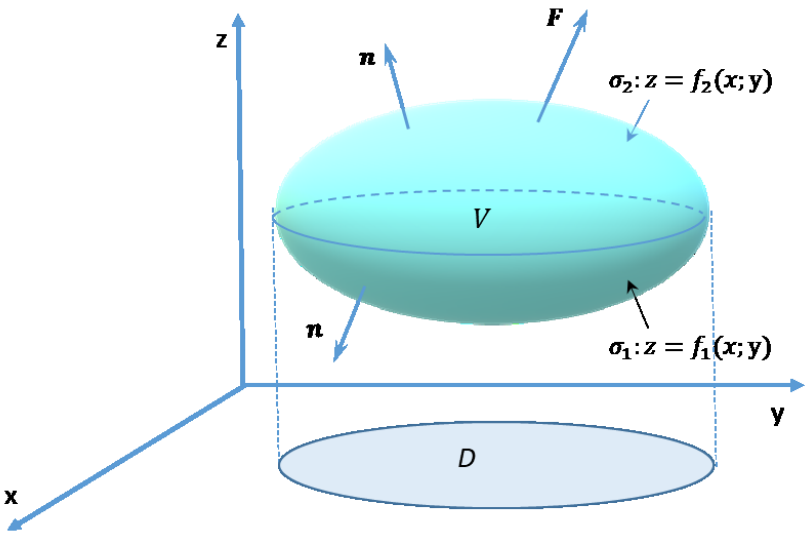
a) $\iint_\sigma F_1\boldsymbol{i}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iiint_V \frac{\delta F_1}{\delta x}dV$

b) $\iint_\sigma F_2\boldsymbol{j}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iiint_V \frac{\delta F_2}{\delta y}dV$

c) $\iint_\sigma F_3\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iiint_V \frac{\delta F_3}{\delta z}dV$

<u>Si V es de tipo 1</u>:

$V = \{(x;y;z) \,/\, (x;y) \in D \ \wedge \ f_1(x;y) \leq z \leq f_2(x;y)\}$ proyectable sobre el plano xy.



$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ con $\begin{cases}\sigma_1: z = f_1(x;y)\\ \sigma_2: z = f_2(x;y)\end{cases}$

Esto significa que vamos a demostrar el punto c):

$$\iint_\sigma F_3\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}.d\sigma = \iint_{\sigma_1}(0;0;F_3).\boldsymbol{n}.d\sigma + \iint_{\sigma_2}(0;0;F_3).\boldsymbol{n}.d\sigma =$$

$$= \iint_D (0;0;F_3).\left(\frac{\delta z}{\delta x};\frac{\delta z}{\delta y};-1\right).dxdy + \iint_D (0;0;F_3).\left(-\frac{\delta z}{\delta x};-\frac{\delta z}{\delta y};1\right).dxdy =$$

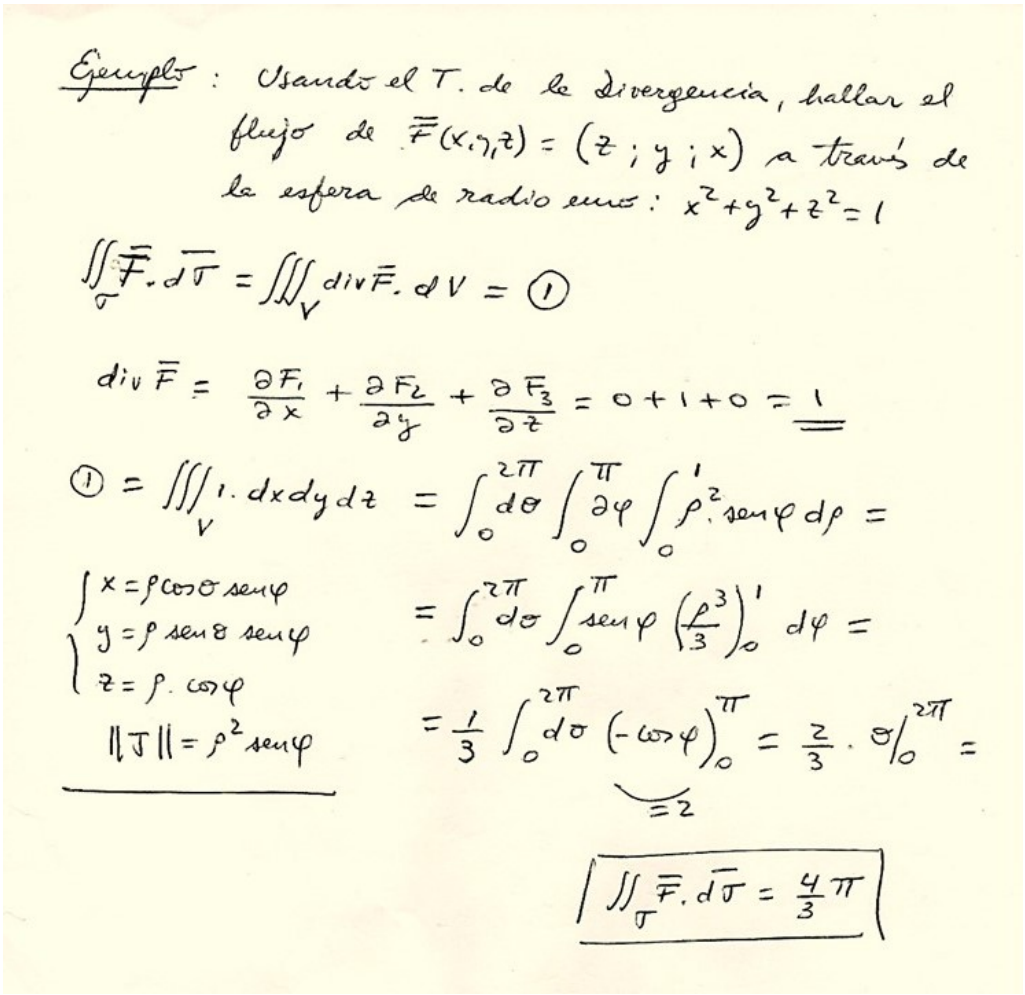
$$= \iint_D F_3(x;y;f_2(x;y))dxdy - \iint_D F_3(x;y;f_1(x;y))dxdy =$$

$$= \iint_D \left[F_3\big(x;y;f_2(x;y)\big) - F_3(x;y;f_1(x;y))\right]dxdy \quad (A)$$

Elaborando la integral triple del segundo miembro de c):

$$\iiint_V \frac{\delta F_3}{\delta z} dV = \iint_D dxdy \int_{f_1(x;y)}^{f_2(x;y)} \frac{\delta F_3}{\delta z} dz =$$

$$= \iint_D \left[F_3\big(x; y; f_2(x;y)\big) - F_3(x; y; f_1(x;y))\right] dxdy \quad (B)$$

$(A) = (B)$ por lo tanto, **queda demostrado c)**

Este mismo trabajo se realiza con los puntos a) y b) con V Tipo 2 y Tipo 3 respectivamente.