

TEOREMA DE GREEN

Este teorema relaciona una integral curvilínea sobre una curva cerrada simple recorrida en sentido positivo, con una integral doble sobre una región plana simple que encierra aquella curva.

Teorema de Green

Sea C una curva simple cerrada en el plano recorrida positivamente que encierra a una región simple D . Si $\mathbf{F}(x; y) = (F_1(x; y); F_2(x; y))$ tiene derivadas parciales continuas en D , entonces:

$$\int_C F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Demostración:

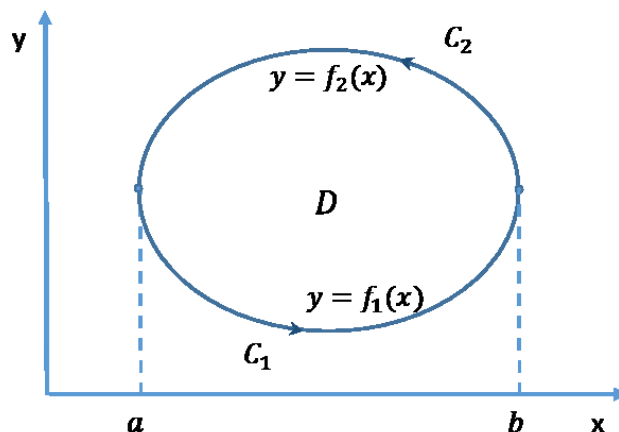
Lo haremos considerando que la región D es doblemente simple, esto significa que es una región simple Tipo 1 y Tipo 2 a la vez.

Este teorema quedará demostrado si probamos que:

$$1) \int_C F_1(x; y) dx = - \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy \quad \wedge \quad 2) \int_C F_2(x; y) dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy$$

1) Tomamos a D como región simple Tipo 1:

$$D = \{(x; y) / a \leq x \leq b \wedge f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$



Comenzando con el segundo miembro de 1):

$$\begin{aligned} \text{a) } - \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy = - \int_a^b [F_1(x; f_2(x)) - F_1(x; f_1(x))] dx = \\ &= \int_a^b [F_1(x; f_1(x)) - F_1(x; f_2(x))] dx \quad (a) \end{aligned}$$

b) Para el primer miembro de 1):

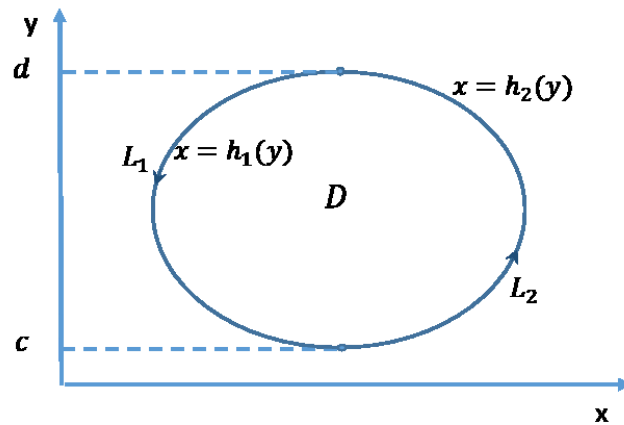
$$C = C_1 \cup C_2 \quad \wedge \quad C_1: \begin{cases} y = f_1(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad \wedge \quad -C_2: \begin{cases} y = f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C F_1(x; y) dx &= \int_{C_1} F_1(x; y) dx + \int_{-C_2} F_1(x; y) dx = \\ &= \int_{C_1} F_1(x; y) dx - \int_{C_2} F_1(x; y) dx = \int_a^b F_1(x; f_1(x)) dx - \int_a^b F_1(x; f_2(x)) dx = \\ &= \int_a^b [F_1(x; f_1(x)) - F_1(x; f_2(x))] dx \quad (b) \end{aligned}$$

$$(a) = (b) \Rightarrow \boxed{\int_C F_1(x; y) dx = - \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy}$$

2) Consideramos a D como región simple Tipo 2:

$$D = \{(x; y) / c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$



Teniendo en cuenta que:

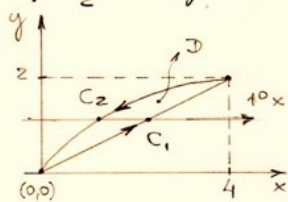
$$L = L_1 \cup L_2 \quad \wedge \quad -L_1: \begin{cases} x = h_1(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \wedge \quad L_2: \begin{cases} x = h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

procedemos en forma similar para obtener:

$$\boxed{\int_C F_2(x; y) dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy}$$

Queda demostrado el Teorema.

Ejemplo 6: Utilizando el T. de Green calcular $\oint_C 2xy dx + y^2 dy$ con C cerrada, formada por $y = \frac{x}{2}$ y $y = \sqrt{x}$.



$$\begin{aligned} \int_C F_1 dx + F_2 dy &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_D (0 - 2x) dx dy = - \int_0^2 dy \int_0^{4y^2} 2x dx = \\ &= - \int_0^2 dy x^2 \Big|_0^{4y^2} = - \int_0^2 dy (4y^2 - y^4) = \end{aligned}$$

$$= - \left(\frac{4}{3} y^3 - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = - \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = - \left(\frac{160 - 96}{15} \right) = - \frac{64}{15}$$

$$\boxed{I_C = -\frac{64}{15}}$$

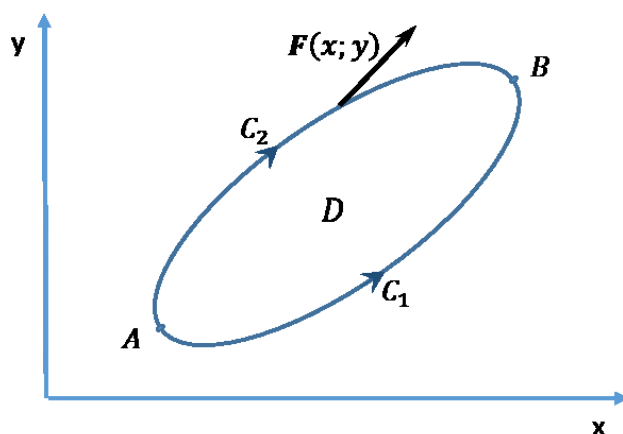
Independencia del Camino

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo con derivadas parciales también continuas en un dominio, entonces, la integral de línea de $\mathbf{F}$ es independiente del camino o trayectoria de integración si se cumple que: $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para todo par de curvas C_1 y C_2 con punto inicial A y punto final B .

Si $\mathbf{F}(x; y) = (F_1(x; y); F_2(x; y))$ con derivadas parciales continuas, cumple que:

$$\int_{C_1} F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy = \int_{C_2} F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy$$

$\forall C_1$ y $C_2 \in \text{Dom}(\mathbf{F})$ entre A y B , entonces, su integral de línea es independiente del camino de integración entre dichos puntos.



La siguiente expresión es equivalente:

$$\text{si } C = C_1 \cup -C_2 \Rightarrow \int_{C_1} F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy + \int_{-C_2} F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy =$$

$$= \int_{C_1} F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy - \int_{C_2} F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy =$$

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0} \quad (1)$$

Esto significa que si se cumple (1) $\forall C$ que pase por los puntos A y B , entonces, la Integral de Línea es independiente del camino de integración entre A y B .

Estos conceptos son válidos también para R^3 $\mathbf{F} : R^3 \rightarrow R^3$ con $C \subset R^3$.

Utilizando el Teorema de Green

Si: $\int_C F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \forall C$ que pase por los puntos A y B , significa que es también $\forall D$ según C , entonces, concluimos que:

$$\boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0}$$

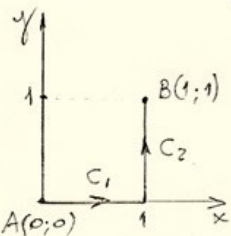
Esta es la condición necesaria y suficiente para que la Integral de Línea sea independiente de la trayectoria de integración entre A y B o su equivalente:

$$\boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}}$$

Ejemplo: Calcular $\int_C 2xy^3 dx + (3x^2y^2 - 2) dy$ siendo C la curva $y = x^2$ que va desde el punto $A(0,0)$ al $B(1,1)$.

$F_1 = 2xy^3 \quad \wedge \quad F_2 = 3x^2y^2 - 2 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = 6xy^2 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$

$\Rightarrow$ Esta expresión significa que I_C es independiente del camino de integración. Lo más fácil es ir de A a B por líneas paralelas a los ejes:



$C_1: \begin{cases} y=0 \rightarrow dy=0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad C_2: \begin{cases} x=1 \quad dx=0 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$I_C = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 0 + (0-2) \cdot 0 + \int_0^1 (3(1)^2 y^2 - 2) dy$$

$$= (y^3 - 2y)_0^1 = 1 - 2 = -1 \quad \boxed{I_C = -1}$$

Campo Vectorial Conservativo y Función Potencial

Si $\mathbf{F} = \nabla f$, a $\mathbf{F}$ se lo llama **Campo Vectorial Conservativo o Gradiente** y a la función escalar f se la llama **Función Potencial**.

- 1) Si $\mathbf{F}$ es un Campo Conservativo de componentes continuas y derivadas parciales también continuas en un dominio:

a) Si $R^2 \xrightarrow{\mathbf{F}} R^2$

$$\mathbf{F}(x; y) = F_1(x; y)\bar{i} + F_2(x; y)\bar{j} = \frac{\partial f}{\partial x}(x; y)\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x; y)\bar{j}$$

entonces:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Lo cual, por Teorema de Schwarz:

$$\boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}} \quad (2)$$

Significa que si $\mathbf{F}$ es Conservativo, se cumple (2) y la Integral de Línea de $\mathbf{F}$ es independiente del camino de integración entre dos puntos.

b) Si $R^3 \xrightarrow{\mathbf{F}} R^3$

$$\mathbf{F}(x; y; z) = F_1(x; y; z)\bar{i} + F_2(x; y; z)\bar{j} + F_3(x; y; z)\bar{k} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z)\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z)\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z)\bar{k}$$

entonces:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \wedge \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \quad \wedge \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

También aquí, usamos el Teorema de Schwarz.

Significa que si $\mathbf{F}$ es Conservativo, se cumplen las igualdades de (3) y la Integral de Línea de $\mathbf{F}$ es independiente del camino de integración entre dos puntos en el espacio. Esto puede demostrarse utilizando el **Teorema de Stokes** que se verá más adelante, en forma similar a lo que se hizo con el Teorema de Green para $R^2 \xrightarrow{\mathbf{F}} R^2$ más arriba.

- 2) La **Recíproca**: si se cumplen las expresiones (2) o (3) implica que $\mathbf{F}$ es un Campo Vectorial Conservativo o Gradiente, también se cumple para dominios simplemente conexos.

Las expresiones (3) se pueden verificar cuando la Matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$ es simétrica:

$$J_{\frac{F_1 \ F_2 \ F_3}{x \ y \ z}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x} & \frac{\delta F_1}{\delta y} & \frac{\delta F_1}{\delta z} \\ \frac{\delta F_2}{\delta x} & \frac{\delta F_2}{\delta y} & \frac{\delta F_2}{\delta z} \\ \frac{\delta F_3}{\delta x} & \frac{\delta F_3}{\delta y} & \frac{\delta F_3}{\delta z} \end{pmatrix}$$

Las derivadas de igual color a un lado y del otro de la diagonal deben ser iguales.

Ejemplo: Verificar si el Campo Vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (2xy, x^2+z^2, 2yz)$ es campo Gradiente.

$F_1 \quad F_2 \quad F_3$

$$\nabla_{x,y,z} \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{bmatrix} \Rightarrow \text{es una matriz simétrica}$$

$\Rightarrow \underline{\vec{F} \text{ es Conservativo}}$

Cálculo de la Función Potencial

Si $\vec{F}$ es un Campo Vectorial Gradiente, entonces:

- 1) Para $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^2 \wedge C \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_C F_1(x; y) dx + F_2(x; y) dy = \int_C \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) dy = \int_C df$$

Existen tres formas de calcular la Función Potencial:

- a) Partiendo de $F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$:

F_1 es un dato, entonces, integrando respecto de x :

$$f(x; y) = \int F_1(x; y) dx + \varphi(y) \quad (a)$$

al integrar respecto de x , la constante de integración φ puede depender de y .

Para relacionar esta última expresión con el otro dato que es F_2 , es necesario derivar la misma respecto de y .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = \frac{\partial [\int F_1(x; y) dx]}{\partial y} + \varphi'(y) = F_2(x; y)$$

Luego:

$$\varphi'(y) = F_2(x; y) - \frac{\partial [\int F_1(x; y) dx]}{\partial y}$$

Para obtener el valor de la constante $\varphi(y)$ integramos respecto de y y por último reemplazamos su valor en (a) con lo cual habremos terminado de calcular la Función Potencial f .

- b) Partiendo de $F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$:

Se puede partir del dato F_2 de tal manera que siguiendo pasos similares a los recién vistos podremos llegar a calcular la Función Potencial.

- c) Integrando F_1 y F_2 a la vez:

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f(x; y) = \int F_1(x; y) dx + \varphi(y)$$

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow f(x; y) = \int F_2(x; y) dy + \psi(x)$$

Luego se comparan ambas expresiones y se deduce el valor de las constantes, con lo cual queda calculada la Función Potencial f .

Ejemplo: Sabiendo que el Campo Vectorial $\vec{F}(x, y) = (\overset{F_1}{2xy^3}; \overset{F_2}{3x^2y^2 - 2})$ es un Campo Gradiente, hallar su función potencial.

$$\underline{F_1} dx + \underline{F_2} dy = \underline{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underline{\frac{\partial f}{\partial y}} dy = df \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= \int F_1 dx + \varphi(y) = \int 2xy^3 dx + \varphi(y) = x^2y^3 + \varphi(y) \\ f(x, y) &= \int F_2 dy + \psi(x) = \int (3x^2y^2 - 2) dy + \psi(x) = x^2y^3 - 2y + \psi(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Comparando: } \left. \begin{aligned} \varphi(y) &= -2y + C \\ \psi(x) &= C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x, y) = x^2y^3 - 2y + C}$$

es la función potencial
se verifica el resultado haciendo las derivadas.

2) Para $R^3 \quad \underline{F} \in R^3 \quad \wedge \quad C \subset R^3$

$$\begin{aligned} \int_C F_1(x; y; z) dx + F_2(x; y; z) dy + F_3(x; y; z) dz &= \\ = \int_C \frac{\partial f}{\partial x}(x; y; z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z) dz &= \int_C df \end{aligned}$$

Se integran a la vez los datos F_1, F_2 y F_3 :

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f(x; y; z) = \int F_1(x; y; z) dx + \varphi(y; z)$$

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow f(x; y; z) = \int F_2(x; y; z) dy + \psi(x; z)$$

$$F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow f(x; y; z) = \int F_3(x; y; z) dz + \phi(x; y)$$

Luego se comparan estas expresiones para obtener el valor de las constantes, con lo cual queda calculada la Función Potencial f .

Ejemplo: Sabiendo que $\vec{F}(x,y,z) = (zxy; x^2+z^2; zyz)$ es un Campo Vectorial Gradiente, hallar su función Potencial.

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1; F_2; F_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right) \text{ entonces:}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x,y,z) &= \int F_1 dx + \varphi(y,z) = \int zxy dx + \varphi(y,z) = x^2y + \varphi(y,z) \\ f(x,y,z) &= \int F_2 dy + \psi(x,z) = \int (x^2+z^2) dy + \psi(x,z) = x^2y + yz^2 + \psi(x,z) \\ f(x,y,z) &= \int F_3 dz + \phi(x,y) = \int zyz dz + \phi(x,y) = yz^2 + \phi(x,y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Comparando: } \left. \begin{aligned} \varphi(y,z) &= yz^2 + C \\ \psi(x,z) &= C \\ \phi(x,y) &= x^2y + C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + C}$$

Función Potencial.

Verificamos el resultado derivando f.