

INTEGRALES TRIPLES

Vamos a definir la Integral Triple en forma análoga a lo visto en integrales dobles.

Sea $f(x; y; z)$ una función definida en el paralelepípedo rectángulo B :

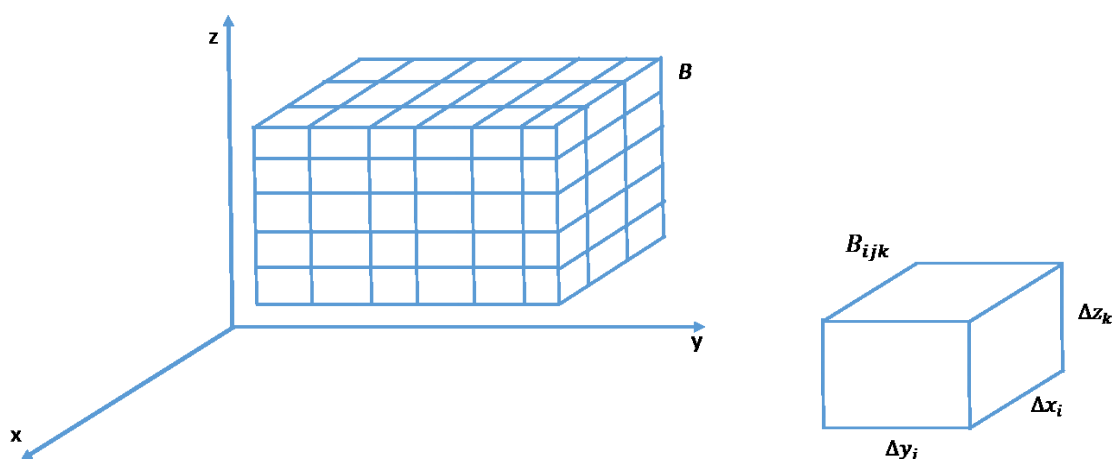
$$B = \{(x; y; z) / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge p \leq z \leq q\} = [a; b] \times [c; d] \times [p; q]$$

Hacemos una partición de cada intervalo:

$$[a; b]: x_0 = a; x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x_i; \dots; x_l = b$$

$$[c; d]: y_0 = c; y_1; y_2; \dots; y_{j-1}; y_j; \dots; y_m = d$$

$$[p; q]: z_0 = p; z_1; z_2; \dots; z_{k-1}; z_k; \dots; z_n = q$$



Donde: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \wedge \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \wedge \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

El volumen de B_{ijk} : $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

Elegimos un punto interior a B_{ijk} : $(x_{ijk}; y_{ijk}; z_{ijk})$

Formamos la triple suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}; y_{ijk}; z_{ijk}) \Delta V_{ijk}$$

Si Definimos a $\max \Delta V$ como el mayor volumen de los subparalelepípedos rectángulos de la división de B y tomamos límite para $\begin{cases} l \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \end{cases}$ de tal manera que $\max \Delta V \rightarrow 0$, entonces, se

Define como Integral Triple de $f(x; y; z)$ sobre B a:

$$\iiint_B f(x; y; z) dV = \lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty \\ (\max \Delta V \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}; y_{ijk}; z_{ijk}) \Delta V_{ijk} = \iiint_B f(x; y; z) dx dy dz$$

si el límite existe.

Cálculo

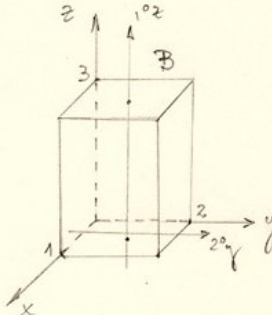
Al igual que integrales dobles, las integrales triples pueden resolverse mediante integrales sucesivas o iteradas:

$$\iiint_B f(x; y; z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_p^q f(x; y; z) dz \right) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x; y; z) dz$$

Esta expresión matemática significa que se integra primero respecto de z considerando a x y y constantes, luego de esta integración, nos queda una integral doble en el dominio $R = [a; b] \times [c; d]$ y en segundo lugar se integra respecto a y considerando a x constante. Por último se integra a x sobre el intervalo $[a; b]$.

Si es posible integrar en otros órdenes de integración, el resultado será el mismo. En integrales triples hay seis posibilidades de orden de integración posibles, debiéndose elegir aquel que se corresponda con el cálculo más sencillo.

Ejemplo: Calcular la integral $\iiint_B xy^2z^3 dx dy dz$ donde B es el recto limitado por: $x=1$; $y=2$; $z=3$ y los planos coordenados.

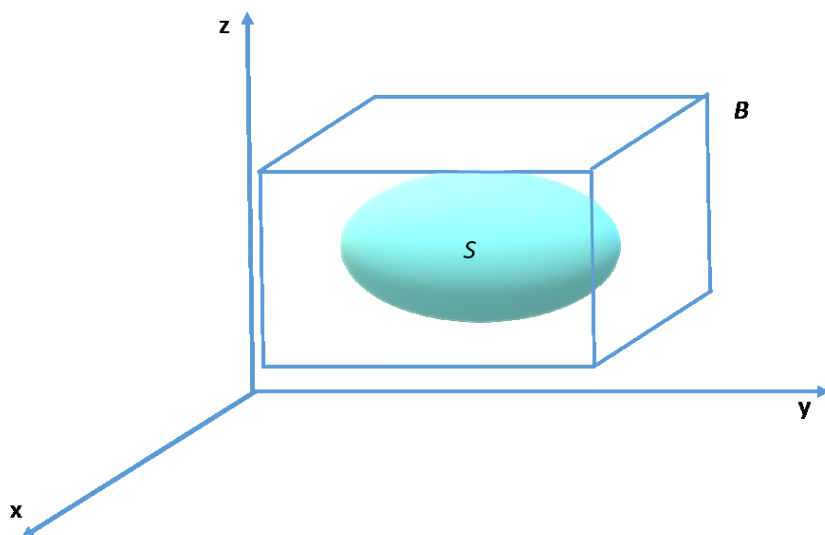

$$\begin{aligned} I_B &= \int_0^1 x dx \int_0^2 y^2 dy \int_0^3 z^3 dz = \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^2 \cdot \left. \frac{z^4}{4} \right|_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{81}{4} \\ &= 27 \end{aligned}$$

$\boxed{\iiint_B xy^2z^3 dx dy dz = 27}$

INTEGRALES TRIPLES SOBRE DOMINIOS GENERALES

Deseamos integrar $f(x; y; z)$ sobre un dominio espacial S , acotado, usando el mismo procedimiento usado para integrales dobles, es decir, encerramos a S con un paralelepípedo rectángulo B y definimos a:

$$F(x; y; z) = \begin{cases} f(x; y; z) & \text{si } (x; y; z) \text{ está en } S \\ 0 & \text{si } (x; y; z) \text{ está en } B \text{ pero no en } S \end{cases}$$



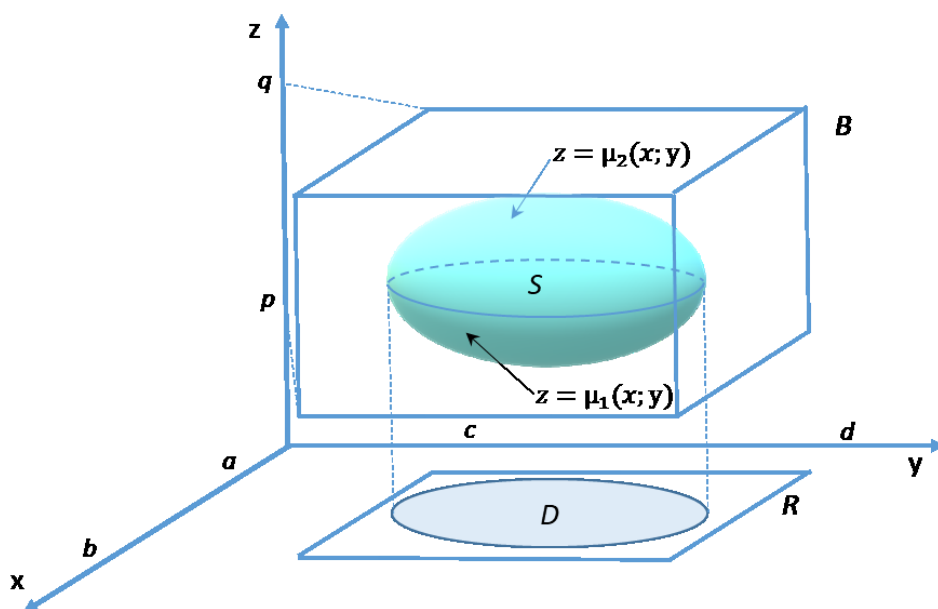
$$\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_B F(x; y; z) dx dy dz$$

Para el cálculo:

- a) Si S es región simple Tipo 1: $S = \{(x; y; z) / (x; y) \in D \wedge \mu_1(x; y) \leq z \leq \mu_2(x; y)\}$

$$\iiint_B F(x; y; z) dx dy dz = \iint_R dx dy \int_p^q F(x; y; z) dz = \iint_R dx dy \int_{\mu_1(x; y)}^{\mu_2(x; y)} F(x; y; z) dz$$

Esta última igualdad es debido a que $F(x; y; z) = 0$ cuando $z \leq \mu_1(x; y) \wedge z \geq \mu_2(x; y)$



$$\int_{\mu_1(x; y)}^{\mu_2(x; y)} F(x; y; z) dz = \int_{\mu_1(x; y)}^{\mu_2(x; y)} f(x; y; z) dz$$

pues $F(x; y; z) = f(x; y; z)$ cuando $\mu_1(x; y) \leq z \leq \mu_2(x; y)$.

Entonces:

$$\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\mu_1(x; y)}^{\mu_2(x; y)} f(x; y; z) dz$$

Luego se prosigue integrando sobre D , a esto ya lo sabemos hacer:

Si D es de Tipo 1: $D = \{(x; y) / a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

Entonces:

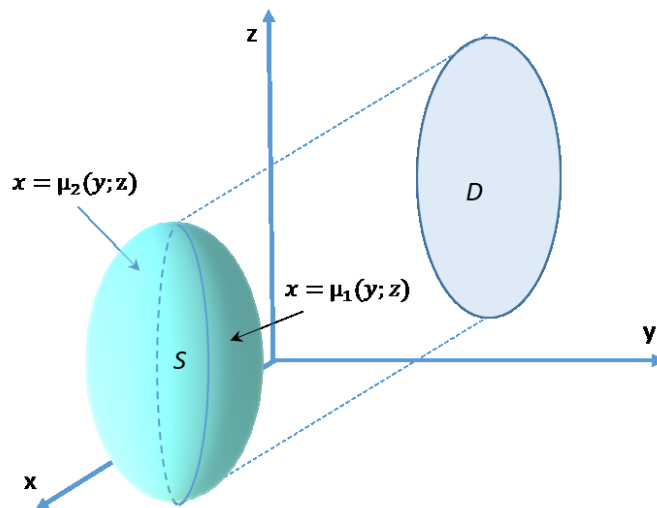
$$\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{\mu_1(x; y)}^{\mu_2(x; y)} f(x; y; z) dz$$

Si D es de Tipo 2: $D = \{(x; y) / c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

Entonces:

$$\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \int_{\mu_1(x; y)}^{\mu_2(x; y)} f(x; y; z) dz$$

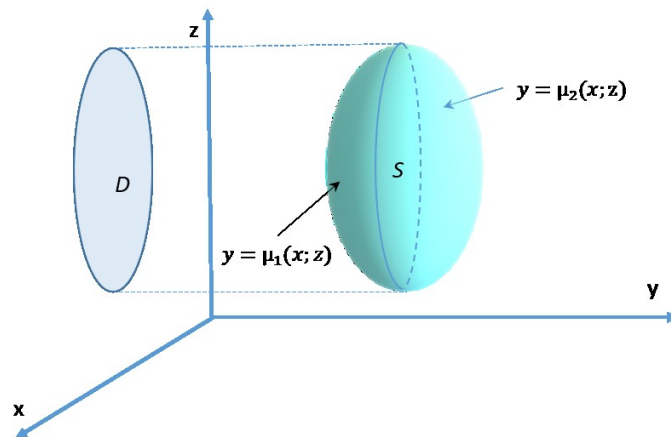
b) Si S es región simple Tipo 2: $S = \{(x; y; z) / (y; z) \in D \wedge \mu_1(y; z) \leq x \leq \mu_2(y; z)\}$



$$\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz = \iint_D dy dz \int_{\mu_1(y; z)}^{\mu_2(y; z)} f(x; y; z) dx$$

Luego se integra sobre D según se trate de una región simple Tipo 1 o Tipo 2 en el plano "yz".

- c) Si S es región simple Tipo 3: $S = \{(x; y; z) / (x; z) \in D \wedge \mu_1(x; z) \leq y \leq \mu_2(x; z)\}$



$$\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz = \iint_D dx dz \int_{\mu_1(x; z)}^{\mu_2(x; z)} f(x; y; z) dy$$

Luego se integra sobre D según se trate de una región simple Tipo 1 o Tipo 2 en el plano " xz ".

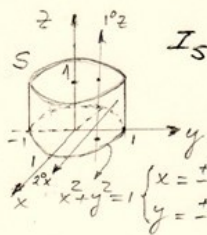
Propiedades de las Integrales Triples

Sean $f(x; y; z)$ y $g(x; y; z)$ integrables sobre S , entonces:

- 1) $\iiint_S (f(x; y; z) + g(x; y; z)) dx dy dz = \iiint_S f(x; y; z) dx dy dz + \iiint_S g(x; y; z) dx dy dz$
- 2) $\iiint_S c \cdot f(x; y; z) dx dy dz = c \cdot \iiint_S f(x; y; z) dx dy dz$ con $c = cte$.
- 3) $\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{S_1} f(x; y; z) dx dy dz + \iiint_{S_2} f(x; y; z) dx dy dz$
Siendo $S = S_1 \cup S_2$ unión de regiones simples.
- 4) Si $f(x; y; z) \geq g(x; y; z) \forall (x; y; z) \in S$, entonces:
 $\iiint_S f(x; y; z) dx dy dz \geq \iiint_S g(x; y; z) dx dy dz$.
- 5) Si $f(x; y; z) = 1 \forall (x; y; z) \in S$, entonces:
 $\iiint_S 1 \cdot dx dy dz = \iiint_S dx dy dz = V(S)$ Equivale al valor del Volumen del recinto S .
- 6) Si $m \leq f(x; y; z) \leq M \forall (x; y; z) \in S$, entonces:
 $m \cdot V(S) \leq \iiint_S f(x; y; z) dx dy dz \leq M \cdot V(S)$

Ejemplo: Calcular $\iiint_S z \cdot \sqrt{1-y^2} \, dx \, dy \, dz$ siendo S

el sólido encerrado por: $x^2 + y^2 = 1$; $z=0$ y $z=1$



$$I_S = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^1 z \sqrt{1-y^2} \, dz = \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \, dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \, dy \cdot x \bigg|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} =$$

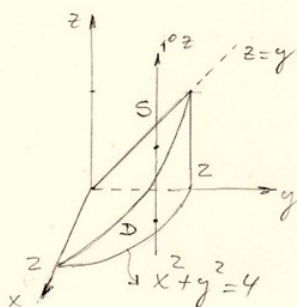
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \cdot z \sqrt{1-y^2} \, dy = \int_{-1}^1 (1-y^2) \, dy = \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_{-1}^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\iiint_S z \sqrt{1-y^2} \, dx \, dy \, dz = \frac{4}{3}}$$

Cálculo de Volumen: utilizamos la Propiedad 5)

Ejemplo: Calcular mediante integral triple el volumen del cuerpo limitado por las superficies: $x^2 + y^2 = 4$; $z=0$; $z=y$ y $x=0$. (primer octante)



S es Tipo 1: $S = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, 0 \leq z \leq y\}$

$$V(S) = \iiint_S dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_0^y dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^y dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy = \int_0^2 dx \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (4-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^2 = \frac{1}{2} \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{V(S) = \frac{8}{3}}$$