DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

DIFERENCIAL TOTAL EN CAMPOS ESCALARES

En Análisis Matemático I se especificaba que una función derivable en un punto es equivalente a decir que es diferenciable en dicho punto, pues:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si la derivada existe, es porque el límite existe, por lo cual la diferencia entre el cociente incremental y la derivada cuando $\Delta x \to 0$, es un valor pequeño que llamamos ξ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x_0) + \xi$$

Por ello:

$$\boxed{\Delta y = \frac{df}{dx}(x_0)\Delta x + \xi \Delta x}$$

con $\xi \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$

Cuando el incremento de una función puede expresarse de este modo, definimos que la función es diferenciable en x_0 y decimos que el primer sumando del segundo miembro es la parte principal del incremento y lo llamamos **diferencial de la función** en el punto:

$$dy = \frac{df}{dx}(x_0)dx$$

De manera similar podemos definir a $z = f(x; y)$ como función diferenciable en un punto.

Definición

Una función $z=f(x, y)$ de $R^2 \xrightarrow{f} R$ es diferenciable en un punto $(x_0; y_0)$ si se cumple que:

$$\boxed{\Delta z = f'_x(x_0;\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0;\ y_0)\Delta y + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y} \quad con \begin{cases} \xi_1 \to 0 \ \ si\ \Delta x \to 0 \\ \xi_2 \to 0 \ \ si\ \Delta y \to 0 \end{cases}$$

Como esta definición no es práctica para establecer la diferenciabilidad de una función, el siguiente teorema nos da la herramienta práctica para establecer si una función es diferenciable en un punto:

Teorema de la Diferenciabilidad de una función

Una función $z=f(x, y)$ de $R^2 \xrightarrow{f} R$ es diferenciable en un punto $(x_0; y_0)$ si sus derivadas f'_x y f'_y existen y son continuas en un entorno de dicho punto.

Demostración:

Partimos del incremento de la función a partir del punto $(x_0; y_0)$:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$$

Ahora sumo y resto el valor *f(x_0; y_0+Δy)*:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0 + \Delta y) + f(x_0;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0;\ y_0)$$

Como vemos la primera resta es función solo de $x=x_0 + \Delta x$ pues la segunda componente es claro que permanece constante, y la segunda resta es función solo de $y=y_0 + \Delta y$.

En ambos casos podemos utilizar el TVM, en el primero, usando el intervalo $(x_0; x_0 + \Delta x)$ y en el segundo, utilizando el intervalo $(y_0; y_0 + \Delta y)$, entonces:

$$\Delta z = f_x(c_1;\ y_0 + \Delta y).\Delta x + f_y(x_0;\ d_1)\Delta y \qquad \text{con} \begin{cases} x_0 < c_1 < x_0 + \Delta x \\ y_0 < d_1 < y_0 + \Delta y \end{cases} \quad (1)$$

Puesto que las derivadas parciales son continuas en el entorno del *(x_0; y_0)* puedo hacer los siguientes límites:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_x(c_1;\ y_0 + \Delta y) = f_x(x_0;\ y_0)$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_y(x_0;\ d_1) = f_y(x_0;\ y_0)$$

Dado que los límites existen, cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ las siguientes expresiones resultan equivalentes:

$$f_x(c_1;\ y_0 + \Delta y) = f_x(x_0;\ y_0) + \xi_1$$

$$f_y(x_0;\ d_1) = f_y(x_0;\ y_0) + \xi_2$$

Usamos los valores del segundo miembro para reemplazar en (1):

$$\Delta z = [f_x(x_0;\ y_0) + \xi_1].\Delta x + [f_y(x_0;\ y_0) + \xi_2].\Delta y$$

Reordenando:

$$\Delta z = f'_x(x_0;\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0;\ y_0)\Delta y + \xi_1\Delta x + \xi_2\Delta y \quad con \begin{cases} \xi_1 \to 0 \ \ si\ \Delta x \to 0 \\ \xi_2 \to 0 \ \ si\ \Delta y \to 0 \end{cases} \quad (2)$$

Esta es la definición de función diferenciable en el punto *(x_0; y_0)*. Con ello quedó demostrado el teorema.

Conclusiones:

Con solo saber que *z=f(x, y)* tiene derivadas parciales continuas en el entorno de un punto, es suficiente para saber que la función es diferenciable en ese punto.

La suma de los dos primeros términos de (2), se denomina parte principal del incremento de la función y recibe el nombre de **Diferencial Total de *f(x; y)* en *(x_0; y_0)*** y se lo expresa de la siguiente manera:

$$\boxed{dz(x; y) = df(x; y) = f'_x(x_0;\ y_0)dx + f'_y(x_0;\ y_0)dy}$$

El Diferencial Total es una función lineal que depende de *x* y de *y* pues:

$\begin{cases} dx = \Delta x = x - x_0 \\ dy = \Delta y = y - y_0 \end{cases}$ y aproxima linealmente a *z=f(x, y)* en un entorno del *(x_0; y_0)*.

Cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, o en general cuando son pequeños, podemos afirmar que $\underline{\Delta z \cong dz}$.

Esa función lineal puede expresarse así:

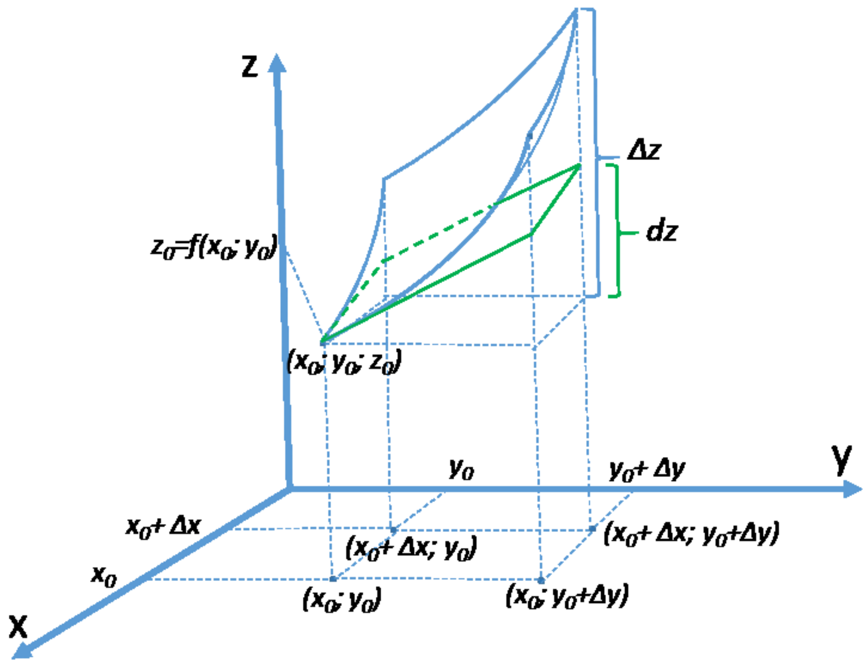
$$dz(x;y) = z - z_0 = f'_x(x_0;\ y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;\ y_0)(y - y_0)$$

Es decir, es la ecuación de un plano que pasa por $(x_0; y_0; z_0)$ donde $z_0 = f(x_0; y_0)$.

El $dz(x;y) = z - z_0$ es el incremento del plano cuando se producen los incrementos $\Delta x\ y\ \Delta y$.

Luego demostraremos que <u>este plano es tangente</u> a la gráfica de la función *z=f(x, y)* en ese punto.

Su **Interpretación Gráfica**:



Hemos dibujado solo una porción de la superficie *z=f(x, y)*, la correspondiente al rectángulo del dominio definido por x_0, $x_0+\Delta x$, y_0, $y_0+\Delta y$, lo mismo hicimos para el plano.

Para poder visualizar los conceptos hemos tomado incrementos de *x* y de *y* bastante grandes, por lo cual el *dz* es bastante distinto que el *Δz*, pero si observamos en las cercanías del punto $(x_0; y_0; z_0)$ el plano aproxima muy bien a la superficie *z=f(x, y)*.

El diferencial de una función en un punto es una expresión de validez local, es decir que, si cambiamos el punto del dominio, cambian el valor de las derivadas y los incrementos parten también de otro punto, por lo cual, si bien seguirá siendo una función lineal, la expresión del diferencial cambiará.

Estos conceptos se pueden trasladar a funciones de mayor número de variables independientes, por ejemplo, si quisiéramos calcular el diferencial de una función de tres variables independientes como *w= f(x; y; z)* en el entorno de un punto $(x_0; y_0; z_0)$ de su dominio, procederíamos de manera similar y su expresión sería:

$$dw(x;y;z) = f'_x(x_0;\ y_0;z_0)dx + f'_y(x_0;\ y_0;z_0)dy + f'_z(x_0;\ y_0;z_0)dz$$

$$con\begin{cases} dx = \Delta x = x - x_0 \\ dy = \Delta y = y - y_0 \\ dz = \Delta z = z - z_0 \end{cases} \qquad \text{y el } dw(x;y;z) = w - w_0 \qquad \text{con } w_0 = f(x_0;y_0;z_0)$$

De igual manera haríamos con funciones de mayor cantidad de variables.

Ejemplo: Hallar el diferencial total de $f(x;y;z) = x.y^2.z^4$ en el punto $(x_0;y_0;z_0) = (2;1;1)$. Comparar el incremento de la función con el diferencial cuando nos movemos $(\Delta x; \Delta y; \Delta z) = (0{,}1; -0{,}05; 0{,}01)$ a partir del punto.

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz \quad \begin{cases} f'_x = y^2z^4 \;;\; f'_x(2;1;1) = 1 \\ f'_y = 2xyz^4 \;;\; f'_y(2;1;1) = 4 \\ f'_z = 4xy^2z^3 \;;\; f'_z(2;1;1) = 8 \end{cases}$$

$$\boxed{df = (x-2) + 4(y-1) + 8(z-1)} \quad \begin{cases} dx = x - x_0 = x - 2 \\ dy = y - y_0 = y - 1 \\ dz = z - z_0 = z - 1 \end{cases}$$

Comparación:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x = 2 + 0{,}1 = 2{,}1 \\ y &= y_0 + \Delta y = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \\ z &= z_0 + \Delta z = 1 + 0{,}01 = 1{,}01 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} df &= (2{,}1-2) + 4(0{,}95-1) + 8(1{,}01-1) = \\ &= 0{,}1 - 4.0{,}05 + 8.0{,}01 = \\ &\boxed{df = -0{,}02} \end{aligned}$$

(aproximación lineal)

$$\Delta f = f(x,y,z) - f(x_0,y_0;z_0) = 2{,}1.(0{,}95)^2.(1{,}01)^4 - 2.1^2.1^4 =$$

$$= 2{,}1.0{,}9025.1{,}0406 - 2 =$$

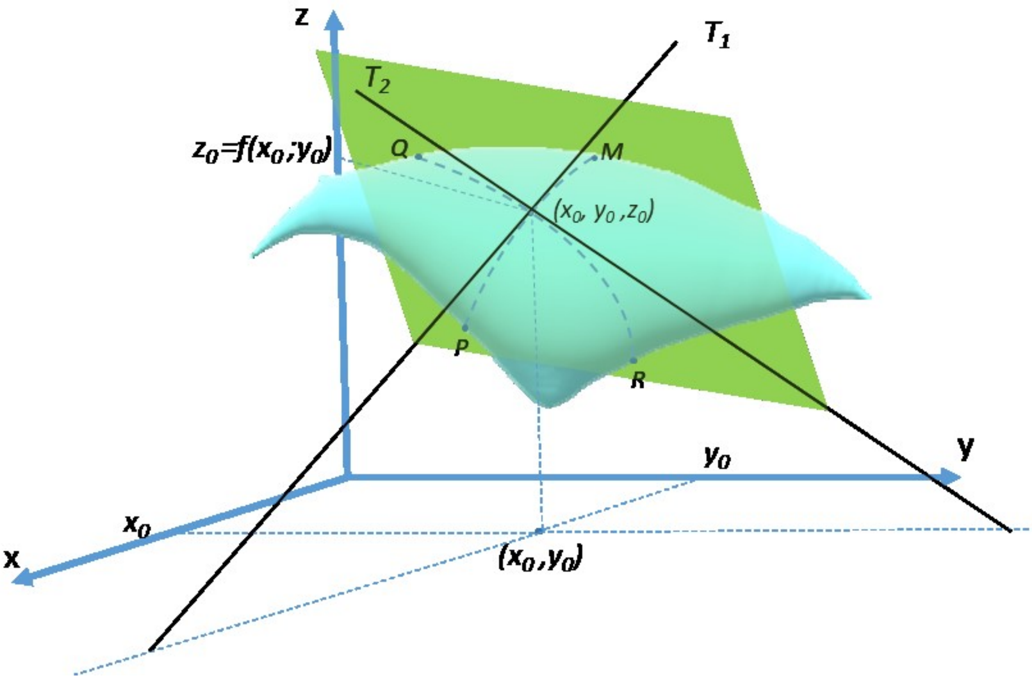
$$\boxed{\Delta f = -0{,}02779}$$

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE EN UN PUNTO

Cualquier plano que pase por un punto $(x_0; y_0; z_0)$ tiene la siguiente expresión en forma explícita:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \qquad (1)$$

Si la expresión (1) fuera la de un plano tangente a una superficie $z=f(x, y)$ en el punto de su gráfica $(x_0; y_0; z_0)$, éste debería contener a las rectas tangentes T_1 y T_2 del siguiente gráfico:



Cuando el plano $y = y_0$ corta a la superficie lo hace formando la curva $\widehat{PM}$, es decir, que dicha curva está formada por los puntos cuyas componentes del dominio pertenecen a la recta $y = y_0$ pasando por $(x_0; y_0)$ (y x variando) y cuya tercer componente es la imagen de dichos elementos del dominio, es decir, formada por los puntos $(x; y_0; f(x; y_0))$. En esta situación la ecuación (1) queda:

$$z - z_0 = a(x - x_0)$$

Esta es la ecuación de una recta que pasa por $(x_0; y_0; z_0)$ con $y = y_0$.

Como T_1 es la tangente a dicha curva en $(x_0; y_0; z_0)$ cuando varía solo x en el dominio, por definición de derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x debe ser: $a = f'_x(x_0;\ y_0)$.

De manera similar, cuando el plano $x = x_0$ corta a la superficie lo hace formando la curva $\widehat{QR}$, es decir, que dicha curva está formada por los puntos cuyas componentes del dominio pertenecen a la recta $x = x_0$ pasando por $(x_0; y_0)$ (e y variando) y cuya tercer componente es la imagen de dichos elementos del dominio, es decir, formada por los puntos $(x_0; y; f(x_0; y))$. En esta situación la ecuación (1) queda:

$$z - z_0 = b(y - y_0)$$

Esta es la ecuación de una recta que pasa por $(x_0; y_0; z_0)$ con $x = x_0$.

Como T_2 es la tangente a dicha curva cuando varía solo y en el dominio, por definición de derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de y debe ser: $b = f'_y(x_0;\ y_0)$.

Por lo tanto, **la ecuación del plano tangente** a $z=f(x, y)$ en el punto de su gráfica $(x_0; y_0; z_0)$ tiene la ecuación:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0;\ y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;\ y_0)(y - y_0)}$$

Recta Normal a la superficie

La recta normal a la superficie $z=f(x, y)$ en el punto $(x_0; y_0; z_0)$, también será normal al plano tangente que pasa por dicho punto. Sabemos que los coeficientes de las variables del plano es un vector normal al mismo, suponiendo que todas las variables estén en el mismo miembro de la ecuación, es decir, que esté expresado el plano en forma implícita. Haciendo un simple pasaje de términos al primer miembro en la ecuación anterior tendremos los coeficientes de ese vector normal, por lo tanto, el mismo es:

$$\boldsymbol{N} = (-f'_x(x_0;\ y_0); -f'_y(x_0;\ y_0); 1)$$

Entonces, la ecuación vectorial de la Recta Normal a la superficie en $(x_0; y_0; z_0)$ es:

$$\boxed{(x; y; z) = (x_0;\ y_0; z_0) + t.\,(-f'_x(x_0;\ y_0); -f'_y(x_0;\ y_0); 1)}$$

Donde t es el parámetro.

Ejemplo: Hallar el diferencial de $z = 4 - x^2 - y^2$ en el $(x_0; y_0) = (1; 1)$. Luego hallar el plano tangente y recta normal a la superficie en el punto $(x_0; y_0; z_0) = (1; 1; z(1;1))$

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy \qquad \begin{cases} z'_x = -2x\,; & z'_x(1;1) = -2 \\ z'_y = -2y\,; & z'_y(1;1) = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{dz = -2(x-1) - 2(y-1)} \qquad \begin{cases} dx = (x - x_0) = (x-1) \\ dy = (y - y_0) = (y-1) \end{cases}$$

$$z_0 = z(1;1) = \underline{\underline{2}} \Rightarrow z - 2 = -2(x-1) - 2(y-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow z - 2 = -2x + 2 - 2y + 2 \Rightarrow \boxed{2x + 2y + z = 6}$$

Ec. plano tangente en $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$ En forma Implícita

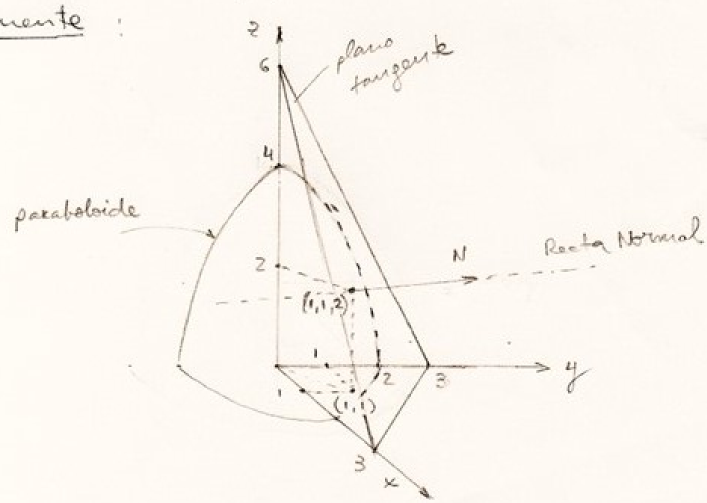
Vector Normal: $\bar{N} = (2; 2; 1)$

está formado por los coeficientes de las variables en la Ecuación del plano.

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0; y_0; z_0) + t\,\bar{N} = (1; 1; 2) + t\,(2; 2; 1)}$$

Ecuación Vectorial de la Recta Normal a la superficie en $(x_0; y_0; z_0) = (1; 1; 2)$

gráficamente:



DIFERENCIAL EN FUNCIONES VECTORIALES ($R \xrightarrow{F} R^m$): (OPCIONAL DE ESTUDIO)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ F_m(t) \end{pmatrix}$$

Decimos que ***F(t)*** es una función diferenciable en $t = t_0$, si cada una de sus funciones componentes es diferenciable en $t = t_0$. Por ello podemos escribir:

$$d\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} dF_1(t) \\ dF_2(t) \\ .. \\ .. \\ dF_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_1(t_0).\,dt \\ F'_2(t_0).\,dt \\ .. \\ .. \\ F'_m(t_0).\,dt \end{pmatrix} \quad => \quad d\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} F'_1(t_0) \\ F'_2(t_0) \\ .. \\ .. \\ F'_m(t_0) \end{pmatrix}.\,dt$$

Donde:

$dt = \Delta t = t - t_0$ y cuando $t \to t_0$, o en general, cuando Δt es pequeño, $\Delta \boldsymbol{F} \cong d\boldsymbol{F}$

Como vemos, es un diferencial vectorial en el punto pues su derivada es vectorial.

Por ejemplo, si ***F****(t) = (x(t); y(t); z(t)) = (F₁(t); F₂(t); F₃(t))*, función vectorial de $R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^3$, su diferencial en un $t = t_0$ es:

$$d\boldsymbol{F}(t) = (dF_1(t); dF_2(t); dF_3(t)) = (F'_1(t_0);\ F'_2(t_0); F'_3(t_0)).\,dt$$

Esto es una recta tangente a la curva ***F****(t)* del espacio en el punto:

$$\boldsymbol{F}(t_0) = \big(F_1(t_0); F_2(t_0); F_3(t_0)\big) = (x_0;\ y_0; z_0)$$

Y el ***dF*** es el incremento (vectorial) de esa recta cuando se produce un incremento Δt de la variable independiente a partir de $t = t_0$:

$$d\boldsymbol{F}(t) = (x; y; z) - (x_0;\ y_0; z_0) = \big(F'_1(t_0);\ F'_2(t_0); F'_3(t_0)\big).\,(t - t_0)$$

Esta sería la ecuación de la recta y mientras t esté en un entorno de t_0 el diferencial aproximará muy bien al incremento de la función ($\Delta \boldsymbol{F}$).

Ejemplo: Hallar el diferencial de la función vectorial $\bar{F}(t) = (\cos t\, ;\, \operatorname{sen} t\, ;\, t)$ en $t_0 = \frac{\pi}{2}$

$d\bar{F} = \bar{F}'(t) . dt \rightarrow F'(t) = (-\operatorname{sen} t\, ;\, \cos t\, ;\, 1)$

$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1\, ;\, 0\, ;\, 1)\ ;\ dt = t - \frac{\pi}{2}$

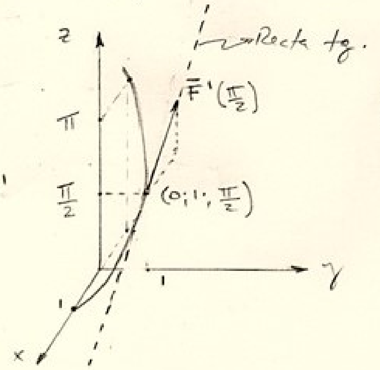
$\Rightarrow \boxed{d\bar{F} = (-1;0;1)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$ Es una función lineal

$d\bar{F} = (x, y, z) - (x_0; y_0; z_0)$ (1^{er} miembro) (a)

$\bar{F}(t_0) = (x_0; y_0; z_0) \rightarrow \bar{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0\, ;\, 1\, ;\, \frac{\pi}{2}\right) = (x_0; y_0; z_0)$ (b)

Reemplazando (a) y (b) en el $d\bar{F}$:

$(x, y, z) = \left(0\, ;\, 1\, ;\, \frac{\pi}{2}\right) + (-1;0;1)\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ Ecuación de la recta tangente al gráfico en $\left(0\, ;\, 1\, ;\, \frac{\pi}{2}\right)$



($\bar{F}$ realiza una trayectoria helicoidal.)

DIFERENCIAL TOTAL EN CAMPOS VECTORIALES ($R^n \underset{\rightarrow}{\boldsymbol{F}} R^m$): (OPCIONAL DE ESTUDIO)

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ .. \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ .. \\ .. \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Al igual que en funciones vectoriales, el campo vectorial ***F*** será diferenciable en un punto $\boldsymbol{x_0} = (x_{1_0}; x_{2_0}; \dots; x_{n_0})$, si cada una de sus funciones componentes son diferenciables en dicho punto:

$$dF(x) = \begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ .. \\ .. \\ dF_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_1}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_1}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_2}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_2}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \\ .. \quad .. \quad ..... \quad .. \\ .. \quad .. \quad ..... \quad .. \\ \frac{\delta F_m}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_m}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_m}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{x_0} = (x_{1_0}; x_{2_0}; \dots; x_{n_0})$$

Lo podemos expresar en forma matricial:

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = J\frac{F_1\, F_2 \dots F_m}{x_1 x_2 \dots x_n}(\boldsymbol{x_0})d\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\delta F_1}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0}) \dots \dots \frac{\delta F_1}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\delta F_2}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0}) \dots \dots \frac{\delta F_2}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0}) \\ .. & .. \quad ..... \quad .. \\ .. & .. \quad ..... \quad .. \\ \frac{\delta F_m}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\delta F_m}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0}) \dots \dots \frac{\delta F_m}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ .. \\ .. \\ dx_m \end{pmatrix}$$

En forma análoga a los diferenciales anteriores, el $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ es una función lineal, un Campo Vectorial Lineal de $R^n \underset{\to}{d\boldsymbol{F}} R^m$ y <u>para un $\boldsymbol{x}$ perteneciente al entorno del $\boldsymbol{x_0}$ representa el incremento de esa función lineal cuando me muevo un $d\boldsymbol{x}$</u>**:**

Como:

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ .. \\ .. \\ dF_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_{1_0} \\ y_2 - y_{2_0} \\ .. \\ .. \\ y_m - y_{m_0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}$$

y:

$$d\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ .. \\ .. \\ dx_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{1_0} \\ x_2 - x_{2_0} \\ .. \\ .. \\ x_m - x_{m_0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0} = J\frac{F_1\, F_2 \dots F_m}{x_1 x_2 \dots x_n}(\boldsymbol{x_0}).(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$$

Que es la función lineal, no graficable pues hay muchas variables independientes y dependientes.

Ejemplo: Hallar el diferencial del campo vectorial $\bar{F}(x;y) = \left(x+y;\ \frac{x}{y};\ x.y\right)$ en $(x_0;y_0)=(2;1)$

Hallar la función lineal asociada.

Llamamos a las componentes de $\bar{F} = (u;v;w)$

$$d\bar{F} = \underset{3\times 2}{J\frac{u\,v\,w}{x\ y}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}} \Rightarrow J\frac{u\,v\,w}{x\ y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y & x \end{bmatrix}$$

$$J\frac{u\,v\,w}{x\,y}(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} dx = x - x_0 = x-2 \\ dy = y - y_0 = y - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{d\bar{F} = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x-2+y-1 \\ x-2-2(y-1) \\ x-2+2(y-1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} x+y-3 \\ x-2y-3 \\ x+2y-3 \end{pmatrix}}} \ \text{(A)}$$

$$d\bar{F} = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \Rightarrow (u_0, v_0; w_0) = \bar{F}(x_0;y_0) = \bar{F}(2,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (u_0;v_0;w_0) = (3;2;2)$$

Reemplazando en (A): $\underline{\underline{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+y-3 \\ x-2y-3 \\ x+2y-3 \end{pmatrix}}}$ Función lineal asociada al $d\bar{F}$.

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR EN CAMPOS ESCALARES

Si *z = f(x, y),* campo escalar de $R^2 \xrightarrow{f} R$, tiene derivadas parciales continuas en un dominio entonces es diferenciable en ese dominio y su diferencial genérico (que sirve para todos los puntos de ese dominio) será:

$$dz(x;y) = f'_x(x;\ y)dx + f'_y(x;\ y)dy$$

Si posee derivadas parciales de 2do. Orden continuas se puede repetir el procedimiento para calcular el diferencial de 2do. Orden de la función (simplificamos la notación):

$$d(dz) = d^2z = D_x\left(f'_x\,dx + f'_y\,dy\right).dx + D_y\left(f'_x\,dx + f'_y\,dy\right).dy$$

$$d^2z = f''_{xx}\,dx^2 + f''_{yx}\,dxdy + f''_{xy}\,dxdy + f''_{yy}\,dy^2$$

Como: $f''_{yx} = f''_{xy}$ por el Teorema de Schwarz, el **Diferencial Segundo de *z*** será:

$$\boxed{d^2z = f''_{xx}\, dx^2 + 2\, f''_{yx}\, dxdy + f''_{yy}\, dy^2}$$

A partir de esta expresión podemos volver a realizar el mismo procedimiento, llamado diferenciación, para obtener el diferencial de tercer orden:

$$d(d^2z) = d^3z = D_x(f''_{xx}\, dx^2 + 2\, f''_{yx}\, dxdy + f''_{yy}\, dydy).dx + D_y(f''_{xx}\, dx^2 + 2\, f''_{yx}\, dxdy + f''_{yy}\, dy^2).dy$$

Cuyo resultado es:

$$\boxed{d^3z = f'''_{xxx}\, dx^3 + 3\, f'''_{xxy}\, dx^2dy + 3\, f'''_{xyy}\, dxdy^2 + f'''_{yyy}\, 3\, dy^3}$$

Y así sucesivamente para ordenes de diferenciación mayores.

Este procedimiento sirve también para funciones de mayor número de variables.

Ejemplo: Hallar el diferencial de 2º Orden en el punto $(1;2)$ de la función: $z = (3x^2 - y^3)^2$

El diferencial segundo genérico es:

① $d^2z = z''_{xx}\, dx^2 + 2\, z''_{xy}\, dxdy + z''_{yy}\, dy^2$ (planteo)

Para la respuesta necesitaremos las derivadas segundas valuadas en el punto $(1;2)$:

$z'_x = 2(3x^2 - y^3).6x = 36x^3 - 12xy^3 \to z''_{xx} = 108x^2 - 12y^3$; $z''_{xy} = -36xy^2$

$z'_y = 2(3x^2 - y^3).(-3y^2) = -18x^2y^2 + 6y^5 \to z''_{yy} = -36x^2y + 30y^4$

$z''_{xx}(1;2) = 12$; $z''_{xy}(1;2) = -144$; $z''_{yy}(1;2) = 408$

Reemplazo en ①: $\boxed{d^2z = 12(x-1)^2 - 288(x-1)(y-2) + 408(y-2)^2}$

con $dx = (x - x_0) = (x-1)$ $\wedge$ $dy = (y - y_0) = (y-2)$ $(x_0, y_0) = (1;2)$

Para campos escalares de dos variables nos puede ayudar para plantear la fórmula de los diferenciales de orden superior la siguiente expresión:

$$d^n z = (\frac{\delta}{\delta x}\,dx + \frac{\delta}{\delta y}\,dy)^n.f(x,y)$$

Es una fórmula simbólica, lo que está entre paréntesis es el operador diferencial, la potencia *n* representa potencia para los diferenciales (potencia de un binomio de diferenciales) y es orden de derivación para los operadores derivadas que se aplican a *f(x, y)* en el punto del dominio que se requiera (en lo que parece un producto). Puede corroborarse con d^2z y d^3z ya vistos.

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR EN FUNCIONES VECTORIALES ($R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^m$) (OPCIONAL DE ESTUDIO)

Así como vimos que:

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ .. \\ .. \\ F_m(t) \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{F}'(t) = \begin{pmatrix} F'_1(t) \\ F'_2(t) \\ .. \\ .. \\ F'_m(t) \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{F}''(t) = \begin{pmatrix} F''_1(t) \\ F''_2(t) \\ .. \\ .. \\ F''_m(t) \end{pmatrix}$$

Y así se puede seguir en forma indefinida, con los diferenciales pasa lo mismo:

$$d\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}'(t)dt = \begin{pmatrix} F'_1(t) \\ F'_2(t) \\ .. \\ .. \\ F'_m(t) \end{pmatrix} dt \rightarrow d^2\boldsymbol{F}(t) = d\big(d\boldsymbol{F}(t)\big) = d\left(\begin{pmatrix} F'_1(t) \\ F'_2(t) \\ .. \\ .. \\ F'_m(t) \end{pmatrix} dt\right)$$

$$d^2\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} F''_1(t) \\ F''_2(t) \\ .. \\ .. \\ F''_m(t) \end{pmatrix} dt^2$$

Mientras las derivadas segundas sean continuas, y así sucesivamente.

DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR EN CAMPOS VECTORIALES ($R^n \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^m$) (OPCIONAL DE ESTUDIO)

$$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ .. \\ .. \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Su diferencial total vimos que es:

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ .. \\ .. \\ dF_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_1}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_1}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_2}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_2}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \\ .. \quad .. \quad ..... \quad .. \\ .. \quad .. \quad ..... \quad .. \\ \frac{\delta F_m}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_m}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_m}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \end{pmatrix}$$

Donde: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\boldsymbol{x_0} = \left(x_{1_0}; x_{2_0}; \ldots; x_{n_0}\right)$

Si las derivadas segundas son continuas en un dominio, se puede hacer el *d²**F(x)***:

$$d^2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = d\left(d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\right) = d\left(\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_1}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_1}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_2}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_2}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \\ .. \quad .. \quad ..... \quad .. \\ .. \quad .. \quad ..... \quad .. \\ \frac{\delta F_m}{\delta x_1}(\boldsymbol{x_0})dx_1 + \frac{\delta F_m}{\delta x_2}(\boldsymbol{x_0})dx_2 + \cdots + \frac{\delta F_m}{\delta x_n}(\boldsymbol{x_0})dx_n \end{pmatrix}\right)$$

Es conveniente indicar las operaciones en forma matricial para que no sea tan larga la escritura de las operaciones:

$$d^2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} d^2F_1 \\ d^2F_2 \\ .. \\ .. \\ d^2F_m \end{pmatrix} = J\,\frac{dF_1\ dF_2 \ldots dF_m}{x_1 x_2 \ldots x_n}(\boldsymbol{x_0}). \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ .. \\ .. \\ dx_m \end{pmatrix}$$

La primer fila de la matriz jacobiana está formada por las derivadas del dF_1respecto de todas las variables independientes, éstas se multiplican a cada diferencial y se suman como establece el producto de matrices, formando así el d^2F_1. De igual manera pasa con todas las otras filas de esa matriz, obteniendo el $d^2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

Repitiendo este procedimiento se pueden obtener diferenciales de tercer orden y mayores en Campos Vectoriales.

Ejemplo: Hallar el Diferencial Segundo del siguiente campo Vectorial.

$$\bar{F}(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

$$d\bar{F} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \Rightarrow d(d\bar{F}) = d^2\bar{F} = d\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2u \\ d^2v \end{pmatrix}$$

$$d^2\bar{F} = \begin{pmatrix} u_{xx}\,dx^2 + 2u_{xy}\,dx\,dy + u_{yy}\,dy^2 \\ v_{xx}\,dx^2 + 2v_{xy}\,dx\,dy + v_{yy}\,dy^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u'_x = 2x \rightarrow u_{xx} = 2,\; u_{xy} = 0 \\ u'_y = 2y \rightarrow \underline{\underline{u_{yy} = 2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = \frac{1}{y} \rightarrow v_{xx} = 0,\; v_{xy} = -\frac{1}{y^2} \\ v'_y = -\frac{x}{y^2} \rightarrow \underline{\underline{v_{yy} = \frac{2x}{y^3}}} \end{cases}$$

Reemplazo en (1):

$$\boxed{d^2\bar{F} = \begin{pmatrix} d^2u \\ d^2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,dx^2 + 2\,dy^2 \\ -\frac{2}{y^2}\,dx\,dy + \frac{2x}{y^3}\,dy^2 \end{pmatrix}}$$

En este caso en vez de llamar F_1 y F_2 a las componentes del campo vectorial $\boldsymbol{F}$, les llamamos *u* y *v*.