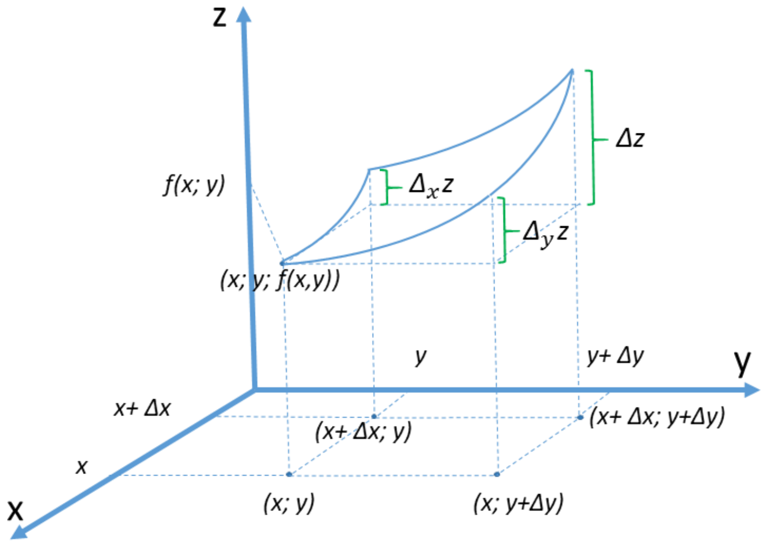
DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES

Incremento Parcial y Total de una Función

Sea *z=f(x, y)* una función de $R^2 \xrightarrow{f} R$. Cuando *x* se incrementa en *Δx* e *y* se incrementa en *Δy*, en *z* se producen incrementos parciales y un incremento total que se definen como sigue:



Incremento parcial de *z* respecto de *x*:

$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y)$ Cuando se varía solo la variable independiente *x*.

Incremento parcial de *z* respecto de *y*:

$\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x; y)$ Cuando se varía solo la variable independiente *y*.

Incremento Total de *z:*

$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)$ Cuando se varían las dos variables independientes.

En el gráfico están representados estos incrementos de *z*.

Estos conceptos pueden aplicarse también a funciones de cualquier número de variables.

DERIVADAS PARCIALES EN CAMPOS ESCALARES

a) Función Escalar de dos Variables $(R^2 \xrightarrow{f} R)$

Sea *z = f(x,y)*, al tratarse de una función de dos variables independientes, tendrá dos derivadas parciales.
La Derivada Parcial tiene el mismo concepto e interpretación gráfica que lo visto en Análisis Matemático I para funciones de una variable independiente.

Las definiciones:

Si mantenemos constante a *y*, la función se comporta como una función de una sola variable independiente *x*. Por lo tanto, definimos como **"Derivada Parcial de la función respecto a *x*"** mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x;y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x}$$

<u>Si el límite existe</u>. Como vemos, se trata del límite del cociente incremental cuando varía solo la variable *x*.

Las siguientes notaciones son equivalentes:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = \frac{\delta z}{\delta x}(x,y) = z'_x(x;y) = f'_x(x;y) = z_x(x;y) = f_x(x;y) = D_x f(x;y)$$

Si, por el contrario, mantenemos a *x* constante, la función se comporta como una función de una variable *y*. Por lo tanto, definimos como **"Derivada Parcial de la función respecto a *y*"** mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x;y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$$

<u>Si el límite existe</u>. Como vemos, se trata del límite del cociente incremental cuando varía solo la variable *y*.

Las siguientes notaciones son equivalentes:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \frac{\delta z}{\delta y}(x,y) = z'_y(x;y) = f'_y(x;y) = z_y(x;y) = f_y(x;y) = D_y f(x;y)$$

Cálculo de Derivadas Parciales: de las definiciones se infiere, que se pueden utilizar las mismas reglas de derivación utilizadas en Análisis Matemático I, y eso es lo que se hace, teniendo en cuenta, que cuando se deriva respecto de una variable, debe considerarse constante a la otra variable.

Ejemplo 1: Hallar las derivadas parciales de la siguiente función y valuarlas en el punto (2,1)

$$z = \sqrt{x^2 y} + x^3 \qquad \longrightarrow \qquad R^2 \xrightarrow{z} R$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2xy}{\sqrt{x^2y}} + 3x^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2y}} + 3x^2} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 13}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x^2y}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y}}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}(2,1) = 1}$$

Ejemplo 2: Calcular las derivadas parciales de la siguiente función: $w = (u+v)\cos^3 x^2$

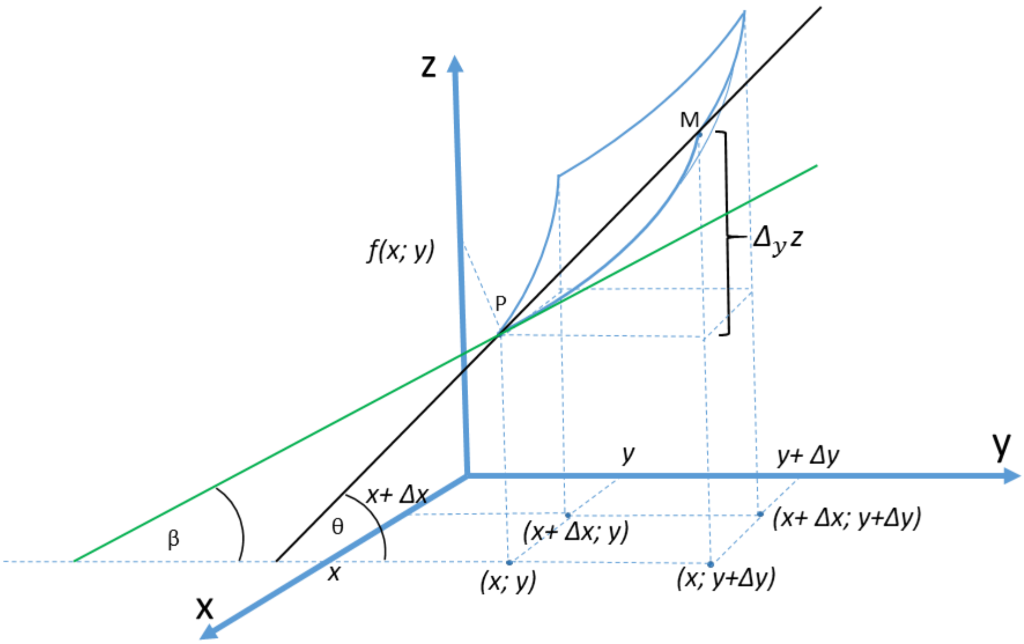
$R^3 \xrightarrow{w} R$ $\quad \boxed{\dfrac{\partial w}{\partial u} = \cos^3 x^2} \quad \boxed{\dfrac{\partial w}{\partial v} = \cos^3 x^2}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (u+v) \, . \, 3\cos^2 x^2 \, . \, (-\operatorname{sen} x^2) \, . \, 2x$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} = -6x(u+v)\cos^2 x^2 \, . \, \operatorname{sen} x^2}$$

Interpretación Gráfica

En la siguiente gráfica, se ha representado una parte de la superficie *z = f(x, y),* aquella correspondiente al rectángulo que se forma con las coordenadas *x, x+Δx, y, y+Δy* en el plano dominio *oxy*.



Si a partir del punto *(x, y)*, mantenemos constante a *x*, haciendo variar solo a *y* hasta el valor *Δy*, en la gráfica de la superficie se genera la curva $\widehat{PM}$.
Si trazamos una recta que pase por P y por M, esa recta es secante de la curva y posee un ángulo respecto de la dirección positiva del eje *oy* que denominamos θ, cuya pendiente es:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = tg\theta$$

Que es el cociente incremental cuando solo varía *y* en el valor *Δy*.

Si la función es continua, podemos hacer tender *Δy→0*, con ello *M→P* y *tg*θ →*tg*β, con lo cual la recta secante tiende a convertirse en la recta tangente en el punto P=*(x,y,f(x,y))*.
Por lo expuesto:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = tg\beta$$

Es decir, la derivada parcial en el punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva $\widehat{PM}$ en P=*(x,y,f(x,y))*, concepto equivalente al visto en Análisis Matemático I con funciones de una variable.

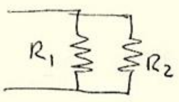
En forma análoga se haría con la derivada con respecto a *x*:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = tg\alpha$$

Ejercicio: Nos comunican que una función $f(x,y)$ tiene como derivadas a $f'_x(x,y) = x^2 - 5y^2$ y $f'_y(x,y) = \frac{x^3}{3} + 3y$. ¿Esta información es verdadera o falsa?

Rta: Falsa

Ejercicio: Tenemos un circuito con dos resistencias en paralelo. La resistencia del conjunto es: $R = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.



Hallar como varía R respecto a R_2 $\left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)$

Rta: $\dfrac{\partial R}{\partial R_2} = \dfrac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}$

DERIVADAS EN FUNCIONES VECTORIALES $(R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^m)$:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ .. \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ .. \\ .. \\ F_m(t) \end{pmatrix}$$

Si ***F(t)*** es una función continua respecto de t, con funciones componentes derivables y dado que la derivada de una función es un límite, significa que podemos utilizar lo visto en límite de funciones vectoriales y por lo tanto, podemos decir que, “la derivada de una función vectorial es igual a la derivada de sus funciones componentes”:

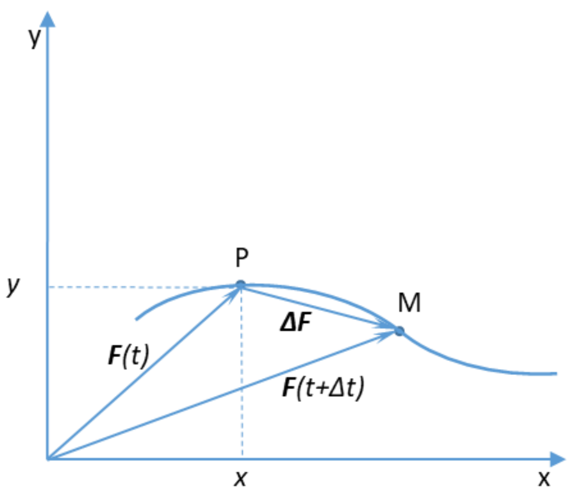
$$\boldsymbol{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{F}(t+\Delta t) - \boldsymbol{F}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{F_1(t+\Delta t) - F_1(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{F_2(t+\Delta t) - F_2(t)}{\Delta t} \\ \dots.. \\ \dots.. \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{F_m(t+\Delta t) - F_m(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_1(t) \\ F'_2(t) \\ .. \\ .. \\ F'_m(t) \end{pmatrix}$$

Vemos en las dos primeras igualdades, que es el límite de un vector, el numerador es vectorial y el resultado final es un **vector derivada.**

Como hay una sola variable independiente, <u>las derivadas son totales</u>, no parciales.

Gráficamente:

Sea ***F****(t) = (x(t); y(t)) = (*F_1*(t); *F_2*(t))*, función vectorial de $R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^2$



Como el cociente incremental $\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t}$ es paralelo a *Δ**F***, entonces si *Δt→0 => M→P* y ***ΔF*** tiende a ser tangente a la curva en P, esto significa que $\boldsymbol{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t}$ **es un vector tangente a la curva en P**.

Lo descripto es válido también para funciones vectoriales de $R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^3$, con imagen en el espacio tridimensional.

Movimiento en el espacio

Si ***F****(t) = (x(t); y(t); z(t)) =* $(F_1(t); F_2(t); F_3(t))$, función vectorial de $R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^3$, representa el movimiento en el espacio de un objeto, su vector derivada, es la velocidad del mismo en el punto que se trate, es decir:

$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{F}'(t) = (F'_1(t); F'_2(t); F'_3(t))$: **vector velocidad** en el punto señalado por ***F****(t) = (x(t); y(t); z(t))*

y su dirección es tangente a dicho punto.

Siendo el $|\ \boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{(F'_1(t))^2 + (F'_2(t))^2 + (F'_3(t))^2}$, la **Rapidez** del objeto en el punto.

Ejemplo 1: Hallar la derivada de la función

$\overline{F}(t) = (t^3+1 ; \operatorname{sen} t^2 ; \sqrt{t})$ y valuarla en $t=1$

$R \xrightarrow{\overline{F}} R^3$

$$\boxed{\overline{F}'(t) = \left(3t^2 ; 2t . \cos t^2 ; \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)}$$

$$\boxed{\overline{F}'(1) = \left(3 ; 2 . \cos 1 ; \frac{1}{2}\right)}$$

Ejemplo 2: Evaluar si dos partículas que viajan según las trayectorias dadas por $\bar{F}_1(t) = (-t+20;\ 2t^2;\ t+12)$ y $\bar{F}_2(t) = (t^2;\ 6t+8;\ t^2)$ pueden chocar y en su caso, establecer en qué tiempo. Establecer además, la velocidad y la rapidez de cada partícula y con qué ángulo se llega al momento de la colisión.

Para chocar tienen que llegar al mismo punto:

$$\begin{cases} x = -t+20 = t^2 \\ y = 2t^2 = 6t+8 \\ z = t+12 = t^2 \end{cases}$$

De este sistema surge que chocan en $\boxed{t=4}$

$$\bar{v}_1(t) = \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial t} = (-1;\ 4t;\ 1) \rightarrow \underbrace{\boxed{\bar{v}_1(4) = (-1;16;1)}}_{\text{Velocidad}} \wedge \underbrace{\boxed{|\bar{v}_1(4)| = 16{,}062}}_{\text{Rapidez}}$$

$$\bar{v}_2(t) = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial t} = (2t;\ 6;\ 2t) \rightarrow \boxed{\bar{v}_2(4) = (8;6;8)} \wedge \boxed{|\bar{v}_2(4)| = 12{,}806}$$

son las velocidades y rapidez al momento de chocar.

Para el ángulo: $\bar{v}_1(4) \cdot \bar{v}_2(4) = |\bar{v}_1(4)| \cdot |\bar{v}_2(4)| \cos\theta$

$$(-1;16;1) \cdot (8;6;8) = \sqrt{(-1)^2+16^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+6^2+8^2} \cdot \cos\theta$$

$$96 = 16{,}062 \cdot 12{,}806 \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{96}{205{,}69} = 0{,}467 \Rightarrow \boxed{\theta = 62{,}2°}$$ ángulo de choque

Punto de choque: $\bar{F}(4) = (16;\ 32;\ 16)$

DERIVADAS PARCIALES EN CAMPOS VECTORIALES ($R^n \xrightarrow{F} R^m$):

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Al igual que en funciones vectoriales, la derivada de ***F*** respecto de una variable independiente será igual a la derivada de cada una de las funciones componentes respecto de esa variable:

$$
\boldsymbol{F'}_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta x_i} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{F_1(x_1; \dots;\ x_i + \Delta x_i; \dots x_n) - F_1(x_1; \dots;\ x_i; \dots x_n)}{\Delta x_i} \\ \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{F_2(x_1; \dots;\ x_i + \Delta x_i; \dots x_n) - F_2(x_1; \dots;\ x_i; \dots x_n)}{\Delta x_i} \\ \vdots \\ \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{F_m(x_1; \dots;\ x_i + \Delta x_i; \dots x_n) - F_m(x_1; \dots;\ x_i; \dots x_n)}{\Delta x_i} \end{pmatrix}
$$

Donde:

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con *i*= 1, 2, …, n

En forma equivalente:

$$
\boldsymbol{F'}_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta F_1}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\delta F_2}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\delta F_m}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}
$$

Podemos tener todas las derivadas parciales de ***F(x)*** en una matriz, denominada **Matriz de Derivadas Parciales o Matriz Jacobiana**:

$$
D\boldsymbol{F} = J\frac{F_1\, F_2 \dots F_m}{x_1 x_2 \dots x_n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta F_1}{\delta x_1} & \dfrac{\delta F_1}{\delta x_2} & \dots & \dfrac{\delta F_1}{\delta x_n} \\ \dfrac{\delta F_2}{\delta x_1} & \dfrac{\delta F_2}{\delta x_2} & \dots & \dfrac{\delta F_2}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\delta F_m}{\delta x_1} & \dfrac{\delta F_m}{\delta x_2} & \dots & \dfrac{\delta F_m}{\delta x_n} \end{pmatrix}
$$

Es una matriz ***m x n***: la cantidad de filas es la cantidad de funciones componentes y su cantidad de columnas se corresponde con la cantidad de variables independientes.

La notación $J\frac{F_1\, F_2 \dots F_m}{x_1 x_2 \dots x_n}$ es poderosa, porque es muy fácil de leer y nos permite especificar la matriz en forma precisa sin tener que escribir toda la matriz teórica, es decir, con esta notación sabemos que la primer columna de la matriz está compuesta por las derivadas de todas las funciones componentes respecto de la variable x_1, la segunda columna, será la derivada de todas las funciones componentes respecto de x_2 y así sucesivamente.
Es particularmente útil para el planteo de ejercicios que requieran su cálculo, pues leyendo su notación, es posible calcular cada derivada individual en forma directa, calculando la matriz jacobiana en un paso.

Ejemplo 1: Hallar las derivadas de la función:

$$(u;v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

$$R^2 \xrightarrow{\bar{F}} R^2$$

$$\underbrace{J\frac{uv}{xy} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Idem para:

$$(u;v;w) = \left(x+y\,;\ \frac{x}{y}\,;\ x\cdot y\right)$$

$$R^2 \xrightarrow{\bar{F}} R^3$$

$$J\frac{uvw}{xy} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y & x \end{bmatrix}}_{3\times 2}$$

Valuar para $(x,y)=(2;1)$

$$J\frac{uvw}{xy}(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cuál es la $\frac{\partial v}{\partial y}(2,1)$?

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR (O SUCESIVAS) EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

DERIVADAS SUCESIVAS EN CAMPOS ESCALARES

Sea *z = f(x, y)* un campo escalar de $R^2 \xrightarrow{f} R$, sus derivadas parciales son también funciones de *x* e *y*, por lo tanto, puede cada una de ellas, ser derivada respecto de las dos variables independientes y así sucesivamente.

Por ejemplo:

Si $z = f(x, y) = 2x^3y^2$ sus derivadas serán:

Derivadas 1ras Derivadas 2das Derivadas 3ras

$$
\begin{cases}
\dfrac{\delta z}{\delta x} = 6x^2y^2 \begin{cases}
\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta z}{\delta x}\right) = \dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2} = f_{xx} = 12xy^2 \begin{cases}
\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta x^3} = f_{xxx} = 12y^2 \\
\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta y \delta x^2} = f_{xxy} = 24xy
\end{cases} \\
\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta z}{\delta x}\right) = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = f_{xy} = 12x^2y \begin{cases}
\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta x \delta y \delta x} = f_{xyx} = 24xy \\
\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta y^2 \delta x} = f_{xyy} = 12x^2
\end{cases}
\end{cases} \\
\dfrac{\delta z}{\delta y} = 4x^3y = \begin{cases}
\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta z}{\delta y}\right) = \dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = f_{yx} = 12x^2y \begin{cases}
\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta x^2 \delta y} = f_{yxx} = 24xy \\
\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta y \delta x \delta y} = f_{yxy} = 12x^2
\end{cases} \\
\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta z}{\delta y}\right) = \dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2} = f_{yy} = 4x^3 \begin{cases}
\dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta x \delta y^2} = f_{yyx} = 12x^2 \\
\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right) = \dfrac{\delta^3 z}{\delta y^3} = f_{yyy} = 0
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Utilizando las reglas de derivación hemos llegado hasta las derivadas de tercer orden o derivadas terceras, pudiendo continuarse esta tarea en forma indefinida.

Desde el punto de vista de la definición de una derivada, podemos expresar lo siguiente:

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = f_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x + \Delta x; y) - f_x(x; y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = f_{xy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x; y + \Delta y) - f_x(x; y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = f_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x + \Delta x; y) - f_y(x; y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = f_{yy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(x; y + \Delta y) - f_y(x; y)}{\Delta y}$$

Lo mismo se puede hacer con las derivadas terceras partiendo de cada derivada segunda.
Téngase presente que la primer notación del primer miembro de las igualdades anteriores, indica una operación a realizar: derivar respecto de “x” en la primer ecuación, derivar respecto de “y” en la segunda, etc., especifica que es la operación que se está por efectuar en ese momento, tiene fines didácticos, de explicación y una vez dominado el concepto, deja de utilizarse.

Observemos que hay derivadas que tienen el mismo resultado:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = 12x^2y = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$$

$$\frac{\delta^3 z}{\delta y \delta x^2} = 24xy = \frac{\delta^3 z}{\delta x \delta y \delta x} = \frac{\delta^3 z}{\delta x^2 \delta y}$$

$$\frac{\delta^3 z}{\delta y^2 \delta x} = 12x^2 = \frac{\delta^3 z}{\delta y \delta x \delta y} = \frac{\delta^3 z}{\delta x \delta y^2}$$

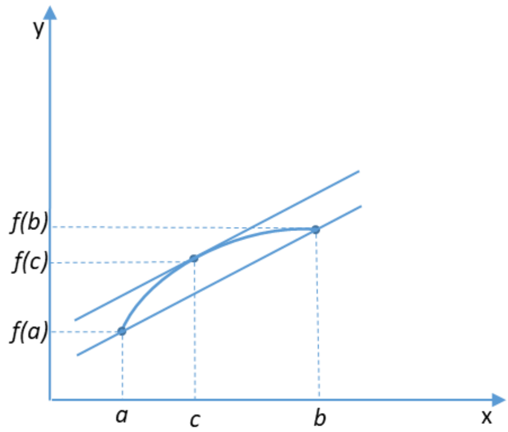
Se trata de aquellas derivadas que tienen la misma cantidad de derivaciones respecto de *x* y respecto de *y* pero que fueron derivadas en distinto orden. Esto sucede en funciones de buen comportamiento y bajo las condiciones establecidas por el Teorema de Schwarz.

Teorema de Schwarz o de Clairaut

Para su demostración necesitaremos el Teorema del Valor Medio que dice:

"Sea y = f(x) continua en el [a, b] y derivable en el (a, b) => existe algún c ϵ (a, b) tal que se cumple que: f(b) – f(a) = f'(c) (b-a)"

Su equivalente: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



El cual significa que si se cumplen las condiciones de la hipótesis, se puede encontrar un *c ϵ (a,b)* tal que la pendiente de la secante que pasa por *(a; f(a))* y *(b; f(b))* es igual a la pendiente de la recta tangente al punto *(c; f(c))*.

Enunciado del teorema

Sea *z = f(x, y)* continua en un entorno del punto (x_0, y_0), con derivadas de primer orden también continuas en ese entorno. Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son también continuas en dicho entorno, entonces se cumple que:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Demostración

Vamos a utilizar la siguiente ecuación auxiliar:

$$A = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0 + \Delta y) + f(x_0; y_0)$$

a) Reordenamos los términos:

$$A = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0 + \Delta y) - [f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)]$$

La primer resta y la segunda que está entre corchetes, pueden considerarse funciones solo de *"$x=x_0 + \Delta x$"* pues está claro que las segundas componentes permanecen constantes.
Al ser *$f(x; y)$* continua y derivable en un entorno del *(x_0, y_0)* podemos utilizar el Teorema del Valor Medio (TVM) en el intervalo $(x_0; x_0 + \Delta x)$, entonces:

$$A = f_x(c_1;\ y_0 + \Delta y).\Delta x - f_x(c_1;\ y_0).\Delta x = [f_x(c_1;\ y_0 + \Delta y) - f_x(c_1;\ y_0)].\Delta x$$

La resta entre corchetes es dependiente solo de *"$y=y_0 + \Delta y$"* y las derivadas de primer orden son continuas en un entorno del *(x_0, y_0),* por lo tanto, podemos aplicar nuevamente el TVM en el intervalo $(y_0; y_0 + \Delta y)$, entonces:

$A = f_{xy}(c_1;\ d_1)\Delta x \Delta y$ **(a)** con $\begin{cases} x_0 < c_1 < x_0 + \Delta x \\ y_0 < d_1 < y_0 + \Delta y \end{cases}$

b) Reordenando diferente:

$$A = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x; y_0) - [f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)]$$

La primer resta y la segunda que está entre corchetes, pueden considerarse funciones solo de *"$y=y_0 + \Delta y$"* pues está claro que las primeras componentes permanecen constantes.
Al ser *$f(x; y)$* continua y derivable en un entorno del *(x_0, y_0)* podemos utilizar el Teorema del Valor Medio (TVM) en el intervalo $(y_0; y_0 + \Delta y)$, entonces:

$$A = f_y(x_0 + \Delta x; d_2).\Delta y - f_y(x_0;\ d_2).\Delta y = [f_y(x_0 + \Delta x; d_2) - f_y(x_0;\ d_2)].\Delta y$$

La resta entre corchetes es dependiente solo de *"$x=x_0 + \Delta x$"* y las derivadas de primer orden son continuas en un entorno del *(x_0, y_0),* por lo tanto, podemos aplicar nuevamente el TVM en el intervalo $(x_0; x_0 + \Delta x)$, entonces:

$A = f_{yx}(c_2;\ d_2)\Delta x \Delta y$ **(b)** con $\begin{cases} x_0 < c_2 < x_0 + \Delta x \\ y_0 < d_2 < y_0 + \Delta y \end{cases}$

Siendo (a) = (b), queda:

$$f_{xy}(c_1;\ d_1) = f_{yx}(c_2;\ d_2)$$

Al ser f_{xy} y f_{yx} continuas en un entorno del *(x_0, y_0),* puede tomarse límites en ambos miembros:

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} f_{xy}(c_1;\ d_1) = \lim_{(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)} f_{yx}(c_2;\ d_2)$$

Al tender *$\Delta x \to 0$*, c_1 y c_2 al ser puntos intermedios, tienden a x_0 y en forma análoga, cuando:

Δy→0, d_1 y *d_2* al ser puntos intermedios, tienden a *y_0*, por lo tanto, queda demostrado que:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Nota: Se puede generalizar este resultado para órdenes de derivación mayores a "2" y para funciones de mayor cantidad de variables.

Tiene una utilidad de orden práctico indiscutible, reduce la cantidad de derivadas a realizar, teniendo un mayor ahorro en el cálculo cuando mayor es el orden de derivación y cuanta más cantidad de variables independientes tiene la función.

Por ejemplo, en la función *z = f(x, y)*, tiene cuatro derivadas de 2^{do} orden y ocho de 3^{er} orden, por aplicación del Teorema, son necesarias calcular solo tres de 2^{do} orden (f_{xx}; f_{xy} y f_{yy}) y solo cuatro de 3^{er} orden (f_{xxx}; f_{xxy}; f_{yyx} y f_{yyy}).

¿Cuál sería el ahorro de cálculo de una función *w = f(x, y, z)* al realizar las derivadas de 2^{do} orden y 3^{er} orden con la aplicación del Teorema de Schwarz?

DERIVADAS SUCESIVAS EN FUNCIONES VECTORIALES ($R \underset{\rightarrow}{\boldsymbol{F}} R^m$)

$$\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ .. \\ .. \\ F_m(t) \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{F}'(t) = \begin{pmatrix} F'_1(t) \\ F'_2(t) \\ .. \\ .. \\ F'_m(t) \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{F}''(t) = \begin{pmatrix} F''_1(t) \\ F''_2(t) \\ .. \\ .. \\ F''_m(t) \end{pmatrix}$$

Así como la derivada de primer orden se realiza derivando cada una de las funciones componentes, obtenida la primer derivada, se puede volver a derivar cada componente de ésta y obtener el vector derivada segunda y así sucesivamente.

<u>Si ***F(t)*** representa el movimiento de un objeto en el espacio</u>, vimos que su derivada primera es el vector velocidad del objeto, el cual es tangente a la curva en el punto de ubicación del objeto. Si derivamos nuevamente, es decir, si obtenemos el vector derivada segunda, éste vector representa la **aceleración del objeto** en el punto. Es decir:

a*(t) =* ***F''****(t) = (F''$_1$(t); F''$_2$(t); F''$_3$(t))*

Es el **vector aceleración** en el punto señalado por ***F****(t) = (x(t); y(t); z(t))*

DERIVADAS SUCESIVAS EN CAMPOS VECTORIALES ($R^n \underset{\rightarrow}{\boldsymbol{F}} R^m$)

$$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ .. \\ .. \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{F'}_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \\ .. \\ .. \\ \frac{\delta F_m}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Donde: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con i= 1, 2, …, n

Como esta derivada de primer orden también es una función $R^n \xrightarrow{\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{x_i}}} R^m$ con las mismas variables independientes $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, también puede derivarse respecto de todas sus variables independientes. Es decir, por cada vector derivada primera, puedo obtener una matriz de derivadas segundas:

$$D(\boldsymbol{F}'_{x_i}) = D\begin{pmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\delta F_2}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \frac{\delta F_m}{\delta x_i}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 F_1}{\delta x_1 \delta x_i} & \frac{\delta^2 F_1}{\delta x_2 \delta x_i} & \cdots & \frac{\delta^2 F_1}{\delta x_n \delta x_i} \\ \frac{\delta^2 F_2}{\delta x_1 \delta x_i} & \frac{\delta^2 F_2}{\delta x_2 \delta x_i} & \cdots & \frac{\delta^2 F_2}{\delta x_n \delta x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 F_m}{\delta x_1 \delta x_i} & \frac{\delta^2 F_m}{\delta x_2 \delta x_i} & \cdots & \frac{\delta^2 F_m}{\delta x_n \delta x_i} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: De un ejemplo anterior, vimos:

$$(u, v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$ su matriz jacobiana se calculó:

$$J\frac{u\,v}{x\,y} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

El vector: $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -\frac{y}{x^2} \end{bmatrix}$ puede ser derivado nuevamente respecto de $\underline{x}$ y de $\underline{y}$ obteniendo una matriz de derivadas segundas:

$$D\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

De igual manera puede hacerce con le 2ª columna de le matriz jacobiana: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ \frac{1}{x} \end{bmatrix}$