FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

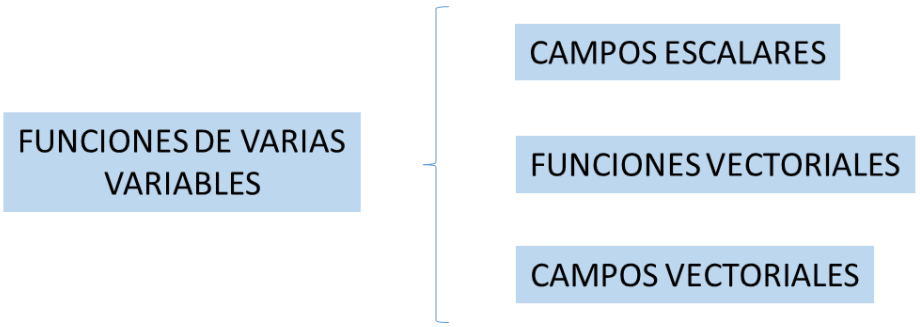
En **Análisis Matemático I** hemos visto Funciones Escalares, es decir:

$$R \xrightarrow{f} R \;/\; \forall\, x \in D(f) \;\rightarrow\; y = f(x)$$

Que se lee: “f es una función que aplica de los reales en los reales, tal que para todo “x” perteneciente al dominio de la función, le hace corresponder un “y” igual a f(x).”

Se llama “Función Real de Variable Real” o “Función Escalar de Variable Escalar”.

En **Análisis Matemático II**, veremos Funciones de Varias Variables cuya clasificación es la siguiente:



CAMPOS ESCALARES

a) **Caso General**:

$$R^n \xrightarrow{f} R \;/\; \forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) \;\rightarrow\; y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Que se lee: “f es una función que aplica de R^n en R tal que para todo vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ perteneciente al dominio de la función, le hace corresponder un “y” igual a $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.”

Se llama “Campo Escalar” o “Función Real de variable Vectorial”

y: Variable Dependiente $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: Vector de Variables Independientes

A cada "$\boldsymbol{x}$" le corresponde un solo valor de "y".
Para n>2 no se puede realizar la gráfica de la función.

b) **Funciones de Dos variables independientes**:

$$R^2 \xrightarrow{f} R/\forall\, (x, y) \in D(f) \rightarrow\; z = f(x, y)$$

z: variable dependiente $\boldsymbol{x} = (x, y)$: Vector de variables independientes

Se lee de manera análoga a las anteriores y se lo deja como ejercicio de lectura simbólica.

Su **Dominio** es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los que está definida la función y se expresa en forma simbólica comprensiva como sigue:

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 / z = f(x, y)\}$$

Su **Imagen o Rango** es el conjunto de todos los valores que toma "z" para todos los puntos del $D(f)$ y se expresa en forma simbólica comprensiva de la siguiente manera:

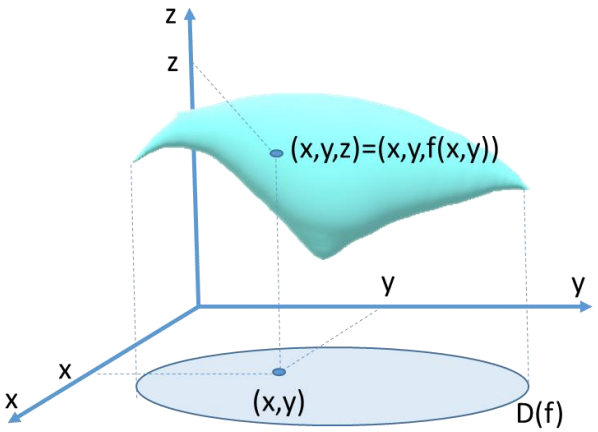
$$I(f) = \{z \in R / (x, y) \in D(f)\}$$

Función expresada en **forma explícita**: $z = f(x, y)$ Ejemplo: $z = x^2 + y^2$

Función expresada en **forma implícita**: $f(x, y, z) = 0$ Ejemplo: $9 + y^2 . z - x = 0$

Representación Gráfica

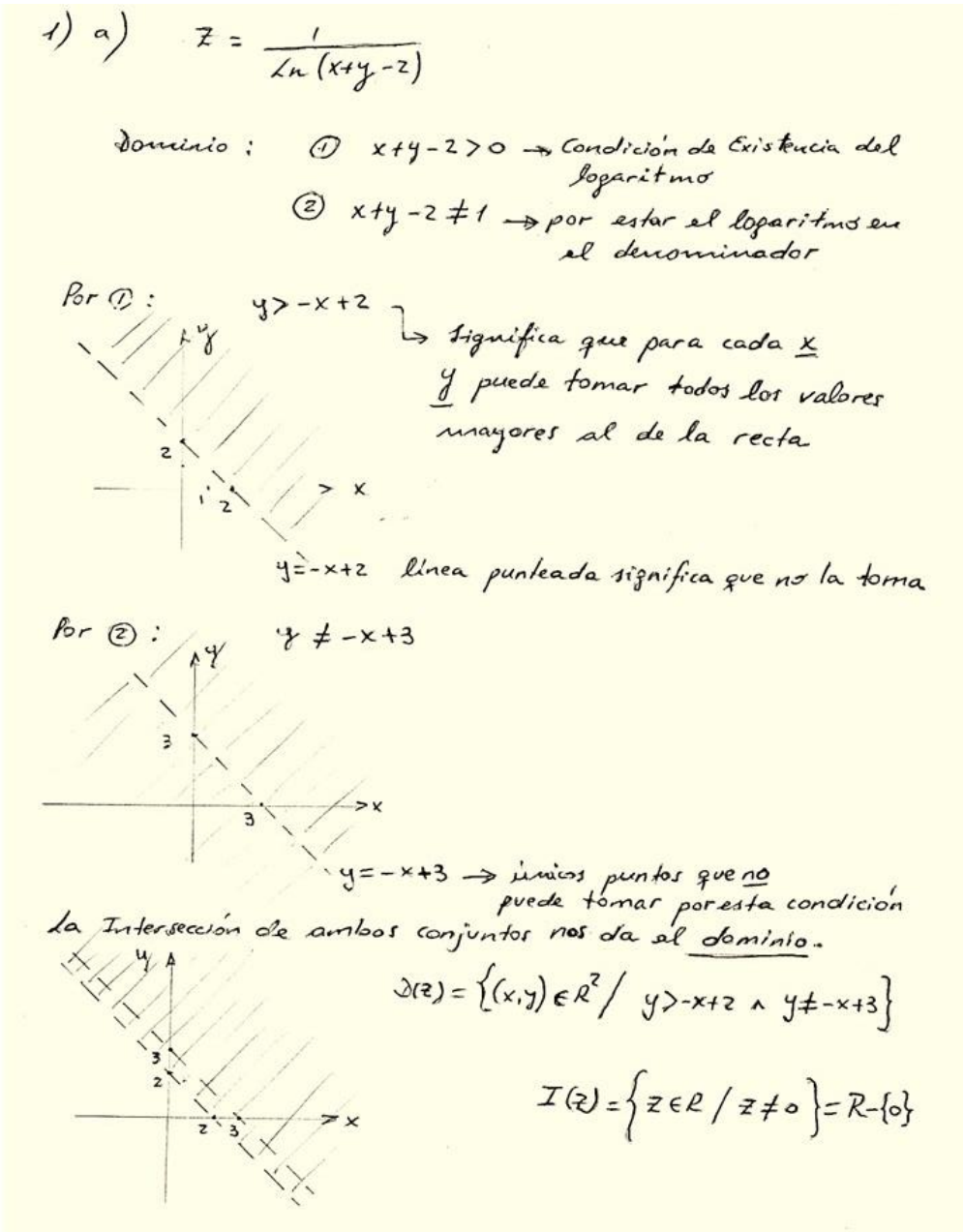
La gráfica de una función es el lugar geométrico de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen $z = f(x, y)$
A cada punto del dominio (x, y) le corresponde un único valor $z = f(x, y)$. En consecuencia, la gráfica de una función de dos variables es una superficie en el espacio. La proyección de esa superficie sobre el plano oxy es el dominio de la función.



Algunos Ejercicios:

1) Establecer el Dominio e Imagen de las siguientes funciones y graficarlos:

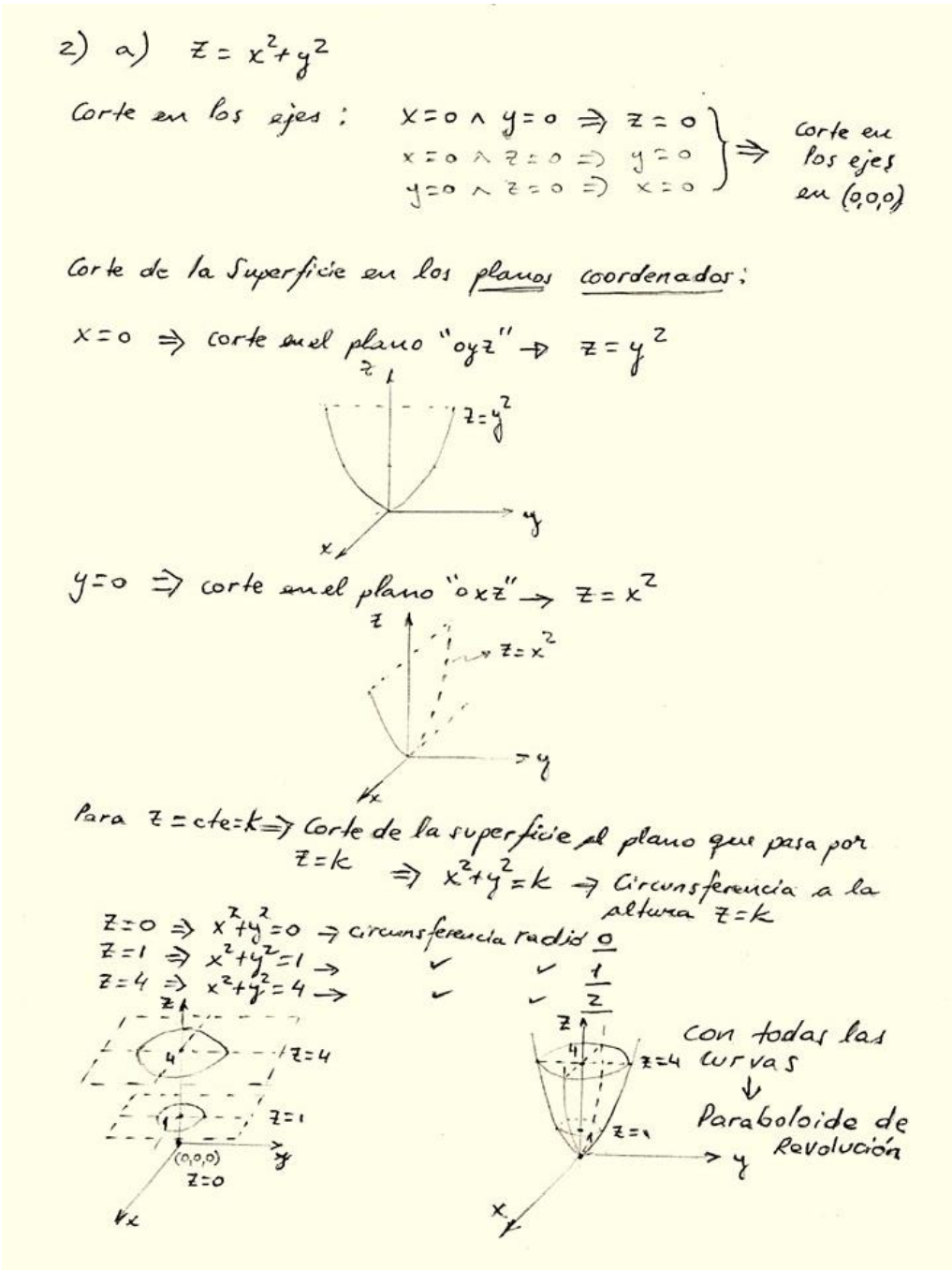
a) $z = \frac{1}{\mathrm{Ln}(x+y-2)}$ b) $z = \mathrm{Ln}\frac{(x^2-y^2)}{2x^2+y^2-4}$ c) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



Hemos definido y dibujado el D(f) y establecido su Imagen. Con los otros ejercicios se procede de forma similar. Con la práctica se pueden ahorrar pasos de desarrollo.

2) Graficar las siguientes funciones:

a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = y^2 - x^2$ c) $z^2 = x^2 + y^2$



Con los otros ejercicios se procede de forma similar.

FUNCIONES VECTORIALES

a) **Caso General**:

$$R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^m \;/\; \forall\, t \in D(\boldsymbol{F}) \;\rightarrow\; \boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{F}(t)$$

Que se lee: "**F** es una función que aplica de R en R^m tal que para todo "t" perteneciente al dominio de la función, le hace corresponder un "**y**" igual a $\boldsymbol{F}(t)$."

Se llama “Función Vectorial” o “Función Vectorial de variable Real”

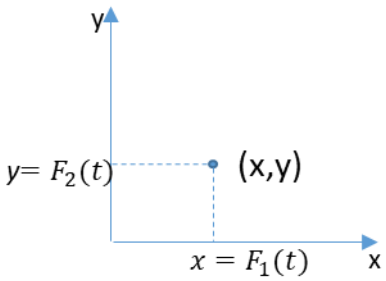
$\boldsymbol{y}$: Vector de Variables Dependientes t: Variable Independiente

$$\mathbf{y}=\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ y_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ F_m(t) \end{bmatrix}$$

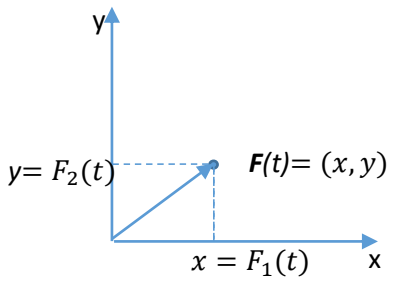
“t” es también llamado “parámetro”. En las funciones de movimiento es el tiempo y en las representaciones gráficas no está representado, por lo tanto, se grafica sólo el conjunto imagen, el cual puede graficarse solo si “m” no es mayor que 3.

b) Si: $R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^2 / \forall t \in D(\boldsymbol{F}) \rightarrow (x,y) = \boldsymbol{F}(t)$

$\binom{x(t)}{y(t)} = \binom{F_1(t)}{F_2(t)}$ Estas son las **Ecuaciones Paramétricas** de la función.



$\boldsymbol{F}(t) = F_1(t)\boldsymbol{i} + F_2(t)\boldsymbol{j}$ Esta es la **Ecuación Vectorial** de la función.



En este caso **F**(t) representa el vector posición del punto (x,y).
Como puede observarse, el parámetro “t” no está representado gráficamente.

Su **Dominio** es el conjunto de todos los valores de “t” para los que está definida la función y se expresa en forma simbólica comprensiva como sigue:

$D(\boldsymbol{F}) = \{t \in R / (x,y) = (F_1(t), F_2(t))\}$

Su **Imagen o Rango** es el conjunto de todos los valores que los pares ordenados (x,y) toman para todos los elementos del $D(\boldsymbol{F})$ y se expresa en forma simbólica comprensiva de la siguiente manera:

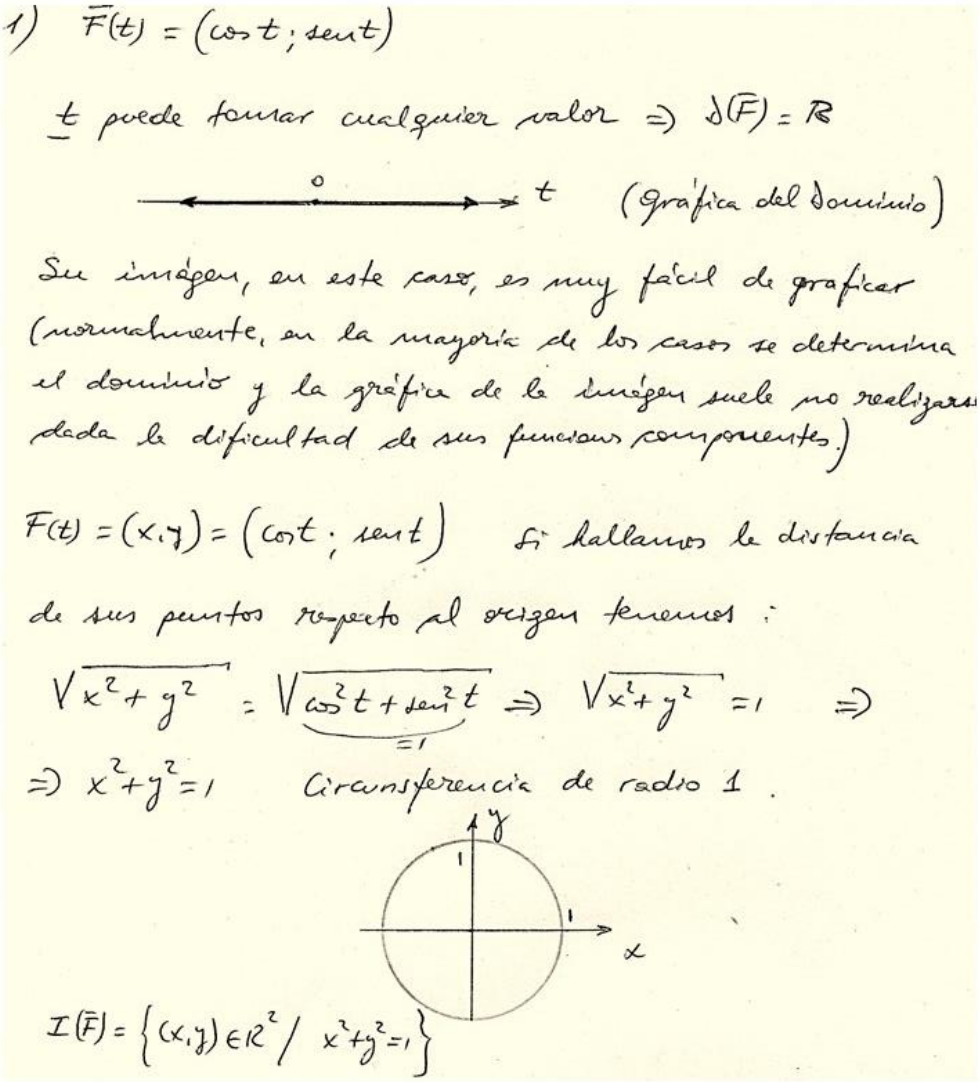
$$I(\boldsymbol{F}) = \{(F_1(t), F_2(t)) \in R^2 / t \in D(\boldsymbol{F})\}$$

c) Se deja al lector la elaboración teórica de las Ecuaciones Paramétricas, Ecuación Vectorial, gráficos y definición de Dominio e Imagen para cuando m =3, es decir, para $R \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^3 / \forall t \in D(\boldsymbol{F}) \rightarrow (x, y, z) = \boldsymbol{F}(t)$ en forma análoga al punto b).

Debido a que los elementos del D(**F**) son números escalares, **el gráfico de la Imagen o Rango de F(t) es una línea en R^2 o R^3** para m=2 o 3 respectivamente.

Ejemplos de Funciones Vectoriales:

1) $\boldsymbol{F}(t) = (\cos t;\ sen\ t)$ 2) $\boldsymbol{F}(t) = (t^2; \sqrt{t}; \ln(10 - t))$



2) $\bar{F}(t) = \left(t^2 ; \sqrt{t} ; \ln(10-t)\right) = (x ; y ; z)$

Para que exista $\bar{F}(t)$ deben existir las tres componentes

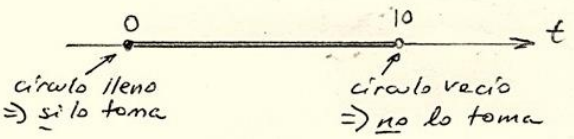
$x = t^2 \Rightarrow$ t puede tomar cualquier valor. (a)

$y = \sqrt{t} \Rightarrow t \geq 0$ (b)

$z = \ln(10-t) \Rightarrow 10-t > 0 \Rightarrow t < 10$ por existencia del $\ln$ (c)

La intersección de estas 3 condiciones nos da le existencia de $\bar{F}(t)$ (Dominio de existencia):

(a) $\wedge$ (b) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ $\mathcal{D}(\bar{F}(t)) = [0 ; 10)$



$$\mathcal{I}(\bar{F}(t)) = \left\{ \left(t^2 ; \sqrt{t} ; \ln(10-t)\right) \in R^3 \ / \quad 0 \leq t < 10 \right\}$$

CAMPOS VECTORIALES

a) **Caso General**:

$$R^n \xrightarrow{\boldsymbol{F}} R^m \ / \ \forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(\boldsymbol{F}) \ \rightarrow \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Que se lee: "**F** es una función que aplica de R^n en R^m tal que para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ perteneciente al dominio de la función , le hace corresponder un "**y**" igual a $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$" (que está en R^m).

Se llama "Campo Vectorial" o "Función Vectorial de Variable Vectorial"

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: Vector de Variables Independientes el cual está en el espacio R^n

$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$: Vector de Variables Dependientes el cual está en el espacio R^m

La dependencia está establecida por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ .. \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ .. \\ .. \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

b) Si: $R^2 \underset{\rightarrow}{\boldsymbol{F}} R^2 / \forall(x,y) \in D(\boldsymbol{F}) \rightarrow (u,v) = \boldsymbol{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

El Dominio: $D(\boldsymbol{F}) = \{(x,y) \in R^2 / (u,v) = (F_1(x,y), F_2(x,y))\}$

La Imagen: $I(\boldsymbol{F}) = \{(u,v) \in R^2 / (x,y) \in D(\boldsymbol{F})\}$

c) Si:

$$R^3 \underset{\rightarrow}{\boldsymbol{F}} R^3 / \forall(x,y,z) \in D(\boldsymbol{F}) \rightarrow (u,v,w) = \boldsymbol{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

¿Cómo se expresarían su Dominio e Imagen?

Gráficos

Si bien no se puede realizar la gráfica de funciones de este tipo dada la cantidad de variables independientes y dependientes que requieren ejes de representación, se puede, sin embargo, realizar un tipo de gráfica especial cuando la dimensión del dominio es igual a la dimensión de la imagen (n=m) y no mayor a 3, es decir, para Campos de $R^2 \underset{\rightarrow}{\boldsymbol{F}} R^2$ y $R^3 \underset{\rightarrow}{\boldsymbol{F}} R^3$, la cual consiste en graficar en el mismo espacio R^2 o R^3 respectivamente, los puntos del Dominio y los vectores Imagen, tal que a cada punto del Dominio se le asigna su vector Imagen, cuyo comienzo se ubica en el punto del dominio y se desarrolla según la magnitud de sus componentes.

Ejemplos:

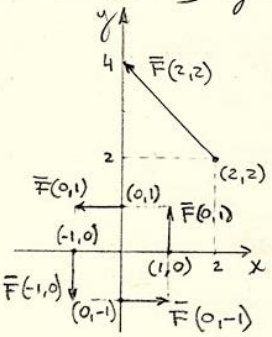
1) $\boldsymbol{F}(x,y) = (-\mathrm{y};\ x)$
2) $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2-4}; Ln(x+y)\right)$
3) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (0\ ;\ 0\ ;\ z\ )$
4) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\mathrm{arcsen}(\mathrm{x}+\mathrm{y});\ \mathrm{arccos}(\ x^2+y^2);\ z\ )$

A continuación, se desarrollan dos ejercicios, con los demás se procede de manera análoga.

1) $\bar{F}(x;y) = (-y\,;\,x)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (-y,x) = (u,v) \\ D & & I \end{array}$$

Una gráfica especial es graficar Dominio e Imágen en el mismo espacio $\mathbb{R}^2$. A cada punto del D le asignamos su vector imágen: dibujando algunos puntos del D y sus vectores de la I:



(x,y)	$(u,v) = (-y;x) = \bar{F}(x,y)$
$(1,0)$	$(0,1)$
$(0,1)$	$(-1,0)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(0,-1)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(-2,2)$

Si se tratara de un campo de fuerzas, puede inferirse que el mismo tiende a hacer rotar a cualquier elemento bajo su acción. Si se tratara de una masa puntual ubicada en algún punto (x,y) el campo la haría trasladarse.

Sus componentes no tienen restricciones $\Rightarrow$ $D(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$

$I(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$

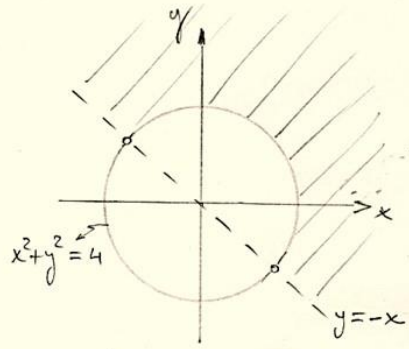
2) $\bar{F}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2-4}\,;\, Ln(x+y)\right) = (u,v)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (u,v) \\ D & & I \end{array}$$

a) $x^2+y^2-4 \geq 0 \Rightarrow \underline{x^2+y^2 \geq 4}$ para existencia de 1ª componente de I.

b) $x+y>0 \Rightarrow \underline{y>-x}$ para existencia 2ª componente de I.

Su intersección nos da el $D(\bar{F})$.



Gráfica del $D(\bar{F})$

$$D(\bar{F}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \geq 4 \wedge y > -x\right\}$$

$$I(\bar{F}) = \left\{\left(\sqrt{x^2+y^2-4}\,;\, Ln(x+y)\right) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y) \in D(\bar{F})\right\}$$