

Cinemática : Estudio de la geometría del movimiento. Relaciona el desplazamiento, velocidad, aceleración y tiempo. No hace referencia a la causa del movimiento.

Dinámica : Estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, masa y el movimiento del mismo. La DINÁMICA se utiliza para predecir el movimiento ocasionado por fuerzas dadas o para predecir las fuerzas necesarias que se requieren para producir un movimiento determinado.

① CINEMATICA DEL PUNTO MATERIAL

• **Punto MATERIAL o PARTICULA** : Se estudia el cuerpo sin tomar en cuenta su tamaño. Sólo se va a considerar su movimiento como una unidad completa, y se ignora cualquier rotación alrededor de su propio centro de masa.

MOVIMIENTO : Todo cambio de posición del punto material.

POSICIÓN : Ubicación de un P.M. respecto de un sistema de referencias. Se expresa a través de un vector en función del sist. de referencia elegido.

TRAYECTORIA : Lugar geométrico que resulta de la unión de los puntos de las sucesivas posiciones que ocupa el P.M. durante su movimiento.

DISTANCIA RECORRIDA : MEDIDA TOMADA SOBRE LA TRAYECTORIA A PARTIR DE UN ESPACIO RECORRIDO
ORIGEN ARBITRARIO UBICADO SOBRE ÉSTA Y LA POSICIÓN DEL PUNTO.

$l = l(t) \Rightarrow$ ley horaria.

Velocidad : Variación de la posición en relación al tiempo.

Aceleración : Variación de la velocidad en relación al tiempo.

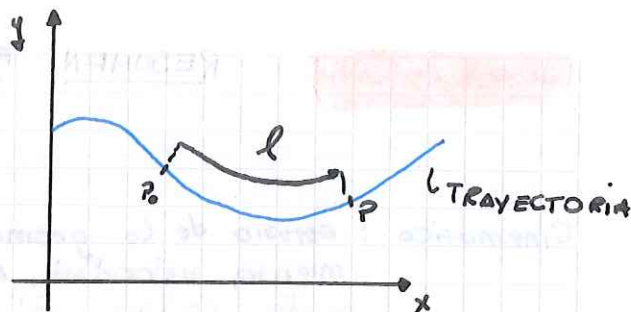
$$l = l(t)$$

$$\left. \begin{aligned} v_m &= \frac{\Delta l}{\Delta t} \\ a_m &= \frac{\Delta v_m}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \text{valores medios}$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 l}{dt^2}$$

Valores instantaneos.



$$dl = v(t) \cdot dt \Rightarrow \int_{l_0}^l dl = \int_{t_0}^t v(t) dt \Rightarrow l(t) \text{ es la ley horaria del movimiento.}$$

• SISTEMAS DE COORDENADAS

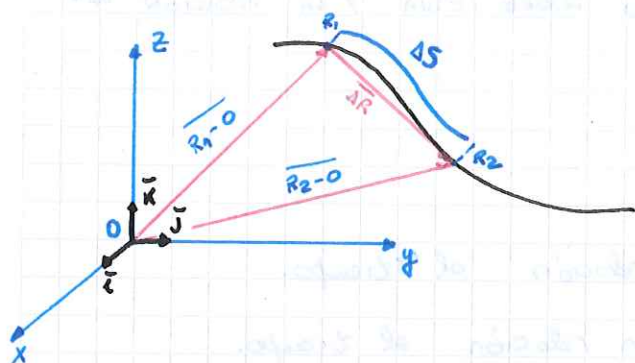
(A) EXTRINSECAS : Cortesiones ortogonales, cilindricas, Polares, ESFERICAS y ángulos de Euler

(B) INTRINSECAS : Triedro de Frenet.

(A) EXTRINSECAS : el sistema de coordenadas no se encuentra sobre el objeto en movimiento.

(B) INTRINSECO : Sist. de referencia móvil que se desplaza por la curva según la recorremos.

(1) SISTEMA DE REFERENCIA ORTOSONAL



$$\vec{R} = \vec{R} - \vec{O} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} (r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) = \frac{dr_x}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

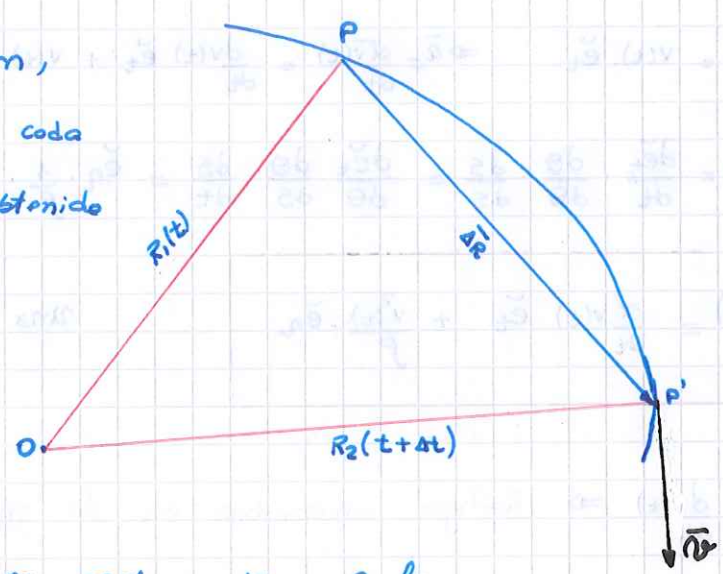
$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta t}$ Velocidad media $\rightarrow$ Vector con misma dirección que $\Delta \bar{R}$.

$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta t} = \frac{d\bar{R}}{dt}$ Velocidad instantánea $\Rightarrow \bar{v}$ tangente a la trayectoria.

$\bar{a}_m = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$ Aceleración media $\rightarrow$ Vector con la misma dirección que $\Delta \bar{v}$

$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2}$ Aceleración instantánea.

A medida que Δt y $\Delta \bar{R}$ disminuyen, las posiciones P y P' se acercan cada vez más entre si. El vector $\bar{v}$ obtenido en el límite es tangente a la trayectoria



importante : En general, $\bar{a}$ no es tangente a la trayectoria de la partícula.

② SISTEMA DE REFERENCIA INTRÍNSECO (FRENET)

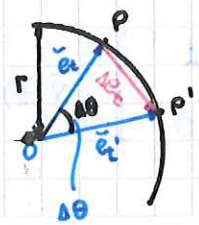
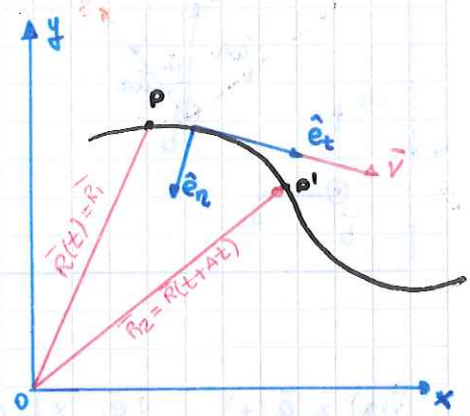
- $\rightarrow$ NECESITO CONOCER LA TRAYECTORIA
- $\rightarrow$ DEPENDE DE LA TRAYECTORIA.
- $\rightarrow \bar{v}$ es tangente a la trayectoria de la partícula.

$$\bar{v}(t) = v(t) \cdot \hat{e}_t$$

Como $\hat{e}_t$ es un versor : $r = 1$

$$\Delta \hat{e}_t = \hat{e}_t - \hat{e}_t'$$

$$\sin(\Delta\theta/2) = \frac{\Delta e_t}{2} \therefore \Delta e_t = 2 \sin(\Delta\theta/2)$$



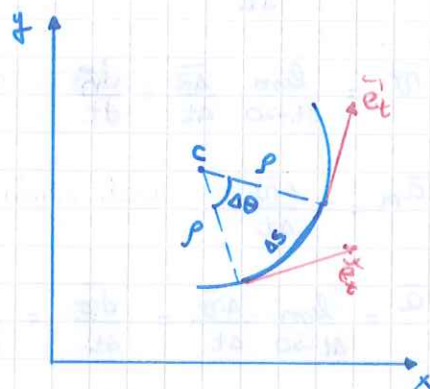
$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

el vector obtenido en el limite es un vector unitario o lo largo de lo normal o lo trayectoria de la partícula, en la dirección hacia lo cual cambia $\vec{e}_t$:

$$\vec{e}_n = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_t}{\Delta\theta} = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta}$$

$$\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta}$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{r}$$



$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e}_t \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \vec{e}_t + v(t) \cdot \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

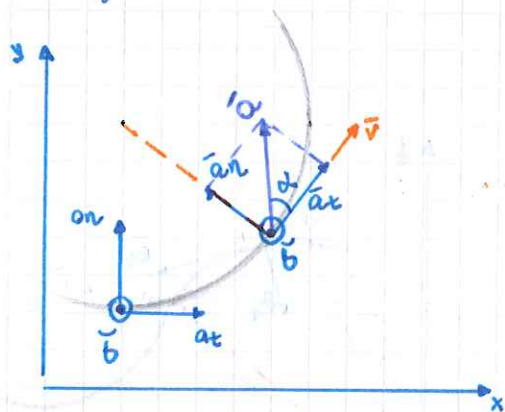
$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{e}_n \cdot \frac{1}{r} \cdot v(t) = \frac{v(t)}{r} \vec{e}_n$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2(t)}{r} \vec{e}_n$$

una forma de definir $\vec{e}_t = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$

$a_t = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow$ Reflejo un cambio en la magnitud de la velocidad.

$a_n = \frac{v^2}{r} \Rightarrow$ Reflejo un cambio en la dirección del movimiento



$$a_t = a \cos \alpha$$

$$a_n = a \sin \alpha$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{b} \rightarrow$ Versor binormal.

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = v \vec{e}_t \times [a_t \vec{e}_t + \frac{v^2}{r} \vec{e}_n] = v \hat{e}_t \times a_t \hat{e}_t + v \cdot \hat{e}_t \times \frac{v^2}{r} \vec{e}_n$$

$$\vec{e}_t \times \vec{e}_t = 0$$

$$\vec{e}_t \times \vec{e}_n = \vec{e}_b$$

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = v \cdot a_t \cdot \vec{e}_b$$

$$a_t = \frac{\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)}{v(t)}$$

①

$$\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t) = v \cdot \vec{e}_t \wedge [a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n] = v \cdot a_t (\underbrace{\vec{e}_t \wedge \vec{e}_t}_{=0}) + v \cdot a_n (\underbrace{\vec{e}_t \wedge \vec{e}_n}_{\vec{e}_t \wedge \vec{e}_n \wedge \vec{e}_b})$$

$$\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t) = v \cdot a_n \vec{e}_b \Rightarrow \boxed{\vec{e}_b = \frac{\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)}{v \cdot a_n}} \quad (2)$$

tomando módulo de ambos lados :

$$|\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)| = v \cdot a_n \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{|\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)|}{v(t)}} \quad (3)$$

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)}{v \cdot a_n} = \frac{\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)}{v \cdot \frac{p}{v^3}} = \frac{[\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)] \cdot p}{v^3} \quad \text{tomando módulo de ambos}$$

$$\text{lado: } 1 = |\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)| \cdot \frac{p}{v^3} \Rightarrow \boxed{p = \frac{v^3}{|\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)|}} \quad (4)$$

$$\boxed{a_t = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{v(t)}; \quad a_n = \frac{|\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)|}{v(t)}; \quad p = \frac{v^3}{|\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)|}}$$

$\vec{e}_t \wedge \vec{e}_n$: PLANO OSCULATOR $\Rightarrow$ la $\vec{a}$ siempre está en el plano osculador.

$\vec{e}_t \wedge \vec{e}_b$: PLANO TANGENTE

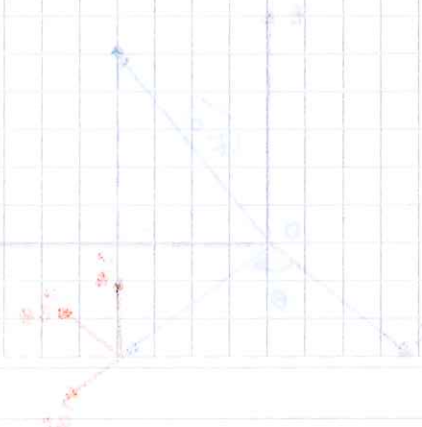
$\vec{e}_n \wedge \vec{e}_b$: PLANO NORMAL

$$\boxed{\hat{e}_t \wedge \hat{e}_n \wedge \hat{e}_b}$$

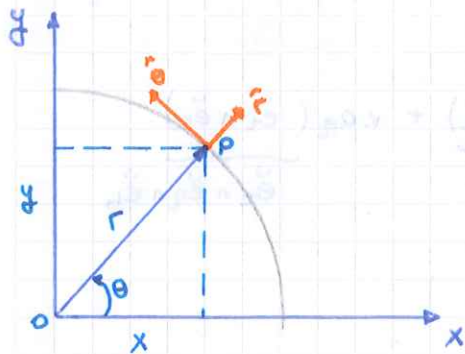
$\hookrightarrow$ TRIEDRO DE FRENET.

$$\hat{e}_b = \hat{e}_t \wedge \hat{e}_n$$

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{v}$$



③ SISTEMA DE REFERENCIA POLAR



$$\vec{r} = (\vec{p} - \vec{o}) = r \hat{e}_r$$

$$\hat{e}_r = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

$\vec{r} = \ddot{e}_r =$ versor radial

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\sin\theta \cdot \dot{\theta} \hat{i} + \cos\theta \dot{\theta} \hat{j} = \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$\vec{\theta} = \ddot{e}_\theta =$ versor transversal

$$\dot{\hat{e}}_\theta = \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta \dot{\theta} \hat{i} - \sin\theta \dot{\theta} \hat{j} = -\dot{\theta} \hat{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \hat{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta + r \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \hat{e}_\theta + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \right)$$

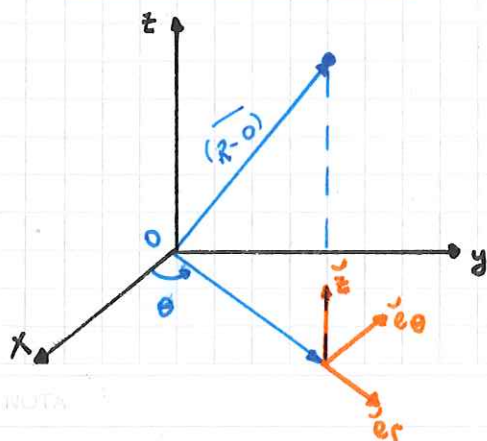
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \hat{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{e}_r + \left[r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \hat{e}_\theta}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta$$

④ coordenadas cilíndricas

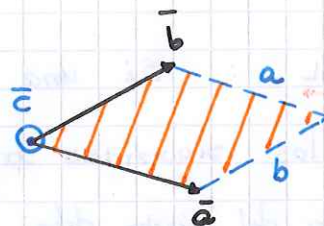
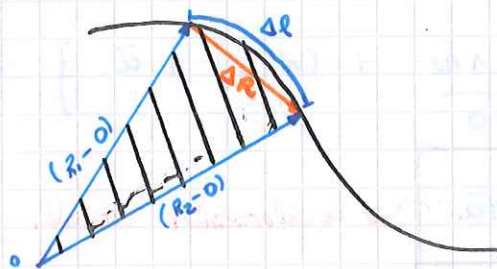


$$\vec{R} - \vec{o} = r \hat{e}_r + z \hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{R} - \vec{o})}{dt} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{z} \hat{k}$$

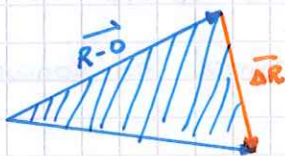
$$\vec{a} = \frac{d^2(\vec{R} - \vec{o})}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta + \ddot{z} \hat{k}$$

VELOCIDAD AREOLAR: área barrida por unidad de tiempo.



$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$$

$|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ = área paralelogramo



$\Rightarrow \vec{\Delta A}$: vector perpendicular al plano $(\vec{R}-O)$ y $\vec{\Delta R}$. El módulo de $\vec{\Delta A}$ es igual al área barrida.

$$\vec{\Delta A} = \frac{1}{2} (\vec{R}-O) \wedge \vec{\Delta R} \Rightarrow \frac{\vec{\Delta A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{(\vec{R}-O) \wedge \vec{\Delta R}}{\Delta t} = \vec{S}_{\text{m}} \quad \text{velocidad areal media.}$$

$$\vec{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{(\vec{R}-O) \wedge \vec{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \text{velocidad areal}$$

$$\vec{S} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\vec{R}-O) \wedge \vec{dR} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} (\vec{R}-O) \wedge \vec{dR} + (\vec{R}-O) \wedge \frac{d\vec{dR}}{dt} \right\} =$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{dR}}_{=0} + \frac{1}{2} (\vec{R}-O) \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{R}-O) \wedge \vec{v}$$

$\vec{dR}$ es tg a la traject.
 $\therefore \vec{v} \parallel \vec{dR}$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{R}-O) \wedge \vec{v}} \quad \text{vector velocidad areal.}$$

$\vec{S}$ es $\perp$ al área barrida

$$\bar{N} = \frac{d\bar{S}}{dt} : \text{aceleración areal.}$$

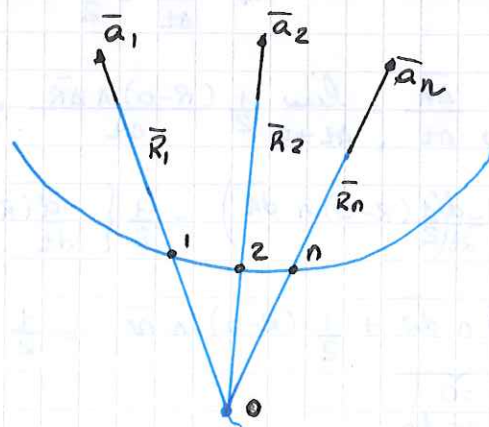
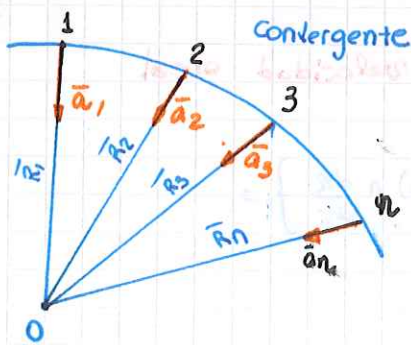
$$\bar{N} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \bar{v} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \bar{v} + (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \frac{d\bar{v}}{dt} \right\}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\bar{v} \wedge \bar{v}}_{=0} + (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \bar{a} \right\} = \frac{1}{2} (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \bar{a}$$

$\bar{N} = \frac{1}{2} (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \bar{a}$ *aceleración areal.* No tiene una dirección específicamente determinado.

MOVIMIENTO CENTRAL : Si una partícula se mueve en un campo de fuerzas central se cumplen las siguientes propiedades

- 1) La trayectoria del cuerpo debe ser plana
- 2) El momento angular de la partícula con respecto al centro O es cte: $\bar{L}_O = \text{cte}$
- 3) La $\bar{a}$ de la partícula bajo el efecto de una fuerza central es concurrente a un punto en todo momento (centro del movimiento).
- 4) la velocidad areal es cte: $\bar{S} = \text{cte}$.



Ejemplo: movimiento de los planetas

$$\bar{S} = \frac{1}{2} (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \bar{v}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{2} (\bar{R}-\bar{O}) \wedge \bar{a} \Rightarrow \text{Como } (\bar{R}-\bar{O}) \parallel \bar{a} \Rightarrow \bar{N} = 0; \text{ En mov. Central } \bar{N} = 0$$

$$\therefore \bar{N} = \frac{d\bar{S}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \bar{S} = \text{cte}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{R}-\vec{O}) \wedge \vec{v} = \text{cte}, \quad \vec{S} \text{ siempre es } \perp \text{ al plano formado por } (\vec{R}-\vec{O}) \text{ y } \vec{v}$$

$$\text{Def: } \vec{L}_O = (\vec{R}-\vec{O}) \wedge \vec{Q}$$

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab \sin \theta$$

$$\vec{L}_O = (\vec{R}-\vec{O}) \wedge m\vec{v} = m [(\vec{R}-\vec{O}) \wedge \vec{v}]$$

$$\vec{L}_O = m [2 \cdot \vec{S}]$$

$$\vec{L}_O = 2 \cdot m \cdot \vec{S} = \text{cte} \quad m = \text{cte} \text{ y } \vec{S} = \text{cte} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{cte}$$

- ① Trayectoria debe ser plana
- ② $\vec{L}_O = \text{cte}$; O Punto de concurrencia.
- ③ $\vec{S} = \text{cte}$
- ④ $\vec{a}$ concurrente a un punto en todo momento.

~~Trayectoria plana~~

Demonstración :

- ① Si hay un M.C. $\Rightarrow \vec{S} = \text{cte}$
- ② Si $\vec{S} = \text{cte} \Rightarrow$ Hay un M.C.

$$\text{① } \Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}] = \vec{F}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \quad \text{①}$$

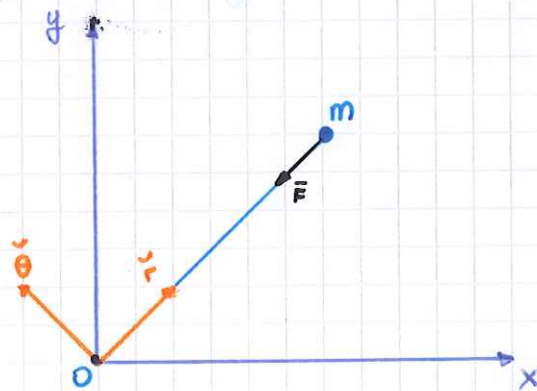
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad \text{②}, \quad \vec{a} \text{ concurrente a O en todo momento.}$$

Sea ② :

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{m}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{cte} = h$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} r\hat{r} \wedge (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta}\hat{k} = \frac{1}{2} h\hat{k} = \text{cte.}$$



$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\textcircled{B} \quad \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{R} - \vec{O}) \wedge \vec{V} = \text{cte}$$

Si un vector es cte $\Rightarrow |\text{vector}| = \text{cte}$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} r \hat{r} \wedge (\dot{r} \hat{r} + \dot{\theta} r \hat{\theta}) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = h = \text{cte} \quad \hat{r} \wedge \hat{\theta} = \hat{k}$$

$$r^2 \dot{\theta} = 2h = \text{cte} \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = \frac{d}{dt}(2h) = 0$$

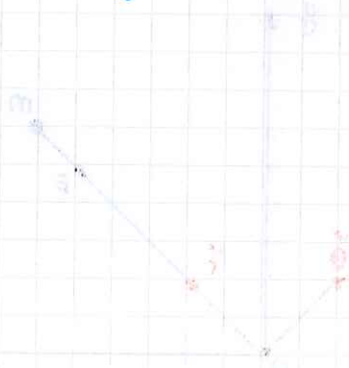
$$2\dot{r}r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

$$r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0, \quad r \neq 0$$

$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$ EQUIVALE A LA SEGUNDA EC. de movimiento Para una Particula en un comio central.

$(\vec{R} - \vec{O}) \wedge m\vec{V} = \vec{L}_0$; y $\vec{L}_0 = \text{cte}$ si hay movimiento central.

Ejemplo: la fuerza gravitacional que ejerce el sol sobre un planeta.



Fórmula de Binet : Válida únicamente Para movimientos centrales.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (R-O) \wedge \vec{v}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \rho \hat{r} \wedge (\dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta})$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} \hat{k} = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} \Rightarrow \text{H.C.}$$

$$\boxed{\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C} \Rightarrow \text{Constante de las áreas.}$$

$$\rho^2 = \frac{C}{\frac{d\theta}{dt}} ; \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\rho^2}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \left(\frac{C}{\rho^2} \right) = \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{C}{\rho^2} = C \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = C \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \quad (*)$$

$$(*) \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{d\rho^{-1}}{d\theta}$$

$$\therefore \frac{d\rho}{dt} = -C \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} \quad (1)$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -C \frac{d^2\rho^{-1}}{d\theta^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -C \frac{d^2\rho^{-1}}{d\theta^2} \cdot \frac{C}{\rho^2} ; \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\rho^2}$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{C^2}{\rho^2} \frac{d^2\rho^{-1}}{d\theta^2} \quad (2)$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} = \left[-\frac{C^2}{\rho^2} \frac{d^2\rho^{-1}}{d\theta^2} - \rho \left(\frac{C}{\rho^2} \right)^2 \right] \hat{r}$$

$$\vec{a} = -\frac{C^2}{\rho^2} \left[\frac{d^2\rho^{-1}}{d\theta^2} + \rho \cdot \frac{1}{\rho^2} \right] \hat{r}$$

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{C^2}{\rho^2} \left[\frac{d^2\rho^{-1}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \right] \hat{r}}$$

En coord. Polares : $(R-O) = \rho \hat{r}$

$$\vec{v} = \frac{d(R-O)}{dt} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + (\underbrace{\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}}_{=0}) \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \hat{r}$$

En un u.c. $\vec{a}$ sólo tiene componente radial.

• C es la Constante de aceleración de los cuerpos celestes

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2$$

$$v^2 = \left(-C \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{C}{r^2} \right)^2$$

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]$$

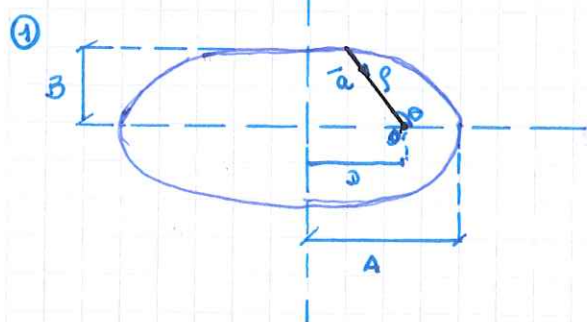
$$\vec{a} = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right] \vec{r}$$

Leyes de Kepler : Son movimientos cuya aceleración tiene la forma $a = -k \frac{1}{r^2}$

① Ley de Trayectoria : Cada planeta describe una elipse, siendo el sol uno de sus focos.

② Ley de superficies : El vector radio (r) trazado desde el sol hasta un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. $\Rightarrow \dot{S} = cte$

③ Ley de Periodos : El cuadrado del período de revolución del planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse. $\Rightarrow T^2 = K A^3$



$$S_m = \frac{A \cdot B \cdot \pi}{T}, \quad \pi \cdot A \cdot B \text{ ÁREA ELIPSE}$$

$$S = cte \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} C$$

$$C = 2S \Rightarrow C^2 = 4S^2 = \frac{4\pi^2 A^2 B^2}{T^2}$$

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Binet.

excentricidad de la elipse : $e = \frac{a}{A}$; $p = \frac{b^2}{A}$ $\Rightarrow$ Parámetro de la elipse.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{no expresión Polar de la elipse.}$$

$$C^2 \cdot \frac{1}{p} = \frac{4\pi^2 A B^2}{T^2} \cdot \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 A B^2}{T^2 \frac{b^2}{A}} = \frac{4\pi^2 A^3}{T^2 b^2} = \frac{4\pi^2 A^3}{T^2} = cte \therefore \frac{C^2}{p} = cte$$

$$A \cdot \frac{4\pi^2}{cte} = T^2$$

$$\frac{2}{T^2} = K A^3$$

$$p = \frac{P}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow p^{-1} = \frac{1 + e \cos \theta}{P} \quad (1)$$

a partir de la fórmula de Binet:

$$\bar{a} = -\frac{c^2}{p^2} \left(\frac{d^2 p^{-1}}{d\theta^2} + \frac{1}{p} \right) \hat{r} \quad (2)$$

$$p^{-1} = \frac{1 + e \cos \theta}{P} \Rightarrow \frac{d p^{-1}}{d\theta} = \frac{1}{P} \cdot (-e \sin \theta)$$

$$\frac{d^2 p^{-1}}{d\theta^2} = \frac{1}{P} (-e \cos \theta) \quad (3)$$

① y ③ en ②:

$$\bar{a} = -\frac{c^2}{p^2} \left[\frac{1}{P} (-e \cos \theta) + \frac{1 + e \cos \theta}{P} \right] \hat{r}$$

$$\bar{a} = \left(\frac{c^2}{p^2} \cdot \frac{1}{P} e \cos \theta - \frac{c^2}{p^2 P} - \frac{c^2 e \cos \theta}{p^2 P} \right) \hat{r} = -\frac{c^2}{p^2 P} \hat{r} = -\frac{c^2}{P} \frac{1}{p^2} \hat{r}$$

tomando el módulo: $a = \kappa \cdot \frac{1}{p^2}$

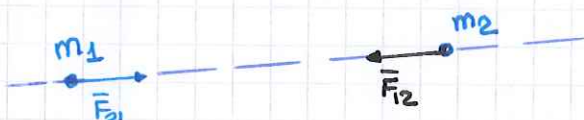
DINAMICA DEL PUNTO MATERIAL

① Principio de Mosa : Establece una relación entre la aceleración que adopta un P.M. y la fuerza que se le esté aplicando

$$\vec{F} = \alpha \vec{a}_i \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{F}}{\vec{a}_i} \Rightarrow \text{ESCALAR} \Rightarrow \alpha = m = \text{mosa.} \quad \left(\text{Capacidad de un cuerpo al cambio de movimiento} \right)$$
$$\vec{F} = m \vec{a}$$

② Principio de inercia : Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, ~~(permanecerá)~~ la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante (si originalmente estaba en movimiento). $\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \text{si } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

③ Principio de acción y reacción



$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$$
$$\vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

Si tenemos 2 P.M. (m_1 y m_2), entre ellos vamos a tener 2 $\vec{F}$ iguales. Misma dirección, módulo y ~~los~~ sentidos opuestos

Cantidad de Movimiento

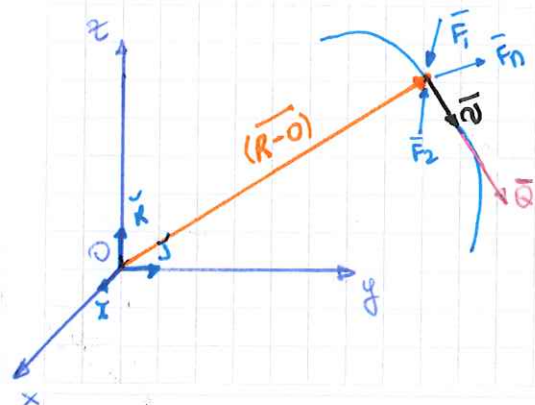
$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

MOMENTO CINÉTICO (momento angular)



$$\vec{L}_O = (\vec{R}-\vec{O}) \wedge \vec{Q}$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} [(\bar{R}-O) \wedge \bar{Q}] = \left(\frac{d\bar{R}}{dt} - \frac{d\bar{O}}{dt} \right) \wedge m\bar{v} + (\bar{R}-O) \wedge \frac{d\bar{Q}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = (\bar{v} - \bar{v}_O) \wedge m\bar{v} + (\bar{R}-O) \wedge \Sigma \bar{F}$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \underbrace{\bar{v} \wedge m\bar{v}}_0 - \bar{v}_O \wedge m\bar{v} + (\bar{R}-O) \wedge \Sigma \bar{F}$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = m\bar{v} \wedge \bar{v}_O + (\bar{R}-O) \wedge \Sigma \bar{F}$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{Q} \wedge \bar{v}_O + \bar{M}_O^{\bar{F}}$$

$$\therefore \bar{M}_O^{\bar{F}} = \frac{d\bar{L}_O}{dt} - \bar{Q} \wedge \bar{v}_O$$

$$\bar{M}_O^{\bar{F}} = \frac{d\bar{L}_O}{dt} + \bar{v}_O \wedge \bar{Q}$$

$$\text{Si } \bar{v}_O = 0 \Rightarrow \bar{M}_O^{\bar{F}} = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

$$\therefore \Sigma \bar{M}_O = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

TRABAJO : $dW = \bar{F} \times d\bar{r}$

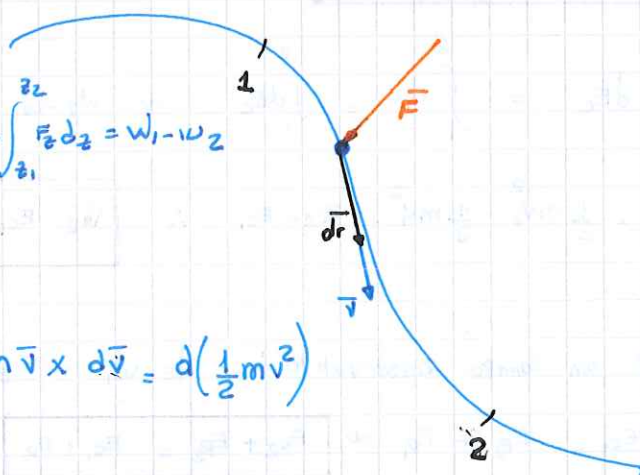
$$W_{1-2} = \int_1^2 dT = \int_1^2 \bar{F} \times d\bar{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = W_1 - W_2$$

$$dW = \bar{F} \times d\bar{r} = m \frac{d\bar{v}}{dt} \times d\bar{r}$$

$$dW = m d\bar{v} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = m d\bar{v} \times \bar{v} = m \bar{v} \times d\bar{v} = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_c$$

$$dW = dE_c$$



Ecuaciones fundamentales de la dinámica

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{m d\vec{v}}{dt} : \text{Cantidad de movimiento} \\ \textcircled{2} \quad \sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{r}_O \wedge \vec{Q} : \text{Variación de momento angular.} \\ \textcircled{3} \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dE_c : \text{Trabajo.} \end{array} \right.$$

~~Si estamos en un campo conservativo:~~

~~Si estamos en un campo conservativo:~~

Si estamos en un campo conservativo: $\exists U / \vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right)$

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k})$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \left(-\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \int_1^2 dU = U_2 - U_1$$

$W_{1 \rightarrow 2} = W_2 - W_1 = U_2 - U_1 \Rightarrow$ EL TRABAJO solo depende de la Posición final e INICIAL

Teorema de las Fuerzas vivas

$$dW = dE_c = \int_1^2 dW = \int_1^2 dE_c \Rightarrow W_2 - W_1 = E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W_2 - W_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{c2} - E_{c1} \quad \therefore \quad \boxed{W_2 - E_{c2} = W_1 - E_{c1}}$$

+ Si el un campo conservativo: $W_2 - W_1 = E_{c2} - E_{c1} = U_2 - U_1$, $U_i = -E_{p_i}$ ↗ Energía Potencial.

$$E_{c2} - E_{c1} = -E_{p2} + E_{p1} \Rightarrow \boxed{E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1}}$$

• Fundamentos de la Mecánica

$$\vec{F} = \vec{f}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

↳ Fuerzas naturales

- 1) Dependientes de la posición
- 2) Dependientes de la velocidad.
- 3) Dependientes del tiempo.

1) Fuerzas Posicionales: Fuerzas que se mueven en un determinado campo y dependen únicamente de la posición del punto.

$$\vec{F} = f(\vec{r})$$

$$\vec{F} = \vec{f}(x, y, z)$$

} Estas fuerzas están definidas en un campo de fuerzas.

$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m} \rightarrow$ campo de fuerzas, $\vec{H} \Rightarrow$ vector intensidad de campo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ H_x & H_y & H_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{H} \wedge d\vec{r} = 0$$

; El desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ sobre una línea de fuerza debe ser paralelo a $\vec{H}$.

$$\rightarrow \frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z} \rightarrow \text{Ec. diferenciales de líneas de fuerza.}$$

• Fuerzas Conservativas: Son aquellas fuerzas que son iguales al gradiente de una función escalar

$$\exists U / \vec{F} = f \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad \vec{F} = -\nabla U; \quad \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \therefore \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

2) Fuerzas dependientes de $\vec{v}$

$$\vec{F} = \vec{f}(\mu) = \vec{f}(k_0 + k_1 v + k_2 v^2 + \dots + k_n v^n)$$

$$\mu = k : \text{Rozamiento}$$

$$\mu = k_1 v : \text{viscosa}$$

$$\mu = k_2 v^2 : \text{hidráulica}$$

o Fuerzas viscosas

$\vec{F}_v = -\beta \cdot \vec{v}$; β = Coeficiente de roz. viscoso. Depende del fluido y de la forma del cuerpo.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$mg - \beta v = m \frac{dv}{dt} ; c = \frac{mg}{\beta}$$

$$g - \frac{\beta}{m} v = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\beta}{m} \left(v - \frac{mg}{\beta} \right) = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\beta}{m} (v - c) = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{\beta}{m} dt = \frac{dv}{v-c}$$

$$-\frac{\beta}{m} \int_{t_0}^t dt' = \int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'-c}$$

$$-\frac{\beta}{m} (t-t_0) = \ln(v(t)-c) - \ln(v_0-c)$$

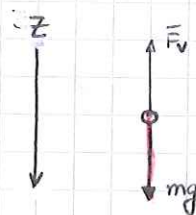
$$-\frac{\beta}{m} (t-t_0) = \ln \left(\frac{v(t)-c}{v_0-c} \right)$$

$$-\frac{\beta}{m} (t-t_0)$$

$$\frac{v(t)-c}{v_0-c} = e$$

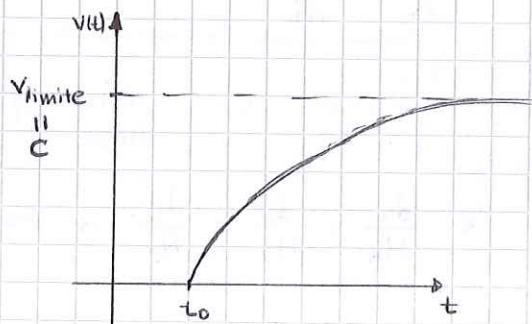
$$v(t) = (v_0-c) e^{\frac{\beta}{m}(t-t_0)} + c$$

$$v(t) = (v_0-c) e^{\frac{\beta}{m}(t-t_0)} + c$$



* 1º Caso) $v_0 = 0 \wedge g \neq 0$

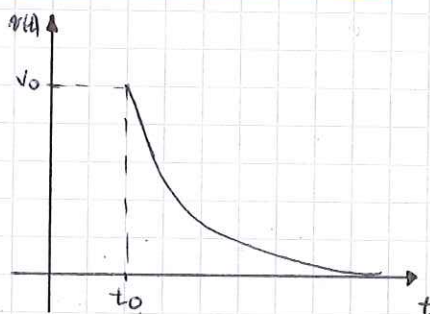
$$v(t) = c \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_0)} \right)$$



$$v_{limite} = \frac{mg}{\beta}$$

o 2º Caso) $g = 0 \wedge v_0 \neq 0$

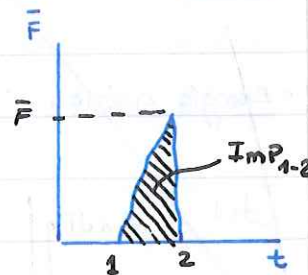
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_0)}$$



Impulso, choque : $\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{Q} \rightarrow \text{Impulso}$

$\Sigma \vec{F} dt = d\vec{Q} = m d\vec{v} \rightarrow \text{Imp}_{1-2} = \int_1^2 \Sigma \vec{F} dt = m \int_1^2 d\vec{v}$



Fuerzas impulsivas : Fuerzas muy grandes y de intervalos muy pequeños.

Choque : El choque entre 2 cuerpos ocurre en un intervalo relativamente pequeño y durante el cual los cuerpos ejercen Fuerzas relativamente grandes.

La recta normal a las superficies de contacto se llama línea de impacto. La línea de impacto pasa por ambos centros de masa el impacto se llama impacto central. En cambio, si dicha línea no coincide con los baricentros, se llama impacto excéntrico.

Si la dirección de las velocidades coinciden con la línea de impacto, se llama impacto directo. Si no, impacto oblicuo.

1) choque elástico : No hay pérdida energética



$\Delta \vec{Q} = 0 \therefore \vec{Q}_0 = \vec{Q}_f \rightarrow m_A \vec{v}_{A0} + m_B \vec{v}_{B0} = m_A \vec{v}_{Af} + m_B \vec{v}_{Bf}$

Reescribiendo en forma escalar $E_{c0} = E_{cf}$: $\frac{1}{2} m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B0}^2 = \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 + \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2$ } $\Delta E_c = 0$

2) choque plástico : Hay pérdida de energía



$m_A \vec{v}_{A0} + m_B \vec{v}_{B0} = (m_A + m_B) \vec{v}_f \rightarrow v_f = (m_A v_{A0} + m_B v_{B0}) / (m_A + m_B) \quad (1)$

$E_{c0} = E_{cf} + E_x$; $E_x \rightarrow \text{Energía perdida.}$ } reemplazo (1) en (2) :

$\frac{1}{2} m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B0}^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_f^2 + E_x \quad (2)$

$E_x = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)} (v_{A0}^2 + v_{B0}^2)$

° Energía cinética :

$$dW = \vec{F} \times d\vec{r} ; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt ; \quad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dW = m \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v} dt = m d\vec{v} \times \vec{v}$$

$$\int dW = m \int d\vec{v} \times \vec{v} = E_c \quad \left. \vphantom{\int dW} \right\} dW = dE_c$$

$$E_c = m \frac{v^2}{2}$$

$$\int_1^2 dW = \int_1^2 dE_c \rightarrow W_{12} = W_2 - W_1 = E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W_2 - E_{c2} = W_1 - E_{c1}$$

si el campo es conservativo: $W_2 = U_2$ y $W_1 = U_1$

$$U_2 - E_{c2} = U_1 - E_{c1}$$

$$-E_{p2} - E_{c2} = -E_{p1} - E_{c1}$$

$$\vec{U}_i = -E_{p_i}$$

$$E_{p2} + E_{c2} = E_{p1} + E_{c1}$$

Teorema de los fuerzas vivas.

si el campo no es conservativo :

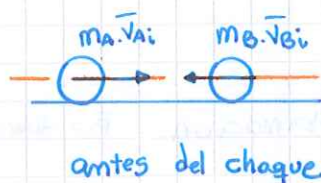
$$W_{FNC} = E_{M2} - E_{M1} = \Delta E_M$$

$$E_{M1} = E_p + E_c$$

$$E_{M2} = E_p + E_c$$

Impulso:

choque plástico



$$\Delta \bar{Q}_{sib} = 0 \Rightarrow m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = (m_A + m_B) v_F \Rightarrow v_F = \frac{m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi}}{m_A + m_B} \quad (1)$$

$$\Delta E \neq 0 \therefore E_{C1} = E_{C2} + E_x \quad ; \quad E_x : \text{Energía Perdida.}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_F^2 + E_x$$

$$E_x = \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_F^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ en } (2) : E_x = \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) \left(\frac{m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi}}{m_A + m_B} \right)^2$$

$$E_x = \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 - \frac{1}{2} \frac{[m_A^2 v_{Ai}^2 + m_B^2 v_{Bi}^2 + 2 m_A m_B v_{Ai} v_{Bi}]}{m_A + m_B}$$

$$E_x = \frac{1}{2} \frac{[(m_A + m_B)(m_A v_{Ai}^2 + m_B v_{Bi}^2) - m_A^2 v_{Ai}^2 - m_B^2 v_{Bi}^2 - 2 m_A m_B v_{Ai} v_{Bi}]}{m_A + m_B}$$

$$E_x = \frac{1}{2} (m_A + m_B) \left(\cancel{m_A^2 v_{Ai}^2} + m_A m_B v_{Bi}^2 + m_A m_B v_{Ai}^2 + \cancel{m_B^2 v_{Bi}^2} - \cancel{m_A^2 v_{Ai}^2} - \cancel{m_B^2 v_{Bi}^2} - 2 m_A m_B v_{Ai} v_{Bi} \right)$$

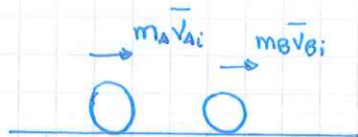
$$E_x = \frac{1}{2 (m_A + m_B)} \cdot (m_A m_B) \left(v_{Bi}^2 + v_{Ai}^2 - 2 v_{Ai} v_{Bi} \right) = \frac{m_A \cdot m_B}{2 (m_A + m_B)} (v_{Ai} - v_{Bi})^2$$

$$E_x = \frac{1}{2} \frac{m_A \cdot m_B}{(m_A + m_B)} (v_{Ai} - v_{Bi})^2$$

$m_A + m_B$: masa reducida

$(v_{Ai} - v_{Bi})^2$: dif. de velocidades.

Coefficiente de restitución: e



Si $v_{1i} > v_{2i} \Rightarrow$ ocurre el choque.



Deformación $\bar{P}$: fuerza



RESTITUCIÓN $\bar{R}$: fuerza

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt}$$

Análisis del cuerpo A antes de la restitución:

①

$$m_A v_{1i} - \int P dt = m_A v ; \quad v : \text{Velocidad intermedia}$$

Análisis del cuerpo A luego de la etapa deformación hasta finalizada la restitución:

$$m_A v - \int R dt = m_A v_{Af} \Rightarrow m_A v = m_A v_{Af} + \int R dt \quad (2)$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} : m_A v_{1i} - \int P dt = m_A v_{Af} + \int R dt$$

$$\int R dt = m_A v - m_A v_{Af} \quad \text{y} \quad \int P dt = m_A v_{1i} - m_A v$$

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{m_A v - m_A v_{Af}}{m_A v_{1i} - m_A v}$$

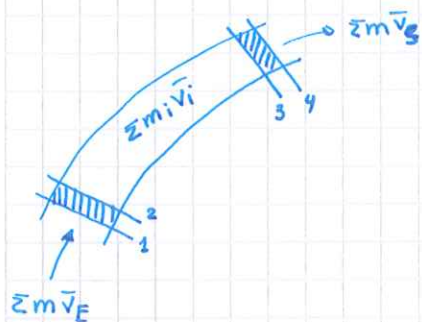
$$e = \frac{v - v_{Af}}{v_{1i} - v} ; \quad e = \frac{v_{2F} - v}{v - v_{2i}} \Rightarrow e = \frac{v_{2F} - v}{v - v_{2i}} = \frac{v - v_{Af}}{v_{1i} - v}$$

$$e = \frac{v_{2F} - v + v - v_{Af}}{v - v_{2i} + v_{1i} - v} = \frac{v_{2F} - v_{Af}}{v_{1i} - v_{2i}}$$

$$\therefore e = \frac{v_{2F} - v_{Af}}{v_{1i} - v_{2i}}$$

$e = 0$ choque plástico.

$e = 1$ choque elástico.

Circulación de Fluidos

$\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2 \Rightarrow$ Hay variación de la cont. de movimiento $\Sigma \bar{F} dt = d\bar{Q}$

Ingreso : Q_{13}

Egreso : Q_{24}

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{1-3} &= \bar{Q}_{1-2} + \bar{Q}_{2-3} = \Delta m \bar{v}_E + \Sigma m_i \bar{v}_i \\ \bar{Q}_{2-4} &= \bar{Q}_{2-3} + \bar{Q}_{3-4} = \Sigma m_i \bar{v}_i + \Delta m \bar{v}_S \end{aligned} \right\} \Delta \bar{Q} = \bar{Q}_{24} - \bar{Q}_{13} = \bar{F} dt$$

$$\Delta \bar{Q} = \Sigma m_i \bar{v}_i + \Delta m \bar{v}_S - (\Delta m \bar{v}_E + \Sigma m_i \bar{v}_i)$$

$$\Delta \bar{Q} = \Delta m (\bar{v}_S - \bar{v}_E)$$

en el límite : $d\bar{Q} = dm(\bar{v}_S - \bar{v}_E) = \Sigma \bar{F} \cdot dt$

$$\therefore \Sigma \bar{F} = \frac{dm}{dt} (\bar{v}_S - \bar{v}_E) \quad ; \quad \frac{dm}{dt} : \text{CAUDAL M\u00c1SICO}$$

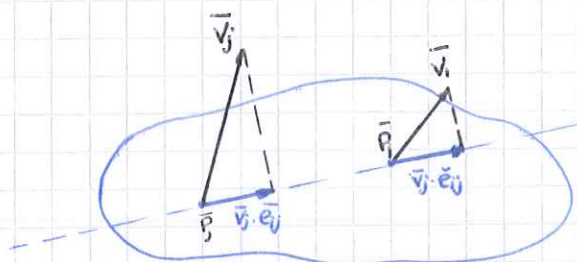
$$\Sigma \bar{F} = \frac{\rho dv}{dt} (\bar{v}_S - \bar{v}_E) \quad ; \quad \frac{\rho dv}{dt} : \text{CAUDAL VOLUM\u00c9TRICO}$$

Handwritten text in a cursive script, likely a letter or document. The text is written on a grid of horizontal lines. The handwriting is dense and fills most of the page. The text is written in a cursive script, likely a letter or document. The text is written on a grid of horizontal lines. The handwriting is dense and fills most of the page. The text is written in a cursive script, likely a letter or document. The text is written on a grid of horizontal lines. The handwriting is dense and fills most of the page.

2) Cinemática del C.R.

$$(\bar{r}_j - \bar{r}_i)^2 = \delta_{ij} = cte$$

2.A) Condición cinemática de rigidez: $\bar{v}_j \times \bar{e}_{ij} = \bar{v}_i \times \bar{e}_{ij}$



$$\bar{e}_{ij} = \frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|}$$

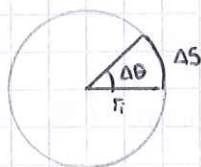
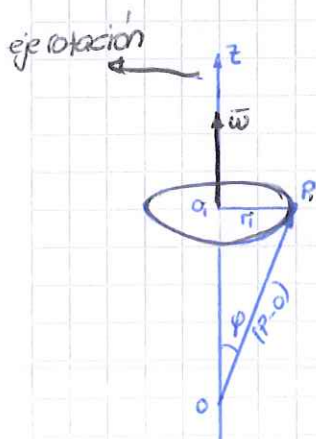
$$\bar{a}_i \times \bar{e}_{ij} - \bar{a}_j \times \bar{e}_{ij} = -\frac{[\bar{v}_i - \bar{v}_j]^2}{|\bar{r}_i - \bar{r}_j|}$$

2.B) Translación

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}; \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

- Lineal
- Curvilínea → Las trayectorias son congruentes.
- Todos los puntos tienen el mismo vector $\bar{v}$.
- Todos los puntos tienen el mismo vector $\bar{a}$.

2.C) Rotación



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2; \quad \gamma = cte$$

$$\bar{r}_i = (\bar{r} - \bar{o}); \quad \bar{v}_i = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{r}_i; \quad \text{[scribbled out]}$$

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \wedge (\bar{r} - \bar{o})$$

$$\bar{a}_i = \underbrace{\gamma \wedge (\bar{r} - \bar{o})}_{\bar{a}_{tg}} + \underbrace{\bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (\bar{r} - \bar{o})]}_{\bar{a}_n}; \quad \bar{\gamma} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

$\bar{v}_i$: Velocidad del Punto en análisis

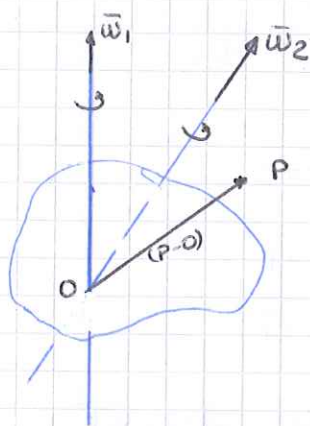
$\bar{\omega}$: Vector Velocidad angular del cuerpo

P_i : Punto en análisis

O : un Punto cualquiera $\in$ a $\bar{\omega}$

γ : aceleración angular

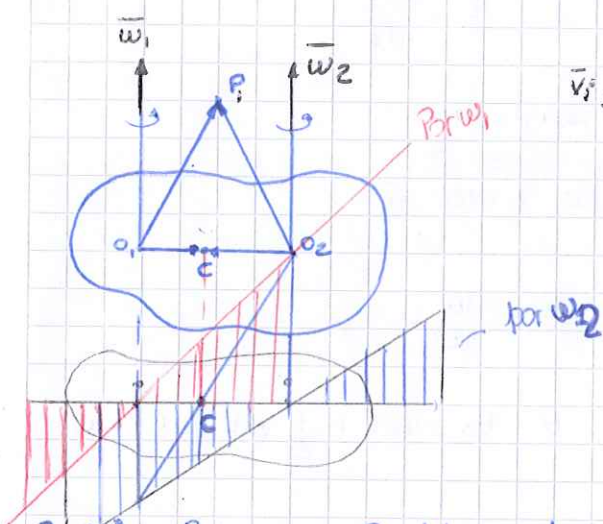
2-D) Rotaciones concurrentes



$$\bar{V}_i = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \wedge (\overrightarrow{P-O})$$

$$\bar{V}_i = \bar{\omega} \wedge (\overrightarrow{P_i-O})$$

2-E) Rotaciones Paralelas (igual sentido)

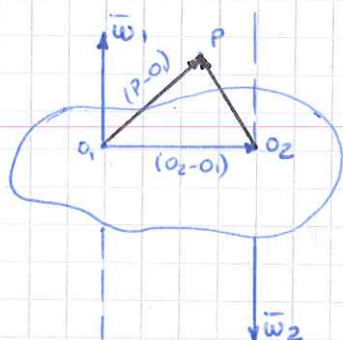


$$\bar{V}_i = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) \wedge (\overrightarrow{P_i-C})$$

C: Centro inst. de rotación

$$\bar{V}_C = 0$$

2-F) Rotaciones Paralelas de sentido opuesto (Par de rotaciones)



$$|\bar{\omega}_1| = |\bar{\omega}_2|$$

$$\bar{V} = \bar{\omega}_1 \wedge (\overrightarrow{O_2-O_1}) = \bar{\omega}_2 \wedge (\overrightarrow{O_1-O_2})$$

→ TRANSLACIÓN CURVILÍNEA

2-G) Roto traslación

Hay 4 casos: $\bar{V} = \bar{v} + \bar{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-O})$

i) si $\bar{\omega} \perp \bar{v} \Rightarrow$ Movimiento rígido Plano, se estudia la sección que contiene $\bar{v}$ y es normal a $\bar{\omega}$

ii) si $\bar{\omega} \parallel \bar{v} \Rightarrow$ Movimiento ~~helicoidal~~ helicoidal Simple

iii) si $\bar{\omega} \neq \bar{v} \Rightarrow$ Movimiento helicoidal tangente (va cambiando el eje)

iv) CASO General

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{P}_i - \vec{O})$$

$$\vec{v}_{0_1} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{O}_1 - \vec{O})$$

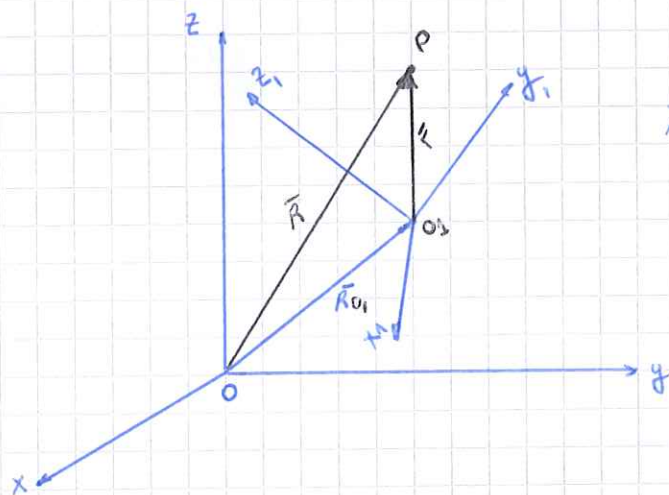
$$\vec{v}_i - \vec{v}_{0_1} = \vec{\omega} \wedge (\vec{P}_i - \vec{O}_1)$$

$$\therefore \vec{v}_i = \vec{v}_{0_1} + \vec{\omega} \wedge (\vec{P}_i - \vec{O}_1) \rightarrow \text{Ec. impropia}$$

$\vec{v}_i$ = velocidad del punto considerado
 $\vec{v}_{0_1}$ = velocidad del origen de la terna móvil (O_1), tomado como centro de reducción.
 $\vec{\omega}$ = vector traslación del C.R. trasladado a O_1
 $\vec{r} = (\vec{P}_i - \vec{O}_1)$ = vector posición del punto considerado, referido a O_1

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{0_1} + \vec{\gamma} \wedge (\vec{P}_i - \vec{O}_1) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{P}_i - \vec{O}_1)] \rightarrow \text{Ec. impropia de las aceleraciones}$$

2-F) Movimiento Rígido General



$$\vec{r} = (\vec{P} - \vec{O}) = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$$

$$\vec{R} = (\vec{P} - \vec{O}) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\vec{R}_{0_1} = (\vec{O}_1 - \vec{O}) = x_{0_1} \vec{i} + y_{0_1} \vec{j} + z_{0_1} \vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_{0_1} \quad \therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_{0_1} = \frac{d}{dt} (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1) = x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

$$A) \quad \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge [x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1] = x_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{i}_1) + y_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1) + z_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{k}_1)$$

$$B) \quad \vec{v}_i - \vec{v}_{0_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Comparando A), B) y $\frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 ; \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 ; \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_1$$

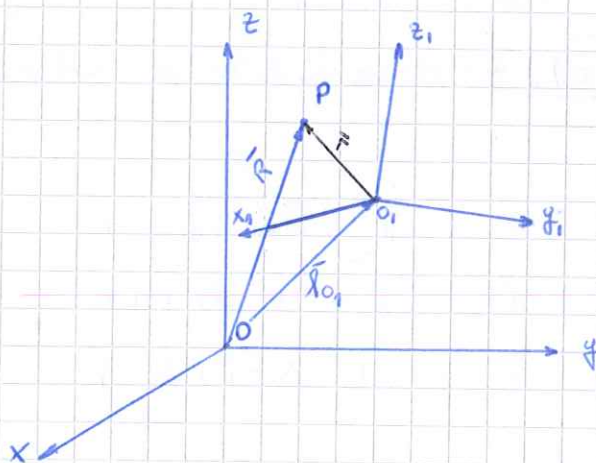
2-G) Movimiento relativo a un Sist. de referencia móvil

1) Mov. Relativo: Movimiento del c.r. con respecto a la terna móvil (terna de arrastre) como si la misma estuviera fija

2) Movimiento de arrastre: Movimiento del c.r. como si estuviera solidariamente unido a la terna móvil.

3) Mov. Absoluto: Movimiento del c.r. respecto de la terna absoluta como consecuencia de la simultaneidad de los mov. anteriores.

- $\vec{\omega}$ → Vector de rotación de la terna de arrastre.
- $\vec{\omega}$ → Velocidad de rotación del cuerpo.



$$\vec{r} = (\overline{P-O_1}) = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$$

$$\vec{R} = (\overline{P-O})$$

$$\vec{r}_{01} = (\overline{O_1-O})$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1, \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1$$

$$\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_1$$

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}_{01} \quad \therefore \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{R} - \vec{r}_{01})}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{01}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_{01}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_{01} = \frac{d}{dt} [x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1] = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 + x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_{01} = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 + x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_{01} = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 + x_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{i}_1) + y_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1) + z_1 (\vec{\omega} \wedge \vec{k}_1)$$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_{01} = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 + \vec{\omega} \wedge [x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1]$$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_{01} = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$\vec{v}_i$ = Velocidad Absoluta

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1$$

$$\vec{v}_{arr} = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v}_i = \dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1 + \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_i - \vec{O}_1) + \vec{v}_{rel}$$

$$\bar{V}_i = \bar{V}_{orr} + \bar{V}_{rel}$$

$$\bar{V}_i = \bar{V}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{V}_{rel}$$

V_i : Velocidad Absoluta (R/Oxyz) del Punto P

$\bar{V}_{rel}$: Velocidad relativa (R/O, x, y, z_i) del Punto P

$\bar{V}_{orr}$: Velocidad de orrastre (R/Oxyz) del Punto O_1

$$\bar{a}_i = \frac{d}{dt} \bar{V}_{orr} + \frac{d}{dt} \bar{V}_{rel}$$

$$\bar{a}_i = \underbrace{\frac{d}{dt} [\bar{x}_1 \hat{i}_1 + \bar{y}_1 \hat{j}_1 + \bar{z}_1 \hat{k}_1]}_{(B)} + \underbrace{\frac{d}{dt} [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{V}_{O_1}]}_{(A)}$$

$$B = \bar{x}_1 \frac{d\hat{i}_1}{dt} + \bar{x}_1 \hat{i}_1 + \bar{y}_1 \hat{j}_1 + \bar{y}_1 \frac{d\hat{j}_1}{dt} + \bar{z}_1 \hat{k}_1 + \bar{z}_1 \frac{d\hat{k}_1}{dt}$$

$$B = \bar{x}_1 \hat{i}_1 + \bar{y}_1 \hat{j}_1 + \bar{z}_1 \hat{k}_1 + \bar{x}_1 \frac{d\hat{i}_1}{dt} + \bar{y}_1 \frac{d\hat{j}_1}{dt} + \bar{z}_1 \frac{d\hat{k}_1}{dt}$$

$$B = \bar{O}_{rel} + \bar{x}_1 (\bar{\omega} \wedge \hat{i}_1) + \bar{y}_1 (\bar{\omega} \wedge \hat{j}_1) + \bar{z}_1 (\bar{\omega} \wedge \hat{k}_1)$$

$$B = \bar{a}_{rel} + \bar{\omega} \wedge [\bar{x}_1 \hat{i}_1 + \bar{y}_1 \hat{j}_1 + \bar{z}_1 \hat{k}_1]$$

$$B = \bar{a}_{rel} + \bar{\omega} \wedge \bar{V}_{rel}$$

$$A = \frac{d}{dt} [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{V}_{O_1}] = \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge \frac{d}{dt} (P_i - O_1) + \bar{a}_{O_1}$$

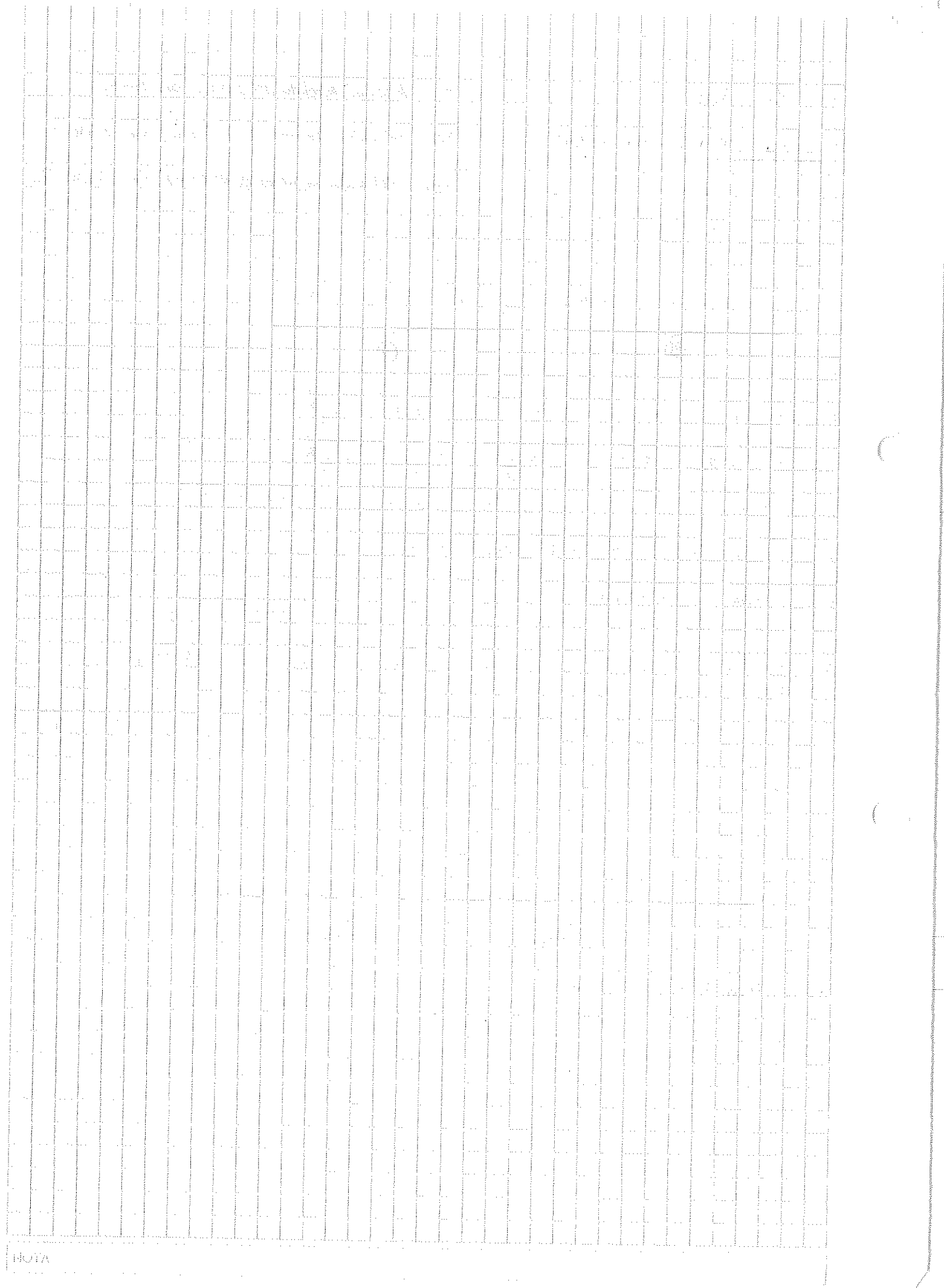
$$A = \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge \frac{d}{dt} (\bar{x}_1 \hat{i}_1 + \bar{y}_1 \hat{j}_1 + \bar{z}_1 \hat{k}_1) = \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge [\bar{V}_{rel} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)] + \bar{a}_{O_1}$$

$$A = \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge [\bar{V}_{rel} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)]$$

$$\bar{a}_i = \underbrace{\bar{a}_{O_1} + \bar{\omega} \wedge (P_i - O_1) + \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P_i - O_1)]}_{\bar{a}_{orr}} + \underbrace{\bar{a}_{rel}}_{\bar{a}_{rel}} + \underbrace{2\bar{\omega} \wedge \bar{V}_{rel}}_{\bar{a}_{corr}}$$

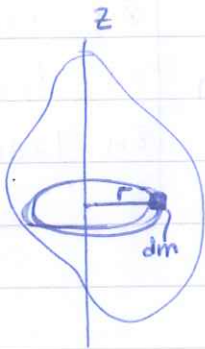
$$\bar{a} = \bar{a}_{orr} + \bar{a}_{rel} + \bar{a}_{corr}$$

Lo ofrece por la rotación de los ejes



D.C.R

① Momento de inercia : Es una medida de la resistencia que tiene el C.R. a ser sometido a una aceleración angular.



$$I = \int_m r^2 dm > 0$$

$$[I] = \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

①.1 Teorema de los ejes Paralelos

$$r^2 = (d + x')^2 + y'^2$$

$$I = \int_m r^2 dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2] dm$$

$$I = \int_m [d^2 + x'^2 + 2dx' + y'^2] dm$$

$$I = \int_m (x'^2 + y'^2) dm + 2d \int_m x' dm + d^2 \int_m dm$$

$$I = \int_m r'^2 dm + \underbrace{2d \int_m x' dm}_{\substack{\text{¿ Pasa Por G. } \\ \text{¿?}}} + d^2 \int_m dm ; \quad \int_m r'^2 dm = I_G ; \quad \int_m x' dm = 0$$

$$\int_m dm = M$$

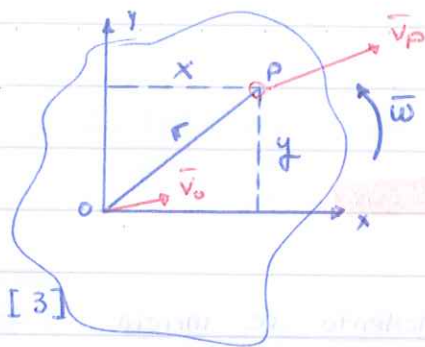
$$I = I_G + Md^2$$

Radio de Giro (K) : $I = mK^2$ o' $K^2 = \frac{I}{m}$

CENTRO DE MASA (G-O) : $M(G-O) = \int (P-O) dm$

Energía cinética : $T = \frac{1}{2} \int_m \bar{v}_P^2 dm$ [1]

$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (P-O)$ [2]



$\bar{v}_P^2 = \bar{v}_P \cdot \bar{v}_P = [\bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (P-O)] \cdot [\bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (P-O)]$ [3]

$\bar{v}_P^2 = \bar{v}_O \cdot \bar{v}_O = \bar{v}_O^2 + 2 \bar{v}_O \times [\bar{\omega} \wedge (P-O)] + [\bar{\omega} \wedge (P-O)]^2$

[3] en [1] : $T = \frac{1}{2} \int_m [\bar{v}_O^2 + 2 \bar{v}_O \times [\bar{\omega} \wedge (P-O)] + [\bar{\omega} \wedge (P-O)]^2] dm$

$T = \frac{1}{2} \int_m \bar{v}_O^2 dm + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_m \bar{v}_O \times [\bar{\omega} \wedge (P-O)] dm + \frac{1}{2} \int_m [\bar{\omega} \wedge (P-O)]^2 dm$

$T = \frac{1}{2} M \bar{v}_O^2 + \bar{v}_O \times \bar{\omega} \wedge \int_m (P-O) dm + \frac{1}{2} I_O \omega^2$

$T = \frac{1}{2} M \bar{v}_O^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 + \bar{v}_O \times \bar{\omega} \wedge M(G-O)$

Si $O \equiv G$: $T = \frac{1}{2} M \bar{v}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

(A)

(B)

(A) Ec. de traslación

(B) Ec. de rotación

(C) Fuerza viva compuesta.

Trabajo :

$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r}$

$W_{1 \rightarrow 2} = \int dW = \int \bar{F} \cdot d\bar{r}$; $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$; $d\bar{r} = \bar{v} dt$; $\bar{v}_i = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (\bar{r}_i - \bar{r}_O)$

$dW = \sum \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i = \sum \bar{F}_i \cdot [\bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (\bar{r}_i - \bar{r}_O)] dt$

$dW = \sum \bar{F}_i \cdot \bar{v}_O dt + \sum \bar{F}_i \cdot \bar{\omega} \wedge (\bar{r}_i - \bar{r}_O) dt$

$dW = \sum [\bar{F}_i \cdot \bar{v}_O + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{r}_i - \bar{r}_O) \wedge \bar{F}_i}_{\bar{M}_O}] dt = \bar{F} \cdot \bar{v}_O dt + \bar{\omega} \times \bar{M}_O dt$

$dW = \bar{F} \cdot \bar{v}_O dt + \bar{\omega} \times \bar{M}_O dt$

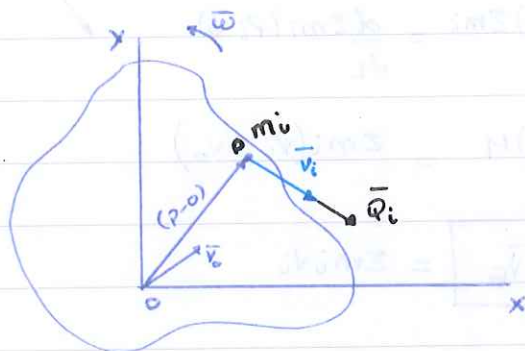
Cantidad de Movimiento ($\vec{Q}$) y Momento Cinético ($\vec{L}_i$)

obj: Cantidad de Movimiento $\equiv$ Linear Momentum ($\vec{L}$)

Momento cinético ($\vec{L}_i$) $\equiv$ Angular Momentum ($\vec{H}$)
(MOMENTO ANGULAR)

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_0 = \sum (\vec{P}-\vec{O}) \wedge m_i [\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{P}-\vec{O})]$$



$$\vec{L}_0 = \sum m_i [\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{P}-\vec{O})] \wedge (\vec{O}-\vec{P})$$

$$\vec{L}_0 = \underbrace{\sum m_i \vec{v}_0 \wedge (\vec{O}-\vec{P})}_{\vec{L}_{01}} + \underbrace{\sum m_i [\vec{\omega} \wedge (\vec{P}-\vec{O})] \wedge (\vec{O}-\vec{P})}_{\vec{L}_{02}}$$

$$\vec{L}_{01} = \sum m_i [\vec{v}_0 \wedge (\vec{O}-\vec{P}_i)] = \vec{v}_0 \wedge \sum m_i (\vec{O}-\vec{P}_i)$$

$$\vec{L}_{01} = \vec{v}_0 \wedge M (\vec{O}-\vec{G}) = M (\vec{G}-\vec{O}) \wedge \vec{v}_0$$

$$\vec{L}_{02} = \sum m_i [\vec{\omega} \wedge (\vec{P}-\vec{O})] \wedge (\vec{O}-\vec{P}) = \vec{I}_0 \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_0 = M (\vec{G}-\vec{O}) \wedge \vec{v}_0 + \vec{I} \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{I} \rightarrow \text{Tensor de inercia}$$

$$\text{si } O \equiv G \rightarrow \vec{L}_G = \vec{I}_G \vec{\omega} \quad [\vec{L}] = \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

I_{xx} : momento de inercia.

I_{xy} : Producto de inercia.

M

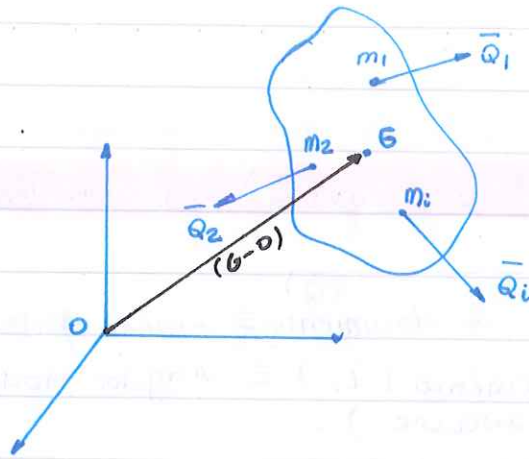
C.M. :

$$(\vec{G}-\vec{0}) = \frac{\sum m_i (\vec{r}_i - \vec{0})}{\sum m_i}$$

$$(\vec{G}-\vec{0}) \sum m_i = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{0})$$

$$\frac{d(\vec{G}-\vec{0})}{dt} \sum m_i = \frac{d \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{0})}{dt}$$

$$(\vec{V}_G - \vec{V}_0) M = \sum m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0)$$



$$\boxed{\vec{Q} = M \vec{V}_G} = \sum m_i \vec{v}_i$$

usando la expresión mas amplia de $\vec{v}$ p/c.r: $\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_i - \vec{0})$

$$\vec{Q} = \sum m_i (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_i - \vec{0})) = \sum m_i \vec{v}_0 + \sum m_i [\vec{\omega} \wedge (\vec{r}_i - \vec{0})]$$

$$\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{0})$$

$$\boxed{\vec{Q} = M \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge M (\vec{G} - \vec{0})}$$

$$\text{Si } \vec{G} \equiv \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{Q} = M \vec{V}_G}$$

ECUACIONES CARDINALES DE LA DINÁMICA

$$\sum \vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_G \quad (\text{si } O \equiv G)$$

$$\vec{Q} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge M(\vec{G}-O)$$

$$\sum \vec{F}^{(e)} = M \frac{d\vec{V}_O}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge M(\vec{G}-O)) \quad (\text{si } O \neq G) \quad (1)$$

$$\vec{L}_O = (\vec{R}_i - O) \wedge \sum m_i \vec{v}_i \quad \sum \vec{F}^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}((\vec{R}_i - O) \wedge \sum m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt}(\vec{R}_i - O) \wedge \sum m_i \vec{v}_i + (\vec{R}_i - O) \wedge \frac{d}{dt}(\sum m_i \vec{v}_i)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = (\vec{V}_i - \vec{V}_O) \wedge \vec{Q} + (\vec{R}_i - O) \wedge \sum \vec{F}^{(e)} \quad ; \quad \vec{M}_O = (\vec{R}_i - O) \wedge \sum \vec{F}^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{V}_O \wedge \vec{Q} + \sum \vec{M}_O^{(e)}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O^{(e)} - \vec{V}_O \wedge \vec{Q} \quad (2)$$

$$dW = \sum \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i$$

$$; \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$dW = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt$$

$$dW = \sum m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = dE_c$$

$$\therefore \boxed{dT = dE_c} \quad (3)$$

Ec. Cardinales de la dinámica el mov relativo

Si $\bar{Q} = Q_x \tilde{i}_1 + Q_y \tilde{j}_1 + Q_z \tilde{k}_1$, $\tilde{i}_1, \tilde{j}_1, \tilde{k}_1$ terna móvil.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \dot{Q}_x \tilde{i}_1 + Q_x \frac{d\tilde{i}_1}{dt} + \dot{Q}_y \tilde{j}_1 + Q_y \frac{d\tilde{j}_1}{dt} + \dot{Q}_z \tilde{k}_1 + Q_z \frac{d\tilde{k}_1}{dt}$$

Por Poisson: $\frac{d\tilde{i}_1}{dt} = \bar{\omega}_T \wedge \tilde{i}_1$, $\frac{d\tilde{j}_1}{dt} = \bar{\omega}_T \wedge \tilde{j}_1$, $\frac{d\tilde{k}_1}{dt} = \bar{\omega}_T \wedge \tilde{k}_1$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \underbrace{\dot{Q}_x \tilde{i}_1 + \dot{Q}_y \tilde{j}_1 + \dot{Q}_z \tilde{k}_1}_{\left. \frac{d\bar{Q}}{dt} \right|_{rel}} + Q_x \bar{\omega}_T \wedge \tilde{i}_1 + Q_y \bar{\omega}_T \wedge \tilde{j}_1 + Q_z \bar{\omega}_T \wedge \tilde{k}_1$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \left. \frac{d\bar{Q}}{dt} \right|_{rel} + \bar{\omega}_T \wedge (Q_x \tilde{i}_1 + Q_y \tilde{j}_1 + Q_z \tilde{k}_1)$$

$$\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \left. \frac{d\bar{Q}}{dt} \right|_{rel} + \bar{\omega}_T \wedge \bar{Q} = \sum \bar{F}^{(e)}}$$

$$\bar{L}_0 = L_{0x} \tilde{i}_1 + L_{0y} \tilde{j}_1 + L_{0z} \tilde{k}_1$$

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \dot{L}_{0x} \tilde{i}_1 + L_{0x} \bar{\omega}_T \wedge \tilde{i}_1 + \dot{L}_{0y} \tilde{j}_1 + L_{0y} \bar{\omega}_T \wedge \tilde{j}_1 + \dot{L}_{0z} \tilde{k}_1 + L_{0z} \bar{\omega}_T \wedge \tilde{k}_1$$

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \dot{L}_{0x} \tilde{i}_1 + \dot{L}_{0y} \tilde{j}_1 + \dot{L}_{0z} \tilde{k}_1 + \bar{\omega}_T \wedge \bar{L}_0$$

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \left. \frac{d\bar{L}_0}{dt} \right|_{rel} + \bar{\omega}_T \wedge \bar{L}_0$$

$$\therefore \sum \bar{M}_0^{(e)} = \frac{d\bar{L}_0}{dt} + \bar{v}_0 \wedge \bar{Q}$$

$$\boxed{\sum \bar{M}_0^{(e)} = \left. \frac{d\bar{L}_0}{dt} \right|_r + \bar{\omega}_T \wedge \bar{L}_0 + \bar{v}_0 \wedge \bar{Q}}$$

VIBRACIONES

Vibración Mecánica: es el movimiento de una partícula que oscila alrededor de una posición de equilibrio. La mayoría de las vibraciones en máquinas y estructuras son indeseables

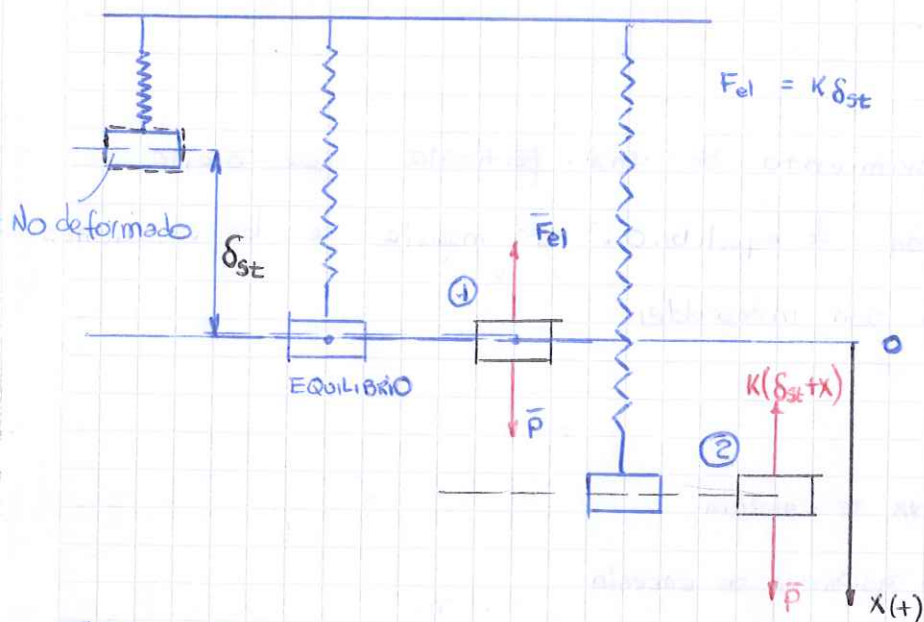
SIMPLIFICACIÓN MATEMÁTICA

- 1) MASA RÍGIDA Y NO DISIPATIVA DE ENERGÍA
- 2) RESORTE SIN MASA Y NO DISIPATIVA DE ENERGÍA
- 3) AMORTIGUADOR SIN MASA Y NO ELÁSTICO

VIBRACIONES
MÁS SIMPLES

- LIBRES
- FORZADAS
- AMORTIGUADAS
 - LIBRES AMORTIGUADAS
 - FORZADAS AMORTIGUADAS

1) MOV. ARMÓNICO SIMPLE (VIBRACIONES SIMPLES)



$$\sum \bar{F} = m\bar{a}$$

$$mg - K(\delta_{st} + x) = m\ddot{x} \quad , \quad mg = K\delta_{st}$$

$$\cancel{K\delta_{st}} - \cancel{K\delta_{st}} - Kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \text{E.D.}}$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad ;$$

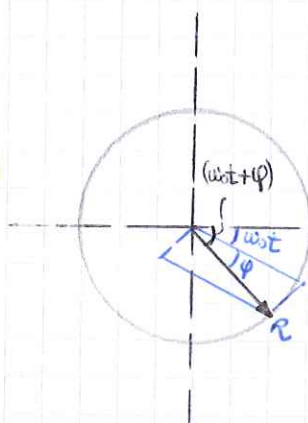
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

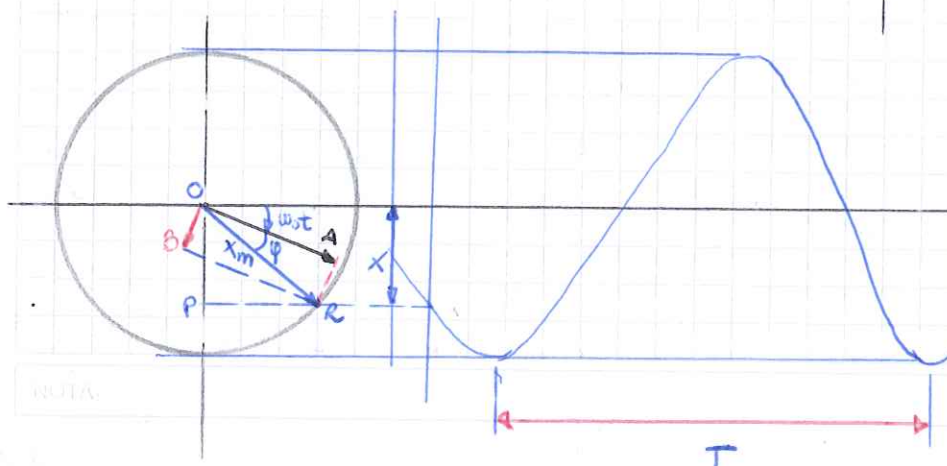
$$\text{SP: } x = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t) - B\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - B\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$



$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$



OP =

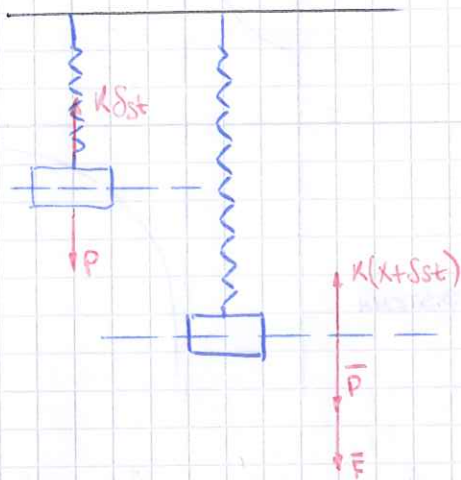
$$OP = OR \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = x_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -x_m \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

2) VIBRACIONES FORZADAS



$$\sum \vec{F} = m \ddot{x}$$

$$F + mg - K(x + s_{st}) = m \ddot{x}$$

$$F = F_m \sin(\omega_f t)$$

$$F_m \sin(\omega_f t) - Kx = m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} + Kx = F_m \sin(\omega_f t)$$

ω_f : Frecuencia circular forzada.

$$\text{Solución: } x = x_H + x_P = \underbrace{x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)}_{\text{R. TRANS.}} + \underbrace{x_m \sin(\omega_f t)}_{\text{R. PERMANENTE}}$$

R. TRANS.

R. PERMANENTE

$$x_P = x_m \sin(\omega_f t)$$

$$\dot{x}_P = x_m \omega_f \cos(\omega_f t)$$

$$\ddot{x}_P = -x_m \omega_f^2 \sin(\omega_f t)$$

$$\left. \begin{aligned} x_P &= x_m \sin(\omega_f t) \\ \dot{x}_P &= x_m \omega_f \cos(\omega_f t) \\ \ddot{x}_P &= -x_m \omega_f^2 \sin(\omega_f t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m(-x_m \omega_f^2 \sin(\omega_f t)) + K x_m \sin(\omega_f t) &= F_m \sin(\omega_f t) \\ -x_m m \omega_f^2 + \frac{K}{1} x_m &= \frac{F_m}{1} \end{aligned}$$

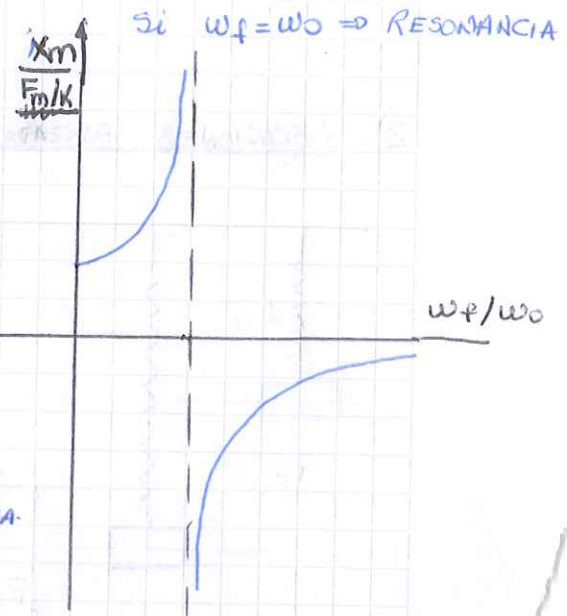
$$x_m (K - m \omega_f^2) = F_m \Rightarrow x_m = \frac{F_m}{K - m \omega_f^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$x_m = \frac{F_m/K}{1 - \frac{m}{K} \omega_f^2} = \frac{F_m/K}{1 - \frac{\omega_f^2}{(\frac{K}{m})}} = \frac{F_m/K}{1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}}$$

$$x_m = \frac{F_m/K}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \text{AMPLITUD VIBRACIONES FORZADAS.}$$

$$\text{FACTOR DE AMPLIFICACIÓN} = \frac{x_m}{F_m/k} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}$$



$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \text{FRECUENCIA NATURAL}$$

$$f_f = \frac{\omega_f}{2\pi} \rightarrow \text{FRECUENCIA FORZADA}$$

$\omega_0 \Rightarrow$ depende de los caract. físicas del sistema.

$\omega_f \Rightarrow$ depende de la fuerza perturbadora

Cuando $\omega_0 = \omega_f$ $x_m \rightarrow \pm\infty \Rightarrow$ cuando ocurre la resonancia, los niveles de vibración que resultan pueden ser muy altos y pueden causar daños muy rápidamente

3) VIBRACIONES AMORTIGUADAS

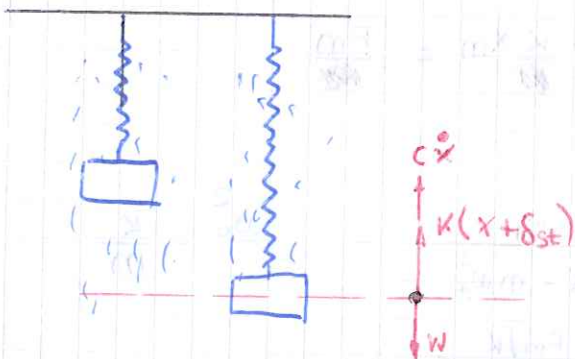
todos los vibraciones se amortiguan en cierto grado gracias a las

fuerzas de fricción

- $\Rightarrow$ FRICCION SECA [entre C.R.]
- $\Rightarrow$ FRICCION FLUIDA [C.R. EN UN FLUIDO]
- $\Rightarrow$ FRICCION INTERNA [entre moléculas de un cuerpo elástico]

$$\vec{F}_{\text{amor}} = -c \vec{v}$$

$\Rightarrow$ amortiguamiento viscoso
 $\Rightarrow$ a velocidades bajas y moderadas



$$\sum \vec{F} = m\ddot{x}$$

$$mg - K(x + \delta_{st}) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \Rightarrow \textcircled{1}$$

propongo: $x = e^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} \Rightarrow$ reemplazo en $\textcircled{1}$

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + K e^{\lambda t} = 0$$

$$m\lambda^2 + c\lambda + K = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mK}$$

$$\lambda = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{4mk}{4m^2}}$$

$$\lambda = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

(8)

$$\Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow \frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow c^2 = 4m^2 \cdot \frac{k}{m}$$

$$c = c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c_c = 2m \omega_0$$

Se estudian 3 casos :

① MOV. SOBREAMORTIGUADO : $\left[\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} \right] > 0$ $\underline{c > c_c}$

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ y son negativos. $\left. \begin{array}{l} x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \text{ tiende a cero} \\ \text{cuando } t \text{ aumenta de manera indefinida.} \end{array}$

② MOV. CRITICAMENTE AMORTIGUADO : $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \therefore c_c = 2m \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c_c}{2m} \pm 0 = -\omega_0 \Rightarrow \text{raíz doble.}$$

$x = (A+B) e^{-\omega_0 t}$ $\leadsto$ Estos movimientos vuelven a suposición de equilibrio en el tiempo ~~menor~~ más corto posible sin oscilación.

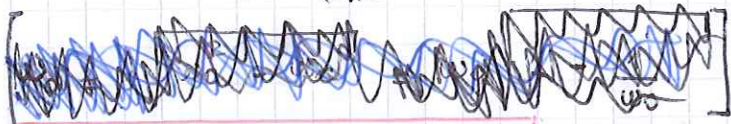
③ MOV. SUBAMORTIGUADO $\left[\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} \right] < 0$ $\underline{c < c_c}$

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$: λ_1 y λ_2 son complejos y conjugados

$$x = e^{-\frac{c}{2m} t} [A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t]$$

ω_d : frecuencia angular de vibración amortiguada ó seudofrecuencia

$$\omega_d^2 = -\delta = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2 \omega_0^2$$



$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \sin(\omega_d t + \phi) \sim$$

SOLUCIÓN GENERAL P/ VIBRACIONES AMORTIGUADAS.

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2};$$

$$\frac{c}{c_c} = \underbrace{\frac{F.A.}{Z}}_{\text{FACTOR AMORT.}}$$

$\zeta > 0 \Rightarrow$ SOBREAMORTIGUADO

$\zeta = 0 \Rightarrow$ AMORT. CRÍTICO.

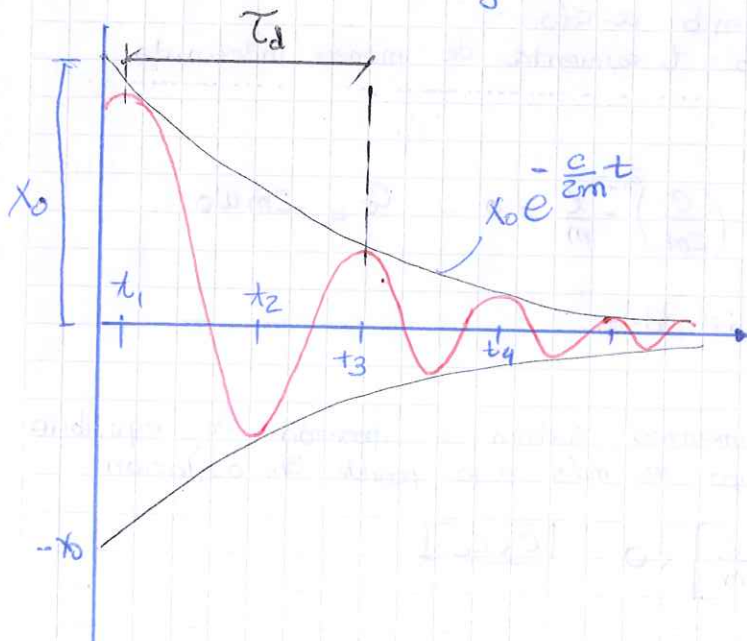
$\zeta < 0 \Rightarrow$ MOV. SUBAMORTIGUADO

$$x = x_0 e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$c_c = 2m\omega_0$$

es propio del sistema

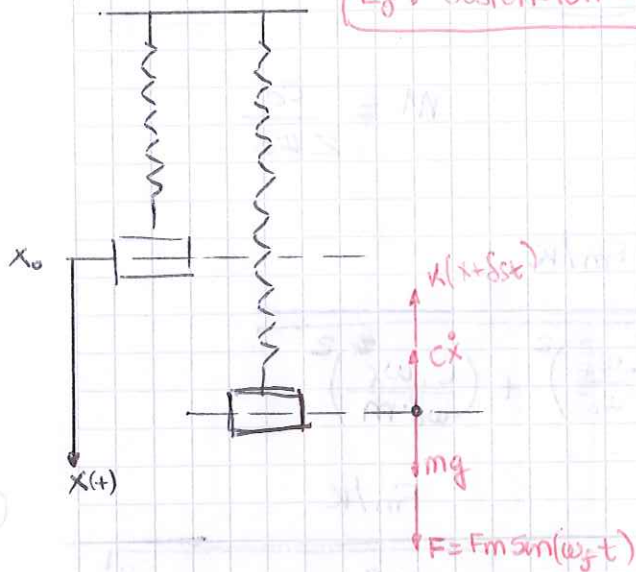
$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \Rightarrow$ Período de vibración amortiguada.



(4)

VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

Ej: suspensión de un auto



$$\sum \vec{F} = m \ddot{x}$$

$$mg + F_m \sin(\omega_f t) - c\dot{x} + k(x + s_{st}) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_m \sin \omega_f t \quad (1)$$

$$x_p = x_m \sin(\omega_f t - \varphi); \quad \dot{x}_p = x_m \omega_f \cos(\omega_f t - \varphi); \quad \ddot{x}_p = -x_m \omega_f^2 \sin(\omega_f t - \varphi)$$

$$m[-x_m \omega_f^2 \sin(\omega_f t - \varphi)] + c[x_m \omega_f \cos(\omega_f t - \varphi)] + k x_m \sin(\omega_f t - \varphi) = F_m \sin(\omega_f t)$$

$$\bullet \alpha = 0 \Rightarrow c x_m \omega_f = F_m \sin \varphi \quad (2)$$

$$\bullet \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -m x_m \omega_f^2 + k x_m = F_m \cos \varphi \quad (3)$$

$$F_m^2 = c^2 x_m^2 \omega_f^2 + x_m^2 (k - m \omega_f^2)^2$$

$$F_m^2 = x_m^2 [c^2 \omega_f^2 + (k - m \omega_f^2)^2]$$

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(c \omega_f)^2 + (k - m \omega_f^2)^2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2 m$$

$$c_c = 2m \omega_0 = 2m \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c_c^2 = (4m)^2 \frac{k}{m}$$

$$k = \frac{c_c^2}{(4m)^2} m = \left(\frac{c_c}{4m}\right)^2 m$$

$$x_m = \frac{F_m/k}{\sqrt{\left(\frac{c \omega_f}{k}\right)^2 + \left(1 - \frac{m \omega_f^2}{k}\right)^2}}$$

$$x_m = \frac{F_m/k}{\sqrt{\left[\frac{c \omega_f}{\left(\frac{c_c}{4m}\right)^2 m}\right]^2 + \left(1 - \frac{m \omega_f^2}{\omega_0^2 m}\right)^2}}$$

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 ; c_c = 2m\omega_0 = 2m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = \omega_0^2 m$$

$$\frac{c}{2m} = \omega_0$$

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{\frac{(k - m\omega_f^2)^2}{k^2} + \frac{(c\omega_f)^2}{k}}}$$

$$M = \frac{c_c}{2\omega_0}$$

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{k^2 \left[\left(1 - \frac{m\omega_f^2}{k} \right)^2 + \left(\frac{c\omega_f}{k} \right)^2 \right]}} = \frac{F_m/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{c \cdot \omega_f}{\omega_0^2 m} \right)^2}}$$

$$x_m = \frac{F_m/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{c \cdot \omega_f}{\omega_0^2 \frac{c_c}{2\omega_0}} \right)^2}} = \frac{F_m/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \cdot \frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2}}$$

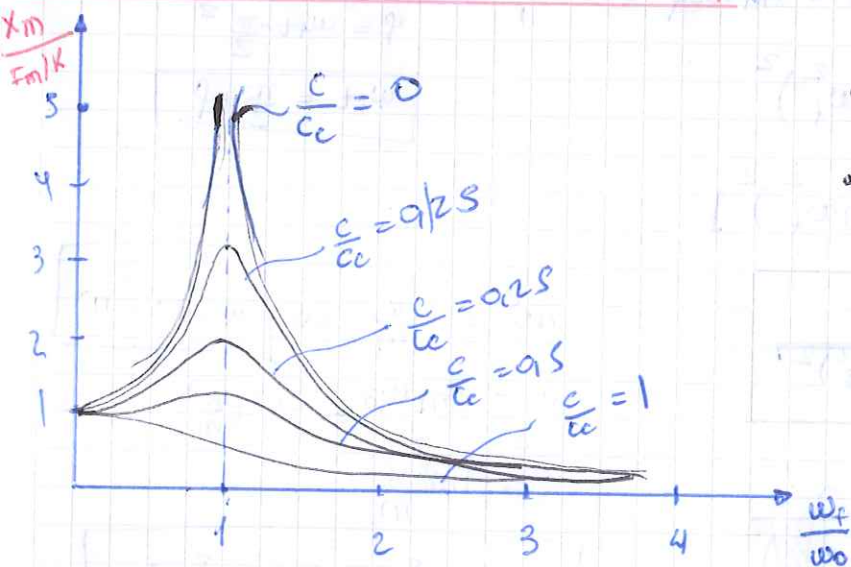
$$x_m = \frac{F_m/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2}}$$

• $\frac{x_m}{F_m/k}$ = FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

• $F_m/k \Rightarrow$ DEF. ESTÁTICA.

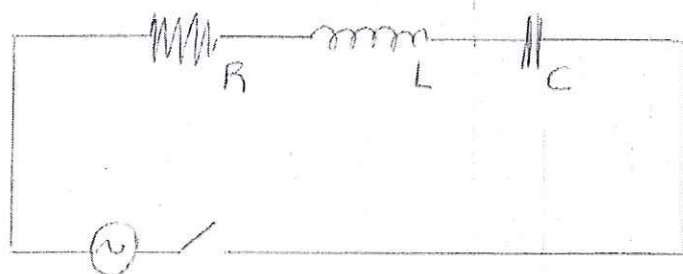
• $\frac{\omega_f}{\omega_0}$: FACTOR DE PULSACIÓN

• $\frac{c}{c_c}$: FACTOR DE AMORT.



! Siempre que sea posible, debe preferirse trabajo por encima de $\frac{\omega}{\omega_c} = \sqrt{2}$. Esto se debe a que a la derecha de ω_c (y aún más a la derecha de $\sqrt{2}$) la deformación y la transmitibilidad serán menores.

Equivalencia eléctrica



$$E_m = E_m \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{dq}{dt} = i$$

Solución a la ec. diferencial:

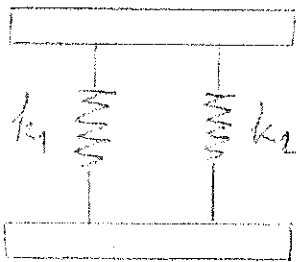
$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_m \sin \omega t$$

Se busca poder hallar las variables de un sistema vibratorio como los que venimos analizando utilizando los análogos entre estos y parámetros de un circuito eléctrico RLC.

Sistema Mecánico	Sistema Eléctrico
masa (m)	inductancia (L)
coeficiente amortiguación (μ)	resistencia (R)
constante elástica (k)	inversa capacitancia ($\frac{1}{C}$)
desplazamiento (x)	carga eléctrica (q)
velocidad ($\frac{dx}{dt}$)	intensidad corriente (i)
carga perturbadora (F_m)	FEM o voltaje (E_m)

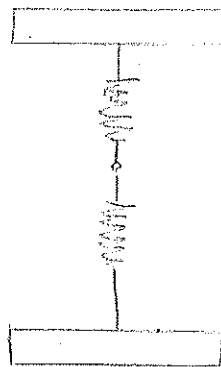
$$g_M = \frac{E_m}{\sqrt{\left[\frac{1}{C} - L\omega^2\right]^2 + R^2\omega^2}}$$

Nota:



Se mantiene el desplazamiento

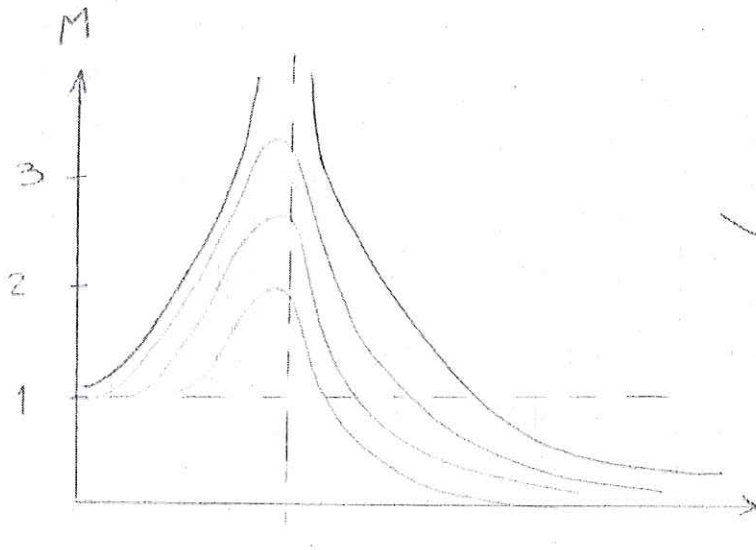
$$k_{eq} = k_1 + k_2$$



Se mantiene la fuerza

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

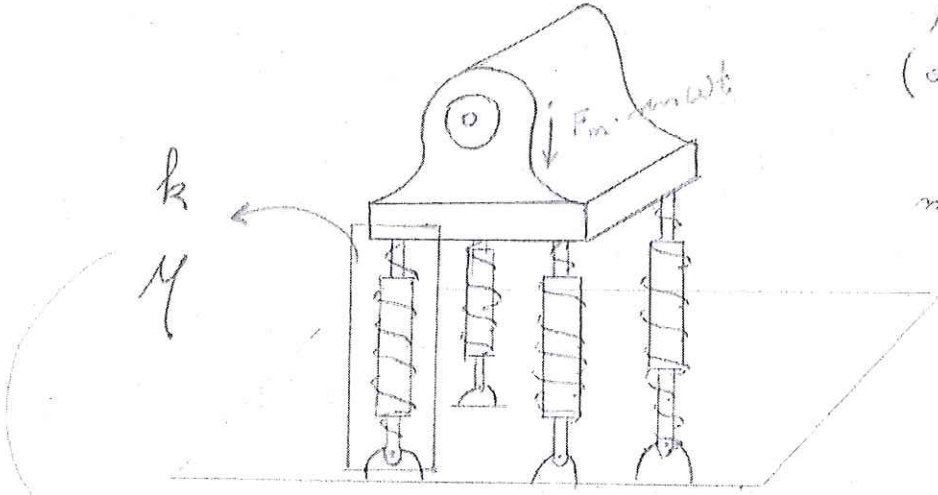
5/2
10/07



$$M = \frac{X_m}{F_m/k}$$

⇒ "M establece una relación entre la amplitud de la vibración del sistema y la deformación que produce la fuerza perturbadora en equilibrio estático con el mismo sistema elástico".

Transmisibilidad



Plataforma de amortiguación (observando la aparición de la fuerza perturbadora montada sobre una plataforma vibratoria el suelo por resortes elásticos).

Si en lugar de estos resortes tuviera realizada una fijación por tornillos, el caso sería exactamente el mismo.

Siempre existe un resorte amortiguado y restitutor. Lo que seguramente se modificará será el k y el M del elemento restitutor.

↳ el que me transmite los esfuerzos.

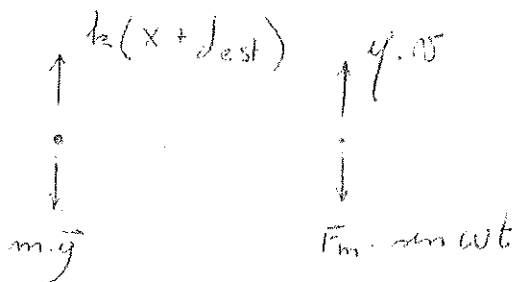
$$\frac{F_{t \text{ máxima}}}{F_m} = T$$

Coeficiente de transmisión: ∇

"Relación entre la amplitud máxima de la fuerza aplicada (F_m) y transmitida (F_t)."

$$\therefore T = \frac{F_{t \text{ max}}}{F_m} = \frac{X_m}{X'_m}$$

amplitud de fuerza particular



$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m.g - kx - kx_{est} + F_m \cdot \sin wt - y \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + y \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin wt$$

$$x = X_m \cdot \cos(\omega t - \varphi')$$

$$\dot{x} = -X_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \varphi')$$

$$F_t = -y \cdot \omega \cdot X_m \sin(\omega t - \varphi') + k X_m \cdot \cos(\omega t - \varphi') = F_m \sin \omega t$$

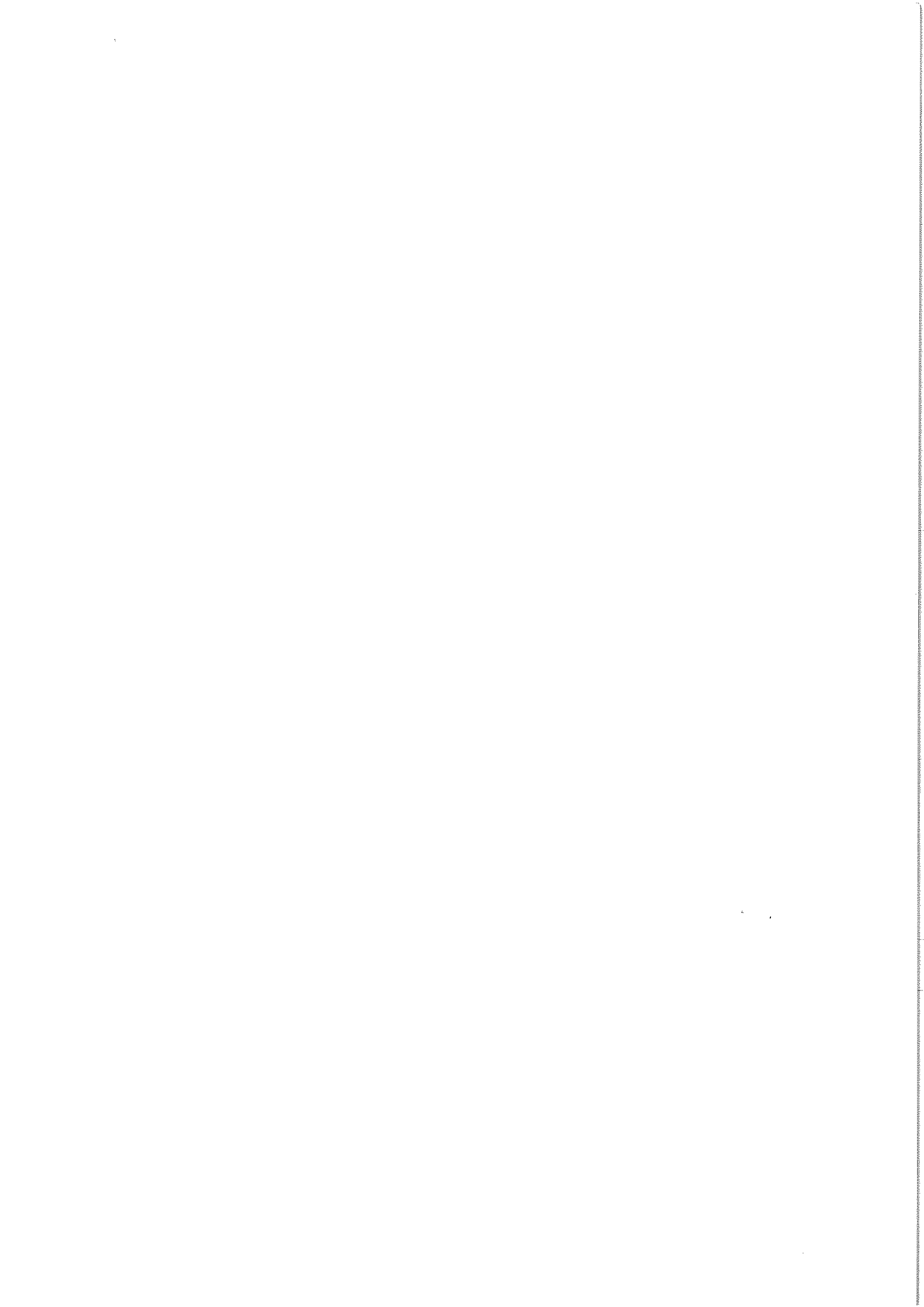
$$X_m = \frac{F_m/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{y}{k}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$F_m^* = k X_m \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{y}{k}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Debido a que ambas están en fase, la $F_{t \text{ máxima}} = F_m$ cuando...

hablando del término del seno y el del coseno

cuando...



10/07

$$F t_m = \sqrt{\omega^2 \gamma^2 X_m^2 + k^2 X_m^2}$$

$$\therefore T = \frac{\cancel{X_m} \sqrt{\omega^2 \gamma^2 + k^2}}{k \cancel{X_m} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$T = \frac{\cancel{k} \sqrt{1 + \frac{\omega^2 \gamma^2}{k^2 k}}}{\cancel{k} \sqrt{\dots}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2 m$$

$$\gamma_c = 2m\omega_0 = 2m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\gamma_c^2 = 4m^2 \frac{k}{m} = 4mk$$

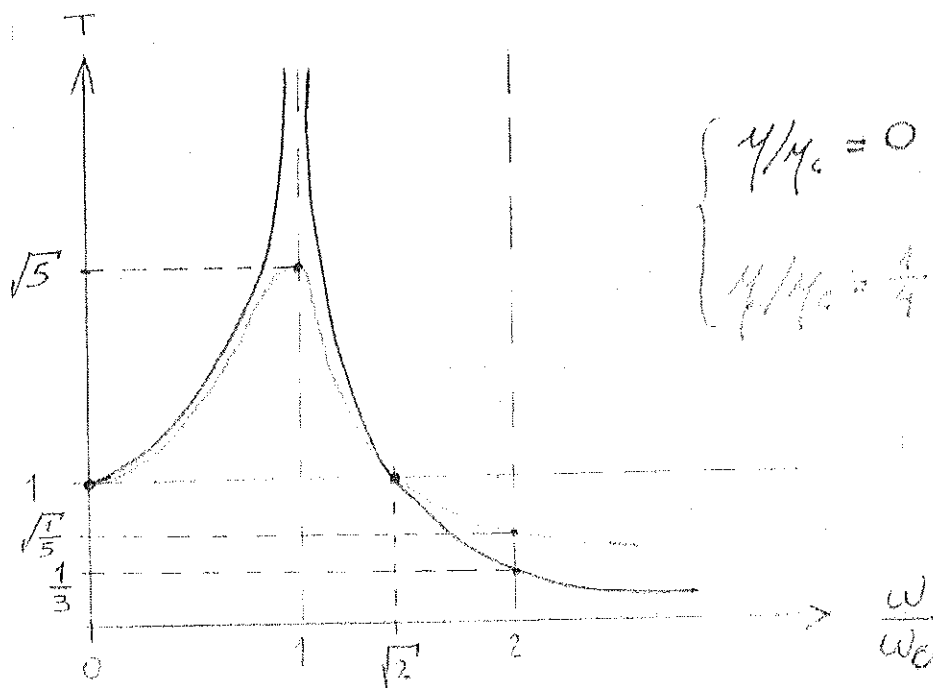
$$\Rightarrow k = \frac{\gamma_c^2}{4m}$$

$$T = \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 m} \cdot \frac{\gamma^2}{\gamma_c^2 / 4m}}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Analisis
↓

	$T(\eta/\eta_c = 0)$	$T(\eta/\eta_c = \frac{1}{4})$
$\frac{\omega}{\omega_0} = 0$	1	1
$\frac{\omega}{\omega_0} = 1$	∞	$\sqrt{5}$
$\frac{\omega}{\omega_0} = 2$	$1/3$	$\sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0,45$
$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{2}$	1	1



- La transmissibilidad SIEMPRE es igual a 1 cuando $\frac{\omega}{\omega_c} = \sqrt{2}$, independientemente del η/η_c .

factor de amortiguación. En $\frac{\omega}{\omega_c} = \sqrt{2}$, la amplitud de la vibración del sistema es la misma que la amplitud de la fuerza perturbadora.

