

CINEMÁTICA: CONJUNTO DE LEYES QUE RIGEN LOS MOVIMIENTOS.

PUNTO MATERIAL: CUERPO RÍGIDO CUYAS DIMENSIONES SON DESPREZABLES FRENTE A LAS DEL MOVIMIENTO.

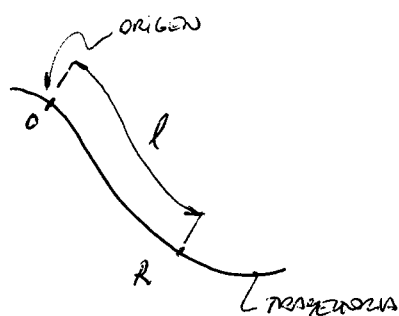
MOVIMIENTO: TODO CAMBIO DE POSICIÓN DEL PUNTO MATERIAL.

POSICIÓN: UBICACIÓN DE UN PUNTO RESPECTO DE UN SISTEMA DE REFERENCIAS. SE EXPRESA A TRAVÉS DE UN VECTOR EN FUNCIÓN DE COORDENADAS RESPECTO DEL SIST. DE REF.

TRAYECTORIA: LUGAR GEOMÉTRICO QUE RESULTA DE LA UNIÓN DE LOS PUNTOS DE LAS SUCESIVAS POSICIONES QUE FUE OCUPANDO EL PTO MATERIAL DURANTE SU MOVIMIENTO.

DISTANCIA RECORRIDA - CAMINO ESPACIO RECORRIDO

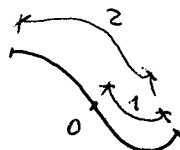
MENTA TOLIMA SOBRE LA TRAYECTORIA A PARTIR DE UN ORIGEN ARBITRARIO UBICADO SOBRE ÉSTA Y LA POS. DEL PUNTO.



SI SE LE PUEDE CONOCER EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, SE DICE ENTONCES QUE ES LA LEY HORARIA DEL MOVIMIENTO

$$L = L(t)$$

EJ.



CAMINO RECORRIDO

$$L = 1 + 2 = 3$$

(A 2 LE CAMBIA EL SIGNO).

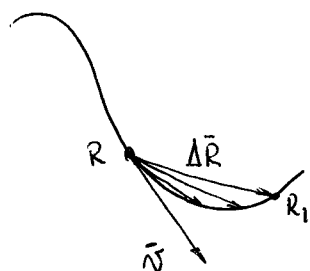
VELOCIDAD

CAMBIO DE POSICIÓN DEL PTO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

→ VELOCIDAD ESCALAR MEDIA ⇒ $V_m = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{l_1 - l}{t_1 - t}$ (DA UN VALOR APROX.)

→ " " INSTANTÁNEA ⇒ $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}$

→ VECTOR VELOCIDAD MEDIA: SI CONOCERAMOS EL VECTOR DESPLAZAMIENTO $\bar{\Delta R} = R_1 - R$



$$\Rightarrow \bar{V}_m = \frac{\bar{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{R_1 - R}{t_1 - t}$$

NOS DA UN VALOR APROXIMADO, PERO CON DIRECCIÓN Y SENTIDO DEL CAMBIO DE POSICIÓN.

① NOTACIÓN DE GRASSMAN ⇒ $(R - O) = \text{Extremo}(R) - \text{Origen}(O)$

→ VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA ⇒ $\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{d\bar{R}}{dt}$

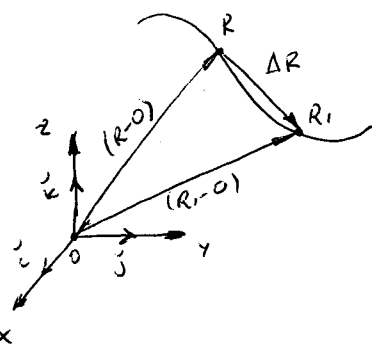
SISTEMAS DE REFERENCIA

COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONALES
" CILINDRICAS
SISTEMA FRENET
COORDENADAS ESFÉRICAS

EXTRÍNSECAS

INTRÍNSECA.

1) SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO ORTOGONAL: NO NECESITO CONOCER LA TRAY. (EXPLICARLO).



$$(\vec{R}-\vec{O}) = (x-\vec{O})\vec{i} + (y-\vec{O})\vec{j} + (z-\vec{O})\vec{k}$$

$$(\vec{R}_1-\vec{O}) = (x_1-\vec{O})\vec{i} + (y_1-\vec{O})\vec{j} + (z_1-\vec{O})\vec{k}$$

$$\Delta \vec{R} = (x_1-x)\vec{i} + (y_1-y)\vec{j} + (z_1-z)\vec{k}$$

$$(\vec{R}-\vec{O})_t = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, RESPECTO DEL SIST. DE REF. CARTE-SIANO ORTOGONAL.

DERIVANDO EL VECTOR POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO:

$$\frac{d(\vec{R}-\vec{O})_t}{dt} = \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, RESPECTO DEL SIST. DE REF. CARTESIANO ORTOGONAL

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

MÓDULO DE LA VELOCIDAD, SIEMPRE TANGENTE A LA TRAYECTORIA.

TAMBIÉN SE PUEDE CALCULAR EL MÓDULO DEL VECTOR VELOCIDAD EN FUNCIÓN DE VECTOR RESPALM.

DIFERENCIAL:

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{R}}{dt} \right| \Rightarrow \left| d\vec{R} \right| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dl$$

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{R}}{dt} \right| = \frac{dl}{dt} = v$$

POR LO QUE SE PUEDE RELACIONAR MÓD. DE VECTOR VELOCIDAD INSTANT. CON LA LÍNEA HORARIA:

$$l(t) = \int_{l_0}^l dl = \int_{t_0}^t v dt$$

LONGITUD DE CURVA, DISTANCIA RECORRIDA

EXPRESIÓN ACUR

DERIVANDO $\vec{v}(t)$ RESPECTO DEL TIEMPO:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2(\vec{R}-\vec{O})_t}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

VECTOR ACCELERACIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, RESPECTO DEL SIST. DE REF. CARTESIANO ORTOGONAL

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

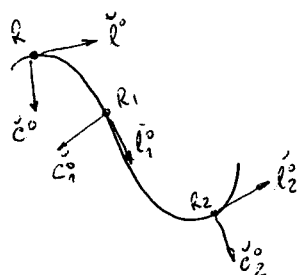
$$\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

NOTAS:

- 1) LA VELOCIDAD ESCALAR INSTANTÁNEA $v(t)$ NO DEPENDE DEL NPO DE TRAYECTORIA DONDE SE MUEVA.
PERO PUEDE NO SERLO
- 2) TAMO LA POSICIÓN COMO LA VELOCIDAD SON FUNCIONES DERIVABLES, ~~PERO~~ LA ACCELERACIÓN.

2). SISTEMA DE REFERENCIA INTRÍNSECO DE FRENET (O DE COMPONENTES INTRÍNSECAS)

MUY ÚTIL CUANDO SE CONOCE LA TRAYECTORIA, SE NECESITA CONOCER LA TRAYECTORIA (INTRÍNSECO)

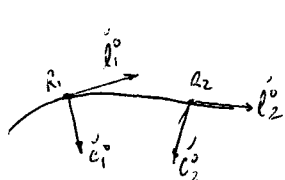


EL ESPACIO VECTORIAL SE MATERIALIZA MEDIANTE 2 VECTORES UNO TANGENTE A LA CURVA $\check{l}^0$ Y OTRO NORMAL $\check{c}^0$.

$$\vec{v}(t) = v \cdot \check{l}^0 = \frac{dl}{dt} \check{l}^0 \quad \text{VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, RESPECTO AL SIST. DE REF. INTRÍNSECO.}$$

DERIVANDO RESPECTO DE t , SE OBTIENE LA ACCELERACIÓN:

$$\vec{a}(t) = \frac{d(v \check{l}^0)}{dt} = \frac{dv}{dt} \check{l}^0 + v \frac{d\check{l}^0}{dt} \quad ; \quad \text{ANALIZAMOS } \frac{d\check{l}^0}{dt} :$$



$\Delta \check{l}^0$: VARIACIÓN DE VECTORES

$$\frac{d\check{l}^0}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \check{l}^0}{\Delta t} \quad \text{Si } \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \check{l}^0 \text{ SE HACE Tg A LA TRAYECTORIA DE } \check{l}_1, \check{l}_2$$

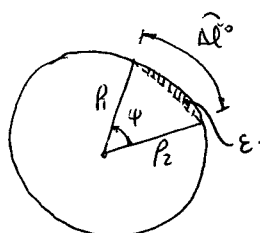
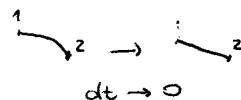
$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \check{l}^0 \rightarrow \widehat{\Delta \check{l}^0}$$

$$\text{Si } \rho_1 = \rho_2 = 1$$

$$\widehat{\Delta \check{l}^0} = \rho d\varphi = 1 d\varphi$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\check{l}^0}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{\Delta \check{l}^0}}{\Delta t} = \frac{1 \cdot d\varphi}{dt} \cdot \frac{dl}{dl} = \frac{dl}{dt} \frac{d\varphi}{dl} = v \cdot \frac{d\varphi}{dl}$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \check{l}^0 - \widehat{\Delta \check{l}^0}}{\Delta t} \text{ como } \widehat{\Delta \check{l}^0} \text{ es inf. de orden superior} \Rightarrow \widehat{\Delta \check{l}^0} = \Delta \check{l}^0$



como $c = \frac{1}{\rho_0} = \frac{d\varphi}{dl}$ CURVATURA DE LA TRAYECT. ES RESPECTO AL VECTOR $\check{c}^0$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\check{l}^0}{dt} \right| = v \cdot \frac{1}{\rho_0} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \check{l}^0 + v \cdot \frac{v}{\rho_0} \check{c}^0$$

$$\frac{d\check{l}^0}{dt} = \frac{v}{\rho_0} \check{c}^0$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \check{l}^0 + \frac{v^2}{\rho_0} \check{c}^0 \quad \text{ACCELERACIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO RESPECTO AL SIST. DE REF. INTRÍNSECO.}$$

$$\vec{a}(t) = a_{tg} \check{l}^0 + a_n \check{c}^0$$

$a_{tg} = \frac{dv}{dt}$ COMPONENTE TANGENCIAL DE LA ACCELERACIÓN

$a_n = \frac{v^2}{\rho_0}$ COMPONENTE NORMAL DE LA ACCELERACIÓN

$\check{b}^0$: VECTOR BINORMAL, DEFINE AL PLANO QUE CONTIENE A $\check{l}^0$ Y $\check{c}^0$, PLANO OSCURADOR.

$$\begin{aligned} \check{l}^0 \wedge \check{c}^0 &= \check{b}^0 \\ \check{b}^0 \wedge \check{l}^0 &= \check{c}^0 \\ \check{c}^0 \wedge \check{b}^0 &= \check{l}^0 \end{aligned}$$

TRIÉDRULO DE FRENET.

POR DEFINICIÓN DE VECTOR: $\check{b}^0 = \frac{\check{l}^0 \wedge \check{c}^0}{|\check{l}^0 \wedge \check{c}^0|}$

$$\frac{|\check{l}^0 \wedge \check{a}|}{|\check{l}^0|} = a \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\frac{|\check{l}^0 \cdot \check{a}|}{|\check{l}^0|} = a \cos \alpha$$

ACCELERACIÓN NORMAL $\Rightarrow \frac{|\check{l}^0 \wedge \check{a}|}{|\check{l}^0|} = \frac{v^2}{\rho_0} ; \rho_0 = \frac{v^3}{|\check{l}^0 \wedge \check{a}|}$

TANGENCIAL

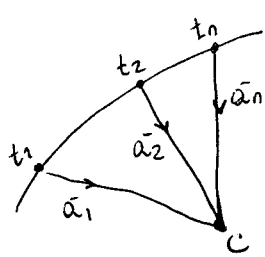
TIPOS DE MOVIMIENTO

- MOV. PERIÓDICOS
 - II CIRCULARES
 - II OSCILATORIO ARMÓNICO
 - II CENTRALES.

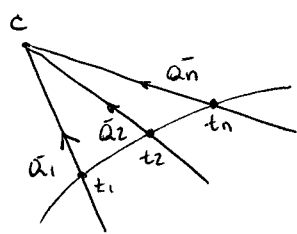
- POSICIÓN $\vec{r} \rightarrow$ ÁREA $\bar{A}$
- VELOCIDAD $\vec{v} \rightarrow$ VELOCIDAD AREOLAR $\bar{S}$
- ACELERACIÓN $\vec{a} \rightarrow$ ACELERACIÓN AREOLAR $\bar{N}$

MOVIMIENTO CENTRAL

UN PM SE ENCUENTRA EN MOVIMIENTO CENTRAL CUANDO SU VECTOR $\vec{a}$ PARA CUALQUIER PUNTO DE SU TRAYECTORIA, PASA POR UN PUNTO C LLAMADO CENTRO DE MOVIMIENTO.



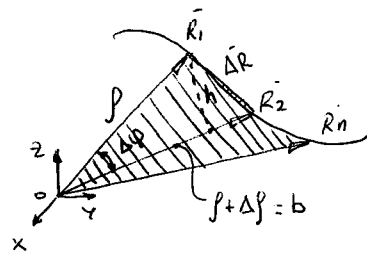
MOV. CENTRAL CONVERGENTE.



MOV. CENTRAL DIVERGENTE.

$\vec{a}$ SOLO TIENE SU COMPONENTE RADIAL.

• VELOCIDAD AREOLAR ($\bar{S}$) AREA BARRIDA POR EL VECTOR POSICIÓN RESPECTO AL TIEMPO.



$$\bar{S}_m = \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t}$$

VELOCIDAD AREOLAR MEDIA.
 $\dot{\bar{A}}$

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \Delta \vec{R}$$

$$\Delta \bar{A} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(p + \Delta p) \cdot p \cdot \sin \Delta \varphi}{2} = \frac{p^2 \sin \Delta \varphi + p \Delta p \sin \Delta \varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \frac{p^2 \sin(d\varphi) + p dp \sin(d\varphi)}{2 dt} \quad \text{como } dp \cdot d\varphi = \text{INFINITESIMO DE ORDEN SUP.}$$

$$dp \cdot d\varphi = 0$$

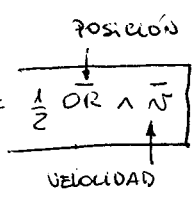
$$\bar{S}_m = \frac{p^2 d\varphi + p dp d\varphi}{2 dt} = \frac{p^2 d\varphi}{2 dt}$$

$$\bar{S}_m = \frac{1}{2} p^2 \omega = \frac{1}{2} p^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

VELOCIDAD AREOLAR MEDIA EN FUNCIÓN AL TIEMPO

VECTORIZANDO:

$$\bar{S}_m = \frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \frac{\frac{\vec{OR} \wedge \vec{OR'}}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\vec{OR} \wedge \vec{OR'}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{OR} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{OR} \wedge \vec{v}$$



• DERIVANDO, OBTENGO LA ACCELERACIÓN AREOLAR:

$$\bar{N} = \frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\vec{OR}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{OR} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{1}{2} \vec{OR} \wedge \vec{a}$$

NOTAS:

- 1) $\vec{OR}$ COAXIAL CON $\vec{a} \Rightarrow \bar{N} = 0$ (NO TIENE COMP. ~~LA ACCELERACIÓN~~ LA ACCELERACIÓN).
- 2) SI $\bar{N} = 0 = \frac{d\bar{S}}{dt} \Rightarrow d\bar{S} = \bar{N} dt = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{S} = CTE}$ MÓDULO INVERSIÓN Y SENTIDO.

NORMAL $\leftarrow$ UNICA COMPONENTE EN MOVIMIENTO CENTRAL.

• ECUACION DE BINET

$$S = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{cte} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \frac{d(\rho^2)}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$C = \rho^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$0 = \frac{1}{2} 2\rho \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$0 = \frac{1}{2} \rho \left(2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)$$

ACELERACIÓN CON REF POLAR

como $\vec{a} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{r}_0 + \left[2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \vec{t}_0$ PAR LO ANTERIOR

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{r}_0$$

SOLO COMPONENTE RADIAL.

ALGUNA ANULACIÓN DE AMBOS AXES.

como $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\rho^2}$ $\frac{d\varphi}{dt} \frac{d\rho}{dt} = \frac{C}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{C}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \left[\frac{C}{\rho^2} \right] \quad \gamma \quad -\rho^{-2} = \frac{d(\rho^{-1})}{d\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = C \cdot \left[\frac{-d(\rho^{-1})}{d\varphi} \right] \quad \text{DERIVANDO RESPECTO DE } t:$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -C \cdot \frac{d^2(\rho^{-1})}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt}$$

REEMPLAZANDO EN LA ACELERACIÓN:

$$\vec{a} = \left[-C \frac{d^2(\rho^{-1})}{d\varphi^2} \left[\frac{d\varphi}{dt} \right] - \rho \left(\frac{C}{\rho^2} \right)^2 \right] \vec{r}_0$$

$$\vec{a} = \left[-C \cdot \frac{d^2(\rho^{-1})}{d\varphi^2} \cdot \frac{C}{\rho^2} - \rho \cdot \frac{C^2}{\rho^4} \right] \vec{r}_0 \Rightarrow \vec{a} = -\frac{C^2}{\rho^2} \left[\frac{d^2(\rho^{-1})}{d\varphi^2} + \frac{1}{\rho} \right] \vec{r}_0 \quad \text{ECUACION DE BINET.}$$

ACELERACIÓN EXPRESA EN FUNCIÓN DE LA CIE Y EL RADIO.

NOTAS:

1) LA CONSTANTE C ES LA CONSTANTE DE ACCELERACIÓN DE LOS CUERPOS CELESTES

2) LA ECUACION DE BINET PERMITE CALCULAR EL VALOR DE ACCELERACIÓN (RADIAL) DE UN MOVIMIENTO CENTRAL CUYA TRAYECTORIA Y VELOCIDAD SON CONOCIDAS. TAMBIEN PERMITE:

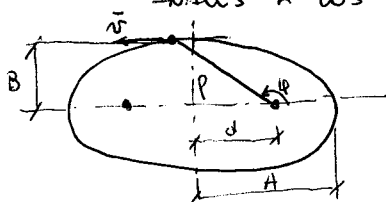
$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{d(\rho^{-1})}{d\varphi} \right) + \frac{1}{\rho^2} \right] \quad \text{VELOCIDAD RESPECTO DE LA CONSTANTE C.}$$

• LEYES DE KEPLER

1) LEY DE TRAYECTORIA: CADA PLANETA DESCRIBE UNA ELPSE, CON EL SOL COMO UNO DE SUS FOCOS.

2) " DE SUPERFICIES: EL VECTOR RADIO $\vec{r}$ TRAZADO DESDE EL SOL HASTA UN PLANETA BARRE AREAS IGUALES EN TIEMPOS IGUALES.

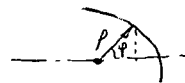
3) " DE PERÍODOS: LOS CUADRADOS DE TIEMPOS PERIÓDICOS T DE LOS PLANETAS SON PROPORCIONALES A LOS CUADROS DE LOS EJES SEMI MAYORES A DE SUS ORBITAS.



$$\text{DE (3)} \quad T^2 = K \cdot A^3$$

APLICANDO ENTONCES LA ECUACIÓN DE BINET EN LAS LEYES DE KEPLER:

ANALIZAMOS:



$$p' = \frac{1+e \cos \varphi}{p} \Rightarrow \frac{d(p')}{d\varphi} = \frac{-e \sin \varphi}{p}$$

$$\frac{d^2(p')}{d\varphi^2} = \frac{-\cos \varphi \cdot e}{p}$$

$$\bar{a} = -\frac{e^2}{p^2} \left[\frac{-\frac{e}{p} \cos \varphi + \frac{1+e \cos \varphi}{p}}{(1+e \cos \varphi)^2} \right] \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$\bar{a} = -\frac{e^2}{p^3} (1+e \cos \varphi)^2 \cdot [-e \cos \varphi + 1 + e \cos \varphi]$$

$$\bar{a} = -\frac{e^2}{p} \cdot \frac{(1+e \cos \varphi)^2}{p^2} = -\frac{e^2}{p} \cdot \frac{1}{p^2}$$

Por este motivo se dice que $\bar{a} \propto \frac{1}{p^2}$

2 DINAMICA DEL PUNTO MATERIAL

Ecuaciones fundamentales de la dinámica

CANTIDAD DE MOVIMIENTO $1^\circ \Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \Rightarrow d\vec{Q} = \Sigma \vec{F} dt = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

MOMENTO CINÉTICO o DE CANT. DE MOVIMIENTO $2^\circ \Sigma \vec{M}_{O_i} = \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} + \vec{N}_{O_i} \wedge \vec{Q}$

TRABAJO $3^\circ dT = \Sigma \vec{F} \times d\vec{r} \Rightarrow \dots \Rightarrow dT = dE_c$

FUERZAS NATURALES

FUERZAS CONSTANTES

" TEMPORALES: $\vec{F} = \vec{F}(t)$

" POSICIONALES: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

" RESISTIVAS: $\vec{F} = -k \cdot \vec{v}^0$

$k = \mu_0 + \mu_1 v^1 + \dots + \mu_n v^n$

CONSERVATIVAS

OTRAS

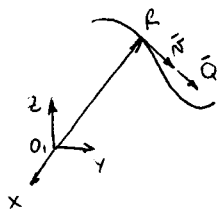
DE ROZAMIENTO $\vec{F} = -\mu_0 \cdot \vec{v}^0$

VISCOSA $\vec{F} = -\mu \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^0$

HIDRÁULICA $\vec{F} = -K(\vec{v}^2)^{1/2} \vec{v}^0$

BAUŠICA $\vec{F} = -K_{3/5} \vec{v}^{3/5} \vec{v}^0$

• MOMENTO CINÉTICO (2º EC.)



$$\vec{L}_{O_i} = \vec{Q} \wedge \vec{O_i R} = m \vec{v} \wedge \vec{O_i R} = \vec{R - O_i} \wedge m \vec{v}$$

$$\vec{L}_{O_i} = \vec{Q R} \wedge \vec{Q}$$

MOMENTO DE CANT. DE MOVIMIENTO

TAMBIÉN $\frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = \frac{d(\vec{R - O_i})}{dt} \wedge \vec{Q} + (\vec{R - O_i}) \wedge \frac{d\vec{Q}}{dt}$

$\Sigma \vec{F}$

$$\frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} \wedge \vec{Q} - \frac{d\vec{O_i}}{dt} \wedge \vec{Q} + (\vec{R - O_i}) \wedge \Sigma \vec{F}$$

$\Sigma \vec{M}_{O_i}$

$$\frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = \vec{N} \wedge \vec{Q} - \vec{N}_{O_i} \wedge \vec{Q} + \Sigma \vec{M}_{O_i} \Rightarrow \Sigma \vec{M}_{O_i} = \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} + \vec{N}_{O_i} \wedge \vec{Q}$$

$\vec{N} \wedge m \vec{v} = 0$

LA Σ DE LOS MOMENTOS DEL SISTEMA DE FUERZAS ES IGUAL DIFERENCIAL DE MOMENTO CINÉTICO + $\vec{N}_{O_i} \wedge \vec{Q}$

• TRABAJO (3º EC)

$$dT = \sum \vec{F} \times d\vec{r} \quad \text{como} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$dT = \sum \vec{F} \times \vec{v} dt \quad \text{como} \quad \sum \vec{F} = \frac{dQ}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dT = m \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v} dt = m \vec{v} d\vec{v} \quad \text{INTEGRANDO:} \quad \int dT = m \int \vec{v} d\vec{v}$$

$$\Rightarrow T = m \frac{\vec{v}^2}{2} = E_c$$

SE OBSERVA ENTONCES LA 3º EC. TANTASIMISMO:

$$dT = dE_c$$

• FUERZAS POSICIONALES: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ~~potencial~~ CAMPO DE FUERZAS

$$\vec{H} = \vec{I} = \frac{\vec{F}}{m}$$

INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO
(FUERZA POR UNIDAD DE MASA)

ejemplo: $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = 9,80665 \frac{m}{s^2}$

LÍNEAS DE FUERZA $\Rightarrow$ TANGENTES A $\vec{H}$.

$$\vec{H} \wedge d\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ H_x & H_y & H_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$$

AL RESOLVER SE OBTIENEN LAS L.F.
EN VECTORES $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

→ FUERZAS POSICIONALES CONSERVATIVAS:

SE CUMPLE QUE $\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = \nabla U(x, y, z)$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

MATRIZ
HESSIANO

→ TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS:

$$dT = \vec{F} \times d\vec{r}$$

$$\int_{A-B} dT = \oint_{A-B} \vec{F} \times d\vec{r} \Rightarrow T_{A-B} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

COMO ES CONSERVATIVO: $\vec{F} = \nabla U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

$$T_{A-B} = \oint_{A-B} \vec{F} \times d\vec{r} = \oint_{A-B} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} dy \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} dz \hat{k} \right) = \oint_{A-B} dU = U_B - U_A$$

POR CONDICIÓN DE BORDE Y POR 3º EC. $T_{A-B} = E_{cB} - E_{cA} = U_B - U_A$

$U^* = -U$: ENERGÍA POTENCIAL

E_c : " CINÉTICA

E_m : " MECÁNICA

$$-U_B + E_{cB} = E_{cA} - U_A$$

$$U_B^* + E_{cB} = U_A^* + E_{cA}$$

TEOREMA DE LAS
FUERZAS VIVAS

COMO $U^* + E_c = E_m$

$$T_{Fnc} = E_{mB} - E_{mA} = \Delta E_m$$

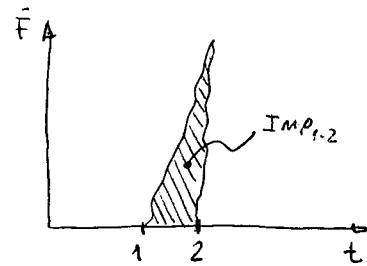
TRABAJO DE LAS
FUERZAS NO CONSERVATIVAS.

• IMPULSO

DE LAS PRIMERAS EC. FUND. DE LA DINÁMICA:

$$\sum F = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \sum F \cdot dt = dq = m \cdot d\bar{v}$$

$$\boxed{Imp_{1-2} = \int_1^2 \sum F \cdot dt = m \cdot \int_1^2 d\bar{v}}$$



APLICACIÓN DE FUERZAS EN PER. INSTANTÁNEOS. COMO RESULT:

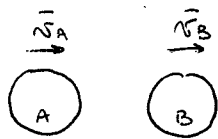
- 1). TIEMPO PEQUEÑO (DISCRETO)
- 2). NO SE CONSIDERA EL PESO
- 3). NO SE " EL MOVIMIENTO.

• CHOQUE Ó IMPACTO:

EL CHOQUE E/ 2 CUERPOS OCUERE EN UN INTERVALO RELATIVAMENTE PEQUEÑO Y DURANTE EL MISM. LOS CUERPOS EJERCEN FUERZAS RELATIVAMENTE GRANDES.

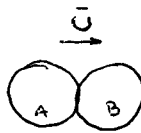
LA RECTA NORMAL A LAS SUPERFICIES DE CONTACTO SE LLAMA LÍNEA DE IMPACTO. SI DICHA LÍNEA PASA POR AMBOS CENTROS DE MASA (BARICENTROS) EL IMPACTO SE LLAMA IMPACTO CENTRAL. EN CASO DE NO COINCIDIR SE LLAMA IMPACTO EXCENTRICO.

SI LAS VELOCIDADES COINCIDEN CON LA LÍNEA DE IMPACTO, SE LLAMA IMPACTO CENTRAL DIRECTO, SI NO, IMPACTO CENTRAL OBLICUO.



a). ANTES DEL IMPACTO

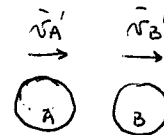
$$m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B$$



b). DURANTE IMPACTO, U DEF. MÁX. MA

$$m_A \bar{v}_A - \int \bar{P} dt = m_A \bar{U}$$

$$m_A \bar{U} - \int \bar{R} dt = m_A \bar{v}_A'$$



c). DESPUES DEL IMPACTO.

$$m_A \bar{v}_A' + m_B \bar{v}_B'$$

DONDE $\bar{P}$: FUERZA QUE LE EJERCE B AL CUERPO A ENTRE EL CHOQUE Y EL INSTANTE MÁXIMO

$\bar{R}$: FUERZA QUE " " " " " " EL " " " FINAL

$\bar{P}$ = PRESIÓN $\bar{R}$ = RESISTENCIA.

COEFICIENTE DE RESISTENCIA $\Rightarrow e = \frac{\int R dt}{\int P dt}$

$e = 0$ CHOQUE TOTALMENTE PLÁSTICO

$e = 1$ CHOQUE ELÁSTICO.

$$e = \frac{m_A \bar{U} - m_A \bar{v}_A'}{m_A \bar{v}_A - m_A \bar{U}}$$

$$e = \frac{\bar{U} - \bar{v}_A' + \bar{v}_B' - \bar{U}}{\bar{v}_A - \bar{U} + \bar{U} - \bar{v}_B} \Rightarrow \boxed{e(\bar{v}_A - \bar{v}_B) = \bar{v}_A' - \bar{v}_B'}$$

PARA $e = 0$
 $\bar{v}_A' = \bar{v}_B' = \bar{v}_F$

ANÁLISIS ENERGÉTICO EN IMPACTO:

Si $e = 1$

$$\begin{cases} Q_0 = Q_F \Rightarrow m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B = m_A \bar{v}'_A + m_B \bar{v}'_B \\ E_{c0} = E_{cf} \Rightarrow \frac{1}{2} m_A \bar{v}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{v}_B^2 = \frac{1}{2} m_A \bar{v}'_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{v}'_B^2 \end{cases}$$

PERO si $e = 0$

$$m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B = (m_A + m_B) \bar{v}_F \Rightarrow \bar{v}_F = \frac{m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B}{m_A + m_B}$$

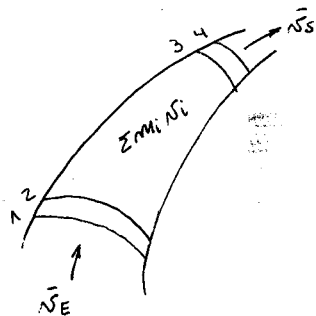
$$E_{c0} = E_{cf} + E_x \quad \text{CON } E_x: \text{EXERGÍA, PÉRDIDA DE ENERGÍA O ENERGÍA CONSUMIDA.}$$

$$\frac{1}{2} m_A \bar{v}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{v}_B^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) \bar{v}_F^2 + E_x; \text{ REEMPLAZANDO } \bar{v}_F \text{ Y DESPEJANDO:}$$

$$E_x = \frac{1}{2} \frac{m_A \cdot m_B}{(m_A + m_B)} (\bar{v}_B - \bar{v}_A)^2$$

ENERGÍA CONSUMIDA EN UN CHOQUE PERF. PLÁSTICO. A MAYOR e MENOR VALOR DE E_x .

CIRCULACIÓN DE MASA:



$$\bar{Q}_{1-3} = \bar{Q}_{1-2} + \bar{Q}_{2-3}$$

$$\Rightarrow \Delta \bar{Q} = \bar{Q}_{2-4} - \bar{Q}_{1-3}$$

$$\bar{Q}_{2-4} = \bar{Q}_{2-3} + \bar{Q}_{3-4}$$

$$\Delta \bar{Q} = \sum m_i \bar{v}_i + \Delta m \cdot \bar{v}_S - (\Delta m \bar{v}_E + \sum m_i \bar{v}_i)$$

$$\bar{Q}_{1-2} = \Delta m \cdot \bar{v}_E$$

$$\Delta \bar{Q} = \Delta m (\bar{v}_S - \bar{v}_E)$$

$$\bar{Q}_{3-4} = \Delta m \cdot \bar{v}_S$$

$$\text{COMO } \frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta t} = \bar{F}$$

$$\bar{Q}_{2-3} = \sum m_i \bar{v}_i$$

$$\Rightarrow \sum \bar{F} \cdot dt = dm (\bar{v}_S - \bar{v}_E)$$

$$\sum \bar{F} = \frac{dm}{dt} (\bar{v}_S - \bar{v}_E)$$

$$Q_m = \frac{dm}{dt} \quad \text{CAUDAL MÁSICO}$$

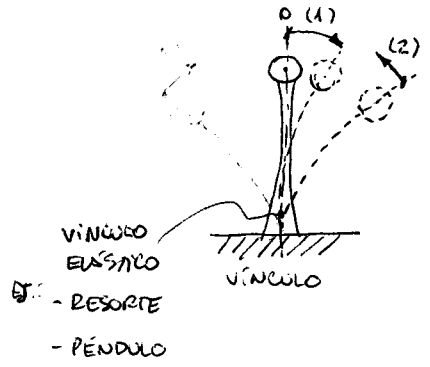
$$\sum \bar{F} = Q_m (\bar{v}_S - \bar{v}_E)$$

$$Q_v = Q_m \cdot \delta \quad \text{CAUDAL VOLUMÉTRICO}$$

3 VIBRACIONES

UNA VIBRACIÓN MECÁNICA ES EL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA O CUERPO QUE OSCILA ALREDEDOR DE UNA POSICIÓN DE EQUILIBRIO. DICHAS VIBRACIONES EN MÁQUINAS O ESTRUCTURAS SON INDESEABLES YA QUE PRODUCEN AUMENTO DE LOS ESFUERZOS Y PÉRDIDAS DE ENERGÍA.

UNA VIBRACIÓN SE PRODUCE CUANDO UN SISTEMA SE DESPLAZA DE UNA POSICIÓN DE



EQUILIBRIO ESTABLE (1). EL SISTEMA TIENE A RETORVAR A SU POSICIÓN ORIGINAL POR FUERZAS RESTAURADORAS (2) (EN EL EJ. PRODUCIDAS POR EL VÍNCULO ELÁSTICO) COMO FAS ELÁSTICAS EN UN RESORTE O FAS GRAVITATORIAS EN EL CASO DE PÉNDULO.

EL SISTEMA PASA DE NUEVO POR SU POSICIÓN ORIGINAL PERO, CON CIERTA VELOCIDAD QUE LO LLEVA MÁS ALLÁ DE SU POSICIÓN.

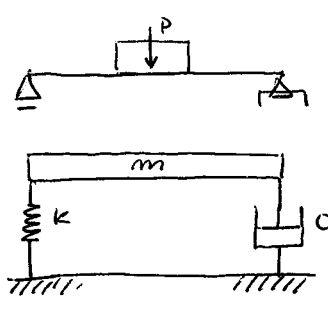
(3) EL SISTEMA CON EL MISMO MECANISMO ANTERIOR VUELVE A PASAR DE FORMA INDEFINIDA POR LA POSICIÓN ORIGINAL, Y MANTIENE ESE MOVIMIENTO.

LAS VIBRACIONES ENTERAS SE CARACTERIZAN POR UN INTERVALO DE TIEMPO PARA REALIZAR UN CICLO, LLAMADO PERÍODO; Y LA FRECUENCIA ES UN CUANTO DE CICLOS DEL MOV. POR UNIDAD DE TIEMPO.

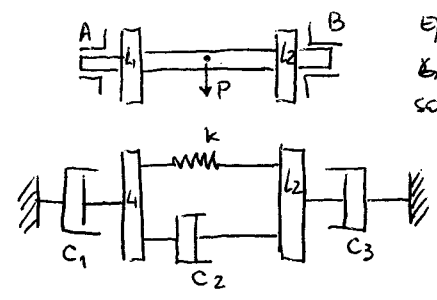
PARA EL ESTUDIO DE VIBRACIONES SIMPLES, TOMAMOS MODELOS MATEMÁTICOS QUE CUMPLAN CON:

- 1). MASA RÍGIDA Y NO DISIPATIVA DE ENERGÍA.
- 2). RESORTE SIN MASA Y NO " " " "
- 3). AMORTIGUADOR SIN MASA Y NO ELÁSTICO

EJEMPLOS DE MODELOS MATEMÁTICOS:



VIGA SIMPLEMENTE APOYADA.
↓
MODELO MATEMÁTICO DISCRETO

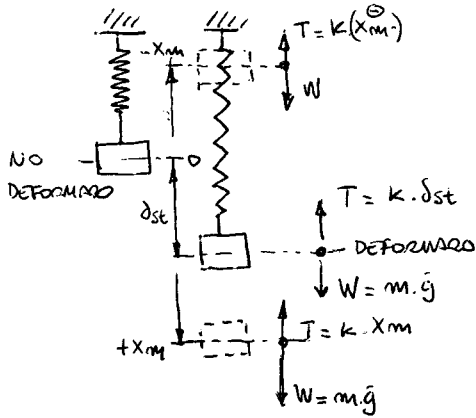


EJE CON 2 DISCOS GIRATORIOS MONTADO SOBRE COJINETES A Y B.
↓
M.M.D.

VIBRACIONES MÁS SIMPLES

- LIBRES: INICIADAS POR UNA PERTURBACIÓN INICIAL, SE DISIPA ENERGÍA Y EL FENÓMENO AMPLIADO DE LAS VIBRACIONES DESEARA CONTINUAMENTE
- FORZADAS: INICIADAS POR UNA PERTURBACIÓN INICIAL PERO LA ENERGÍA DISIPADA ES EQUILIBRADA POR EL APORTE DE ENERGÍA EXTERNA, LO COMPENSA.
- AMORTIGUADAS: LA AMPLITUD DE LAS VIBRACIONES SE VE AFECTADA POR LAS FUERZAS DE AMORTIGUAMIENTO
 - ↳ LIBRES AMORTIGUADAS
 - ↳ FORZADAS AMORTIGUADAS.

1). VIBRACIONES SIMPLES (MOV. ARMÓNICO SIMPLE).



SE TIENE UNA MASA m UNIDA A UN RESORTE SIMPLE, AL SER PERTURBADO EL SISTEMA SE PRODUCE UN DESPLAZAMIENTO ESTÁTICO (d_{st}) Y SE ALCANZAN VALORES MÁXIMOS DEZ MISMO ($+x_m$ y $-x_m$)

POR LO QUE SE TIENEN LAS FUERZAS:

$$W = m \cdot g \quad \text{PESO PROPIO}$$

$$T = k \cdot (d_{st} + x) \quad \text{FUERZA ELÁSTICA DE RESORTE.}$$

$$\text{CON } \Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$m \cdot g - k \cdot (d_{st} + x) = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \cdot g - k d_{st} - k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$

POR LOS VALORES ANTES DEL MOVIMIENTO OSCILATORIO: $m \cdot g = k \cdot d_{st}$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0} \quad \text{EQUATION DE MOV. ARMÓNICO SIMPLE.}$$

DIVIDIENDO POR m .

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

DEFINO

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL (ES PROPIA DEL SISTEMA).

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0}$$

EC. DE VIBRACIONES SIMPLES CON PERTURBACION NATURAL ω_0 .
EDO

• SG DE LA EDO ANTERIOR:

$$x = A \cdot \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x} = A \cos \omega_0 t \cdot \omega_0 + B (-\sin \omega_0 t) \cdot \omega_0$$

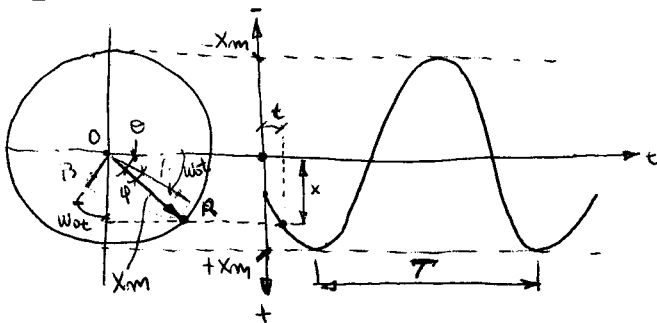
$$\boxed{\ddot{x} = -A \cdot \omega_0^2 \sin \omega_0 t - B \omega_0^2 \cdot \cos \omega_0 t}$$

SOLUCIÓN GENERAL DEL SISTEMA

$$\bullet \text{ SP: } \begin{cases} x_1 = A \sin \omega_0 t \\ x_2 = B \cos \omega_0 t \end{cases}$$

A y B DEPENDEN DE LAS COND. INICIALES DEL MOVIMIENTO.

• SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA EDO ANTERIOR



$$x = \bar{O}R \cdot \sin \theta$$

$$\theta = \omega_0 t + \varphi \quad (\text{CON } \omega_0 t \text{ COMO } \theta \text{ INICIAL})$$

$$\bar{O}R = x_m$$

$$\boxed{x = x_m \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\boxed{v = x_m \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = \dot{x}}$$

$$\boxed{a = -x_m \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = \ddot{x}}$$

x_m : MÁXIMA DEFORMACIÓN DEL SISTEMA
AMPLITUD DE LA VIBRACIÓN.

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

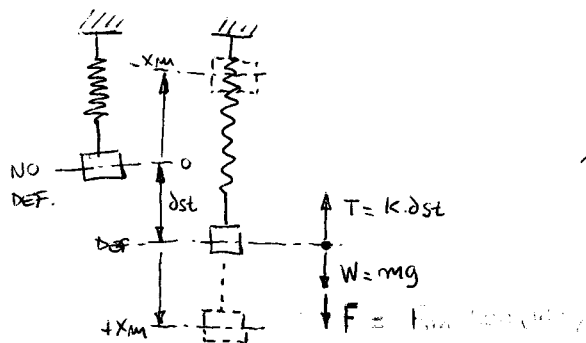
PERÍODO NATURAL

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

FRECUENCIA NATURAL.

2) VIBRACIONES FORZADAS:

AL CASO ANTERIOR SE LE AGREGA UNA FUERZA EXTERNA DE MOV. ALTERNANTE.



$$\Sigma F = m \cdot \ddot{x}$$

$$mg - k \cdot (dst + x) + Fm \cdot \sin(\omega t) = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$mg - k \cdot dst - k \cdot x + Fm \cdot \sin(\omega t) = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{POR COND. INICIAL ANTES DE MOV.}$$

$$-k \cdot x + Fm \cdot \sin(\omega t) = m \cdot \ddot{x}$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = Fm \cdot \sin(\omega t)$$

E.D. CARACT. DE VIBRACIONES FORZADAS.

SOLUCION DE LA E.D. ANTERIOR: $x = x_g + x_p$

$$x = x_m \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) + x_m \cdot \sin(\omega t)$$

(A) RÉGIMEN TRANSITORIO

(B) RÉGIMEN PERMANENTE

NOTA: PRIMERO APARECEN A Y B, LUEGO SE MANTIENE SÓLO B Y A VA DESAPARECIENDO.

$$\Rightarrow x = x_m \sin(\omega t) \text{ ES S.P.}$$

$$\dot{x} = x_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x} = -x_m \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{REEMPLAZANDO:}$$

$$m \cdot (-x_m \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)) + k \cdot (x_m \cdot \sin(\omega t)) = Fm \cdot \sin(\omega t)$$

$$x_m (k - m \cdot \omega^2) = Fm \quad \text{COMO } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = \frac{Fm}{k}$$

$$x_m = \frac{Fm/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad \text{AMPLITUD DE VIBRACIONES FORZADAS}$$

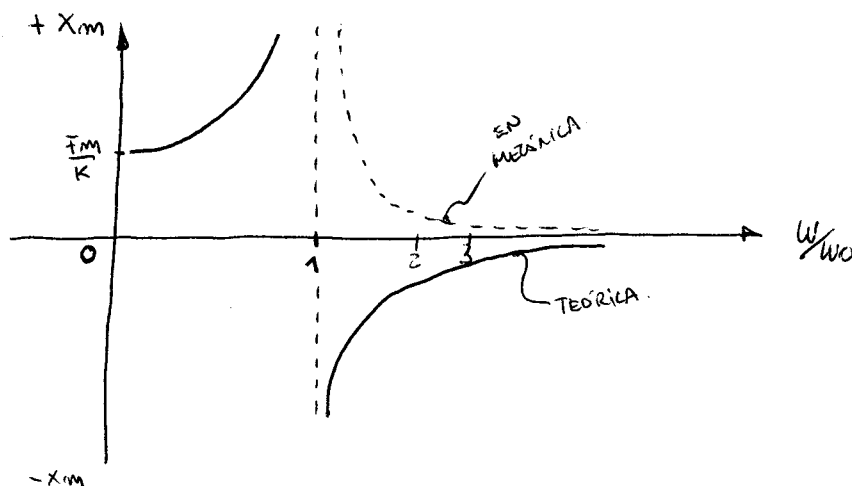
$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = \frac{x_m}{Fm/k} = \text{FACTOR DE AMPLIFICACIÓN}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{FRECUENCIA NATURAL}$$

SI $\omega = \omega_0$ TENEMOS FRECUENCIA DE RESONANCIA.

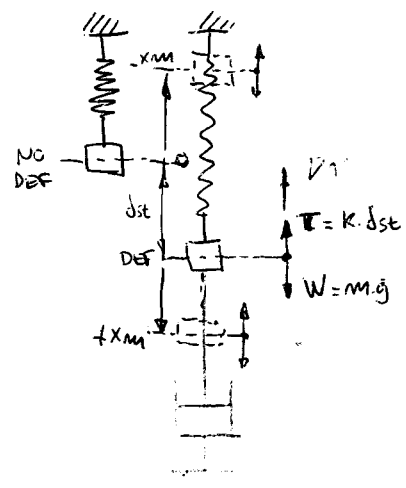
$$\Rightarrow f_f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{FRECUENCIA FORZADA DADA POR ω DE LA F.}$$

SE VE QUE EL F.A. SOLO DEPENDE DE $\frac{\omega}{\omega_0}$, POR ESO SE GRÁFICA ASÍ.



3) VIBRACIONES AMORTIGUADAS

3.1) AMORTIGUADAS SIMPLES:



AL CASO DE VIBRACIONES SIMPLES, SE LE AÑADE UN AMORTIGUAMIENTO CARACTERIZADO POR UNA FUERZA OPUESTA AL RESO PROPIO ~~AMORTIGUAMIENTO~~ Y DE FORMA:

$$F_{\text{amort}} = D \cdot v \quad \text{SENDO OPUESTO AL DE CAÍDA.}$$

D : COEFICIENTE DE RESISTENCIA, RELACIONADO A VISCOSIDAD DEL MEDIO, FORMA, TEMPERATURA, ETC. SALE DE ENSAYOS, TAMBIÉN ES EL C_R (COEF. DE FORTALEZA). PUEDE SER D O K O C .

Por DINÁMICA: $\sum F = m \cdot \ddot{x}$
 $m \cdot \ddot{x} - k(\delta st + x) - D \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$

Por EQUILIBRIO $mg = k \delta st$

$\Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0$ E.D. DE VIBRACIONES AMORTIGUADAS SIMPLES.

• SOLUCIÓN DE LA E.D. ANTERIOR:

SC) $x = e^{\lambda t} \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$
 $m \cdot \lambda^2 e^{\lambda t} + D \lambda e^{\lambda t} + k \cdot e^{\lambda t} = 0$
 $m \lambda^2 + D \lambda + k = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4 \cdot m \cdot k}}{2m}$
 $\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \frac{4mk}{4m^2}}$
 $\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$

DE LA ANTERIOR SE DAN 3 CASOS POSIBLES:

$\left[\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \omega_0^2\right] > 0 \Rightarrow$ MOV. SOBREAAMORTIGUADO $\oplus D > D_c \rightarrow x = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ SG. SOBREAAMORT.

$\left[\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \omega_0^2\right] = 0 \Rightarrow$ MOV. CRÍTICO $\Rightarrow D = D_c = 2m \omega_0 = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow x = (A+Bt) e^{-\omega_0 t}$ SG.

$\left[\left(\frac{D}{2m}\right)^2 - \omega_0^2\right] < 0 \Rightarrow$ MOV. SUBAMORTIGUADO $\oplus D < D_c \rightarrow x = e^{-\left(\frac{D}{2m}\right)t} [A \cdot \sin \omega_d t + B \cdot \cos \omega_d t]$ SG.

D_c AL IGUAL QUE ω_0 ES UN VALOR PROPIO DEL SISTEMA, PERO AL IGUAL QUE EL ω HAY QUE AJUSTAR

CADA CASO. SE DEFINE ASÍ EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO

$$Z = \frac{D}{D_c}$$

$Z > 1$ SOBREAAMORTIGUADO
 $Z = 0$ CRÍTICO
 $Z < 1$ SUBAMORTIGUADO

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{D}{2m}\right)^2$$

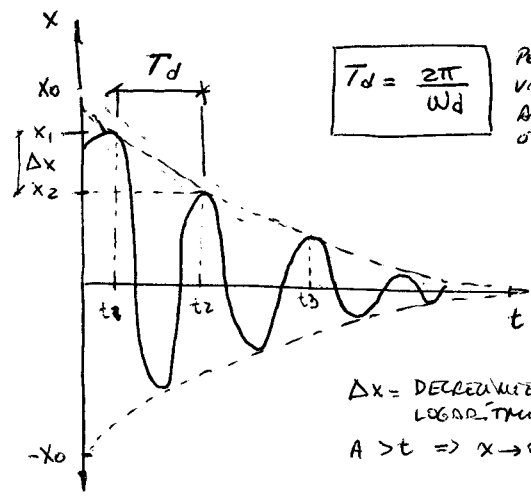
$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{D}{D_c}\right)^2}$$

FRECUENCIA CIRCULAR DE VIBRACIÓN AMORTIGUADA.
 $\oplus$ O SEUDO FRECUENCIA (ω)

JUNTANDO LOS 3 CASOS, PUEDE ESCRIBIR LA SG:

$$x = x_0 e^{-\left(\frac{D}{2m}\right)t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi)$$

MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMÓNICO CON AMPLITUD DECRECIENTE

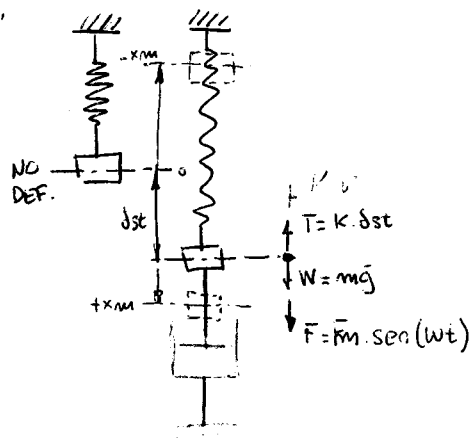


$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

PERÍODO DE VIBRACIÓN AMORTIGUADA.
 O SEUDO PERÍODO.

$\Delta x =$ DECREMENTO LOGARÍTMICO.
 $A > t \Rightarrow x \rightarrow 0$

3.2). AMORTIGUADOS FORZADOS:



AL CASO AMORTIGUADO E AMORTIGUADO SINUSOIDAL SE AGREGA UNA FUERZA PULSATIVA EXTERNA DE FORMA $F = F_m \cdot \sin(\omega t)$
 Para lo que para el movimiento:

$$\sum F = m \cdot \ddot{x}$$

$$k\delta_{st} - k(\delta_{st} + x) - \gamma \dot{x} + F_m \sin(\omega t) = m \ddot{x}$$

$$-k \cdot x - \gamma \dot{x} + F_m \sin(\omega t) = m \ddot{x}$$

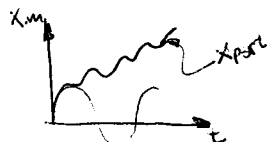
$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} + k \cdot x - F_m \sin(\omega t) = 0$$

E.D. DE VIBR.
 FORZADAS AMORTIGUADAS.

SE BUSCA, DE LA ECUACION ANTERIOR, UNA SOLUCION PARTICULAR QUE CUMPLA CON LA FORMA DE LA FUERZA EXTERNA

$$x_{part} = X_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

SP. DE FORMA ARMONICA.



$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{part} &= X_m \omega \cos(\omega t - \varphi) \\ \ddot{x}_{part} &= -X_m \omega^2 \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m \cdot [-X_m \omega^2 \sin(\omega t - \varphi)] + \gamma [X_m \omega \cos(\omega t - \varphi)] + k [X_m \sin(\omega t - \varphi)] &= F_m \sin(\omega t) \\ \text{si } \omega t - \varphi = 0 \Rightarrow \gamma X_m \omega &= F_m \sin(\varphi) \\ \text{si } \omega t - \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -m X_m \omega^2 + k X_m &= F_m \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)}{\cos(\varphi)} \end{aligned}$$

PARA SABER LOS SEN Y COS(φ) ELEVO LOS TÉRMINOS AL CUADADO.

$$\gamma^2 X_m^2 \omega^2 - m^2 X_m^2 \omega^4 + k^2 X_m^2 = F_m^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$X_m^2 (\gamma^2 \omega^2 - m^2 \omega^4 + k^2) = F_m^2 \quad \text{CON} \quad \omega^2 \gamma^2 - m^2 \omega^4 + k^2 = (k - m\omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2$$

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}$$

$$\text{CON} \quad \gamma/m = \omega_0^2 \quad \text{Y} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \text{FACTOR DE AMPLIFICACIÓN}$$

$$2m \cdot \omega_0 = \gamma_c \quad \frac{\gamma}{\gamma_c} = \text{FACTOR DE AMORTIGUACIÓN}$$

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{k^2 (\frac{\gamma \omega}{k})^2 + k^2 (1 - \frac{m\omega^2}{k})^2}} = \frac{F_m/k}{\sqrt{(\frac{\gamma \omega}{k})^2 + (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2}}$$

$$\text{COMO } k = \omega_0^2 m = \left(\frac{\gamma_c}{2m}\right)^2 m$$

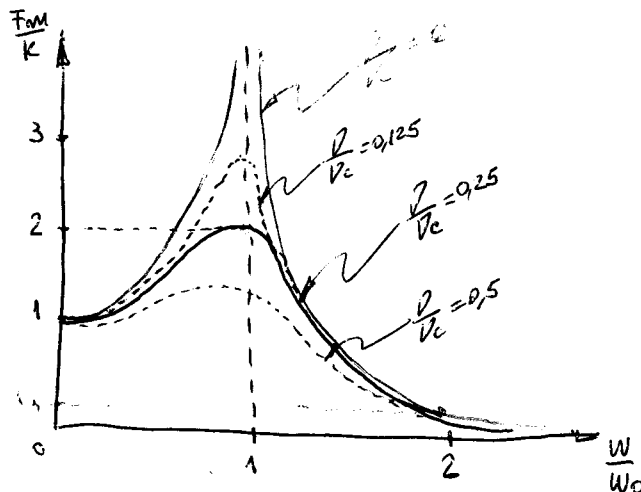
$$X_m = \frac{F_m/k}{\sqrt{4 \frac{\gamma^2}{\gamma_c^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2}}$$

AMPLITUD DE VIBRACIONES FORZ. AMORT., DEPENDE DE AMBOS FACTORES: DE AMORTIGUACIÓN, DE AMPLIFICACIÓN

EJEMPLOS DE GERENCIACIÓN → DANDO VALORES A $\frac{\gamma}{\gamma_c}$ Y $\frac{\omega}{\omega_0}$

$$\frac{X_m}{F_m/k} = \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 0 \Rightarrow X_m = F_m/k \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow X_m = \frac{F_m}{k} \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 2 \Rightarrow X_m = \frac{F_m}{3k} \end{cases}$$

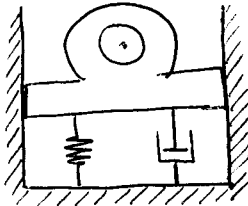
$$\frac{X_m}{F_m/k} = \frac{\gamma}{\gamma_c} = 0,25 \left\{ \begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_0} = 0 &\Rightarrow X_m = F_m/k \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 1 &\Rightarrow X_m = 2F_m/k \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 2 &\Rightarrow X_m = F_m/3k \end{aligned} \right.$$



FACTOR DE TRANSMISIBILIDAD

PER EJEMPLO:

MOTEL VINCULADO A PISO, SIN ROZAMIENTO.



$$D \cdot \ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow x_p = x_m \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{x}_p = -x_m \sin(\omega t - \varphi) \cdot \omega$$

SE DEFINE ENTONCES LA FUERZA TRANSMISIVA COMO:
QUE ES LA FUERZA OPUESTA

$$F_t = k \cdot x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) - D \cdot \dot{x}_m \sin(\omega t + \varphi)$$

CUYO MÁXIMO ES

$$F_{max} = \sqrt{[k \cdot x_m \cos(\omega t + \varphi)]^2 + [D \cdot \omega \cdot x_m \sin(\omega t + \varphi)]^2}$$

$$F_{t,max} = \sqrt{k^2 x_m^2 + D^2 \omega^2 x_m^2} = x_m \cdot \sqrt{k^2 + D^2 \omega^2}$$

CON DICHO DATO, EL FACTOR DE TRANSMISIBILIDAD (T):

$$T = \frac{F_{t,max}}{F_m}$$

DONDE F_m ES LA FUERZA EXTERNA QUE PROVOCA EL FORZAMIENTO

$$T = \frac{x_m \cdot \sqrt{k^2 + D^2 \omega^2}}{\frac{x_m}{k} \sqrt{4 \left(\frac{D}{k}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{D^2 \omega^2}{k^2}}}{\sqrt{4 \left(\frac{D}{k}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

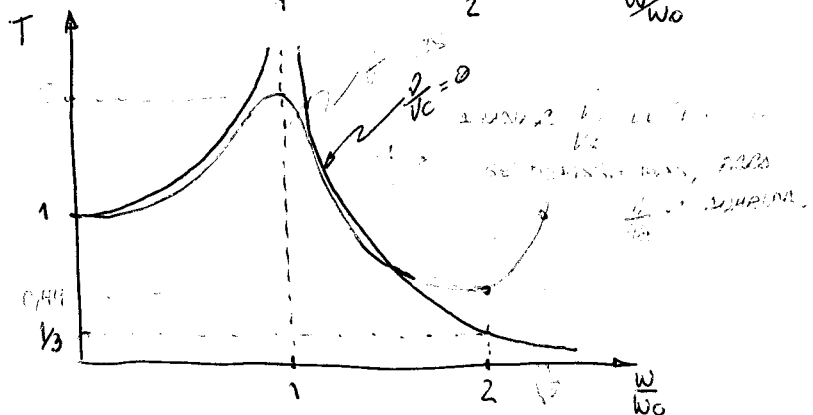
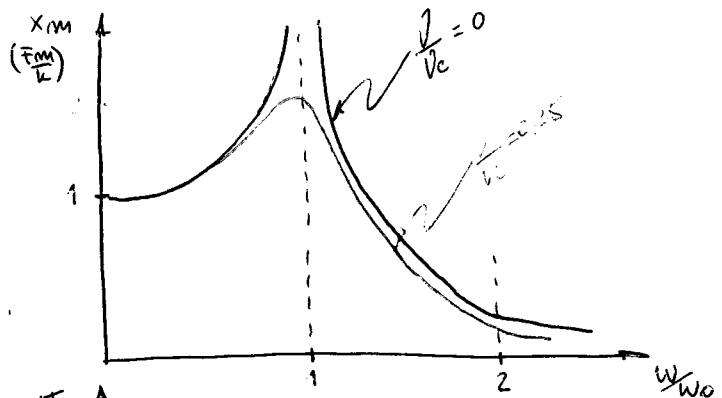
Y DEZ MISMO RESULTADO PARA AMORT. FORZADOS:

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{D}{k}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{4 \left(\frac{D}{k}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

FACTOR DE TRANSMISIBILIDAD.

GRÁFICAMENTE:

$$T; \frac{D}{k} = 0 \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0} = 0 \Rightarrow T = 1 \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow T \rightarrow \infty \\ \frac{\omega}{\omega_0} = 2 \Rightarrow T = 1/3 \\ \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{2} \Rightarrow T = 1 \end{cases}$$



4 CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

Por definición, el cuerpo rígido se considera un sistema de puntos materiales en los cuales corp. distancia ℓ un punto y otro siempre permanece cte. (no se deforma) por lo que:

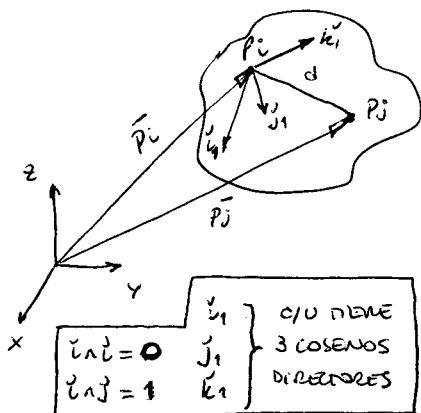
$$d = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{cte}, \text{ aplicando al cuerpo la ecuación de los puntos respecto a una tercia fija:}$$

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{r}_{ij} \text{ como sólo el módulo permanece cte, entonces:}$$

$$d_{ij}^2 = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 \quad \text{CONDICIÓN GEOMÉTRICA DE RIGIDEZ.}$$

permanece cte siempre

El espacio $\mathbb{R}^3$ tiene 6 grados de libertad, analizando los puntos, conociendo uno en particular puedo determinar el resto; (usando coordenadas relativas sobre el pto conocido, ver adelante).



Analizando su rotación (respecto de t).

$$\frac{d(d_{ij}^2)}{dt} = 2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \frac{d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{dt} = \frac{d(\text{cte})}{dt} = 0$$

$$2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \left[\frac{d(\vec{r}_i)}{dt} - \frac{d(\vec{r}_j)}{dt} \right] = 0$$

$$2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j) = 0 \quad \text{divido ambos m. por 2:}$$

$$\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \cdot [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{\omega}_i - (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{\omega}_j] = 0 \quad \text{BUSCO FORMAR UN VECTORE.}$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \cdot \left[\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \wedge \vec{\omega}_i - \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \wedge \vec{\omega}_j \right] = 0 \quad \text{CON} \quad \boxed{\vec{e}_{ij} = \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}} \quad \text{VECTORE DE VECTOR DISTANCIA.}$$

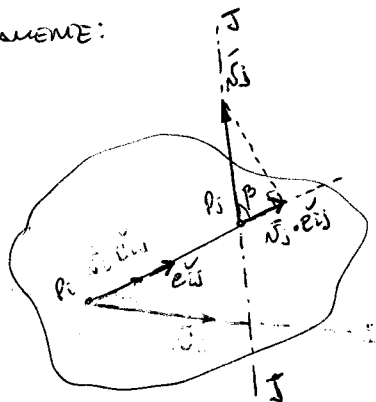
$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| \cdot \vec{e}_{ij} \wedge (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j) = 0 \quad \text{divido todo por el módulo d}$$

$$\boxed{\vec{e}_{ij} \wedge \vec{\omega}_i = \vec{e}_{ij} \wedge \vec{\omega}_j}$$

CONDICIÓN CINEMÁTICA DE RIGIDEZ

TODOS LOS PTOS QUE CUMPLEN ESTO, ESTÁN ANALIZADOS DE UN C.R.

FÍSICAMENTE:



$$\left\{ \begin{array}{l} P_j \text{ SE MUEVE EN LA "CUALCITA" (DIRECCIÓN) } J-J \text{ CON } P_i \text{ FIJO} \\ P_i \text{ " " " " " " " " } P_j \text{ FIJO.} \end{array} \right.$$

$$\vec{e}_{ij} \wedge \vec{\omega}_i \text{ ES } \text{PROY}_{\vec{r}_{ij}}(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}_i)$$

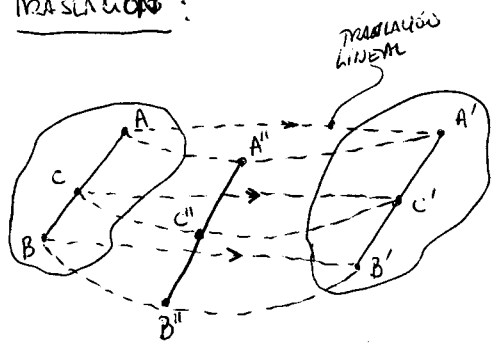
$$\vec{e}_{ij} \wedge \vec{\omega}_j \text{ " } \text{PROY}_{\vec{r}_{ji}}(\vec{r}_j \cdot \vec{\omega}_j)$$

MOVIMIENTO DEL C.R

a) SUMA DE MOVIMIENTOS SIMPLES { TRASLACIÓN
ROTACIÓN.

b) MOVIMIENTOS COMPUESTOS { COMPOSICIÓN DE TRASLACIONES
" " ROTACIONES
ROTOTRANSLACIÓN

3.1) TRASLACIÓN:



A, B, C POSICIÓN INICIAL
A', B', C' " FINAL

PARA TRASLACIÓN LINEAL:

$$\begin{aligned} \vec{A}-\vec{C} &= \vec{A'}-\vec{C'} \\ \vec{A}-\vec{B} &= \vec{A'}-\vec{B'} \\ \Downarrow \\ \vec{A'}-\vec{A} &= \vec{C'}-\vec{C} \\ \vec{A'}-\vec{A} &= \vec{B'}-\vec{B} \end{aligned}$$

PARA TRASLACIÓN CURVILINEA

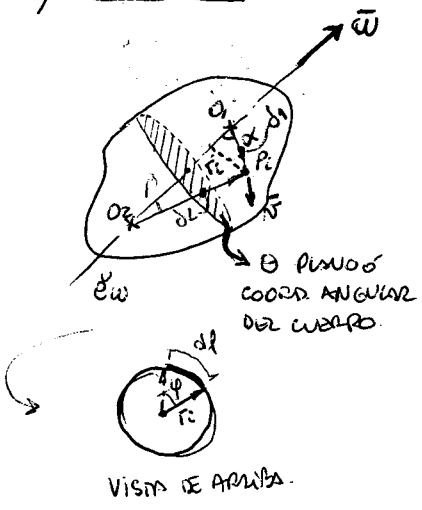
MISMO CONCEPTO, SE MANTIENEN LAS COMPONENTES INERENCIALES Y SE TRASLAMAN POR TRASLACIONES CURVAS (POR INCREMENTOS A'B'C')

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{P} \text{ (POSICIÓN)} \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{V} \text{ (VELOCIDAD TANG. A TRAY. CURVILINEA)} \\ &\rightarrow \vec{G} \text{ (VELOCIDAD DE TRASLACIÓN)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \vec{V} = \frac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{A} &= \frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \end{aligned}$$

TANTO LA ACCELERACIÓN COMO LA VELOCIDAD PERMANECEN CIES EN LA ROTACIÓN

3.2) ROTACIÓN:



SE DICE QUE HAY ROTACIÓN RESPECTO DE UN EJE CUANDO LAS LÍNEAS QUE PERMANECEN CIES DEL C.R. Y PERMANECEN A UN PUNTO PERPENDICULAR AL EJE, GIRAN Y SE TRASLAMAN RESPECTO DEL EJE, EN ESE MISMO PUNTO. SE PUEDE VER QUE:

$$\begin{aligned} (O_1 - O_2)^2 &= \text{cte} \\ (P_1 - O_2)^2 &= \text{cte} \\ (P_1 - O_1)^2 &= \text{cte} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{l}}{dt} \\ |\vec{v}| &= \frac{dl}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{con } dl = r_i d\phi$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \cdot \vec{e}_\omega \\ \vec{\omega} &= \dot{\phi} \vec{e}_\omega \end{aligned} \quad \text{REGULA EL MUNDO PERECHO (SENTIDO)}$$

$$|\vec{v}| = r_i \frac{d\phi}{dt} = r_i \omega$$

$$\begin{aligned} \text{como } r_i &= d_1 \cdot \sin \alpha \\ r_i &= d_2 \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$v = r_i \cdot \omega = \omega \cdot d_1 \sin \alpha = \omega \cdot d_2 \sin \beta = \text{cte}$$

$$v = \omega \cdot |P_1 - O_1| \sin \alpha = \omega \cdot |P_1 - O_2| \sin \beta$$

$$v = |\omega \wedge (P_1 - O_1)| = |\omega \wedge (P_1 - O_2)| \Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$$

VELOCIDAD PRODUCIDA POR LA ROTACIÓN ω , VARIABLE PARA CADA PUNTO P_i Y RESPECTO DE CUALQ. PUNTO $O \in \vec{\omega}$.

DERIVANDO RESPECTO DE t , OBTENEMOS LA $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge (P_i - O))}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (P_i - O) + \vec{\omega} \wedge \frac{d(P_i - O)}{dt} \quad \text{como } \vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{ACCELERACIÓN ANGULAR}$$

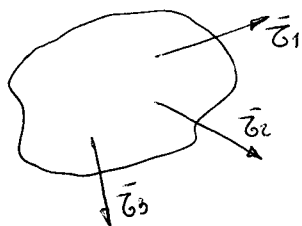
$$\vec{a} = \vec{\gamma} \wedge (P_i - O) + \vec{\omega} \wedge \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = \vec{\gamma} \wedge (P_i - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)]$$

ACCELERACIÓN TOTAL EN EL PUNTO P_i PROV. POR EL GIRO.

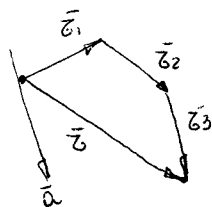
$$\vec{\gamma} \wedge (P_i - O) = a_{tg} \quad \text{DIRIGIDO EN DIRECCIÓN DE } \vec{v}.$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - O)) = a_n \quad \text{POR SER PRODUCTO TRIPLE, SUS SENTIDO ES HACIA EL CENTRO DE ROTACIÓN}$$

b.1) COMPOSICIÓN DE TRASLACIONES:



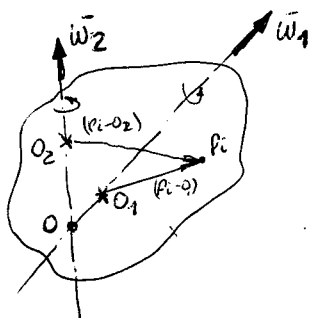
=>



$$\begin{aligned} \bar{c} &= \sum_{i=1}^n \bar{c}_i \\ \bar{a} &= \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \end{aligned}$$

b.2) COMPOSICIÓN DE ROTACIONES:

• CONCURRENTE:



$$\bar{N}_i = \bar{N}_{iI} + \bar{N}_{iII}$$

$$\bar{N}_{iI} = \bar{w}_1 \wedge (P_i - O_1)$$

$$\bar{N}_{iII} = \bar{w}_2 \wedge (P_i - O_2)$$

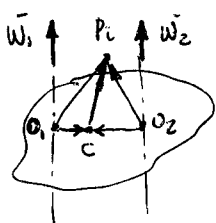
$$\bar{N}_i = \bar{w}_1 \wedge (P_i - O_1) + \bar{w}_2 \wedge (P_i - O_2)$$

PARA $O_1 \equiv O_2 \equiv O$ PUNTO DE CONJUNCIÓN.

$$\Rightarrow \bar{N}_i = (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \wedge (P_i - O)$$

$$\bar{N}_i = \bar{w} \wedge (P_i - O)$$

• PARALELAS DE SENTIDO (≡)



$$\bar{N}_i = \bar{N}_{iI} + \bar{N}_{iII}$$

$$\bar{N}_{iI} = \bar{w}_1 \wedge (P_i - O_1)$$

$$\bar{N}_{iII} = \bar{w}_2 \wedge (P_i - O_2)$$

$$\bar{N}_i = \bar{w}_1 \wedge (P_i - O_1) + \bar{w}_2 \wedge (P_i - O_2)$$

$$(P_i - O_1) = (C - O_1) + (P_i - C)$$

$$(P_i - O_2) = (C - O_2) + (P_i - C)$$

$$\bar{N}_i = \boxed{\bar{w}_1 \wedge (C - O_1)} + \bar{w}_1 \wedge (P_i - C) + \boxed{\bar{w}_2 \wedge (C - O_2)} + \bar{w}_2 \wedge (P_i - C)$$

$$\hookrightarrow \bar{N}_{C1} = 0$$

$$\hookrightarrow \bar{N}_{C2} = 0$$

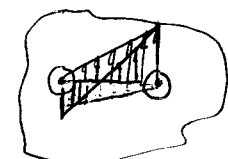
$$\bar{N}_i = (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \wedge (P_i - C)$$

CON PTO C COMO CENTRO INST. DE ROT.

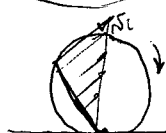
• CENTRO INSTANT. DE ROTACIÓN: DONDE LAS VELOCIDADES PRODUCIDAS POR LOS w SON CERO.

$$\boxed{\bar{N}_C = 0} \quad C.I.R$$

ES:

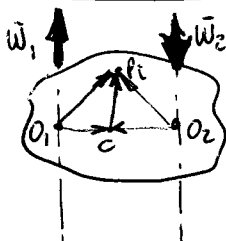


/// SUMA FINAL.



CTR (VARGA SIEMPRE)

• PARALELAS DE SENTIDO OPUESTO.



$$\bar{N}_i = \bar{N}_{iI} + \bar{N}_{iII}$$

$$\bar{N}_{iI} = \bar{w}_1 \wedge (P_i - O_1)$$

$$\bar{N}_{iII} = \bar{w}_2 \wedge (P_i - O_2)$$

$$\bar{N}_i = \bar{w}_1 \wedge (P_i - O_1) + \bar{w}_2 \wedge (P_i - O_2)$$

como $\bar{w}_1 = -\bar{w}_2$

$$\bar{N}_i = \bar{w}_1 \wedge (P_i - O_1) + (-\bar{w}_1) \wedge (P_i - O_2)$$

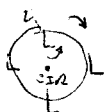
$$\bar{N}_i = \bar{w}_1 \wedge [(P_i - O_1) - (P_i - O_2)] = \bar{w}_1 \wedge (O_2 - O_1)$$

como $w_2 = -w_1$ y $(O_1 - O_2) = -(O_2 - O_1)$
 TODOS LOS PTS TENDRÁN MISMA VELOCIDAD.

=> ES TRASLACIÓN.

$$\boxed{\bar{N}_i = \bar{w}_1 \wedge (O_2 - O_1) = \bar{w}_2 \wedge (O_1 - O_2)}$$

ES.



• MOVIMIENTO GERAL RELATIVO
A UN SIST. DE REF. MÓVIL.

DE LO ANTERIOR, DEFINIMOS EL VECTOR POSICIÓN Γ COMO EL VECTOR $Q(t)$

$$\Gamma = \Gamma_x \hat{i} + \Gamma_y \hat{j} + \Gamma_z \hat{k} \quad \text{RESPECTO DE LA TERNA MÓVIL.}$$

$$(\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} = \dot{\Gamma}_x \hat{i} + \dot{\Gamma}_y \hat{j} + \dot{\Gamma}_z \hat{k} \quad (1)$$

$$(\dot{\Gamma})_{Oxyz} = \vec{v}_P = (\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} + \Omega \wedge \Gamma \quad \text{DONDE} \quad \vec{v}_P = \vec{v}_{Pr} + \vec{v}_{Pa} \rightarrow \text{VIENE DE LA FORMA:}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$\uparrow$ $\vec{v}_{Abs.}$ $\uparrow$ $\vec{v}_{Rel.}$

COMO $\vec{v}_P = \frac{d\Gamma}{dt} = \omega \wedge \Gamma \Rightarrow (\dot{\Gamma})_{Oxyz} = \vec{v}_{Pr} = \omega_{P/O_1} \wedge (P - O_1)$

$$\vec{v}_P = \omega_{P/O_1} \wedge (P - O_1) + \Omega \wedge (O_1 - O)$$

$\vec{v}_{Pr} \equiv \vec{v}_{P/O_1}$ $\vec{v}_{Pa} \equiv \vec{v}_{O_1}$ $\vec{v}_P = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{P/O_1}$

$\vec{v}_P$: VELOCIDAD ABSOLUTA (RESPECTO DE T. FIJA OXYZ) DEL PTO P.
 $\vec{v}_{Pr}$: " RELATIVA (" " MOV. Oxyz) " " P.
 $\vec{v}_{Pa}$: " DE ARRASTRE (" " FIJA OXYZ) " " O1

DERIVANDO, BUSCAMOS LA ACCELERACIÓN, DE (1)

$$a_P = \dot{\vec{v}}_P = \frac{d[(\dot{\Gamma})_{Oxyz}]}{dt} + \Omega \wedge \Gamma + \Omega \wedge \dot{\Gamma} \quad \text{DONDE} \quad \frac{d[(\dot{\Gamma})_{Oxyz}]}{dt} = (\ddot{\Gamma})_{Oxyz} + \Omega \wedge (\dot{\Gamma})_{Oxyz}$$

$$a_P = \Omega \wedge \Gamma + \Omega \wedge \dot{\Gamma} + (\ddot{\Gamma})_{Oxyz} + \Omega \wedge (\dot{\Gamma})_{Oxyz} \quad \text{QUE VIENE DE}$$

$$(\ddot{Q})_{Oxyz} = (\ddot{Q})_{O_1x_1y_1z_1} + \Omega \wedge \dot{Q}$$

COMO $\dot{\Gamma} = (\dot{\Gamma})_{Oxyz} = \vec{v}_P = (\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} + \Omega \wedge \Gamma$

$$\Rightarrow a_P = \Omega \wedge \Gamma + \Omega \wedge [(\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} + \Omega \wedge \Gamma] + (\ddot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} + \Omega \wedge (\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{Q} \equiv \frac{d[(\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1}]}{dt} \Big|_{Oxyz} \\ Q = (\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} \end{array} \right.$$

$$a_P = \Omega \wedge \Gamma + \Omega \wedge [(\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1}] + \Omega \wedge (\Omega \wedge \Gamma) + (\ddot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} + \Omega \wedge (\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1}$$

$$a_P = \Omega \wedge \Gamma + \Omega \wedge (\Omega \wedge \Gamma) + 2 \Omega \wedge \vec{v}_{Pr} + (\ddot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1}$$

Γ : VECTOR POSICIÓN $(O_1 - O)$ RESPECTO DE LA TERNA FIJA OXYZ

Ω : VELOCIDAD ANGULAR DE LA TERNA MÓVIL RESPECTO DE LA FJA.

$\vec{v}_{Pr} = (\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1}$: VELOCIDAD RELATIVA DEL PUNTO P RESPECTO DE LA TERNA MÓVIL $O_1x_1y_1z_1$

$$(\ddot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} = \omega_{P/O_1} \wedge (\Gamma)_{O_1x_1y_1z_1} + \omega_{P/O_1} \wedge (\dot{\Gamma})_{O_1x_1y_1z_1} = \gamma_{P/O_1} \wedge (P - O_1) + \omega_{P/O_1} \wedge [\omega_{P/O_1} \wedge (P - O_1)]$$

$$a_P = \left[\Omega \wedge (O_1 - O) + \Omega \wedge [\Omega \wedge (O_1 - O)] \right] + \left[2 \Omega \wedge \vec{v}_{Pr} \right] + \left[\gamma_{P/O_1} \wedge (P - O_1) + \omega_{P/O_1} \wedge [\omega_{P/O_1} \wedge (P - O_1)] \right]$$

$\downarrow$ a_{Pa} $\downarrow$ a_{Pr}

$$a_{Pa} = \Omega \wedge \Gamma + \Omega \wedge (\Omega \wedge \Gamma) \quad \text{ACCELERACIÓN DE ARRASTRE DE } O_1 \text{ RESPECTO DE T. FIJA OXYZ}$$

$$a_{Pr} = \gamma_{P/O_1} \wedge (\Gamma)_{O_1x_1y_1z_1} + \omega_{P/O_1} \wedge [\omega_{P/O_1} \wedge (\Gamma)_{O_1x_1y_1z_1}] \quad \text{ACCELERACIÓN RELATIVA DE P RESPECTO DE T. MÓVIL Oxyz}$$

$$a_{PC} = 2 \Omega \wedge \vec{v}_{Pr} \quad \text{ACCELERACIÓN COMPLEMENTARIA O DE CORIOLIS}$$

• CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

DE DPM TUVIAMOS:

$$\bar{Q} = m \bar{v} \Rightarrow$$

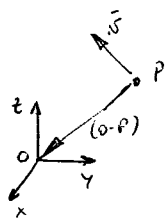
$$\bar{Q} = \sum m_i \bar{v}_i$$

CANTIDAD DE MOV.

USANDO QUE LO C.R. SE FORMA

$$\text{POR } M = \sum m_i$$

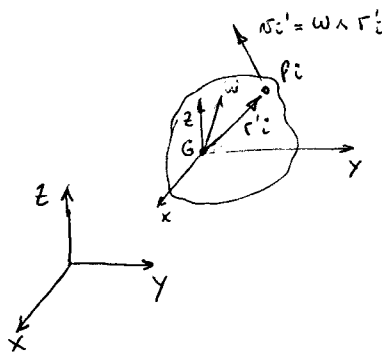
$$\bar{L}_O = \bar{Q} \wedge (O-P)$$

MOMENTO CINÉTICO
O DE CEN. DE MOV.

QUE, APLICADO A C.R. TENEMOS:

$$\bar{L}_G = \sum (\vec{r}_i' \wedge \vec{v}_i' \Delta m_i)$$

$$\bar{L}_G = \sum (\vec{r}_i' \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i') \Delta m_i)$$

HAREMOS PRODUCTO VECTORIAL CON $\vec{r}_i' = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$ NOS QUEDA:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\bar{L}_G = L_{Gx} \vec{i} + L_{Gy} \vec{j} + L_{Gz} \vec{k}$$

$$L_{Gx} = \omega_x \sum (y_i^2 + z_i^2) \Delta m_i - \omega_y \sum x_i y_i \Delta m_i - \omega_z \sum z_i x_i \Delta m_i$$

$$L_{Gy} = -\omega_x \sum x_i y_i \Delta m_i + \omega_y \sum (z_i^2 + x_i^2) \Delta m_i - \omega_z \sum y_i z_i \Delta m_i$$

$$L_{Gz} = -\omega_x \sum z_i x_i \Delta m_i - \omega_y \sum y_i z_i \Delta m_i + \omega_z \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i$$

APLICANDO DIFERENCIALES Y, SUPONIENDO QUE POR GEOMETRÍA DE MASAS:

$$L_{Gx} = \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int x y dm - \omega_z \int z x dm$$

$$L_{Gy} = -\omega_x \int y z dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int y z dm$$

$$L_{Gz} = -\omega_x \int z x dm - \omega_y \int y z dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm$$

POR G.M. TENEMOS QUE:

$$I_{xy} = \int xy dm \quad I_{xz} = \int xz dm \quad I_{yz} = \int yz dm$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x = \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y = \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z = \int (x^2 + y^2) dm \end{array} \right\} \text{ MOMENTOS DE INERCIA } \\ \text{CENTROIDES PROPIOS.}$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}$$

MATRIZ MOMENTO DE INERCIA $\Rightarrow$ TENSOR DE INERCIA.
DEL CUERPO RÍGIDO.

$$\bar{L}_G = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & \dots & \dots \\ \dots & I_y & \dots \\ \dots & \dots & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

MOMENTO CINÉTICO RESPECTO
DEL BARICENTRO G. SIST. REF. $Gxyz$

$$\bar{L}_O = \vec{r} \wedge M \cdot \vec{v}_G + \bar{L}_G$$

MOMENTO CINÉTICO RESPECTO
DEL PTO O DE SIST. DE
REF. $Oxyz$.

• ENERGÍA CINÉTICA DE UN C.R.

LA FÓRMULA GRAL DE E_c : $E_c = \frac{1}{2} M \cdot \vec{v}^2$

ANALIZANDO EL TÉRMINO PARA C.R.:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i^2 \quad \text{COMO} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_a + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_a + \omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum m_i [\vec{v}_a + \omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})]^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \left\{ v_a^2 + 2 \cdot \vec{v}_a \cdot [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})] + [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})]^2 \right\}$$

$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i v_a^2}_{1)} + \underbrace{\sum m_i \vec{v}_a \cdot [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})]}_{2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})]^2}_{3)}$$

$$1). E_{c1} = \frac{1}{2} \sum m_i v_a^2 = \frac{1}{2} M \cdot v_a^2$$

$$2). E_{c2} = \sum m_i \vec{v}_a \cdot [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})] = \vec{v}_a \cdot [\omega_p \wedge (\vec{G} - \vec{O}) \cdot M]$$

$\uparrow$
G.M.

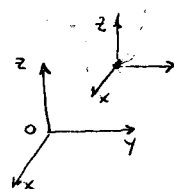
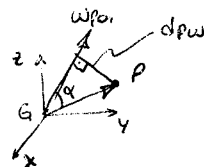
$$3). E_{c3} = \frac{1}{2} \sum m_i [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})]^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})]^2 \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2} = \frac{1}{2} \sum m_i [\omega_p \wedge (\vec{r} - \vec{G})]^2 \omega_p^2$$

$$E_{c3} = \frac{1}{2} \sum m_i \left[\underbrace{|\omega_p|^2}_{=1} \cdot \underbrace{|\vec{r} - \vec{G}|^2 \sin^2 \alpha}_{d_{PG}} \right] \omega_p^2 = \frac{1}{2} \sum m_i d_{PG}^2 \cdot \omega_p^2$$

$\uparrow$
Iw

$$E_{c3} = \frac{1}{2} \cdot I_w \cdot \omega_p^2$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} M v_a^2 + \vec{v}_a \cdot [\omega_p \wedge M \cdot (\vec{G} - \vec{O})] + \frac{1}{2} I_w \cdot \omega_p^2$$



• MOVIMIENTO DE UN C.R. RELATIVO:

UTILIZANDO LA LEY DE CAMBIO DE UN VECTOR RESPECTO DE UN SIST. REF. MOVIL:
 Ω : VEL. ANGULAR DE LA TERNA $Gx'y'z'$ RESPECTO DE $Gxyz$

$$\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{L}}_G = (\dot{\vec{L}}_G)_{Gxyz} + \Omega \wedge \vec{L}_G$$

REDUCCIÓN AL ORIGEN $Oxyz$: $\sum \vec{M}_O = \sum \vec{M}_G + \Omega \wedge \vec{L}_O$

• REDUCCIÓN ENTRE E_c POR $\vec{Q}$ Y $\vec{L}$:

PARA $G \equiv O$ TENEMOS

$$E_c = \frac{1}{2} M \cdot \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} I_w(G) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} M (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2} I_w (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{x}_G} = \frac{1}{2} M \cdot 2\dot{x}_G = M \cdot \dot{x}_G$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{y}_G} = \dots = M \cdot \dot{y}_G$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{z}_G} = \dots = M \cdot \dot{z}_G$$

$$\frac{dE_c}{d\omega_x} = \frac{1}{2} I_w \cdot 2\omega_x = I_w \cdot \omega_x$$

$$\vec{Q} = \frac{dE_c}{d\dot{x}_G} \vec{i} + \frac{dE_c}{d\dot{y}_G} \vec{j} + \frac{dE_c}{d\dot{z}_G} \vec{k}$$

$$\vec{L}_O = \frac{dE_c}{d\omega_x} \vec{i} + \frac{dE_c}{d\omega_y} \vec{j} + \frac{dE_c}{d\omega_z} \vec{k}$$