

# ***Integrales***

## ***Triples***

***Unidad 9***  
***Segunda Parte***

**Expectativas de logro**

Al finalizar esta sección, el estudiante:

1. Será capaz de reconocer y calcular integrales triples
2. Adquirirá destreza en graficar el dominio de integración y en la elección de los límites. Sabrá elegir el orden de integración y reconocer cuando éste no se puede cambiar.
3. Será capaz de elegir un cambio de variables adecuado cuando sea necesario, para facilitar el cálculo y graficar el nuevo dominio resultante de la transformación usada.
4. Podrá realizar aplicaciones a la Física y la Tecnología
5. Manejará las funciones básicas del software Mathematica.

**Punto de partida**

1. a) Hallar las coordenadas del centro de masa de un sólido de densidad constante acotado abajo por el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y arriba por el plano  $z = 4$ . Rta:  $\bar{x} = \bar{y} = 0$  por simetría;  $\bar{z} = \frac{8}{3}$   
b) Determinar el plano  $z = c$  que divide al sólido en dos partes de igual volumen. Rta:  $c = 2\sqrt{2}$
2. Dado el sólido de densidad constante acotado por abajo por el plano  $z=0$ , a los lados por el cilindro elíptico  $x^2+4y^2=4$  y, por arriba, por el plano  $z=2-x$ , se pide:
  - a. El momento estático con respecto al plano  $xy$  Rta:  $M_{xy} = 5\pi$
  - b. Las coordenadas del centro de masa Rta:  $\bar{x} = -\frac{1}{2}$ ;  $\bar{y} = 0$ ;  $\bar{z} = \frac{5}{4}$
3. Calcular la masa de la región sólida acotada por las superficies  $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ ,  $z = 2x^2 + 2y^2$  si la densidad  $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  Rta:  $M = \frac{512\pi}{15}$

## Introducción

En el módulo de Integrales dobles, calculamos masa, coordenadas del centro de masa, momentos estáticos y de inercia de placas planas mediante integrales dobles. Si quisiéramos efectuar cálculos similares para sólidos en  $\mathbb{R}^3$ , se necesita introducir una variable más, lo cual implicará trabajar con integrales triples.

## Definición de Integral Triple

Definiremos la integral triple de  $f(x,y,z)$  sobre el dominio  $D$ , cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^3$ , como límite de una sucesión de sumas, tal como se hace en el caso de las integrales definidas, y también integrales dobles.

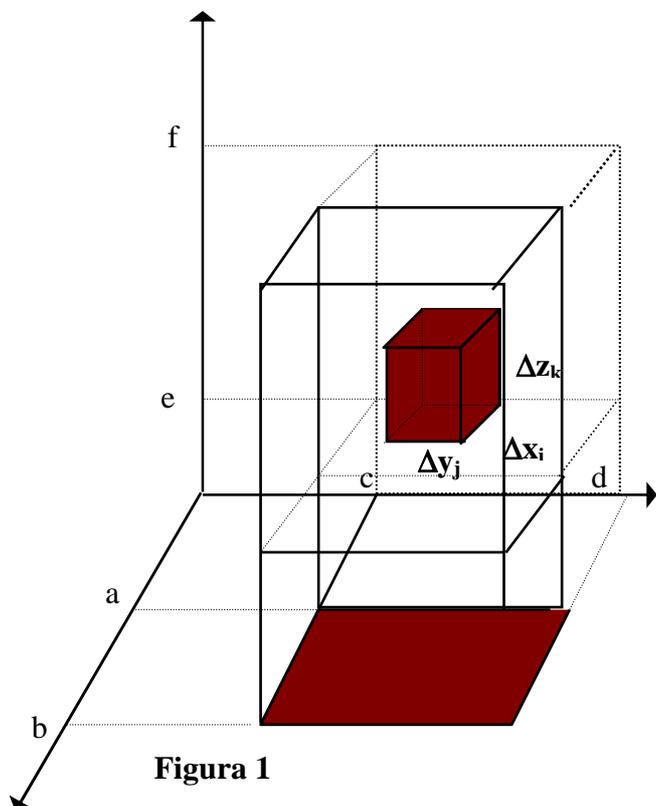


Figura 1

1. Subdividimos la región  $D$  en  $n$  pequeños paralelepípedos rectangulares (como el que muestra la Fig. 1) mediante planos paralelos a los coordenados. A cada uno de ellos le asignamos su volumen como característica, es decir, para el genérico será  $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ .
2. Elegimos en cada subdivisión un punto arbitrario  $(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$ , que puede ser interior o pertenecer a la frontera y evaluamos  $f$  en dicho punto obteniéndose  $f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$ .
3. Formamos los productos  $f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ .
4. Sumamos los productos así obtenidos, extendiendo esta suma a toda la región  $D$ :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

5. Llevamos esta suma al límite con  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow \infty$  para que cada subdivisión tenga volumen cada vez más pequeño

Si este límite existe, es finito e independiente de la forma en que se han hecho las particiones, es por definición, la **integral triple** de  $f(x, y, z)$  extendida al dominio  $D$ , que se anota

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

**La continuidad de  $f$**  es una condición suficiente para la existencia de la integral triple, pero no es una condición necesaria, ya que el límite mencionado existe también para muchas funciones discontinuas.

### Volumen de una región $D$ incluida en $\mathbb{R}^3$

Si  $f$  es constantemente igual a 1, las sumas se reducen a  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r 1 \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$   
 Cuando  $\max \Delta V_i \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow \infty$  las cajas rectangulares llenan cada vez más la región  $D$ .  
 Definimos el volumen de  $D$  como

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r 1 \cdot \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \iiint_D dV$$

### Propiedades

Las propiedades son similares a las de las integrales simples definidas.

1. Linealidad  $\iiint_D (k f(x, y, z) \pm h g(x, y, z)) dx dy dz = k \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \pm h \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz$
2. Si  $f(x, y, z) \geq g(x, y, z) \Rightarrow \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz$
3. También está vigente la aditividad de los dominios de integración. Si  $D = D_1 \cup D_2$  entonces

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

### Cálculo de una integral triple

No es muy común que se evalúe una integral triple a partir de su definición como un límite. Lo habitual es aplicar una versión en tres dimensiones del teorema de Fubini: con esto, evaluamos la integral triple por integraciones simples sucesivas.

Del mismo modo que para las integrales dobles, existe un procedimiento geométrico para determinar los límites de integración.

Para calcular  $\iiint_D f(x, y, z) dz dy dx$  sobre la región  $D$ , integrando primero con respecto a  $z$ , después con respecto a  $y$ , por último, con respecto a  $x$ , conviene proceder de este modo (Ver **Fig. 2**):

1. Trazar un esquema de la región  $D$  y su proyección vertical (sombra)  $R$  sobre el plano  $xy$ . Individualizar las superficies superior e inferior que limitan a  $D$
2. Para hallar los límites de integración en  $z$ , imaginamos una recta  $M$  paralela al eje  $z$  que pase por un punto  $(x, y)$  típico de  $R$ . En el sentido de  $z$  creciente,  $M$  entra a la región  $D$  por la superficie  $z = z_1(x, y)$  y sale de la región por  $z = z_2(x, y)$ . Estos son los límites inferior y superior para la integral con respecto a  $z$ .

3. Una vez resuelta la integral con respecto a  $z$ , queda una **integral doble** sobre el recinto  $R$ , de modo que los límites de la misma se obtienen como se vio en el módulo correspondiente. La integral resulta así:

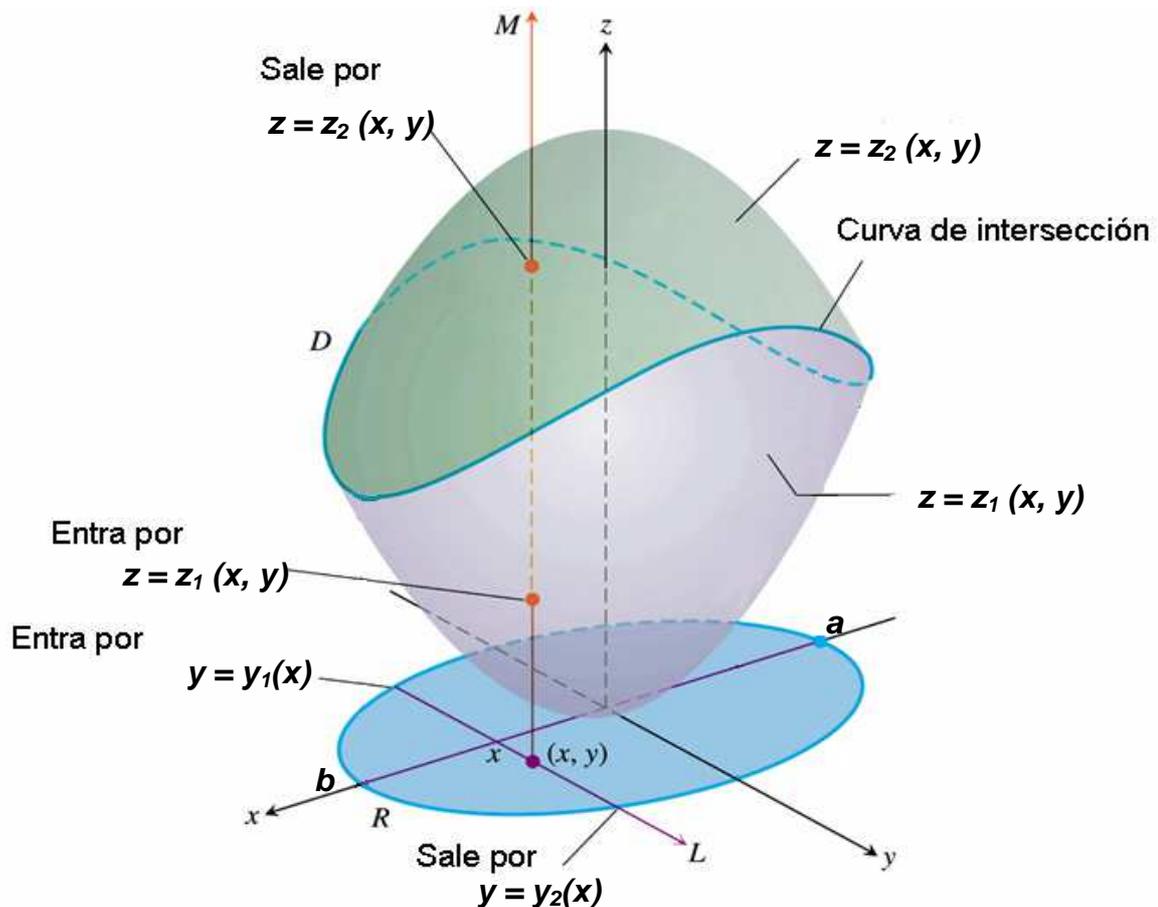
$$\int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \left( \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx \quad (*)$$

**Nota 1:** Para no cargar la expresión de integrales sucesivas usando paréntesis, convenimos en indicar el orden de integración mediante la ubicación de los respectivos diferenciales: de adentro hacia fuera, como se observa en (\*)

**Nota2:** Observemos que, en coordenadas cartesianas, los límites de la 1ª de las integrales iteradas son superficies; los de la 2ª, son líneas de un plano coordenado; y los de la 3ª, son puntos del eje coordenado correspondiente a la última variable de integración.

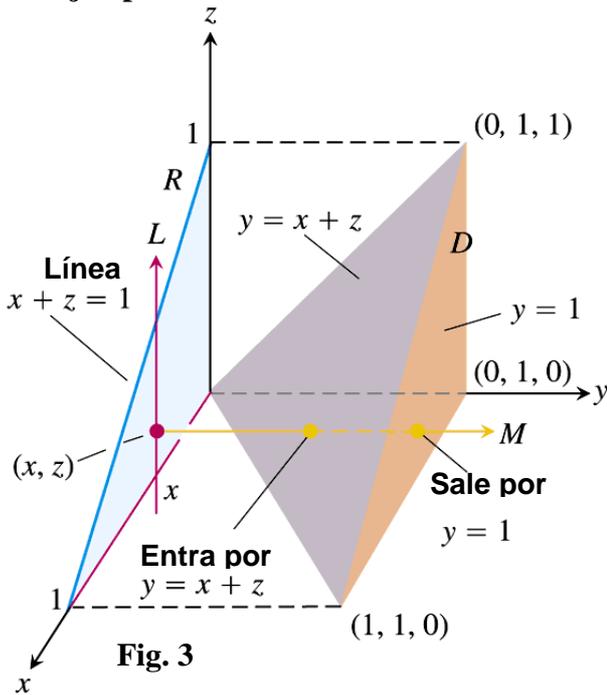
**Nota 3:** Si se cambia el orden de integración, debe tenerse en cuenta que la “sombra” de la región  $D$  se encuentra en el plano de las dos últimas variables respecto de las que se integra.

**Nota 4:** Podemos resolver el cálculo del volumen entre dos superficies como las de la Fig. 2, restando dos integrales dobles o bien con una sola integral triple.



**Fig. 2** La imagen pertenece al texto Cálculo Varias Variables de George B. Thomas

**Ejemplo 1:**



Plantear la integral triple de una función  $f(x,y,z)$  sobre el tetraedro  $D$  con vértices  $(0,0,0)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(0,1,0)$  y  $(0,1,1)$ .

Trazamos  $D$  y su proyección  $R$  sobre el plano  $xz$ . La superficie de entrada (nos movemos sobre la recta  $M$  en el sentido creciente de la variable de integración  $y$ ) es el plano  $y = x + z$ ; la superficie de salida es  $y = 1$ . Los límites de las integrales triples en coordenadas cartesianas son:

$$\int_{x=0}^1 \int_{z=0}^{1-x} \int_{y=x+z}^1 f(x,y,z) dy dz dx$$

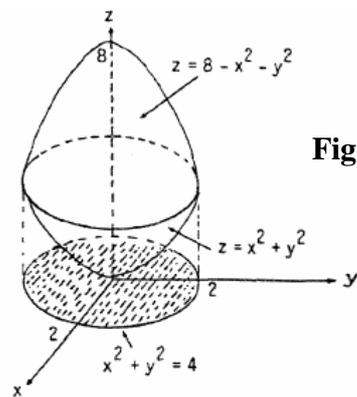
Puntos  
 Curvas  
 Superficies

**Ejemplo 2:**

Dado el sólido limitado por los paraboloides  $z = 8 - x^2 - y^2$  y  $z = x^2 + y^2$ , plantear seis integrales triples distintas para calcular su volumen. Evaluar una de las integrales

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} [8 - 2(x^2 + y^2)] dy dx \\ &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta \\ &= 32 \int_0^{\pi/2} d\theta = 32 \left( \frac{\pi}{2} \right) = 16\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz dx dy, & \int_{-2}^2 \int_4^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} dx dz dy, \\ \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx dy dz + \int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} dx dy dz, & \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dz dx + \int_{-2}^2 \int_4^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dy dz dx, \\ \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dx dz + \int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dy dx dz \end{aligned}$$



**Fig. 4**

**Nota 5:** En el esquema del sólido se eligió proyectarlo sobre el plano  $xy$ . La frontera del recinto  $R_{xy}$  es la circunferencia que resulta de proyectar la curva intersección de ambos paraboloides. Su ecuación se obtiene resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones de dichas superficies.

**Nota 6:** Obsérvese que, en el caso del recinto  $R_{xz}$  (proyección del sólido sobre el plano  $xz$ ), el volumen se plantea como suma de dos integrales triples. Esto es porque hay dos superficies diferentes de entrada al sólido (mediante la recta paralela al eje  $y$ ) y también dos superficies de salida, según cuál sea el punto  $(x, z)$  del recinto por donde esté pasando la recta. También ocurre algo semejante al proyectar sobre el plano  $yz$ .

**Nota 7:** Si después de resolver la primera de las integrales simples, la integral doble que aún falta evaluar resulta más sencilla en coordenadas polares (como se observa en el ejemplo 2), puede hacerse el cambio, como ya se ha visto en el módulo anterior.

## Cambio de variables

Haciendo un **cambio de variables en  $\mathbb{R}^3$** , de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  a coordenadas  $(u, v, w)$ , donde las ecuaciones de transformación son  $x=x(u, v, w)$ ,  $y=y(u, v, w)$ ,  $z=z(u, v, w)$ , y las hipótesis son las mismas que para dos variables pero extendiéndolas a  $\mathbb{R}^3$ , el nuevo diferencial de volumen resulta  $dV = |J(u, v, w)| du dv dw$ .

Donde  $J(u, v, w) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$  es el determinante jacobiano de la transformación, del cual se utiliza su valor absoluto (pues  $dV$  debe resultar siempre positivo ya que es un diferencial de volumen).

$$J(u, v, w) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

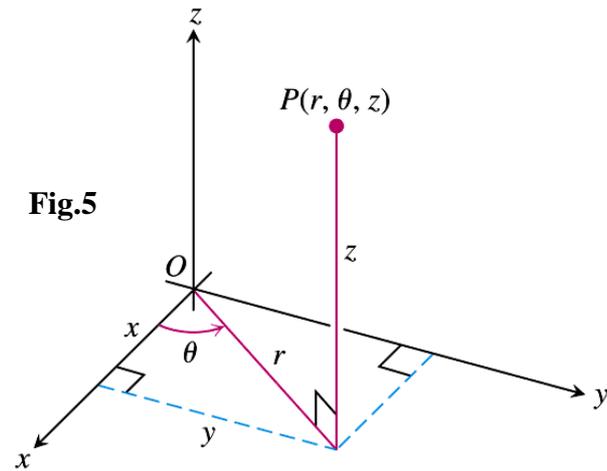
Entre las coordenadas más usadas en  $\mathbb{R}^3$  están las cilíndricas y las esféricas, que veremos a continuación.

### Coordenadas cilíndricas

Para ubicar un punto en  $\mathbb{R}^3$  podemos utilizar coordenadas cilíndricas, que son las ya conocidas polares en  $\mathbb{R}^2$  con el agregado de la 3ª variable  $z$ . Ver **Fig. 5**. Las ecuaciones de transformación son:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x$$



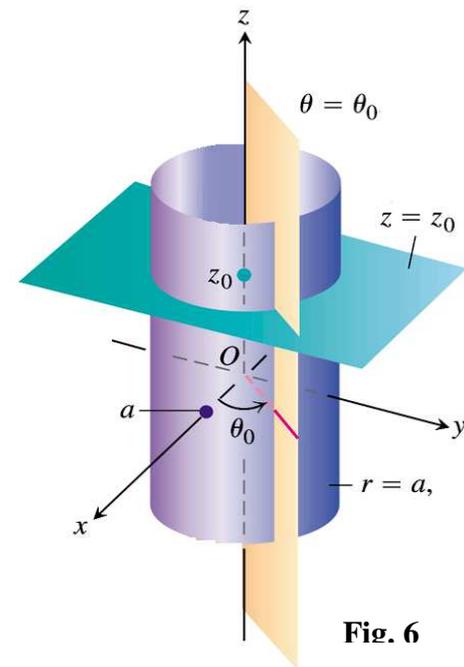
**Fig.5**

En la **Fig. 6** se observan las **superficies coordenadas** correspondientes a las coordenadas cilíndricas.

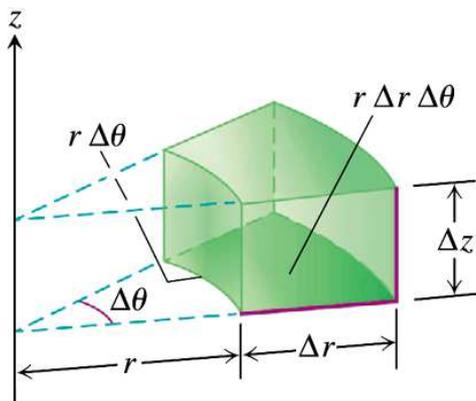
Entre seis de ellas queda determinado el diferencial de volumen que se muestra en la **Fig. 7**, cuyo volumen es:

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

En coordenadas cilíndricas el **jacobiano de la transformación** es  $r$ .

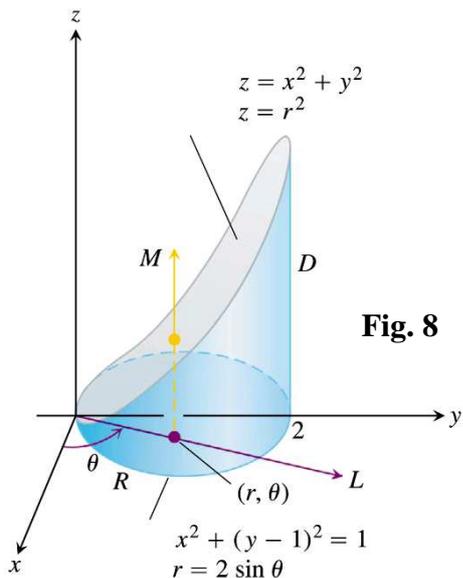


**Fig. 6**



**Fig.7**

**Ejemplo 3:** Plantear en coordenadas cilíndricas la integral  $\iiint_D f(r, \theta, z) dV$  siendo  $D$  la región de  $\mathbb{R}^3$  definida por  $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$  , .



**Fig. 8**

**Solución**

Realizamos un croquis del sólido  $D$  y consideramos su proyección  $R$  sobre el plano  $xy$ . (**Fig. 8**) La frontera de  $R$  es la circunferencia  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  .

Mediante las fórmulas de transformación, la ecuación en coordenadas cilíndricas queda  $r^2 - 2r \text{sen}\theta = 0$  , es decir que la circunferencia desplazada tiene por ecuación:

$$r = 2 \text{sen}\theta$$

Para los límites  $z$  de la integral consideramos la recta  $M$ , paralela al eje  $z$ , que pasa por un punto típico  $(r, \theta)$  en  $R$ .

Entra a  $D$  por  $z = 0$  y sale por  $z = x^2 + y^2 = r^2$  .

Para los límites  $r$ , observamos que la semirrecta  $L$  que nace en el origen entra en el recinto  $R$  en  $r = 0$  y sale por  $r = 2 \text{sen}\theta$  .

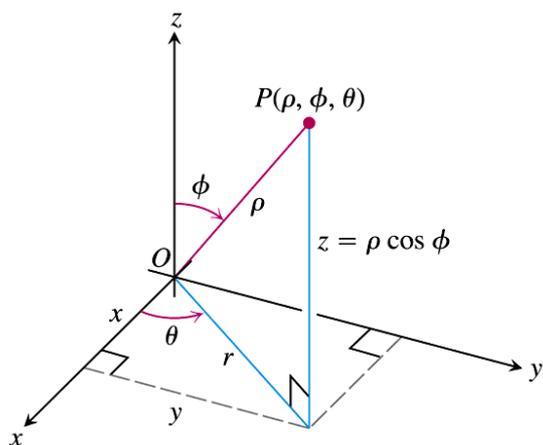
Para los límites  $\theta$  de integración, debemos considerar que la semirrecta  $L$  gira alrededor de su origen para barrer  $R$  desde que  $\theta=0$  hasta que  $\theta=\pi$  .

La integral queda planteada así: 
$$\int_0^\pi \int_0^{2\text{sen}\theta} \int_0^{r^2} f(r, \theta, z) dz dr d\theta$$

**Coordenadas esféricas**

Un punto en  $\mathbb{R}^3$  puede ubicarse mediante dos ángulos y su distancia al origen de coordenadas, según se ve en la **Fig.9** .

<p><math>\rho</math> : distancia de <math>P</math> al origen</p> <p><math>\Phi</math> : ángulo que <math>\overrightarrow{OP}</math> forma con el semieje positivo <math>z</math> (<math>0 \leq \Phi \leq \pi</math>)</p> <p><math>\theta</math> : ángulo de las coordenadas cilíndricas.</p>
--



**Fig. 9**

Las ecuaciones de transformación son:

$$r = \rho \sin \phi, \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta,$$

$$z = \rho \cos \phi, \quad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

**Ejemplo 4:**

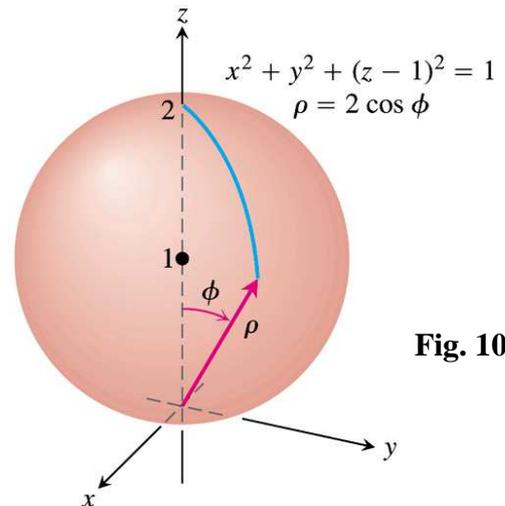
Hallar una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ . (Fig. 10)

**Solución**

Utilizando las ecuaciones de la transformación, reemplazamos  $x, y, z$ , obteniendo:

$$\rho^2 \sin^2 \Phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2\rho \cos \Phi$$

de donde resulta  $\rho = 2 \cos \Phi$

**Fig. 10****Ejemplo 5**

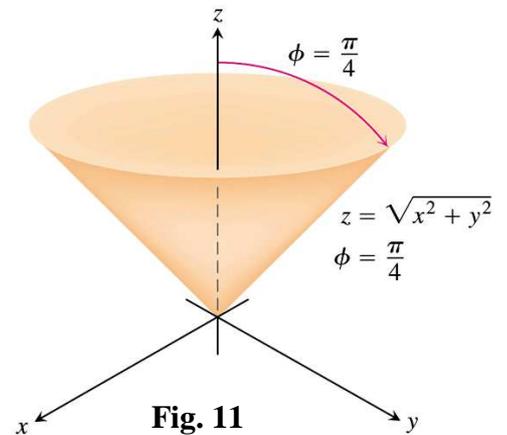
Determinar una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie cónica  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . (Fig. 11)

**Solución**

El cono es simétrico con respecto al eje  $z$  y corta al plano  $yz$  según la recta  $y = z$ . El ángulo entre el cono y el semieje  $Oz$  es, entonces  $\Phi = \frac{\pi}{4}$ . Como todos los puntos de la superficie cumplen con esta igualdad cualquiera sea el valor de  $\rho$  o de  $\theta$ ,

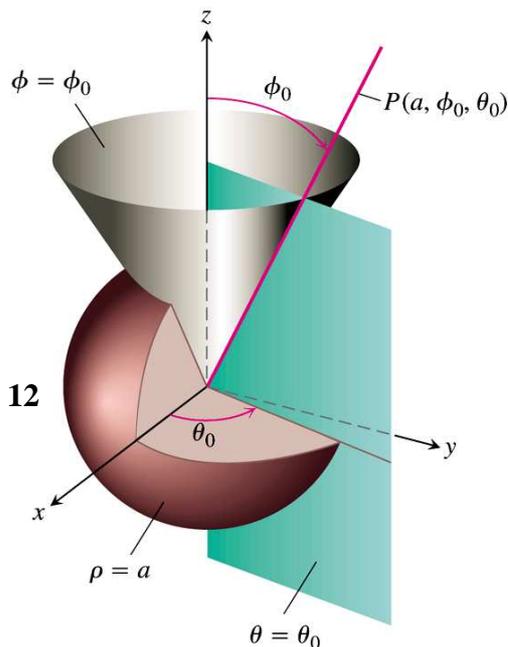
concluimos que  $\Phi = \frac{\pi}{4}$  es la ecuación pedida. También puede

llegarse a la misma algebraicamente reemplazando  $x, y, z$  por sus expresiones en coordenadas esféricas.

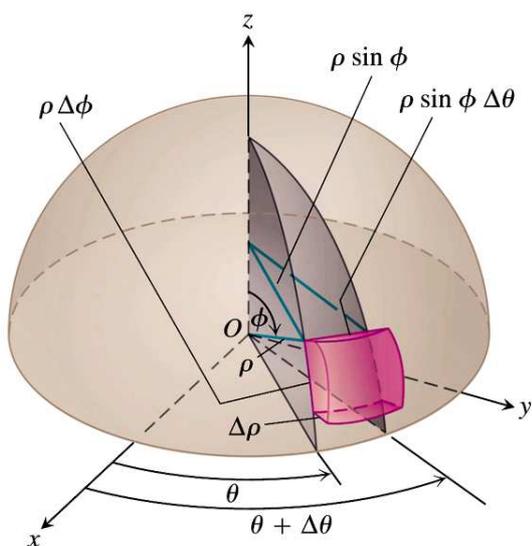
**Fig. 11**

### Diferencial de volumen en coordenadas esféricas

Las superficies coordenadas, que se obtienen igualando cada variable a un valor constante, se muestran en la **Fig. 12**.



**Fig. 12**



$$dV = d\rho \cdot \rho d\phi \cdot \rho \sin \phi d\theta$$

$$= \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

**Fig. 13**

Entre las seis superficies coordenadas que se observan en la **Fig. 13** queda comprendido el diferencial de volumen  $dV$ .

En coordenadas esféricas, el **jacobiano de la transformación** es  $\rho^2 \sin \Phi$ , expresión que multiplicada por los diferenciales de las variables da la expresión del diferencial de volumen.

### Coordenadas esféricas contra cilíndricas

Las integrales triples que involucran formas esféricas no siempre resultan más simples cuando se utilizan coordenadas esféricas. En algunos casos, las cilíndricas resultan más convenientes, como se ve en el siguiente ejemplo.

#### Ejemplo 6

Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  e inferiormente por el plano  $z = 2$ , usando:

- a) coordenadas cilíndricas   b) coordenadas esféricas

$$(a) \quad V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_2^{\sqrt{8-r^2}} dz r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r\sqrt{8-r^2} - 2r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3}(8-r^2)^{3/2} - r^2 \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{3}(4)^{3/2} - 4 + \frac{1}{3}(8)^{3/2} \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} (-2 - 3 + 2\sqrt{8}) d\theta = \frac{4}{3} (4\sqrt{2} - 5) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{2\sec\phi}^{\sqrt{8}} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (2\sqrt{2} \sin\phi - \sec^3\phi \sin\phi) \, d\phi \, d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (2\sqrt{2} \sin\phi - \tan\phi \sec^2\phi) \, d\phi \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \left[ -2\sqrt{2} \cos\phi - \frac{1}{2} \tan^2\phi \right]_0^{\pi/4} d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \left( -2 - \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \left( \frac{-5+4\sqrt{2}}{2} \right) d\theta = \frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}
 \end{aligned}$$

### Masas en $\mathbb{R}^3$

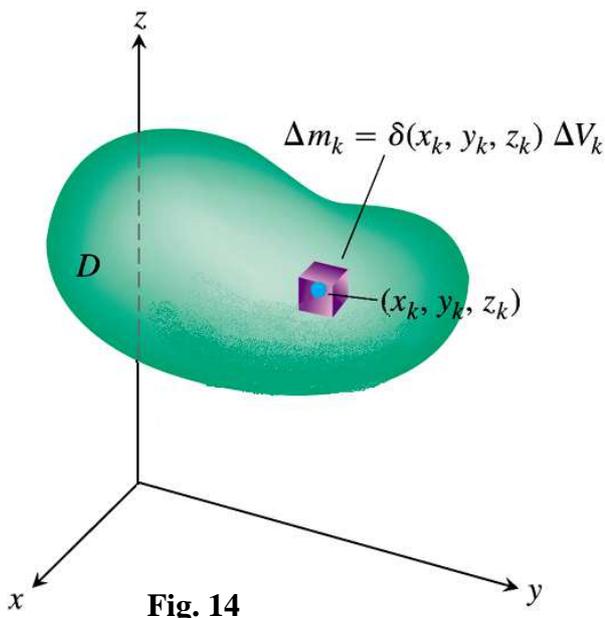


Fig. 14

Mostraremos cómo se calculan las masas y momentos en coordenadas cartesianas de sólidos en  $\mathbb{R}^3$ . Las fórmulas son similares a las vistas para placas planas. Imaginamos el sólido D dividido en pequeñas cajas rectangulares.

Eligiendo un punto cualquiera  $(x_k, y_k, z_k)$  en cada una de ellas, calculamos su densidad  $\delta(x_k, y_k, z_k)$ , con lo que la masa elemental será  $\Delta m_k = \Delta V_k \cdot \delta(x_k, y_k, z_k)$ . No es importante cuál es el punto elegido pues al evaluar la integral, los volúmenes elementales tienden a cero.

La masa total del sólido resulta:

$$M = \iiint_D \delta(x, y, z) \, dV$$

Para hallar el momento estático del sólido con respecto a cada plano coordenado, multiplicamos la masa elemental, caracterizada por  $(x_k, y_k, z_k)$ , por su correspondiente distancia al plano coordenado e integramos sobre D.

$$M_{xy} = \iiint_D z \delta(x, y, z) \, dV$$

$$M_{xz} = \iiint_D y \delta(x, y, z) \, dV$$

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta(x, y, z) \, dV$$

### Momentos en $\mathbb{R}^3$

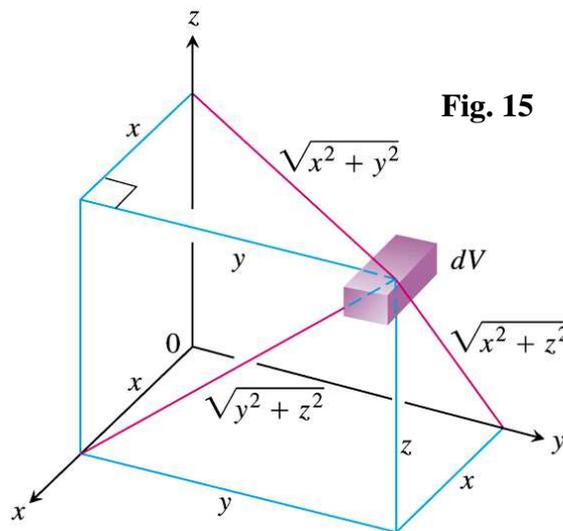


Fig. 15

En la Figura 15 se observan las distancias desde el elemento de volumen hasta los planos coordenados y los ejes coordenados. Se omitieron los subíndices k por comodidad.

Coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Para hallar los momentos de inercia del sólido D con respecto a los ejes cartesianos, multiplicamos la masa elemental, caracterizada por  $(x_k, y_k, z_k)$ , por su correspondiente cuadrado de la distancia al eje coordenado e integramos sobre D.

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV \qquad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dV \qquad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dV$$

**Ejemplo 7**

Hallar el centro de masa del sólido de densidad constante  $\delta$ , definido por  $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ ;  $x^2 + y^2 \leq 4$  (Fig.16)

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \delta dz dy dx = \iint_R \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta dy dx \\ &= \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 dy dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r dr d\theta \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{6} (4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}. \end{aligned}$$

$$M = \iiint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta dz dy dx = 8\pi\delta. \qquad \bar{z} = (M_{xy}/M) = 4/3 \qquad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3).$$

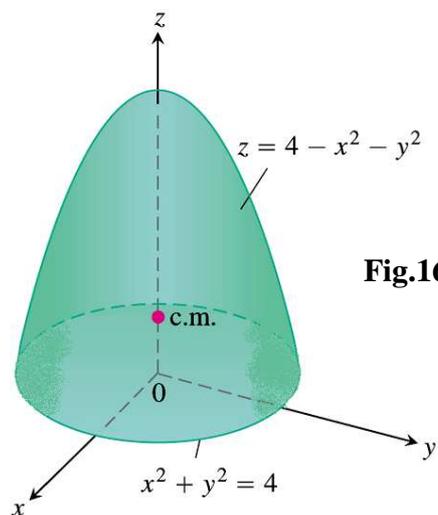


Fig.16

**Ejemplo 8**

Hallar los momentos de inercia del bloque de la figura 17 con respecto a los ejes coordenados. Se sabe que el origen  $(0, 0, 0)$  es el centro del bloque y que el material que lo forma tiene densidad constante.

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \delta dx dy dz.$$

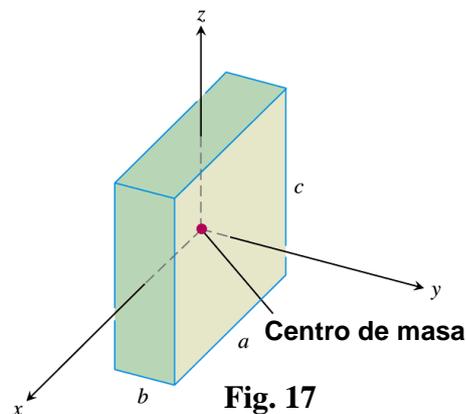


Fig. 17

Por simetría, trabajaremos en el primer octante y multiplicaremos por 8.

$$\begin{aligned}
 I_x &= 8 \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz = 4a\delta \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} (y^2 + z^2) \, dy \, dz \\
 &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left[ \frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{y=0}^{y=b/2} dz \\
 &= 4a\delta \int_0^{c/2} \left( \frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2} \right) dz \\
 &= 4a\delta \left( \frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48} \right) = \frac{abc\delta}{12} (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2).
 \end{aligned}$$

Análogamente:

$$I_y = \frac{M}{12} (a^2 + c^2) \qquad I_z = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

**Ejemplo 9**

Hallar las coordenadas del **centro de masa** del sólido  $D$  de densidad  $\delta=1$  definido por  $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**Solución**

Hacemos el croquis del sólido (**Fig.18**) que está limitado superiormente por el paraboloide, inferiormente por el plano  $xy$ , y se encuentra rodeado por la superficie cilíndrica.

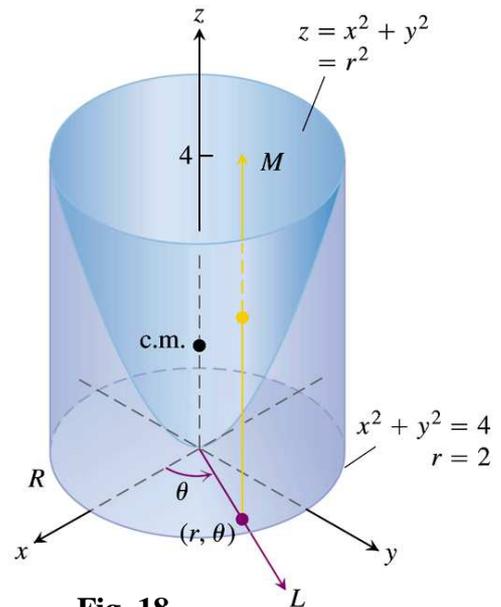
Por simetría, el centro de masa estará sobre el eje  $z$ . Esto hace que  $\bar{x}=0$ ,  $\bar{y}=0$ . Para hallar  $\bar{z}$  dividimos el momento estático  $M_{xy}$  por el valor de la masa  $M$ .

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} z \, dz \, r \, dr \, d\theta = \frac{32\pi}{3}$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} dz \, r \, dr \, d\theta = \frac{4}{3}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4}{3}$$

Luego, las coordenadas del centro de masa son  $\left( 0, 0, \frac{4}{3} \right)$



**Fig. 18**

**Bibliografía utilizada**

- Hebe T. Rabuffetti. *Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 2)*. Buenos Aires. Editorial El Ateneo, 1983.
- George B. Thomas y Ross L. Finney. *Cálculo Varias Variables, 9ª edición*. México. Addison Wesley Longman de México, 1999.
- Jerrold E. Marsden y Anthony Tromba. *Cálculo Vectorial*. Addison Wesley Longman de México, 1991.
- N. Piskunov. *Cálculo Diferencial e Integral*. Ed. MIR. Moscú.

**Bibliografía de consulta**

- Juan de Burgos Román. *Cálculo Infinitesimal de Varias Variables*. Madrid: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA DE ESPAÑA, 1995.