Enrique D. Fliess

Cálculo

del ingeniero Enrique D. Fliess constituye una destacada contribución a la enseñanza y estudio de esa importante rama de la Ingeniería que es la Estabilidad de las Construcciones. En ella desarrolla el primer curso de Estabilidad, tal como lo dicta en su cátedra de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Siguiendo la escuela de Timoshenko, parte del principio del paralelogramo y sobre él construye todo el edificio de la Estática a través de una sucesión de secuencias rigurosamente encadenadas, de sencilla deducción.

De los diez capítulos que componen la obra, los tres primeros se destinan al estudio de los sistemas planos y espaciales de fuerzas; sigue el cuarto con Geometría de masas, para realizar, en el quinto, el estudio de las fuerzas distribuidas. Los capítulos sexto, séptimo y octavo, estudian todo lo referente al equilibrio de cuerpos vinculados, sistemas de reticulado y sistemas de alma llena. El principio de los trabajos virtuales y los sistemas planos sujetos a cargas móviles cierran el ciclo de Estabilidad, primer curso.

La abundancia de ejemplos prácticos relativos a cada uno de los temas desarrollados, constituye un eficaz complemento de los conceptos teóricos enunciados ya que, además de poner en evidencia sus respectivos campos de aplicación, facilita considerablemente su asimilación por parte de los estudiantes, a quienes, sin duda, la obra está principalmente destinada.

Además, el ingeniero Fliess, al evidenciar, una vez más, sus conocidas condiciones didácticas, hace un valioso aporte en beneficio de la tarea que desarrolla el equipo de colaboradores que lo acompaña en la Cátedra de Estabilidad, primer curso.

Esta obra se completa con Estabilidad II, del mismo autor que cubre los temas de la asignatura tal como se dicta en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires y en la Escuela Superior Técnica del Ejército. Cubre, también, temas de los cursos de la Universidad Tecnológica.

FERNANDO M. LOPEZ
PROYECTISTA MECANICO

INGENIERO CIVIL

Enrique D. Fliess

Profesor titular de Estabilidad de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, y de la Escuela Superior Técnica del Ejército. Jefe del Departamento Técnico del Instituto del Cemento Portland Argentino.

Estabilidad

primer curso

EDITORIAL
KAPELUSZ
Moreno 372 • Buenos Aires

Todos los derechos reservados por (©, 1970) EDITORIAL KAPELUSZ S.A., Moreno 372, Buenos Aires. Hecho el depósito que establece la ley 11.723.

Publicado en mayo de 1963. Tercera edición, enero de 1970.

LIBRO DE EDICION ARGENTINA. Printed in Argentina.

Índice general.

Prólogo XIII
Prefacio XV

1. Conceptos fundamentales.

1.1. Introducción 1
1.2. Fuerza. Concepto 1
1.3. Fuerza. Representación 2
1.4. Sistemas de fuerzas 4
1.5. Los principios de la Estática 4
1.6. Momento estático de una fuerza 10
1.7. Representación vectorial del momento de una fuerza 12
1.8. Teorema de Varignon 12
1.9. Pares de fuerzas 14
1.10. Resultante de un par 17
1.11. Representación vectorial de los pares de fuerzas 18
1.12. Traslación de fuerzas 19
1.13. Composición de una fuerza con un par 20
1.14. Representación analítica de las fuerzas 21
1.15. Signo de las fuerzas 23
1.16. Proyección de un par sobre un eje coordenado 24
1.17. Expresión analítica del momento de una fuerza respecto de un punto 24

2. Sistemas planos de fuerzas.

2.1. Fuerzas concurrentes en el plano 27
2.1.1. Reducción de sistemas de fuerzas concurrentes 27
2.1.2. Descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes con su punto de aplicación 29
2.1.3. Descomposición de una fuerza en tres componentes 32
2.1.4. Equilibrio de fuerzas concurrentes 33
2.1.5. Reducción de sistemas. Solución analítica 34
2.1.6. Descomposición de fuerzas. Solución analítica 39
2.1.7. Equilibrio de sistemas de fuerzas concurrentes. Condiciones analíticas necesarias y suficientes 40

2.2. Fuerzas no concurrentes en el plano 44
2.2.1. Reducción de sistemas no concurrentes 44
2.2.2. Polígono funicular 45
2.2.3. Propiedades de los polígonos funiculares 47
2.2.4. Polígono funicular que pasa por tres puntos dados del plano 56
2.2.5. Aplicación del polígono funicular a la determinación gráfica del momento de una fuerza con respecto a un punto 61
2.2.6. Pares de fuerzas 64
2.2.7. Equilibrio de sistemas no concurrentes 65
2.2.8. Casos particulares de polígonos funiculares 65
2.2.9. Determinación analítica de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes 66
2.2.10. Casos especiales de reducción de sistemas de fuerzas no concurrentes. Pares. Equilibrio 76
2.2.11. Condiciones analíticas, necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes 76
2.2.12. Descomposición de sistemas no concurrentes. Solución gráfica de Culmann 80
2.2.13. Descomposición de sistemas no concurrentes. Solución gráfico-numérica de Ritter 82
2.2.14. Descomposición de sistemas no concurrentes. Solución analítica 85
2.2.15. Casos particulares de descomposición de una fuerza en tres componentes 86
2.2.16. Aplicación del polígono funicular a un caso particular de descomposición de una fuerza en dos componentes 91
2.3. Fuerzas paralelas en el plano 93
2.3.1. Reducción de sistemas de fuerzas paralelas 93
2.3.2. Descomposición (Equilibrio) de fuerzas paralelas 97
2.3.3. Determinación analítica de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas. Equilibrio 99
2.3.4. Condiciones analíticas para el equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas 101
2.3.5. Centro de fuerzas paralelas 103

3. Sistemas espaciales de fuerzas.

3.1. Fuerzas concurrentes en el espacio 109
3.1.1. Composición gráfica de fuerzas concurrentes en el espacio . . 109
3.1.2. Equilibrio y descomposición de fuerzas concurrentes en el espacio. Solución gráfica 111
3.1.3. Composición analítica de fuerzas concurrentes en el espacio . . 112
3.1.4. Momento de una fuerza respecto de un eje 115
3.1.5. Expresión analítica del momento de una fuerza respecto de un eje 120
3.1.6. Descomposición de una fuerza en tres direcciones concurrentes a un punto de su recta de acción y no coplanares con la misma 122
3.1.7. Condiciones analíticas necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio 128
3.2. Pares de fuerzas en el espacio 133
3.2.1. Traslación de pares de fuerzas 133

3.2.2. Composición de pares que actúan en planos no paralelos . . 135
3.2.3. Representación vectorial de los pares de fuerzas 136
3.2.4. Composición analítica de pares de fuerzas 137
3.2.5. Condiciones analíticas de equilibrio de sistemas de pares en el espacio 139
3.3. Fuerzas paralelas en el espacio 141
3.3.1. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio 141
3.3.2. Reducción de sistemas de fuerzas paralelas en el espacio. Solución analítica. 142
3.3.3. Centro de fuerzas paralelas en el espacio 144
3.4. Fuerzas no concurrentes en el espacio 147
3.4.1. Reducción de sistemas de fuerzas no concurrentes en el espacio 147
3.4.2. Reducción de sistemas de fuerzas espaciales. Solución analítica 155
3.4.3. Condiciones analíticas, necesarias y suficientes, para el equilibrio de un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes . . 158
3.4.4. Descomposición de una fuerza en seis componentes en el espacio 161

4. Geometría de las masas.

4.1. Baricentros 165
4.1.1. Centros de masas 165
4.1.2. Determinación gráfica del momento estático con respecto a un eje de un conjunto discreto de masas plano 169
4.1.3. Conjuntos continuos de masas. Baricentro 172
4.1.4. Baricentros de líneas y superficies 173
4.1.5. Determinación de baricentros de líneas 177
4.1.6. Determinación de baricentros de la superficie de las figuras más importantes 182
4.1.7. Teoremas de Pappus 189
4.2. Momentos de segundo orden de superficies 191
4.2.1. Definiciones 191
4.2.2. Momentos de segundo orden de superficies con respecto a ejes paralelos 194
4.2.3. Momentos de inercia y radios de giro polares 197
4.2.4. Momentos de segundo orden con respecto a ejes de un mismo origen 199
4.2.5. Ejes principales de inercia 201
4.2.6. Momentos de segundo orden respecto de ejes oblicuos . . . 204
4.2.7. Determinación de momentos de inercia de figuras de contorno irregular 206
4.2.8. Momentos de inercia de figuras geométricas 212
4.2.9. Radios de giro 219
4.2.10. Determinación del momento centrífugo del triángulo respecto de un par de ejes ortogonales 221
4.2.11. Determinación del momento centrífugo de una superficie de contorno irregular 222
4.2.12. Determinación gráfica exacta del momento de inercia de una figura geométrica compuesta 225
4.2.13. Interpretación gráfica de las fórmulas para giro de ejes. Circunferencia de Mohr 228

5. Fuerzas distribuidas.

5.1. Generalidades 241
5.2. Fuerza distribuida normalmente a una superficie. Concepto de intensidad de carga 241
5.3. Fuerzas paralelas distribuidas a lo largo de una línea 243
5.4. Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea 245
5.5. Curva funicular. Trazado gráfico por puntos y tangentes 247
5.6. Determinación analítica de la curva funicular 249
5.7. Ecuación diferencial de la curva funicular de una carga distribuida, paralela 257
5.8. Tensión de la curva funicular 259

6. Equilibrio de cuerpos vinculados.

6.1. Los sistemas planos vinculados 261
6.1.1. Generalidades 261
6.1.2. Chapas; concepto 261
6.1.3. Grados de libertad 262
6.1.4. Desplazamientos de una chapa 265
6.1.5. Vínculos 268
6.1.6. El equilibrio de la chapa vinculada. Reacciones de vínculo . . 273
6.1.7. Determinación de las reacciones de vínculo en sistemas de una chapa. Solución gráfica 277
6.1.8. Determinación de las reacciones de vínculo en un sistema de una chapa. Solución analítica 280
6.1.9. Cadenas cinemáticas 286
6.1.10. Cadenas cinemáticas de dos chapas. Determinación de las reacciones de vínculo 289
6.1.11. Arco a tres articulaciones 297
6.1.12. Cadenas cinemáticas de tres chapas 303
6.1.13. Cadenas cinemáticas de más de tres chapas 308
6.1.14. Cadenas cinemáticas cerradas 309
6.2. Los sistemas espaciales vinculados 321
6.2.1. Grados de libertad de un sólido en el espacio 321
6.2.2. Vinculación de sólidos en el espacio 323
6.2.3. El sólido isostáticamente sustentado 326
6.2.4. Determinación de las reacciones de vínculo en el espacio. Solución analítica 330
6.2.5. Determinación gráfica de las reacciones de vínculo en el espacio 333

7. Sistemas de reticulado.

7.1. Los sistemas de reticulado en el plano 337
7.1.1. Definiciones 337
7.1.2. Sistemas de reticulado. Su generación 338
7.1.3. Condición de rigidez. Relación entre el número de barras y de vértices 340
7.1.4. Distintos tipos de reticulados planos 344
7.1.5. Determinación de esfuerzos en barras. Método de Culmann . 347

7.1.6. Determinación de esfuerzos en barras. Método de Ritter . . 350
7.1.7. Utilización del polígono funicular para la aplicación de los métodos de Culmann y Ritter 355
7.1.8. Determinación analítica de los esfuerzos en barras de reticulados 358
7.1.9. Determinación de los esfuerzos mediante el diagrama de Maxwell-Cremona 359
7.1.10. El método de Henneberg o de falsa posición 366
7.2. Los sistemas de reticulado espaciales 369
7.2.1. Generación de los reticulados espaciales 369
7.2.2. Condición de rigidez del anillo de base 371
7.2.3. Cúpulas de configuración simple. Cúpula de Schwedler . . 378
7.2.4. Determinación de los esfuerzos en las barras de los reticulados espaciales. Solución general analítica 380
7.2.5. Determinación de los esfuerzos en barras de reticulados espaciales. Soluciones gráficas y gráfico-numérica 382
7.2.6. Método de Henneberg o de falsa posición 382
7.2.7. Determinación de esfuerzos en barras en casos especiales . . 384

8. Los sistemas de alma llena.

8.1. Sistemas planos de alma llena 389
8.1.1. Definiciones 389
8.1.2. Determinación de los esfuerzos característicos 392
8.1.3. Diagramas de esfuerzos característicos 396
8.1.4. La viga simple de eje rectilíneo 397
8.1.5. Relaciones analíticas entre las funciones que definen los diagramas de p, Q y M 408
8.1.6. La viga con voladizos 418
8.1.7. La viga empotrada 426
8.1.8. La viga Gerber o en Cantilever, rectilíneas 430
8.1.9. La viga simple sujeta a la acción de pares 437
8.1.10. Transmisión indirecta de cargas 439
8.1.11. Trazado de diagramas de características para cargas mixtas, concentradas y distribuidas 442
8.1.12. Pórticos. Definiciones 442
8.1.13. Método gráfico para el trazado de diagramas de características en pórticos 445
8.1.14. Método gráfico-numérico para el trazado de diagramas de características en pórticos 457
8.1.15. Método analítico (o numérico) para el trazado de diagramas de características en pórticos 466
8.2. Sistemas espaciales de alma llena 469
8.2.1. Conceptos generales 469
8.2.2. Trazado de los diagramas de características 472

9. El principio de los trabajos virtuales.

9.1 Complementos de cinemática plana 483
9.1.1. Desplazamiento de un punto material. Corrimientos . . . 483
9.1.2. Desplazamientos finitos de chapas rígidas 486

9.1.3. Desplazamientos infinitésimos de chapas rígidas 488
9.1.4. Diagrama de Williot-Mohr 491
9.1.5. Corrimientos debidos a rotaciones infinitésimas. Elaciones. Diagramas cartesianos de corrimientos 494
9.1.6. Composición de rotaciones infinitésimas 502
9.1.7. Descomposición de rotaciones infinitésimas en rotaciones componentes 509
9.1.8. Rotaciones y traslaciones, composiciones y descomposiciones varias 511
9.1.9. Corrimientos relativos. Variación de distancia entre dos puntos 513
9.1.10. Desplazamientos relativos de chapas rígidas 516
9.1.11. Desplazamientos de cadenas cinemáticas de un grado de libertad 518
9.1.12. Determinación de polos en cadenas cinemáticas de un grado de libertad 520
9.1.13. Extensión del diagrama de Williot-Mohr al caso de cadenas cinemáticas de un grado de libertad 522
9.1.14. Trazado de diagramas cartesianos de corrimientos de puntos de cadenas cinemáticas sujetas a desplazamientos 524
9.1.15. Articulaciones relativas entre chapas no consecutivas . . . 527
9.1.16. Variación de distancia entre puntos de una cadena cinemática de un grado de libertad 528
9.1.17. Casos particulares en la determinación de polos y trazado de diagramas de corrimientos 533
9.1.18. Determinación de polos en cadenas cinemáticas cerradas de un grado de libertad 537
9.2. Trabajo virtual 544
9.2.1. Desplazamientos virtuales 544
9.2.2. Trabajo de una fuerza 545
9.2.3. Trabajo de un par de fuerzas 547
9.2.4. Trabajo de dos fuerzas opuestas 548
9.2.5. El principio de los trabajos virtuales 551
9.2.6. Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la determinación de incógnitas estáticas en sistemas estáticamente determinados 554

10. Sistemas planos sujetos a cargas móviles.

10.1. Teoría de las líneas de influencia 569
10.1.1. Definiciones 569
10.1.2. Influencia de una carga uniformemente distribuida. . . . 572
10.1.3. Influencia de una carga que varía linealmente 574
10.1.4. Influencia de un sistema de cargas concentradas paralelas . . 576
10.1.5. Influencia de cargas transmitidas en forma indirecta . . . 578
10.1.6. Influencia de un sistema móvil de cargas concentradas . . . 580
10.1.7. Influencia de una carga distribuida móvil 587
10.2. Determinación analítica de líneas de influencia 589
10.2.1. Consideraciones generales 589
10.2.2. Líneas de influencia de reacciones de vínculo externo . . . 590
10.2.3. Línea de influencia de esfuerzos en barras de reticulado . . 595
10.2.4. Líneas de influencia de esfuerzos característicos en sistemas de alma llena 608

10.3. Método cinemático para el trazado de líneas de influencia de magnitudes estáticas 614
10.3.1. Consideraciones generales 614
10.3.2. Líneas de influencia de reacciones de vínculo externo . . . 616
10.3.3. Líneas de influencia de esfuerzos en barras de reticulado . . 619
10.3.4. Líneas de influencia de esfuerzos característicos en sistemas de alma llena 622
10.3.5. Líneas de influencia de las componentes de reacción en un empotramiento 627
10.4. Diagramas envolventes 631
10.4.1. Conceptos generales 631
10.4.2. Diagramas envolventes de momentos flexores y esfuerzo de corte en vigas simplemente apoyadas 632
10.4.3. Diagramas envolventes de momentos flexores y esfuerzos de corte en vigas empotradas 644
10.4.4. Diagramas envolventes de $M_{máx.}$ y $Q_{máx.}$ para una viga con extremos en voladizo 648

Índice alfabético 655

Prólogo.

El autor, en una de las primeras páginas de su libro, al enunciar Los principios de la Estática, *expresa:*

"Para la resolución de los distintos problemas que surgen del estudio de la Estática es posible seguir distintos caminos. Es así que Meoli, siguiendo la escuela italiana, desarrolla previamente la teoría de los vectores axiles y luego, estableciendo que la equivalencia física de dos sistemas de fuerzas aplicadas a un mismo cuerpo rígido corresponde a la equivalencia geométrica de los dos sistemas de vectores axiles que los representan, resuelve en forma elegante los distintos problemas que se plantean.

Partiendo de los principios de la mecánica clásica, como ser el principio de los trabajos virtuales o el principio del paralelogramo de las fuerzas, es posible construir todo el edificio de la Estática y resolver todos sus problemas. Nosotros partiremos de este último principio, siguiendo con ello a Timoshenko."

El ingeniero Fliess ha sido un eficaz colaborador mío en la cátedra de la que hoy es, merecidamente por cierto, uno de sus profesores titulares. Ha hecho a mi lado su carrera docente y, en los sucesivos cargos desempeñados por él –ayudante de cátedra al iniciarse, jefe de trabajos prácticos después y, por último, profesor adjunto antes de ser nombrado titular–, ha estado en inmediato contacto con los discípulos y ha podido por ello palpar las dificultades que el común de los estudiantes encuentra para la asimilación de los conceptos que se le transmiten. Esto, sin duda, debe haberlo impulsado a adoptar el procedimiento que indica, partiendo del principio del paralelogramo de las fuerzas, es decir recorriendo desde su origen todo el camino del desarrollo de la mecánica, con evidente beneficio de los más, si no del menor número de los mejor dotados.

Lo dicho no es, por cierto, crítica al autor. Dejo constancia, simplemente, de la encrucijada en que se halla todo maestro en su afán de ser eficaz. Es decir si, para bien de la cátedra, ha de hacer prevalecer el interés de los más o el de los mejores.

Con verdadero afán de ser útil, con una minuciosidad extraordinaria, el ingeniero Fliess desarrolla un sinnúmero de casos particulares, tratando de facilitar al máximo el proceso mental de sus alumnos, y por cierto que lo logra, dadas sus relevantes dotes de expositor.

UMBERTO MEOLI.

Prefacio.

La presente obra no pretende ser original. Es simplemente un resumen ordenado de las clases que dicto en el primer curso de Estabilidad, a los alumnos de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

Comprende dos partes. En la primera de ellas se estudia el equilibrio del cuerpo rígido, libre y vinculado. La segunda corresponde a la Teoría de Estructuras, limitada a los sistemas estáticamente determinados, y en la misma se contempla la determinación de reacciones de vínculo interno, tanto para los sistemas sujetos a la acción de cargas fijas como para los solicitados por cargas móviles.

Para el trazado de líneas de influencia se han considerado las soluciones analíticas y las que resultan de la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, analizando diversos casos particulares.

Se ha dedicado especial atención a la resolución de cadenas cerradas, tanto en lo que se refiere a la determinación de reacciones de vínculo como al establecimiento de la ubicación de polos, por ser temas escasamente tratados en la bibliografía especializada.

El trazado de diagramas envolventes para casos simples, así como también el de la circunferencia de Mohr para casos especiales, se han desarrollado en detalle para facilitar su estudio y comprensión a los recién iniciados.

Si bien la presente obra responde, como queda dicho, al programa del curso de Ingeniería Civil, se adapta también a los programas correspondientes a las restantes carreras, en cuyos planes se incluye la asignatura Estabilidad I. En efecto, los capítulos relativos al equilibrio de sólidos libres y vinculados, el correspondiente a Geometría de las masas y la parte

pertinente de Teoría de Estructuras, en lo que respecta a sistemas sujetos a cargas fijas, son comunes a todos los cursos. Faltaría únicamente completar la presente obra con los capítulos relativos a Resistencia de Materiales, que integran el programa de las distintas carreras, excluida Ingeniería Civil. Ello, muy probablemente, será objeto de otra publicación.

Este libro lo dedico a mis alumnos, y es mi mayor deseo que pueda serles de utilidad para la comprensión de los conceptos fundamentales de la Ciencia de las Construcciones, y que pueda servir de base para el estudio de los temas que de aquéllos se derivan. Si así fuera, se habrá cumplido el propósito que me guió al escribirlo.

Quiero dejar constancia de mi reconocimiento al ingeniero Roberto Meoli, Jefe de Trabajos Prácticos de la Cátedra a mi cargo, por su esmero en la revisión de los originales y las valiosas sugerencias efectuadas, así como también a mis ex alumnos señores Germán Hugo Ger y Enrique Riquelme por la prolija ejecución de las figuras.

ENRIQUE D. FLIESS.

1. Conceptos fundamentales.

1.1. Introducción.

Mecánica es la parte de la Física que se ocupa del estudio del equilibrio y movimiento de los cuerpos. El análisis del equilibrio queda reservado a la Estática; la Cinemática estudia el movimiento desde un punto de vista exclusivamente geométrico, mientras que la Dinámica lo hace considerando las relaciones entre el movimiento de los cuerpos y las causas que lo provocan.

Nos ocuparemos del primer aspecto, es decir, de la Estática, estudiando las condiciones que rigen el equilibrio de los cuerpos sólidos, considerando a estos como rígidos e indeformables. En realidad, en la Naturaleza no existen cuerpos absolutamente rígidos, constituyendo estos una concepción lógica sin existencia real. Todos los cuerpos de la Naturaleza se deforman en mayor o menor grado bajo la acción de las fuerzas que los solicitan, pero, en el caso de los materiales usuales en las estructuras, las deformaciones que sufren (dentro de ciertos límites) son pequeñas y pueden no ser tenidas en cuenta sin mayor error.

Admitiremos en lo que sigue la *hipótesis de la rigidez,* que supone invariable la distancia entre dos puntos de un cuerpo cuando éste se encuentra sometido a la acción de fuerzas. El estudio de las deformaciones de los cuerpos cargados corresponde a otros capítulos de la Estabilidad de las Estructuras.

1.2. Fuerza. Concepto.

A los efectos del estudio de los distintos problemas que se presentan en la Estática, es necesario introducir la noción de un elemento fundamental: la noción de *fuerza.*

No intentaremos definir una fuerza, sino que daremos un concepto de la misma. En la Naturaleza, las fuerzas se ponen de manifiesto por sus efectos sobre los cuerpos o sistemas de puntos materiales sobre las que

actúan. Diremos así que fuerza es *toda acción que tienda a modificar el estado de reposo de un cuerpo.*

La observación nos dice que en la naturaleza las fuerzas se manifiestan de diversas maneras. Si suspendemos de un hilo un cuerpo pesado y luego lo soltamos, observamos que el cuerpo cae. En este caso la fuerza que pone en movimiento al cuerpo es la fuerza de gravedad dirigida hacia abajo. Otros ejemplos de fuerzas lo constituyen la fuerza centrífuga, la presión que ejerce el viento sobre un tejado, o la presión del agua contra las paredes del recipiente que la contiene.

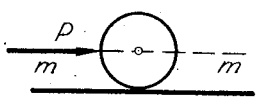


Fig. 1.1.

Consideremos (fig. 1.1) una esfera apoyada sobre una superficie plana y empujémosla horizontalmente. La esfera tenderá a desplazarse. Ha modificado su estado de reposo por efecto de la acción exterior, moviéndose en el sentido en que la hemos ejercido. Ello nos permite establecer que para que una fuerza quede perfectamente definida es necesario conocer cuatro parámetros: intensidad de la fuerza, punto de aplicación, dirección y sentido.

El primer parámetro, es decir, la intensidad de una fuerza se establece por comparación con un *patrón*, que se considera como la unidad de fuerza. Los dos patrones de medida que se utilizan corrientemente en la técnica son el *kilogramo* y la *libra*. El primero representa el peso de un cubo de platino *(kilogramo-patrón)* que se conserva en los archivos de la Oficina de Pesas y Medidas de Breteuil (París), y es de uso común en los países que han adoptado el sistema métrico decimal. La libra corresponde al peso de un cilindro, también de platino, depositado en la Torre de Londres y se denomina *libra-patrón-imperial*. Se la utiliza en los EE. UU. de América y países del British Commonwealth. La relación que existe entre ambos es 1 libra $=$ 0,454 kg.

En el ejemplo de figura 1.1 la recta m - m define la dirección en que la fuerza tiende a mover a la esfera, y el sentido de la misma será igual al sentido del movimiento impreso.

Como veremos más adelante, también es posible definir una fuerza estableciendo su *intensidad*, su recta de acción y su sentido.

Siendo la fuerza, como hemos visto, una magnitud dirigida será por consiguiente, una magnitud *vectorial*.

1.3. Fuerza. Representación.

Siendo la fuerza una magnitud vectorial, será posible representarla mediante un vector. Para ello, estableceremos una *escala de fuerzas, a*

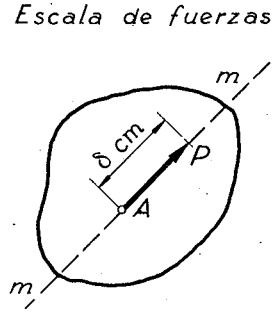


Fig. 1.2

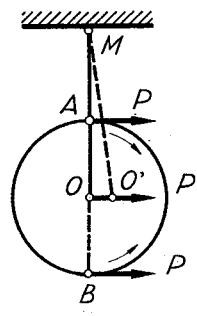


Fig. 1.3.

kg/cm y consideramos (fig. 1.2) la fuerza P(kg) actuando sobre un cuerpo rígido en el punto A, según la recta $m-m$ y con el sentido indicado. Si leemos en la escala dada la intensidad P de la fuerza, tendremos una cantidad de centímetros, que constituirán la longitud de un determinado segmento dirigido. Dicho segmento, llevado a partir del punto A sobre la recta $m-m$, con una flecha indicando el correspondiente sentido, constituye el vector que representa la fuerza P.

Ahora bien, la fuerza no constituye un vector libre, como veremos a continuación. Sea un disco (fig. 1.3), en condiciones de girar alrededor de un eje O, que a su vez se encuentra suspendido de un punto fijo M mediante un hilo inextensible. Si aplicamos en el punto A una fuerza horizontal de intensidad P, la misma tenderá a hacer girar el disco alrededor de O en el sentido de las agujas del reloj. Si, en cambio, la fuerza P actúa con la misma intensidad e igual dirección y sentido, pero aplicada en B, el sentido de rotación que imprimirá al disco será el opuesto. Y, finalmente, si la aplicamos en O, el efecto será un desplazamiento del disco alrededor de M. Como vemos, el efecto de P varía con el punto de aplicación, es decir que una fuerza aplicada a un cuerpo rígido no es un vector libre. En cambio, el *vector representativo* de una fuerza sí constituye un vector libre. Consideremos (fig. 1.4) la fuerza P actuando sobre un cuerpo rígido según la recta de acción $m-m$ y con el sentido indicado en la figura. Diremos que la fuerza está representada por el vector OA paralelo a $m-m$, y de igual sentido que P y cuyo módulo es igual a la intensidad de P. Dicho vector puede ubicarse en cualquier posición en el plano de la figura, pero debe entenderse perfectamente que no es una imagen de la fuerza, sino que sólo representa su intensidad y dirección.

1.4. Sistemas de fuerzas.

Sobre un cuerpo rígido pueden actuar simultáneamente más de una fuerza. El conjunto de las mismas se denomina *sistema de fuerzas*. Tal el caso de la figura 1.5, donde actúan las fuerzas P_1; P_2; P_3 y P_4, aplicadas en los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. Existen distintas clases de sistemas de fuerzas. Una primera división permite establecer los sistemas planos de fuerzas y

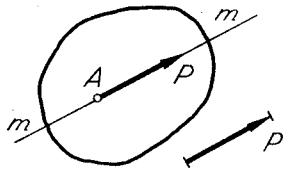


Fig. 1.4.

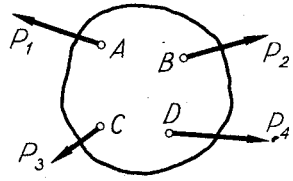


Fig. 1.5.

los sistemas de fuerzas en el espacio. Un sistema de fuerzas, decimos que es *plano*, cuando todas las rectas de acción de las fuerzas que lo constituyen se encuentran contenidas en un mismo plano. Cuando las rectas de acción no pertenecen a un mismo plano, y tienen direcciones cualesquiera en el espacio, decimos que el sistema de fuerzas es *espacial*. Cada una de estas clases de sistemas de fuerzas puede subdividirse en dos sub-clases: *fuerzas concurrentes, fuerzas no concurrentes*. Un sistema de fuerzas es concurrente, sea en el plano o en el espacio, cuando todas las rectas de acción de las fuerzas que lo integran pasan por un mismo punto. En caso contrario, es decir si las rectas de acción de las fuerzas no concurren a un punto, el sistema será no concurrente *. Los sistemas de fuerzas no concurrentes en el espacio, se denominan sistemas Gausos de fuerzas.

Como caso particular de los sistemas concurrentes tenemos los sistemas de fuerzas paralelas, tanto planos como espaciales. Son aquellos en que las rectas de acción de las fuerzas componentes son paralelas, y su punto de concurrencia es el punto impropio de la dirección común a todas las fuerzas.

1.5. Los principios de la Estática.

Para la resolución de los distintos problemas que surgen del estudio de la Estática, es posible seguir distintos caminos. Es así que MEOLI

* En el caso de los sistemas planos, esta definición se refiere a sistemas constituidos por más de dos fuerzas.

siguiendo la escuela italiana desarrolla previamente la teoría de los vectores axiles, y luego, estableciendo que a la equivalencia física de dos sistemas de fuerzas aplicadas a un mismo cuerpo rígido, corresponde la equivalencia geométrica de los dos sistemas de vectores axiles que los representan, resuelve en forma elegante los distintos problemas que se plantean.

Partiendo de los principios de la mecánica clásica como ser el principio de los trabajos virtuales, o el principio del paralelogramo de fuerzas, es posible construir, paso a paso todo el edificio de la Estática y resolver todos sus problemas. Nosotros partiremos de este último principio, siguiendo con ello a TIMOSHENKO.

El principio del paralelogramo de fuerzas se debe a *Stevinius*, quien en 1586, lo utilizó en sus trabajos, pero sin enunciarlo formalmente. Según MACH el primero en enunciarlo en forma clara y precisa fue NEWTON, en sus "Principia Philosophiæ naturalis", aunque también en el mismo año (1687) lo enunciaran independientemente VARIGNON en una Memoria presentada a la Academia de París y el Padre BERNARDO LAMI, en un breve apéndice a su *Traité de Méchanique*.

Consideremos (fig. 1.6), un cuerpo rígido y dos fuerzas P_1 y P_2 aplicadas al mismo punto A de dicho cuerpo. El enunciado del principio del paralelogramo de fuerzas o primer principio de la Estática dice:

"El efecto de dos fuerzas P_1 y P_2, aplicadas a un mismo punto de "un cuerpo rígido, es equivalente al de una única fuerza llamada resultan- "te, aplicada en el mismo punto y cuya intensidad y dirección quedan "definidas por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vec- "tores representativos de las fuerzas componentes."

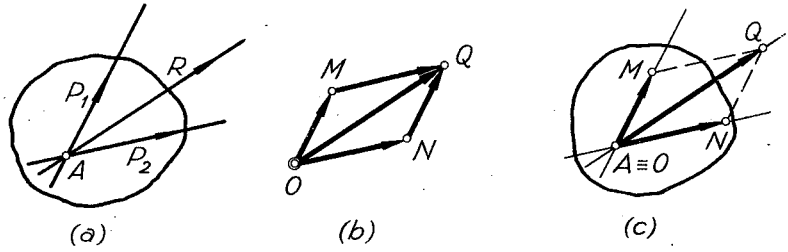


Fig. 1.6.

En la figura 1.6 *a* tenemos dos fuerzas, P_1 y P_2 aplicadas en el punto A. A partir de un punto O cualquiera hemos llevado dos segmentos OM y ON, cuyas longitudes representan en la escala adoptada (a kg/cm), las intensidades de P_1 y P_2 respectivamente. Dichos segmentos corresponden a los vectores representativos de las dos fuerzas, con los sentidos dirigidos de O a M y N respectivamente. Construido el paralelogramo $OMQN$, la diagonal OQ del mismo, de acuerdo con el

principio que acabamos de enunciar, nos da la dirección de la recta de acción de la resultante R, su sentido y la longitud del segmento OQ, leída en la escala adoptada, la intensidad de la misma.

La construcción del paralelogramo de fuerzas, que en la figura 1.6*b* hemos efectuado a partir de un punto cualquiera O, puede realizarse llevando los vectores representativos de las fuerzas componentes, directamente sobre las rectas de acción de las fuerzas componentes. Ello puede observarse en la figura 1.6 c.

Cuando se trate de hallar la resultante de dos fuerzas concurrentes, al aplicar el principio del paralelogramo de fuerzas no es necesario proceder a la construcción del mismo, siendo suficiente la construcción de lo que se denomina *triángulo de fuerzas*, como surge de la figura 1.7. En ella, hemos llevado a partir de un punto cualquiera O el vector OM representativo de la fuerza P_1 y por su extremo M el vector MQ, representativo de la fuerza P_2. El vector definido por el origen del primero y el extremo del segundo, corresponde a la diagonal del paralelogramo de fuerzas y constituye el vector representativo de la resultante de P_1 y P_2. Trazando por el punto A de concurrencia de las fuerzas una recta paralela a la dirección del vector representativo de la resultante, queda definida la recta de acción de esta última, cuya intensidad es igual al módulo del vector OQ, y cuyo sentido coincide con el de este último. Queremos destacar expresamente que el vector OQ *no es la resultante de* P_1 *y* P_2 sino únicamente el vector representativo de la misma. Es un vector libre, mientras que la resultante es un vector aplicado en A, cuya recta de acción es paralela a la dirección OQ, y cuya intensidad y sentido conciden con los del vector OQ. De la observación del triángulo de fuerzas deducimos que el vector representativo de la resultante se obtiene como *suma vectorial* o *suma geométrica* de los vectores representativos de las fuerzas componentes.

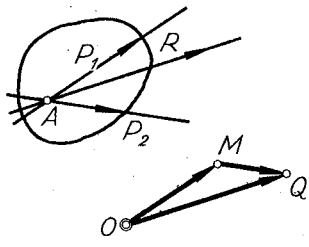


Fig. 1.7.

Consideremos ahora el caso en que el ángulo que forman las rectas de acción sea pequeño (fig. 1.8 *a*). El correspondiente triángulo de fuerzas resulta muy alargado (fig. 1.8 *b*), y en el límite, cuando ambas rectas de acción se superpongan y los sentidos de las dos fuerzas sean los mismos, el vector representativo de la resultante será un vector cuya dirección coincida con la de las componentes y la intensidad sea la suma de las fuerzas componentes (fig. 1.8 c). Análogamente, cuando las rectas de acción coinciden y los sentidos de las fuerzas son opuestos, el vector representativo de la resultante se obtiene como *diferencia* de los vectores represen-

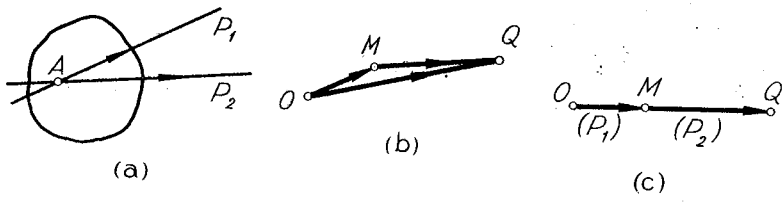


Fig. 1.8.

tativos de las fuerzas componentes (fig. 1.9). Generalizando diremos que la resultante de dos fuerzas concurrentes cuyas rectas de acción son coincidentes, se obtiene directamente como *suma algebraica* de los vectores representativos de las componentes.

El principio del paralelogramo de fuerzas nos dice que siempre es posible reemplazar dos fuerzas concurrentes por su resultante, o, en otras palabras, que ambos sistemas son *equivalentes*. Como corolario de ello se tiene que la única posibilidad de que dos fuerzas concurrentes se en-

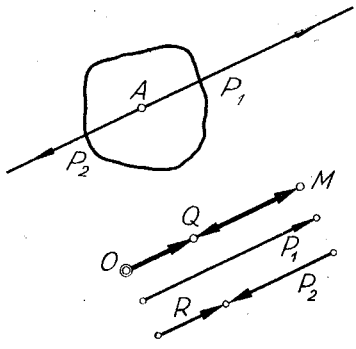


Fig. 1.9.

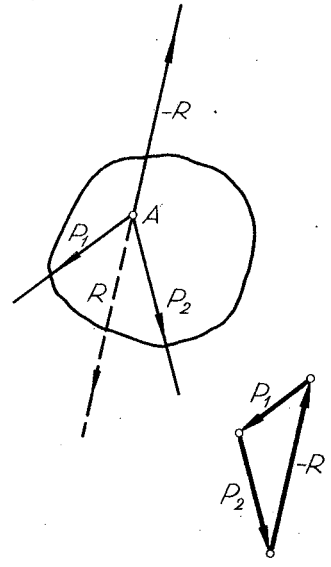


Fig. 1.10.

cuentren en equilibrio es que su resultante sea nula. Cuando las dos fuerzas tengan la misma recta de acción, como su resultante se obtiene por la suma algebraica de ambas fuerzas, es evidente que para que la resultante sea nula, la intensidad de las dos fuerzas debe ser la misma y sus sentidos contrarios. Esta conclusión puede generalizarse en el 2º principio de la Estática, que reza:

"Para que dos fuerzas se equilibren es necesario que sean opuestas" entendiéndose por fuerzas opuestas aquellas que teniendo la misma recta de acción, son de igual intensidad y sentidos contrarios.

Los sistemas constituidos por dos fuerzas en equilibrio se denominan *sistemas nulos.*

Consideremos nuevamente el caso de dos fuerzas concurrentes a un punto A (fig. 1.10). El 2º principio de la Estática nos dice que para equilibrar el sistema, bastará que en A actúe una fuerza *opuesta* a la resultante R, denominada *equilibrante.* En el correspondiente triángulo de fuerzas, la equilibrante tendrá sentido contrario a la resultante R, y en consecuencia se tendrá que el triángulo de fuerzas será *cerrado,* coincidiendo el origen de la primera fuerza con el extremo de la equilibrante.

El tercer principio de la Estática, evidente por sí mismo, expresa que:

El efecto de un sistema de fuerzas dado, sobre un cuerpo rígido no se modifica, si a dicho sistema se agrega o quita un sistema de fuerzas nulo.

Basándonos en el tercer principio de la Estática, demostraremos el teorema de la *transmisibilidad de una fuerza,* cuyo enunciado es el siguiente:

Si una fuerza actúa sobre un cuerpo rígido, es posible desplazar su punto de aplicación sobre su recta de acción sin que resulte alterado su efecto. Para demostrarlo, consideremos el cuerpo rígido de la figura 1.11 *a*,

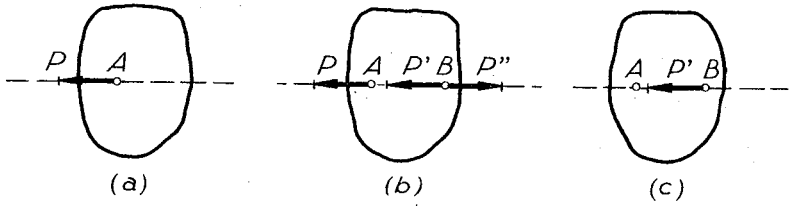


Fig. 1.11.

en el que actúa la fuerza P aplicada en el punto A. Apliquemos ahora en el punto B, ubicado sobre la recta de acción de P, dos fuerzas P' y P'', opuestas, y de igual intensidad y recta de acción que P (fig. 1.11 *b*). Por tratarse de un sistema de fuerzas en equilibrio (sistema nulo), la existencia del mismo no altera en nada el efecto de P. Consideremos ahora el conjunto de las fuerzas P y P'' que también constituyen un sistema nulo ya que P y P'' son opuestas. En virtud del tercer principio de la Estática podemos eliminar ambas fuerzas sin que se altere la acción del sistema, y obtenemos así actuando sobre el cuerpo rígido únicamente la fuerza P', aplicada en el punto B. Como P' y P eran iguales en intensidad y sentido y actuaban sobre la misma recta de acción, hemos obtenido como resultado una translación de la fuerza P del punto A al punto B. Como el punto B lo hemos elegido arbitrariamente sobre la recta de acción de P, queda

con ello demostrado que es posible desplazar una fuerza aplicada sobre un cuerpo rígido, sin que su efecto se altere en absoluto.

Destacamos que el teorema de la transmisibilidad de una fuerza es aplicable únicamente al caso de los cuerpos rígidos, y que pierde validez cuando se trata de cuerpos deformables. El ejemplo que desarrollaremos a continuación permite apreciar perfectamente lo que acabamos de enunciar. Sea (fig. 1.12) un conjunto de dos cuerpos elásticos (deformables), que los visualizaremos como dos resortes suspendidos, uno a continuación del otro, de un punto fijo *O*. Si en el punto *A*, aplicamos una fuerza *P* di-

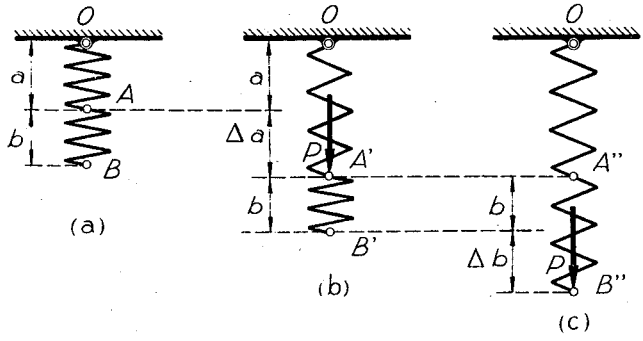


Fig. 1.12.

rigida hacia abajo, el resorte superior experimentará una deformación, desplazándose el punto A de Δa, y pasará a ocupar la posición *A'*, mientras que el resorte inferior no habrá experimentado alargamiento alguno, trasladándose el punto *B* a la posición *B'*. Si ahora aplicamos la fuerza *P* en el punto *B'*, el resorte inferior se deformará incrementándose su longitud de Δb. Del caso (b) se pasa al (c) simplemente deslizando la fuerza *P* a lo largo de su recta de acción de *A* á *B*. Este deslizamiento no puede realizarse sin modificar el efecto físico de la fuerza sobre el cuerpo, en este caso deformable.

Si las dos fuerzas actuantes sobre un cuerpo rígido no se encuentran aplicadas a un mismo punto, tal el caso de la figura 1.13, en que las fuer-

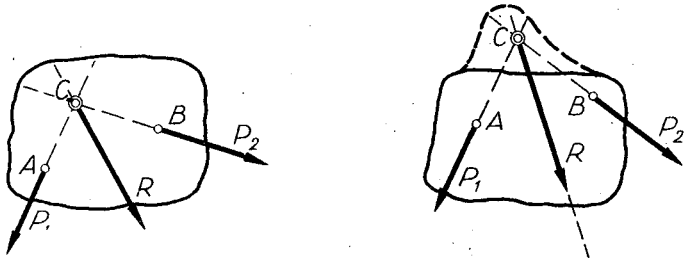


Fig. 1.13.

zas P_1 y P_2 actúan respectivamente en los puntos A y B, en virtud del teorema de la transmisibilidad de las fuerzas, es posible deslizar ambas a lo largo de sus respectivas rectas de acción hasta aplicarlas en el punto C, de intersección de éstas, y en base al primer principio de la Estática, reemplazarlas por su resultante. Si el punto de intersección no pertenece al cuerpo rígido, la construcción indicada es válida, pues podemos imaginar la existencia de una prolongación del cuerpo que contenga al punto de intersección.

El cuarto principio de la Estática, sumamente importante por sus aplicaciones en los distintos problemas de la técnica, es el denominado principio de la acción y reacción. Su enunciado dice que *toda acción implica existencia de una reacción, de igual intensidad y sentido contrario.*

Sea la esfera de figura 1.14, que se encuentra apoyada sobre un plano. La esfera está sujeta a la acción de la gravedad, es decir de una fuerza P cuya intensidad es igual al peso de la esfera, dirigida hacia abajo y aplicada en su centro de gravedad. La esfera apoyada se halla inmóvil, es decir, en equilibrio. Si suprimimos el plano de apoyo, es evidente que la esfera caerá. Para evitarlo, debemos aplicar en el punto de apoyo una fuerza opuesta al peso P; tal que equilibre a este último. Aplicada esta fuerza, la esfera se encontrará nuevamente en equilibrio, por estar sujeta a la acción de un sistema nulo. Este hecho nos permite inferir que la existencia del plano de apoyo equivale a una fuerza denominada *reacción,* opuesta a la fuerza actuante que es la *acción.* El plano de apoyo constituye lo que denominaremos *vínculo,* y cuyo estudio exhaustivo realizaremos más adelante. La fuerza opuesta a la acción que es capaz de desarrollar el vínculo, se denomina *reacción de vínculo,* y su determinación para los distintos casos que se pueden presentar constituye el objeto de un capítulo especial de la Estática.

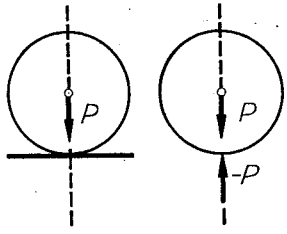


Fig. 1.14.

1.6. Momento estático de una fuerza.

Sea (fig. 1.15) una fuerza P aplicada a un cuerpo rígido y un punto cualquiera O, coplanar con P y perteneciente al mismo cuerpo rígido. Definiremos como *momento estático,* o simplemente *momento* de la fuerza P respecto al punto O, al producto de la intensidad de P por la distancia normal d, entre la recta de acción de P y el punto O, momento que designaremos con M y cuya expresión es

$$M = P.d \,. \qquad [1.1]$$

Estando P medida en kg (ó t) y la distancia d en m ó cm, la unidad resultante para el momento M será el producto de las unidades en que se miden P y d, es decir: kgm, kgcm, tm o tcm, según el caso. Lo corriente es expresar P en kg y d en m, y, en consecuencia, medir M en kgm (kilográmetros).

Al punto O, con respecto al cual tomamos momento, le denominaremos *centro de momentos* y la distancia d, *brazo de la fuerza o brazo de palanca*, indistintamente.

De la observación de la figura 1.15 y sobre la base de la definición de momento estático, deducimos que el valor numérico del momento de una fuerza respecto de un punto es igual al doble del área de la superficie del triángulo que tiene por base un segmento de longitud igual a la intensidad de la fuerza y por altura la distancia al centro de momentos, es decir el brazo de palanca.

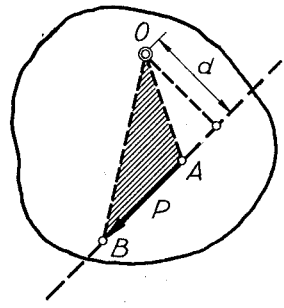


Fig. 1.15.

Consideremos el caso de figura 1.16, en donde dos fuerzas P_1 y P_2 actúan sobre un cuerpo rígido aplicadas en los puntos A y B respectivamente. Si tomamos momentos de cada una de las fuerzas respecto del centro O, las intensidades respectivas serán

$$M_1 = P_1.d_1 \quad \text{y} \quad M_2 = P_2.d_2 \qquad [1.2]$$

y por otra parte observamos que dichos momentos tienden a hacer girar el cuerpo rígido alrededor de O, con sentidos de giro opuestos. Es decir que los momentos tienen signo.

Convendremos en asignar a los momentos signo *positivo* (+) cuando el sentido del giro coincida con el sentido de las agujas del reloj (dextrorso o dextrógiro), y negativo (—) cuando ocurra en sentido opuesto (sinistrorso o sinistrógiro).

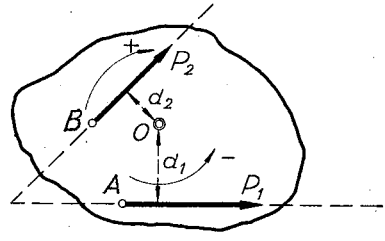


Fig. 1.16.

Definido el momento de una fuerza con respecto a un punto como el producto $P.d$, cualquiera sea la posición del punto de aplicación de la fuerza sobre su recta de acción, el valor del momento no cambia. Lo mismo ocurre si el centro de momentos se desplaza sobre una recta paralela a la recta de acción de la fuerza.

El momento de una fuerza respecto a un punto será igual a cero cuando sea nulo uno de los dos factores que definen al producto $M =$

$= P.d$. En consecuencia, para que sea nulo el momento de una fuerza existen dos posibilidades:

a) Que la intensidad de la fuerza valga cero y

b) Que la distancia al centro de momentos sea nula.

Este último caso se presenta cuando el centro de momentos pertenece a la recta de acción de la fuerza de la que tomamos momento.

1.7. Representación vectorial del momento de una fuerza.

El momento de una fuerza respecto a un punto depende de la intensidad y sentido de la fuerza, así como también de la distancia al centro de momentos, es decir, que son necesarios tres parámetros para definirlo. Podemos por ello considerarlo como una magnitud vectorial, y representarlo mediante un vector normal al plano definido por la recta de acción de la fuerza y el centro de momentos.

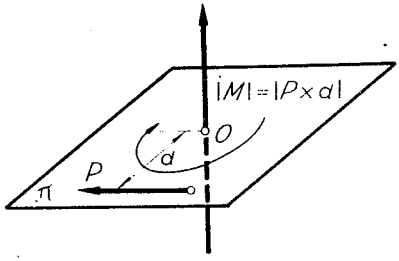


Fig. 1.17.

Sea (fig. 1.17) la fuerza P y el centro O de momentos, contenidos en el plano π. El momento de P respecto de O, podemos representarlo mediante un vector normal al plano π, aplicado en O, cuyo módulo sea igual al valor absoluto del producto $P.d$ y cuyo sentido sea tal que un observador ubicado en la dirección del vector con los pies en el punto O vea girar la fuerza P de izquierda a derecha, es decir, en el sentido de las agujas del reloj. Al cambiar la posición del punto O, centro de momentos, manteniendo constante la fuerza P, varía la intensidad del momento, pudiendo o no variar su signo. En consecuencia, el vector representativo del mismo o *vector momento* variará al cambiar el centro de momentos, constituyendo un *vector aplicado* en este último.

La representación vectorial de los momentos resulta muy práctica para la resolución de diversos problemas, porque facilita en grado sumo los distintos pasos que conducen a la solución.

1.8. Teorema de Varignon.

El teorema de Varignon se refiere al momento de dos fuerzas concurrentes con respecto a un punto, contenido en el plano de las mismas y su enunciado es el siguiente:

"El momento de la resultante de dos fuerzas concurrentes, con res-
" pecto a un punto contenido en el plano de las mismas, es igual a la suma
" algebraica de los momentos de las fuerzas componentes, con respecto al
" mismo punto."

Para demostrarlo, consideremos (fig. 1.18) las dos fuerzas P_1 y P_2 aplicadas al punto A y contenidas en el plano de la figura, y tomemos momentos de ambas con respecto al punto O, coplanar con P_1 y P_2.

Tracemos la recta s-s coplanar con P_1 y P_2 y normal a la recta AO, y proyectemos sobre ella el origen y extremo de los vectores representativos de las dos fuerzas componentes y de su resultante R, obteniendo los puntos A'; M'; N' y Q'. Consideremos ahora los triángulos OAM, OAN y OAQ. Sus respectivas superficies valdrán

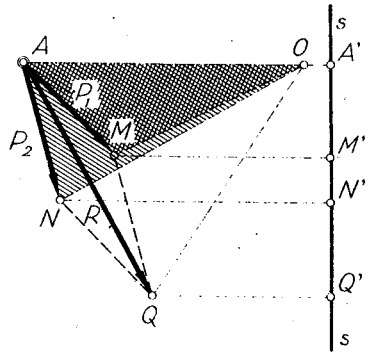


Fig. 1.18.

$$\begin{cases} \text{Sup } \overset{\triangle}{OAM} = \tfrac{1}{2}\, OA.A'M' \\ \text{Sup } \overset{\triangle}{OAN} = \tfrac{1}{2}\, OA.A'N' \\ \text{Sup } \overset{\triangle}{OAQ} = \tfrac{1}{2}\, OA.A'Q' \end{cases} \qquad [1.3]$$

De la observación de la figura 1.18 se tiene

$$A'Q' = A'M' + M'Q' \qquad [1.4]$$

y por ser

$$M'Q' = A'N' \qquad [1.5]$$

resulta

$$A'Q' = A'M' + A'N' \qquad [1.6]$$

Reemplazando la [1.6] en el segundo miembro de la tercera de las [1.3] se tiene

$$\begin{aligned} \text{Sup } \overset{\triangle}{OAQ} &= \tfrac{1}{2}\, OA(A'M' + A'N') = \\ &= \tfrac{1}{2}\, OA.A'M' + \tfrac{1}{2}\, OA.A'N', \end{aligned} \qquad [1.7]$$

y comparando la [1.7] con las dos primeras de las [1.3] resulta finalmente

$$\text{Sup } \overset{\triangle}{OAQ} = \text{Sup } \overset{\triangle}{OAM} + \text{Sup } \overset{\triangle}{OAN} \qquad [1.8]$$

Ahora bien, hemos visto en 1.6 que el valor numérico del momento de una fuerza respecto a un punto es igual al doble del área de la superficie del triángulo que tiene por base a un segmento igual a la intensidad de la fuerza y por altura a la distancia al centro de momentos. Precisamente los triángulos *OAQ*, *OAM* y *OAN* tienen respectivamente por bases a los vectores representativos de R, P_1 y P_2 y por alturas las correspondientes distancias a *O*. En consecuencia, si en la [1.8] multiplicamos ambos miembros por dos, tendremos

$$M_R = M_1 + M_2, \qquad [1.9]$$

que es lo que queríamos demostrar.

Igual demostración podemos efectuar en el caso en que los signos de los momentos de las dos fuerzas sean contrarios.

1.9. Pares de fuerzas.

Al sistema constituido por dos fuerzas de igual intensidad, sentido contrario y rectas de acción paralelas, se lo denomina *par de fuerzas* (fig. 1.19). Al producto de la intensidad P de una de las fuerzas por la distancia d que separa a ambas rectas de acción lo denominaremos *momento del par*. Los pares de fuerzas serán positivos o negativos según tiendan a hacer girar el cuerpo rígido sobre el que actúan en el sentido de las agujas del reloj o en sentido opuesto, respectivamente.

Los pares de fuerzas quedan definidos por su momento (en intensidad y signo), por lo que diremos que dos pares serán iguales cuando tengan igual momento. De ello deducimos que, quedando definido el par por su momento, es decir por el producto $P.d$, el par no variará si modificamos la distancia d que separa las fuerzas y simultáneamente variamos la intensidad de éstas de modo que el producto se mantenga constante: Ello constituye la 1ª propiedad de los pares, de suma importancia por sus aplicaciones a la resolución de diversos problemas de la técnica, como veremos más adelante.

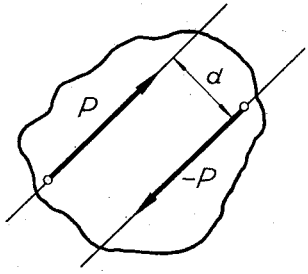


Fig. 1.19.

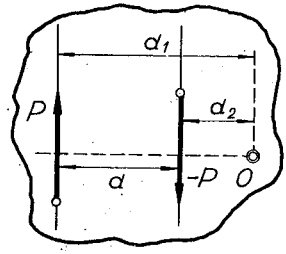


Fig. 1.20.

La 2ª propiedad de los pares consiste en que *el momento de un par de fuerzas respecto de un punto cualquiera de su plano es constante, e igual al momento del par.*

Para demostrarlo, consideremos el par de figura 1.20, aplicado a un cuerpo rígido y un punto cualquiera O de su plano. Al estar constituido el par de fuerzas por dos fuerzas paralelas de sentido contrario, constituye un caso particular de dos fuerzas concurrentes (punto de concurrencia impropio), y siendo O un punto coplanar con ambas, si tomamos momentos del sistema respecto de O, podemos aplicar el teorema de VARIGNON. Llamando M al momento del sistema respecto de O (es decir, el momento del par respecto de O), tendremos:

$$M = P.d_1 + (-P.d_2) \qquad [1.10]$$

pero

$$d_2 = d_1 - d \qquad [1.11]$$

luego, reemplazando este valor en [1.9]

$$M = P.d_1 - P.d_1 + P.d = Pd \qquad [1.12]$$

que es precisamente el valor del momento del par. Y como el centro de momentos elegido es un punto cualquiera, queda con ello demostrado que el momento de un par de fuerzas respecto de un punto cualquiera de su plano es constante, independiente del centro de momentos elegido e igual al momento del par.

La 3ª propiedad de los pares reside en el hecho que es posible girar su brazo de palanca de un ángulo φ cualquiera alrededor de uno de sus extremos, sin que el efecto del par se modifique.

Consideremos, para demostrarlo, el par de fuerzas P ; $-P$ aplicadas

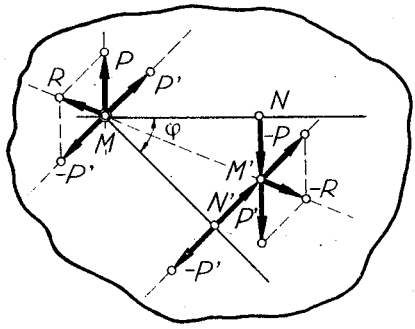


Fig. 1.21.

en los puntos M y N (fig. 1.21) y giremos el brazo MN de un ángulo φ de modo que el punto N pase a ocupar la posición N'. Apliquemos, tanto en M como en N', sistemas de fuerzas en equilibrio, de intensidad P y de rectas de acción normales a MN'. En virtud del 3er. principio de la Estática, al agregar ambos sistemas nulos, no se altera el efecto del sistema actuante; es decir, del par de fuerzas. Podemos ahora reemplazar en M a P y $-P'$ por su resultante R, y trasladando P' (aplicada en N') y $-P$ (aplicada en N) al punto de intersección de sus rectas de acción M', podemos componerlas obteniendo como resultante la fuerza $-R$, que es opuesta a R. Tenemos así actuando sobre el cuerpo rígido las fuerzas ($-P'$ y P') en M y N', respectivamente, y el sistema nulo (R ; $-R$), que podemos eliminar sin que el sistema se altere. Como P', por hipótesis, es igual en intensidad a P y por construcción también son iguales las distancias MN y MN', las fuerzas P' y $-P'$ constituyen un par de igual intensidad y signo que el par primitivo, pero girado, con respecto a éste un ángulo φ.

Sucesivas rotaciones del brazo del par en su plano nos permiten ubicarlo en cualquier posición en este último, hecho que nos conduce a la 4ª propiedad de los pares de fuerzas, cuyo enunciado es el siguiente: Es posible transladar un par de fuerzas en su plano sin que su efecto se modifique.

Esta translación de los pares de fuerzas en su plano es conceptualmente análoga a la translación del punto de aplicación de una fuerza a lo largo de su recta de acción y tiene validez únicamente cuando se refiere al efecto que tiene sobre la condición de equilibrio del cuerpo, pero no es aplicable cuando se trata de analizar su efecto en puntos interiores de sólidos deformables.

Demostraremos a continuación que para sumar dos pares de fuerzas basta proceder a la suma algebraica de sus respectivos momentos, suma que nos da el momento del *par resultante*. Consideremos los pares P ; $-P$ y Q ; $-Q$ de figura 1.22, cuyos brazos son respectivamente d_1 y d_2.

En virtud de las propiedades de los pares, que acabamos de enunciar, podemos transladar el par $P.d_1$ hasta que el punto M coincida con el S y la recta de acción de P se superponga con la de Q. Por la 1ª propie-

dad de los pares, modificamos el brazo del par hasta el valor d_2, variando consecuentemente la intensidad de P de modo que su momento se mantenga constante. Llamando X a la nueva intensidad de las fuerzas que constituyen el primer par tenemos:

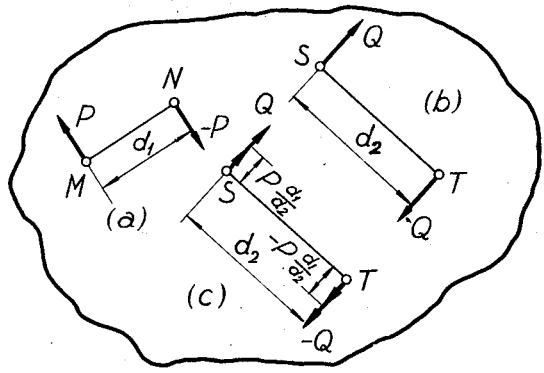


Fig. 1.22.

$$P.d_1 = X.d_2 \qquad [1.13]$$

de donde

$$X = P.d_1/d_2 \qquad [1.14]$$

Sumando ahora las fuerzas aplicadas en S y T obtenemos un nuevo par cuyo brazo vale d_2 y cuyas fuerzas constitutivas son $Q + P.d_1/d_2$ y $-(Q + P.d_1/d_2)$. El momento del nuevo par será

$$(Q + P.d_1/d_2)\, d_2 = Q.d_2 + P.d_1 \,, \qquad [1.15]$$

es decir, que la suma de los pares componentes es igual a la suma algebraica de sus respectivos momentos.

1.10. Resultante de un par.

La resultante de un par es nula. En efecto, los pares de fuerzas, al estar constituidos por dos fuerzas cuyas rectas de acción son paralelas, constituyen un caso particular de los sistemas de fuerzas concurrentes, es decir, aquéllos en que el punto de concurrencia es el punto impropio de la dirección común a ambas rectas de acción. Dado que las intensidades de sus fuerzas componentes son iguales y sus sentidos contrarios, al componerlas en el punto de concurrencia impropio, se anulan mutuamente constituyendo un sistema con resultante nula.

Al tratar en detalle los sistemas de fuerzas paralelas, veremos que la resultante de un par puede asimilarse a una fuerza de intensidad infinitamente pequeña, cuya recta de acción coincide con la recta impropia del plano.

1.11. Representación vectorial de los pares de fuerzas.

Hemos visto en 1.7 que el momento de una fuerza respecto de un punto puede representarse como un vector aplicado en el centro de momentos, de módulo igual a la intensidad del momento y dirigido según la normal al plano definido por la fuerza y el punto.

El par de fuerzas admite una representación similar, pero en este caso, como el momento de un par con respecto a un punto cualquiera es independiente de la posición del mismo e igual al producto de la intensidad de la fuerza por el brazo del par, el vector representativo de este último será normal al plano del par y podrá estar aplicado en un punto cualquiera del plano, es decir, no será ya un vector aplicado sino un *vector libre*. Su intensidad será igual al momento del par y su sentido responderá a la convención establecida en 1.7, es decir, que un observador ubicado en la dirección del vector momento ve girar el par en sentido positivo, es decir, de izquierda a derecha.

Utilizando la representación vectorial de los pares, la demostración de que el momento resultante de dos pares es igual a la suma algebraica de los momentos de los pares componentes, es inmediata. Consideremos los dos pares coplanares de figura 1.23, que representamos por sus vectores momentos M_1 y M_2. Por tratarse de vectores libres, podemos suponerlos

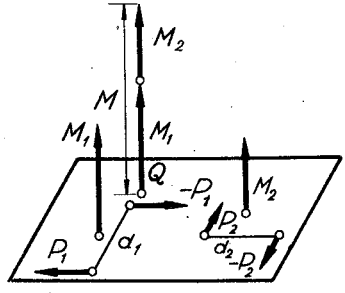


Fig. 1.23.

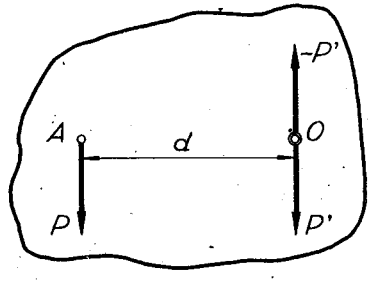


Fig. 1.24.

aplicados ambos en un punto Q, y al tener ambos vectores el mismo eje, podemos sumar algebraicamente sus intensidades obteniendo el vector suma

$$M = M_1 + M_2, \qquad [1.16]$$

representativo de un par que yace en el plano normal al eje del vector, es decir, el plano de los dos pares componentes, y cuyo módulo es igual a la suma de los módulos de los vectores componentes.

1.12. Traslación de fuerzas.

Hemos visto en 1.5 que una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido tiene perfectamente definida su recta de acción, y que el desplazamiento de su punto de aplicación a lo largo de la misma no altera su efecto. Toda translación de una fuerza que significa modificar su recta de acción original, trae aparejada una alteración en el efecto correspondiente. Consideremos ahora (fig. 1.24) una fuerza P actuando sobre un cuerpo rígido, y apliquemos en un punto cualquiera O dos fuerzas opuestas P' y $-P'$, de igual intensidad que la fuerza primitiva y paralelas a la misma. Evidentemente, por tratarse de un sistema nulo, la aplicación del mismo al cuerpo rígido no altera en nada el efecto que sobre éste producía la fuerza P. Si ahora consideramos el sistema formado por P y $-P'$, vemos que las mismas constituyen un par de momento $M = P.d$, siendo d la distancia que media entre la recta de acción de P y el punto elegido O. En consecuencia, el sistema primitivo (fuerza P) es equivalente a otro sistema constituido por una fuerza P' de intensidad igual a P, aplicada en O y un par de momento $M = P.d$.

Inversamente, si tenemos actuando sobre un cuerpo rígido una fuerza P y un par de momento M, coplanar con P, la composición de ambos conduce a una translación de la fuerza, paralelamente a sí misma de una distancia d', igual al cociente entre el momento del par y la intensidad de la fuerza. Para demostrarlo, consideremos la fuerza y el par de la figura 1.25. Por la primera propiedad de los pares podemos modificar su brazo de modo que se cumpla

$$d' = \frac{M}{P},$$

y luego desplazamos el par en su plano hasta hacer coincidir la fuerza $-P$ del mismo con la fuerza P. Ambas fuerzas, por ser opuestas, se anularán

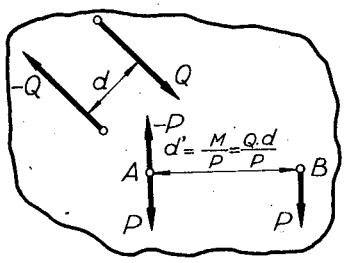


Fig. 1.25.

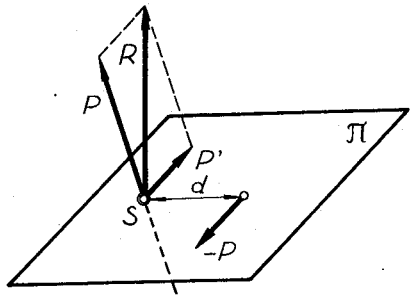


Fig. 1.26.

y quedará sólo la fuerza P transladada paralelamente a sí misma de la distancia d'.

1.13. Composición de una fuerza con un par.

En este problema pueden presentarse dos casos:

a) la fuerza y el par son coplanares;

b) la fuerza y el par pertenecen a planos distintos.

El primer caso lo hemos tratado en 1.12.

En cuanto al segundo, consideremos (fig. 1.26) un par de momento M que actúa en un plano π y una fuerza P, aplicada en el punto S del plano, pero que no pertenece al mismo. El par M lo podemos imaginar constituido por las fuerzas P' y $-P'$, separadas por una distancia d tal que cumpla la condición $M = P'.d$, yacentes en el plano. Desplacemos el par en su plano hasta hacer coincidir el origen de una de las fuerzas, la P' por ejemplo, con el punto S. Podemos ahora componer P con P' por ser fuerzas concurrentes en S, obteniendo la resultante R, con lo que el sistema queda reducido a dos únicas fuerzas $-P'$ y R, no coplanares. Es decir, mientras que la composición de una fuerza y un par coplanares da origen a una translación de la fuerza paralelamente a sí misma, cuando ambos elementos no pertenecen a un mismo plano, se obtiene como resultado de la composición un sistema equivalente constituido por dos fuerzas no coplanares.

1.14. Representación analítica de las fuerzas.

Hemos visto que una fuerza quedaba definida cuando se conocían sus cuatro parámetros: punto de aplicación, intensidad, dirección y sentido. Por el teorema de la transmisibilidad de las fuerzas, sabemos que es posible deslizar el punto de aplicación de una fuerza sobre su recta de acción sin que se altere su efecto. Ello permite definir una fuerza mediante sólo tres parámetros: su recta de acción, su intensidad y su sentido, por cuanto el punto de aplicación puede ser un punto cualquiera de su recta de acción. Conocido un punto de la recta de acción y adjudicando un sentido a la misma, si llamamos *argumento* φ de aquélla al ángulo que forma su dirección (con el sentido supuesto), con un eje orientado elegido por convención, la fuerza quedará definida si se conocen estos tres nuevos parámetros: intensidad, un punto de la recta de acción y argumento.

En lo que sigue, y siempre que trabajemos en el plano, utilizaremos el par de ejes coordenados ortogonales $z - y$, orientados como muestra la figura 1.27 *a* y que derivan de considerar la terna izquierda (figura 1.27 *b*).

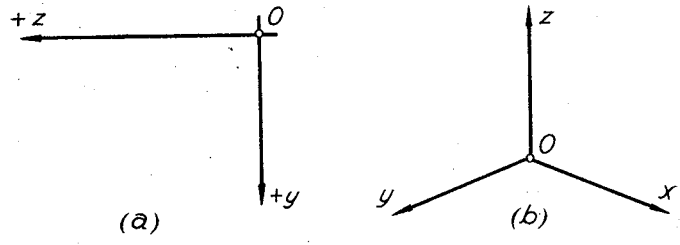


Fig. 1.27.

El semieje positivo de las y lo orientamos hacia abajo, por cuanto es la dirección en que actúan en la naturaleza las fuerzas derivadas de la acción de la gravedad.

A efectos de definir el argumento de una fuerza, conforme con los ejes coordenados adoptados, diremos que es el ángulo que la dirección de la fuerza forma con el semieje positivo z medido en sentido contrario a las agujas del reloj, o dicho de otra manera, el ángulo que es necesario girar a los ejes, en sentido contrario a las agujas del reloj para que el semieje positivo z coincida con la dirección de la fuerza.

En la figura 1.28 hemos representado fuerzas de distintos argumentos.

Ubicado un punto de la recta de acción de una fuerza, el A por ejemplo en figura 1.28, el argumento de la misma nos establece su recta de acción y su sentido, quedando completamente definida la fuerza por

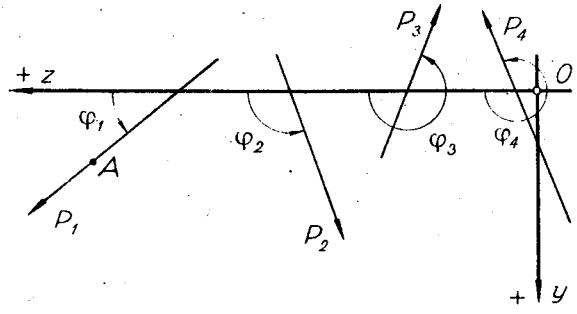


Fig. 1.28.

el tercer parámetro: su intensidad. Consideremos ahora el vector representativo de la fuerza aplicado en A (fig. 1.29) y proyectémoslo sobre ambos ejes coordenados. Siendo P la intensidad de la fuerza y llamando P_z y P_y a sus proyecciones sobre los ejes coordenados tendremos:

$$\begin{aligned} P_z &= P.\cos\varphi. \\ P_y &= P.\operatorname{sen}\varphi \end{aligned} \qquad [1.17]$$

El signo de cada una de las proyecciones resulta del correspondiente signo del $\cos\varphi$ o bien del $\operatorname{sen}\varphi$. Según el cuadrante en que se halle ubicada la fuerza, corresponderá uno u otro signo a las proyecciones de la misma. En el cuadro siguiente hemos resumido las distintas posibilidades de signo de las proyecciones de una fuerza, según el valor de su argumento φ:

φ	P_z	P_y
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	+	+
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	−	+
$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$	−	−
$\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$	+	−

En la figura 1.29 hemos ubicado a las proyecciones ortogonales de P en un punto A de su recta de acción, y vemos que las mismas pueden considerarse como lados de un paralelogramo de fuerzas que tiene por resultante a P; es decir, que el módulo de las proyecciones es, en este caso, igual al de las componentes según dos direcciones paralelas a los ejes.

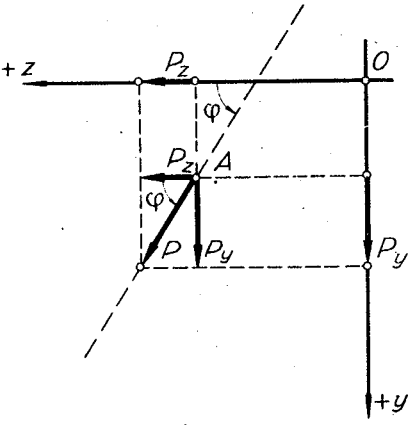


Fig. 1.29.

En consecuencia, conocidas las proyecciones ortogonales de una fuerza, la intensidad de la misma queda definida por la expresión

$$|P| = \sqrt{P_z^2 + P_y^2} \qquad [1.18]$$

y su argumento se deduce de

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\varphi &= \frac{P_y}{|P|} \\ \cos\varphi &= \frac{P_z}{|P|}, \end{aligned}\right\} \qquad [1.19]$$

quedando determinado el sentido φ por los signos de P_y y P_z.

1.15. Signo de las fuerzas.

A los efectos de facilitar la solución e interpretación de los resultados de distintos problemas, es necesario adjudicar signo a las fuerzas. Cuando se trate de fuerzas verticales u horizontales, el signo será el de sus proyecciones sobre el eje y y z respectivamente. Así, en la figura 1.30, la fuerza P_1 será positiva, la P_2 negativa y la P_3 también negativa. Si, en cambio, la dirección de la fuerza no coincide con ninguno de los ejes coordenados, como en el caso de la fuerza P_4 de la figura 1.30, existe dualidad de signo según sea el eje sobre el que se la proyecte. Si consideramos la proyección P_z, su signo será negativo, y en cambio si la proyectamos sobre el eje y, su signo será positivo. En consecuencia, es necesario establecer a priori el eje sobre el cual se considerará la proyección de la fuerza a efectos de establecer su signo. La elección del eje, denominado *eje director,* es convencional, y adoptaremos en lo que sigue, el eje z como eje director. Por consiguiente, el signo de la fuerza P_4, de acuerdo con la convención que adoptamos, es negativo.

1.16. Proyección de un par sobre un eje coordenado.

Las expresiones [1.17] nos dicen que la proyección de una fuerza sobre un eje será nula cuando lo sea su intensidad, o bien si su recta de acción es normal al eje.

Consideremos ahora el caso de un par de fuerzas proyectado sobre un eje. Por estar constituido el par por dos fuerzas de igual intensidad, sentidos contrarios y ser paralelas sus rectas de acción, resulta evidente que las dos proyecciones resultarán de igual valor absoluto y de sentido contrario, por lo que se anularán. En consecuencia, *la proyección de un par sobre un eje es siempre nula*

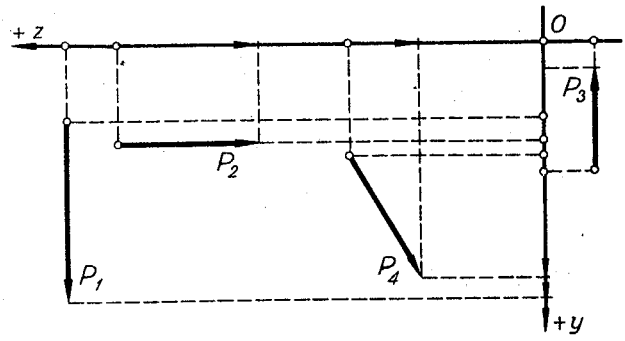


Fig. 1.30.

1.17. Expresión analítica del momento de una fuerza respecto de un punto.

Sea (fig. 1.31) la fuerza P y un punto M. Si descomponemos la fuerza P en sus componentes normales P_z y P_y, de acuerdo con el teorema de VARIGNON, su momento respecto de M será igual a la suma algebraica de los momentos de P_z y P_y respecto del mismo punto M.

La distancia de cada una de las componentes al centro de momentos es igual a la diferencia de coordenadas entre el centro de momentos y un punto cualquiera de la recta de acción de la fuerza, que se supone como punto de aplicación de la misma. Tendremos así

$$M_P^A = P_y(z_M - z_A) - P_z.(y_M - y_A). \qquad [1.20]$$

Se afecta del signo (—) al segundo término del segundo miembro de la expresión [1.20] para que exista concordancia en los signos de los

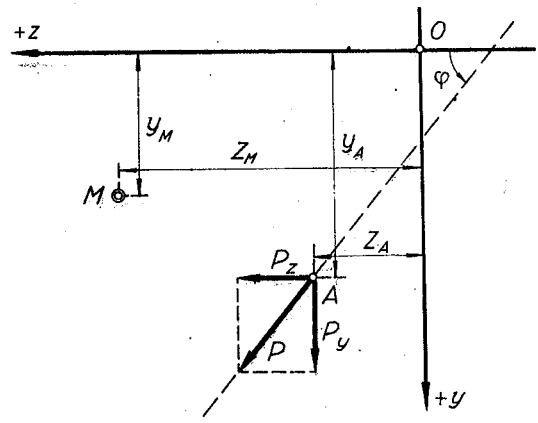


Fig. 1.31.

momentos. En efecto, el primer término entre paréntesis resulta positivo, por ser $z_M > z_A$ y siendo P_y positiva, también lo es el producto de ambos, existiendo concordancia de signos por cuanto el momento de P_y respecto de M es positivo. En cambio, el segundo paréntesis tiene signo negativo por ser $y_M < y_A$, mientras que P_z es positiva. Por tanto el producto de ambos términos será negativo, siendo necesario afectarlo del signo (—) para que resulte positivo, por cuanto, como surge de la figura 1.31, el momento de P_z respecto de M es positivo.

Por consiguiente, la expresión [1.20] nos da en valor y signo, el momento de una fuerza respecto de un punto, en función de sus componentes sobre dos direcciones ortogonales.

2. Sistemas planos de fuerzas.

2.1. Fuerzas concurrentes en el plano.

Hemos visto (1.4) que los sistemas de fuerzas se dividen en dos grandes grupos: sistemas planos y sistemas espaciales, y que cada uno de ellos comprende dos subgrupos: fuerzas concurrentes y fuerzas no concurrentes. En el presente capítulo nos ocuparemos de los sistemas planos, comenzando por aquellos constituidos por fuerzas concurrentes a un punto propio, dejando para otro capítulo el estudio de los sistemas de fuerzas paralelas; es decir, concurrentes al punto impropio de sus direcciones comunes.

En el estudio de los sistemas de fuerzas, sean planos o espaciales, se presentan dos problemas principales: el de la reducción del sistema y el de su equilibrio (o descomposición). Reducir un sistema de fuerzas significa reemplazarlo por otro equivalente y que esté constituido por el menor número posible de elementos.

En ciertos casos será posible reducir el sistema a una única fuerza, la resultante, o bien a un par; en otros no cabe hablar de resultante única, reduciéndose entonces el sistema a dos fuerzas, o a una fuerza y un par.

2.1.1. Reducción de sistemas de fuerzas concurrentes.

Para proceder a la reducción de los sistemas de fuerzas concurrentes es necesario componerlas, a efectos de hallar su resultante.

El caso de dos fuerzas concurrentes lo hemos tratado al discutir el primer principio de la Estática; es decir, el principio del paralelogramo.

Pasemos ahora al caso de sistemas de más de dos fuerzas concurrentes a un mismo punto de un cuerpo rígido. Consideremos el sistema de la figura 2.1 *a*, constituido por las fuerzas P_1, P_2, P_3 y P_4, concurrentes al punto O. Para hallar gráficamente la resultante del sistema, aplicaremos sucesivamente la regla del paralelogramo, determinando primeramente la resultante R_1 de las fuerzas P_1 y P_2. Hallada R_1,

la compondremos a su vez con la fuerza P_3, lo que nos dará una nueva resultante R_2, que lo será también de las tres primeras fuerzas. Luego, componiendo esta última resultante con P_4, obtendremos R_3, que será la resultante del sistema buscada.

Esta resultante la hemos hallado construyendo sucesivamente tres paralelogramos de fuerzas. Ello no es necesario, en general, siendo posible simplificar la construcción, extendiendo el concepto de triángulo de fuerzas, tratado en 1.5 para el caso de dos fuerzas concurrentes, al de *polígono de fuerzas*, cuando el número de fuerzas componentes es superior a dos. Para ello trabajamos con los vectores representativos de las fuerzas, vectores libres. Llevando los mismos uno a continuación del otro, figura 2.1

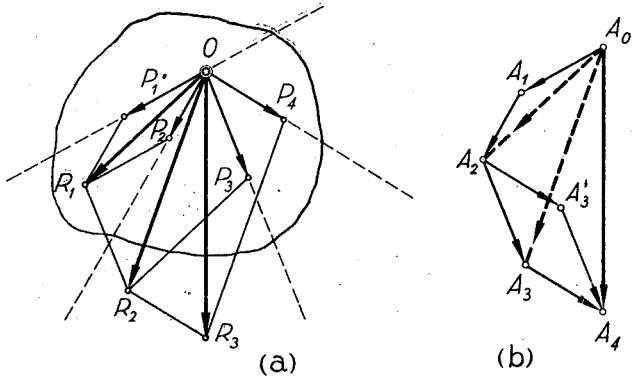


Fig. 2.1.

b, el vector definido por el origen del vector representativo de la primera fuerza y el extremo del de la última, constituye el vector representativo de la resultante del sistema, como surge de inmediato del análisis de la figura 2.1 *b*. En efecto, en la misma hemos construido los sucesivos triángulos de fuerzas A_0,A_1,A_2 ; A_0,A_2,A_3 y A_0,A_3,A_4. En el primero de ellos, el vector A_0A_2 es representativo de la resultante de las dos primeras fuerzas; es decir, R_1 y también lado del segundo triángulo de fuerzas. En consecuencia, el vector A_0A_3 será representativo de la resultante de las fuerzas $P_1,P_2,$ y P_3, y, por las mismas razones, el vector A_0A_4 lo será de la resultante total del sistema.

En la construcción del polígono de fuerzas, el orden en que se lleven los vectores representativos de las mismas puede ser cualquiera. En la figura 2.1 *b*, se ha permutado el orden de dos de los vectores sin que el resultado se altere.

Una vez determinado el vector representativo de la resultante del sistema, ésta queda definida, por cuanto se conoce su intensidad y su

dirección debiendo, evidentemente, pasar su recta de acción por el punto *O*, de concurrencia de las fuerzas que constituyen el sistema.

Consideraremos ahora dos casos particulares: cuando todas las fuerzas concurrentes tienen la misma recta de acción; es decir, son colineales, la resultante del sistema se obtiene por simple suma algebraica de las fuerzas componentes; el segundo caso particular se presenta cuando, al construir el polígono de fuerzas, el extremo del último vector coincide con el origen del primero. Evidentemente, el vector representativo de la resultante será nulo y no habrá resultante (fig. 2.2). En este caso se dice que el sistema se encuentra en *equilibrio*. Llegamos así a dos posibilidades en lo que se refiere al polígono de fuerzas:

a) Polígono de fuerzas abierto.

b) Polígono de fuerzas cerrado.

En el caso a), el sistema admite una resultante, y en el caso b), el sistema se encuentra en equilibrio.

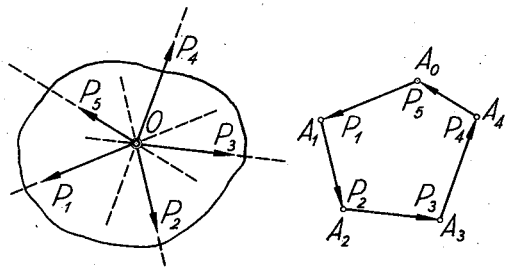


Fig. 2.2.

La segunda posibilidad nos conduce a establecer la siguiente *condición gráfica para el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes*:

Para que un sistema de fuerzas concurrentes en el plano se encuentre en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que su polígono de fuerzas sea cerrado.

La condición es necesaria, pues de no ser cerrado el polígono, existiría una resultante, y, por lo tanto, no podría haber equilibrio; y es suficiente por cuanto el equilibrio de un sistema exige que el mismo sea nulo, bastando para ello, en sistemas concurrentes, que la intensidad de la resultante sea cero.

2.1.2. Descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes con su punto de aplicación.

El problema de la descomposición de una fuerza en dos componentes cuyas rectas de acción, conocidas, concurran al punto de aplicación de la fuerza dada, tiene su solución gráfica implícita en el principio del paralelogramo de fuerzas. En efecto, sea la fuerza *P* (fig. 2.3) aplicada en

el punto A de un cuerpo rígido y se pide hallar sus componentes según las rectas de acción (*1*) y (*2*), concurrentes en A. Ubicado el vector representativo de P, tracemos por sus extremos dos rectas paralelas a las rectas de acción dadas. El punto de intersección N nos definirá dos vectores MN y NQ, cuyos módulos corresponderán a las intensidades de las componentes buscadas P_1 y P_2, y cuyos sentidos serán tales que la suma geométrica de los mismos nos dé el vector representativo de P.

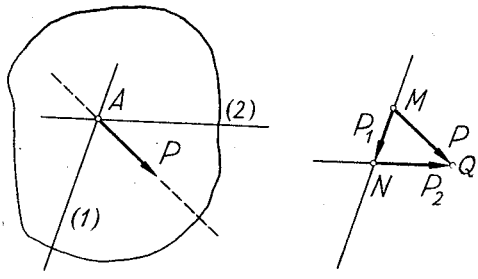


Fig. 2.3.

En el problema de la descomposición de una fuerza en dos componentes, aparte del caso tratado en el párrafo anterior, pueden presentarse otras tres posibilidades, según se conozcan:

a) la dirección de una de las componentes y la intensidad de la restante;

b) la dirección e intensidad de una de las componentes;

c) la intensidad de ambas componentes.

Posibilidad a). Sea una fuerza P (fig. 2.4) aplicada en el punto A de un cuerpo rígido, y se pide descomponerla en una componente de intensidad P_1 y en otra que actúe según la recta (*2*). Para resolver el pro-

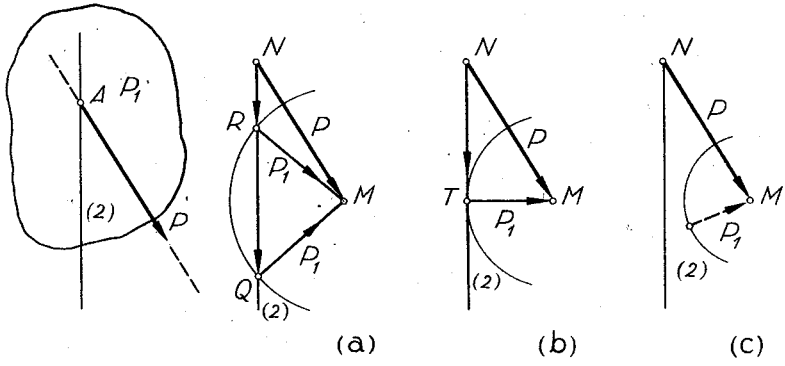


Fig. 2.4.

blema, trazamos por uno de los extremos del vector representativo de P, el N por ejemplo, una recta paralela a la recta de acción que es dato del problema. Luego, por el otro extremo trazamos un arco de circunferencia cuyo radio, en la escala de fuerzas adoptada, represente la intensidad de la segunda componente P_1. Pueden presentarse tres casos:

1º) que la recta corte el arco de circunferencia (fig. 2.4 *a*);

2º) que la recta sea tangente al arco de circunferencia (fig. 2.4 *b*) y

3º) que la recta sea exterior al arco de circunferencia (fig. 2.4 *c*).

En el primer caso existen dos soluciones. En efecto, el vector NQ, completa, con P_1, un triángulo de fuerzas que tiene por resultante a P, y, en consecuencia, soluciona el problema. Pero el punto R define un vector NR, que también es solución, por cuanto completa, con otra fuerza cuya intensidad es P_1, un triángulo de fuerzas cuya resultante es P. En cada caso, las condiciones particulares del problema permitirán establecer cuál de las dos soluciones es compatible con aquéllas.

En el segundo caso la solución es única, pues existe un solo vector NT, definido por el punto de tangencia de la recta con la circunferencia, que da origen a un triángulo de fuerzas cuya resultante es P. Finalmente, si la recta resulta exterior a la circunferencia, el problema no tiene solución, lo que surge de la figura 2.4 c, en forma evidente.

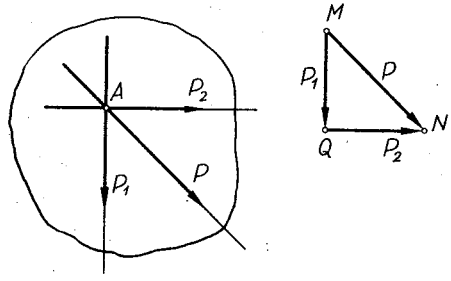


Fig. 2.5.

Posibilidad b). Dada la fuerza P (fig. 2.5), descomponerla en la componente P_1, de la que se conocen su intensidad y dirección, y otra componente P_2. La solución es inmediata: en efecto, llevando por uno de los extremos del vector representativo de P el vector representativo de P_1, el vector QN, definido por el extremo de P_1 y el extremo de P, es representativo de la componente buscada, ya que completa, con P_1, el triángulo de fuerzas que tiene por resultante P.

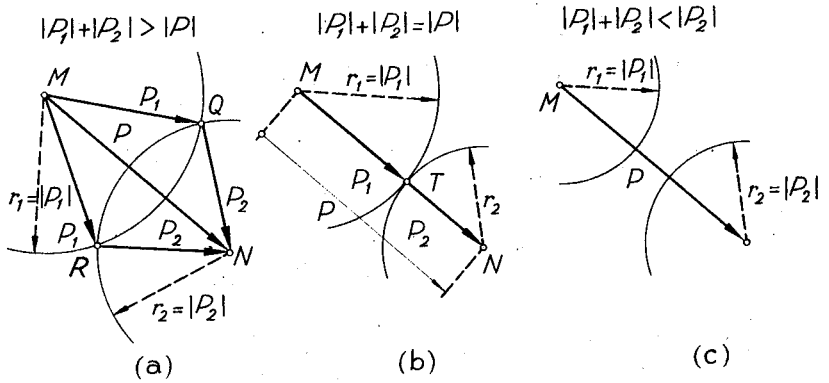


Fig. 2.6

Posibilidad c). Dada una fuerza P aplicada en el punto A de un cuerpo rígido, se pide hallar dos componentes de la misma cuyas intensidades sean P_1 y P_2.

Este caso también conduce a dos, una o ninguna solución, como veremos de inmediato. Tracemos por los extremos del vector representativo de P (fig. 2.6 *a*) arcos de circunferencia cuyos radios, en la escala de fuerzas adoptada, sean iguales respectivamente a las intensidades de las componentes P_1 y P_2, cuyas direcciones buscamos. Si la suma de las longitudes de ambos radios es mayor que la longitud del segmento MN, que corresponde al vector representativo de P, ambos arcos de circunferencia se cortarán en dos puntos, Q y R, que definen los vectores MQ y QN, el primero y MR y RN, el segundo, que constituyen las dos soluciones posibles del problema. En efecto, los vectores MQ y QN configuran, con el vector representativo de P, un triángulo de fuerzas, que tiene por resultante a P, por lo que son solución del problema, ocurriendo lo mismo con los vectores MR y RN.

Si, en cambio, la suma de las longitudes de los radios de los dos arcos de circunferencia es igual a la longitud del segmento MN, (fig. 2.6 *b*), ambas circunferencias resultan ser tangentes, y el punto de tangencia T estará ubicado sobre el vector representativo de P. En consecuencia, los vectores MT y TN, constituirán la única solución del problema y las componentes buscadas serán colineales con P.

Finalmente, si la suma de las longitudes de los radios de los dos arcos de circunferencia es menor que la longitud del segmento MN (fig. 2.6 c), las mismas no se cortarán, y el problema no tiene solución.

2.1.3. Descomposición de una fuerza en tres componentes.

La descomposición de una fuerza en tres componentes concurrentes a su punto de aplicación constituye un problema indeterminado.

Supongamos la fuerza P aplicada al punto A de un cuerpo rígido (fig. 2.7), y tres rectas concurrentes en A, y que se pide hallar las componentes de P, cuyas rectas de acción sean las rectas dadas. Si, por el origen y extremo del vector MN, representativo de P, trazamos rectas paralelas a dos de las dadas, las (*1*) y (*2*), por ejemplo, cualquier recta paralela a la (*3*) conduce a una solución del problema. En efecto, consideremos la paralela (*3'*). Sus puntos de intersección T y S con las rectas (*1*) y (*2*) definen los tres vectores MT, TS y SN, que conforman un polígono de fuerzas que tiene a P por resultante. Lo mismo ocurre con los puntos de intersección con (*1*) y (*2*) de cualquier otra

paralela a (3), y en consecuencia, existen infinitas ternas de fuerzas concurrentes en A y que tienen por resultante a P, por lo que la solución del problema es indeterminada.

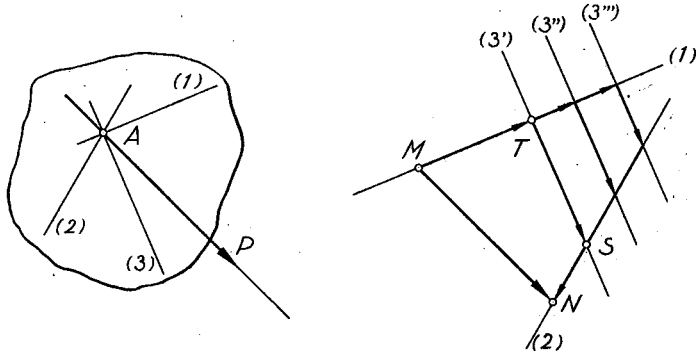


Fig. 2.7.

Si en lugar de ser tres, las componentes incógnitas fueran cuatro o más, subsiste la indeterminación, como es fácil de ver.

2.1.4. Equilibrio de fuerzas concurrentes.

El equilibrio de dos fuerzas, como hemos visto anteriormente, para que sea posible, exige que ambas sean colineales, de igual intensidad y sentido contrario; es decir, opuestas.

Consideremos ahora el caso de tres fuerzas coplanares actuando sobre un mismo cuerpo rígido. Si el sistema debe encontrarse en equilibrio, es

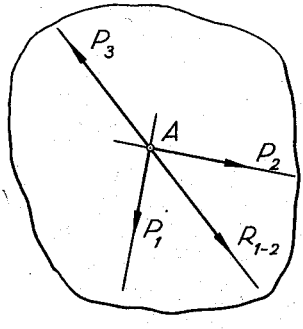


Fig. 2.8.

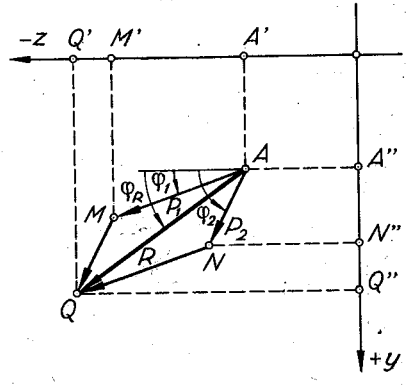


Fig. 2.9.

necesario que las tres fuerzas concurran a un mismo punto. En efecto, sean las fuerzas P_1, P_2, y P_3 de figura 2.8. La resultante de dos de ellas, por ejemplo P_1 y P_2, pasará por el punto A de intersección de sus rectas de acción, y será equivalente, en sus efectos, al conjunto P_1, P_2. En consecuencia, el equilibrio del sistema se reduce ahora al equilibrio de dos fuerzas: P_3 y R_{1-2}, y, en virtud del segundo principio de la Estática, para que dicho equilibrio sea posible, es necesario que ambas fuerzas sean opuestas. Para que ello ocurra, P_3 debe tener necesariamente la misma recta de acción que R_{1-2}, y, en consecuencia, concurrir en A con P_1 y P_2. Además, para que exista equilibrio, es necesario que una de las fuerzas (la P_3 en este caso) sea opuesta a la resultante de las otras dos. Generalizando este concepto, diremos que, *en un sistema de fuerzas concurrentes a un mismo punto de un cuerpo rígido, cualquiera de las fuerzas del sistema es siempre opuesta a la resultante de las restantes fuerzas.*

2.1.5. Reducción de sistemas. Solución analítica.

En 2.1.1 nos hemos ocupado de la reducción de sistemas de fuerzas concurrentes, utilizando procedimientos gráficos. Resolveremos, ahora, el problema de hallar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto, en forma analítica.

Consideremos, figura 2.9, el sistema de dos fuerzas concurrentes en A, P_1 y P_2, y hallemos su resultante R aplicando el principio del paralelogramo de fuerzas, llevando los vectores representativos de las dos componentes a partir de A. Si proyectamos las fuerzas P_1 y P_2 sobre ambos ejes coordenados, vemos que la suma de sus proyecciones resulta igual a la proyección de la resultante; es decir:

$$\begin{aligned} A'Q' &= (A'M') + (M'Q'), \text{ y} \\ A''Q'' &= (A''N'') + (N''Q''). \end{aligned} \qquad [2.1]$$

Pero, de acuerdo con [1.14], las expresiones [2.1] pueden escribirse en la forma siguiente

$$\left.\begin{aligned} R_x &= R\cos\varphi_R = P_1\cos\varphi_1 + P_2\cos\varphi_2\ , \\ R_y &= R\,\text{sen}\,\varphi_R = P_1\,\text{sen}\,\varphi_1 + P_2\,\text{sen}\,\varphi_2\ , \end{aligned}\right\} \qquad [2.2]$$

expresiones que nos dan las proyecciones (o componentes según paralelas a los ejes coordenados que pasan por A) de la resultante R, en función de las fuerzas que constituyen el sistema. Si en lugar de dos fuerzas, se

trata de un sistema constituido por n fuerzas, las expresiones [2.2] se generalizan, transformándose en

$$\left.\begin{aligned} R_z &= R\cos\varphi_R = \sum_1^n P_i\cos\varphi_i\ , \\ R_y &= R\,\text{sen}\,\varphi_R = \sum_1^n P_i\,\text{sen}\,\varphi_i \end{aligned}\right\} \qquad [2.3]$$

Siendo R_y y R_z componentes ortogonales de R, la intensidad de esta última se obtiene de la expresión

$$|R| = \sqrt{R_y^2 + R_z^2}\ , \qquad [2.4]$$

y el correspondiente argumento de

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\ \varphi_R &= \frac{R_y}{|R|} \\ \cos\ \varphi_R &= \frac{R_z}{|R|} \end{aligned}\right\} \qquad [2.5]$$

En consecuencia, la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes queda definida por las ecuaciones [2.3]; es decir, mediante dos ecuaciones de proyección.

Es posible, sin embargo, definir la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes de otras dos maneras: mediante una ecuación de proyección sobre un eje y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera, o por dos ecuaciones de momentos, respecto de dos puntos. Como veremos de inmediato, en el primer caso quedan excluidos aquellos ejes que resulten normales a la recta determinada por el punto de concurrencia del sistema de fuerzas y el centro de momentos elegido, y para la segunda posibilidad, los centros de momentos no deben encontrarse alineados con el punto de concurrencia de las fuerzas.

Justificaremos, a continuación, la resolución del problema de la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes, mediante una ecuación de momentos y una ecuación de proyección.

Sea el sistema de fuerzas P_i, concurrentes en A, de la figura 2.10, y tomemos momentos del sistema de fuerzas, respecto de un punto cualquiera O. Por ser O coplanar con el sistema de fuerzas, de acuerdo con el teorema de VARIGNON, si llamamos M_i^0 el momento genérico de una fuerza P_i, respecto del centro O, y M_r^0 el momento de la resultante, respecto del mismo punto, tendremos:

$$M_r^0 = \sum_1^n M_i^0 \qquad [2.6]$$

Ahora bien, la resultante R, necesariamente debe pasar por el punto A, de concurrencia del sistema. Por otra parte, podemos suponerla descompuesta en dos componentes, una, R', normal a la recta OA, y, la otra, coincidente con la misma, que llamaremos R''. Conforme con el enunciado de VARIGNON, el momento de R respecto de O será igual a la suma algebraica de los momentos de sus componentes respecto del mismo punto, pero como R'' concurre a O, su momento es nulo con respecto a dicho punto.

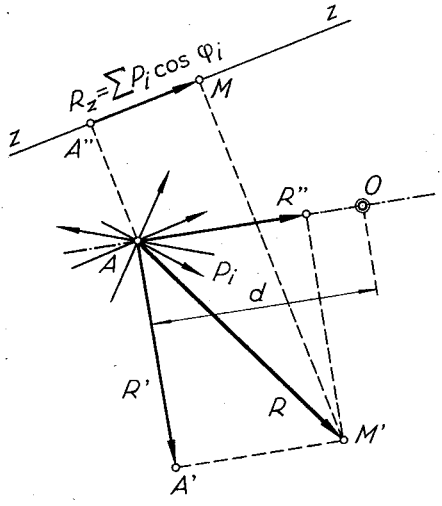


Fig. 2.10.

En consecuencia, se tiene

$$M_r^0 = R'.d. \qquad [2.7]$$

En esta ecuación son conocidos M_r^0 y d; luego, podemos despejar la intensidad de la componente R'. Sabemos que su recta de acción es normal a d, por hipótesis, y su sentido surge del signo M_r^0, según la convención establecida en 1.6.

Si a partir de A llevamos el vector representativo de R', y por su extremo A' trazamos una paralela a la recta OA, de acuerdo con el principio del paralelogramo de fuerzas, el extremo del vector representativo de la resultante R será un punto de dicha recta.

Proyectemos ahora el sistema de fuerzas sobre un eje arbitrario z-z, y supongamos que la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre dicho eje sea el segmento dirigido $A''M$. Por lo que hemos visto anteriormente, el segmento $A''M$ coincide con la proyección de la resultante del sistema, sobre el eje z-z; es decir,

$$A''M = R_z = \sum_1^n P_i \cos \varphi_i . \qquad [2.8]$$

Si por el punto M, extremo del vector representativo de R_z, levantamos una normal, sobre la misma debe encontrarse el extremo del vector representativo de la resultante R. En consecuencia, el punto M', determinado por la intersección de dicha normal con la paralela a OA trazada

por A', corresponde al extremo del vector representativo de R, quedando con ello determinadas su intensidad y su dirección. Hemos definido así la resultante del sistema de fuerzas concurrentes mediante una ecuación de proyección y otra de momentos.

Si hubiéramos elegido un eje z-z normal a la recta AO (fig. 2.11) el problema resultaría indeterminado. En efecto, al proyectar el sistema sobre el eje z-z, la suma de las proyecciones de las fuerzas componentes nos da una proyección de la resultante R coincidente en intensidad y

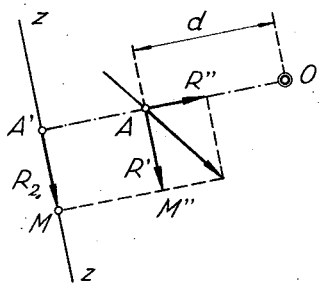


Fig. 2.11.

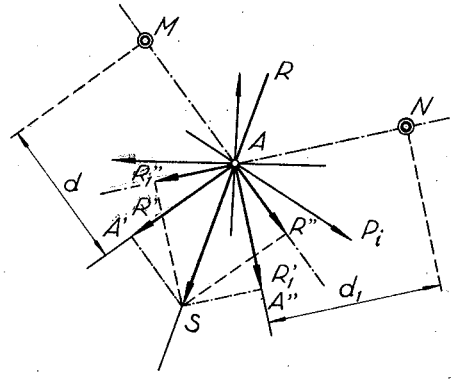


Fig. 2.12.

dirección con la componente R' obtenida mediante la ecuación de momentos, lo que surge de inmediato del análisis de la figura y nos faltaría un elemento para definir la resultante.

Demostraremos a continuación que es posible definir la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes mediante dos ecuaciones de momentos respecto a dos puntos del plano de las fuerzas.

Sea el sistema de fuerzas P_i concurrentes en A (fig. 2.12), y tomemos momentos de las fuerzas respecto a los puntos M y N. Tendremos

$$\left.\begin{aligned} M_r^m &= \sum_1^n M_i^m , \\ M_r^n &= \sum_1^n M_i^n \end{aligned}\right\} \qquad [2.9]$$

Si suponemos descompuesta la resultante R, en una componente R' normal a la recta MA, y en otra R'' dirigida según MA, de acuerdo con el teorema de VARIGNON y teniendo en cuenta que el mo-

mento de R'' respecto de M es nulo, resulta $M_r^m = R'.d$, de donde podemos despejar R' en función de los datos conocidos. Si por A llevamos el vector representativo de R', con el sentidc que corresponda según sea el signo de M_r^m, y por el extremo del mismo trazamos una paralela a la recta MA, sobre dicha paralela debe encontrarse el extremo del vector representativo de R. Suponiendo ahora descompuesta R en la dirección NA y en la normal, por iguales consideraciones llegamos a $M_r^n = R_1'.d_1$. Llevando por A el vector representativo de R_1', calculado mediante la expresión anterior, y trazando por su extremo una paralela a NA, sobre la misma debe encontrarse el extremo del vector representativo de R. En consecuencia, el punto S, intersección de las paralelas a MA y NA, trazadas por los puntos A' y A'', respectivamente, nos define el vector AS, representativo de la resultante R, la que queda así definida mediante dos ecuaciones de momentos.

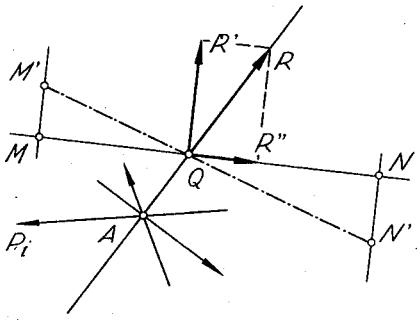


Fig. 2.13.

Existe otra forma de justificar lo anterior. Sea el sistema P_i concurrente en A, de figura 2.13, cuyos momentos, respecto de los centros M y N suponemos conocidos, y admitamos que dichos momentos tengan signos opuestos. Para definir la resultante es necesario conocer su intensidad, su recta de acción y su sentido.

Supongamos conocida la recta de acción de la resultante, que necesariamente debe pasar por A, y admitamos que corta a la recta NM, determinada por los centros de momentos en el punto Q, ubicado entre M y N, debido a que los momentos son de signo contrario. Deslicemos la resultante sobre su recta de acción hasta aplicarla en Q, y descompongámosla en la componente R', normal a NM, y en R'', coincidente con esta última recta. Por ser nulos los momentos de R'' respecto de M y de N, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} M_r^m &= \sum_1^n M_i^m = R'.(QM) \ , \\ M_r^n &= \sum_1^n M_i^n = R'.(QN) \ ; \end{aligned}\right\} \qquad [2.10]$$

es decir, que el punto de intersección de la recta de acción de la resultante con la recta determinada por los centros de momentos, divide al

segmento NM en dos segmentos, QM y QN, proporcionales respectivamente a los momentos del sistema respecto de M y N, que son datos del problema, el que queda resuelto una vez conocido Q. Para ubicarlo, procedemos de la manera siguiente:

Por los puntos M y N trazamos normales a NM, y llevamos sobre las mismas, a partir de M y de N, en sentidos contrarios y en una escala cualquiera, los segmentos $M'M$ y $N'N$, proporcionales respectivamente a

$$\sum_1^n M_i^m \quad \text{y} \quad \sum_1^n M_i^n \ .$$

Uniendo M con N', el punto de intersección de dicha recta con NM será el punto Q buscado. En efecto, por semejanza de triángulos tenemos

$$\frac{MQ}{NQ} = \frac{MM'}{NN'} = \frac{\sum_1^n M_i^m}{\sum_1^n M_i^n} \qquad [2.11]$$

Uniendo Q con A, queda ubicada la recta de acción de la resultante siendo de inmediata determinación la intensidad y el sentido.

Esta construcción es aplicable también cuando el signo de los momentos respecto de M y N es el mismo. En este caso, los segmentos MM' y NN' se llevan con el mismo sentido, resultando el punto Q intersección de la recta MN con la $M'N'$, exterior al segmento MN, como es lógico que ocurra, por cuanto al ser los momentos de igual signo, la resultante debe estar ubicada de un mismo lado de los centros de momentos.

Si los centros de momentos elegidos estuvieran alineados con el punto A de concurrencia de las fuerzas, no podría determinarse la resultante. En efecto, como es fácil ver en la figura 2.12, las componentes R' y R_1' coincidirían y no podríamos definir la resultante; y en el caso de la figura 1.13, el punto Q coincidiría con A, y quedaría indeterminada la recta de acción de la resultante.

2.1.6. Descomposición de fuerzas. Solución analítica.

Al tratar el problema de la reducción de sistemas de fuerzas, hemos visto que para encarar su solución disponíamos solamente de dos ecuaciones, y que esas ecuaciones podían ser: dos ecuaciones de proyección, una de proyección y otra de momentos, o bien dos ecuaciones de momentos.

Mediante esas mismas ecuaciones puede resolverse el problema de la descomposición de una fuerza en dos componentes concurrentes a un punto de su recta de acción. En efecto, proyectando la fuerza P y sus dos componentes incógnitas sobre dos ejes coordenados ortogonales z, y, tenemos las ecuaciones siguientes (que se corresponden con las [2.2]):

$$\left.\begin{aligned} P_z &= P.\cos\varphi = P_1\cos\varphi_1 + P_2\cos\varphi_2 \ , \\ P_y &= P.\operatorname{sen}\varphi = P_1\operatorname{sen}\varphi_1 + P_2\operatorname{sen}\varphi_2 \ . \end{aligned}\right\} \qquad [2.12]$$

Este sistema de dos ecuaciones nos permite resolver el problema de la descomposición de una fuerza en dos componentes, en cualquiera de las cuatro posibilidades enunciadas y resueltas gráficamente en 2.2.

Cuando se conocen las direcciones de las fuerzas y se buscan sus intensidades, en las ecuaciones [2.12] aparecerán como incógnitas únicamente P_1 y P_2, siendo conocidos los restantes elementos que aparecen en las ecuaciones por cuanto son datos del problema P, φ, φ_1 y φ_2.

Si se conoce la intensidad de P_1 y la dirección de P_2, las incógnitas resultan en este caso φ_1 y $|P_2|$. En cambio, cuando se dan como dato las intensidades de ambas componentes, las incógnitas son los argumentos φ_1 y φ_2 de las mismas; finalmente, si una de las componentes está totalmente definida; es decir, si, por ejemplo, se conocen $|P_1|$ y φ_1, las incógnitas serán $|P_2|$ y φ_2.

Es evidente que el hecho de disponer de solamente dos ecuaciones, hace que el problema de la descomposición de una fuerza en tres componentes concurrentes a un punto de su recta de acción resulte indeterminado, por cuanto estaremos en presencia de un problema de tres incógnitas.

2.1.7. Equilibrio de sistemas de fuerzas concurrentes. Condiciones analíticas necesarias y suficientes.

Vimos en 2.1.1 que la condición gráfica de equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes a un punto consistía en que su polígono de fuerzas fuera cerrado. Veremos a continuación que las condiciones analíticas, necesarias y suficientes, que debe cumplir un sistema de fuerzas concurrentes para encontrarse en equilibrio, son dos, y que existen tres maneras distintas de expresarlas: mediante dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes no coincidentes ni paralelos; mediante una ecuación de momentos y

una de proyección sobre un eje que no sea normal a la recta determinada por el centro de momentos y el punto de concurrencia de las fuerzas; o bien, mediante dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos no alineados con el punto de concurrencia del sistema.

1er. caso. Sea el sistema de fuerzas P_i concurrentes en A, de la figura 2.14. Supongamos que, proyectadas las fuerzas sobre el eje z, la suma de sus proyecciones resulte nula; es decir,

$$\sum_1^n P_i \cos \varphi_i = 0 \,. \qquad [1.13]$$

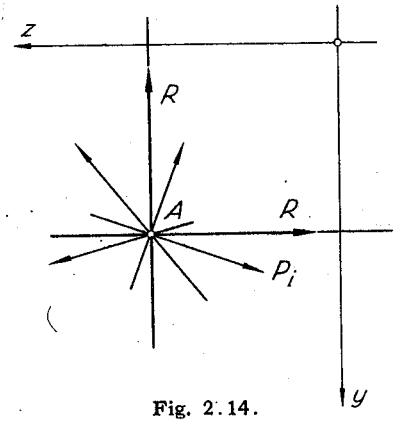


Fig. 2.14.

De cumplirse esta condición, se presentan dos posibilidades:

a) la resultante es nula; es decir, el sistema se encuentra en equilibrio;

b) existe resultante, y en tal caso su dirección es normal al eje z.

Queda excluida la posibilidad de que el sistema se reduzca a un par. En efecto, si bien el par cumpliría la condición de proyección nula sobre el eje, la naturaleza del sistema (concurrente en A) exige la concurrencia de la resultante con las fuerzas componentes, condición que no cumple el par.

Si proyectamos ahora el sistema sobre el eje y, y la suma de las proyecciones es nula, se presentan las mismas posibilidades anteriores: a) resultante nula; b) resultante normal al eje y.

Si, simultáneamente, se cumplen las condiciones de nulidad de proyecciones del sistema sobre los dos ejes, se excluyen automáticamente las posibilidades b), por cuanto la resultante, de existir, no puede cumplir simultáneamente la condición de perpendicularidad a dos ejes normales. En consecuencia, la única posibilidad que le resta al sistema es la de encontrarse en equilibrio.

Diremos entonces que, *para que un sistema de fuerzas concurrentes se encuentre en equilibrio, es necesario y suficiente que la suma de las proyecciones de las fuerzas que constituyen el sistema sobre dos ejes no coincidentes ni paralelos sea nula.*

2º caso. Consideremos el sistema de fuerzas P_i, concurrentes en A, de la figura 2.15 y el punto M. Si tomamos momentos del sistema res-

pecto de M, y la suma de los mismos es nula, por el teorema de VARIGNON también será nulo el momento de la resultante con respecto al mismo punto. Si esto ocurre, caben las dos posibilidades siguientes:

a) la resultante es nula, y en consecuencia el sistema se encuentra en equilibrio;

b) existe resultante, y, en tal caso, de acuerdo con lo establecido en 1.6, la misma debe pasar por M.

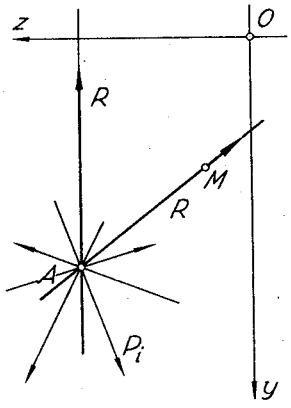


Fig. 2.15.

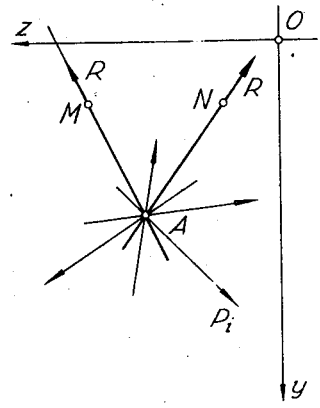


Fig. 2.16.

Si proyectamos el sistema sobre el eje z, por ejemplo, y encontramos que la suma de las proyecciones es nula, caben las dos posibilidades analizadas al estudiar el caso 1º, es decir, resultante nula, o bien resultante normal al eje z.

Si el sistema cumple simultáneamente las condiciones de proyección nula y momentos nulos, evidentemente queda descartada la posibilidad de existencia de resultante, porque la misma, pasando necesariamente por A por tratarse de un sistema concurrente, no puede, simultáneamente, tener dos rectas de acción, una normal al eje z y la otra pasando por M. En consecuencia, *para que un sistema de fuerzas concurrentes en un punto se encuentre en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que la suma de las proyecciones del sistema sobre un eje sea nula, y que simultáneamente sea nulo el momento del sistema respecto de un punto*, siempre que el punto no se encuentre sobre la normal al eje trazada por el punto de concurrencia de las fuerzas. Si ello ocurriera, al cumplirse la primera condición; es decir, suma de momentos respecto de A igual a cero, de no existir equilibrio, la resultante, debiendo pasar por A, necesariamente

sería normal al eje z, y la ecuación de proyección sobre este eje, de ser nula, no impondría ninguna nueva condición, por cuanto la de perpendicularidad ya estaba impuesta implícitamente por la condición de momentos.

3er. caso. Si tomamos momentos del sistema P_i de la figura 2.16 respecto del punto M, y la suma de los mismos es nula, es posible:

a) que la resultante sea nula; es decir, que el sistema se encuentre en equilibrio;

b) que la resultante exista, y en tal caso debe necesariamente pasar por M.

Si, al tomar momentos con respecto al punto N, la suma resulta cero, las posibilidades son las mismas que antes, pero, en este caso, de existir resultante, debe pasar por N.

Si las dos condiciones se cumplen simultáneamente, quedan excluidas las posibilidades b), por cuanto, debiendo la resultante pasar por A, dadas las condiciones del problema, no puede simultáneamente pasar por dos puntos no alineados con A. En consecuencia, *para que un sistema de fuerzas concurrentes a un punto se encuentre en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que la suma de los momentos del sistema respecto de dos puntos no alineados con el de concurrencia, sea nula.*

Si los centros de momentos elegidos se encuentran alineados con el punto de concurrencia de las fuerzas, la nulidad de los momentos con respecto a dichos centros no asegura el equilibrio, por cuanto el sistema puede reducirse a una resultante cuya recta de acción contenga a los tres puntos, siendo de hecho nulos sus momentos respecto de los mismos.

Resumiendo, diremos que un sistema de fuerzas concurrentes estará en equilibrio siempre que se verifique cualquiera de los sistemas de dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n P_i \cos \varphi_i &= 0 \ , \\ \sum_1^n P_i \operatorname{sen} \varphi_i &= 0 \ ; \end{aligned}\right\} \qquad [2.14]$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n P_i \cos \varphi_i = 0 \ , \quad (\text{ó} \sum_1^n P_i \operatorname{sen} \varphi_i = 0) \ , \\ &\sum_1^n M_i''' = 0 \ : \end{aligned}\right\} \qquad [2.15]$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n M_i^m &= 0 , \\ \sum_1^n M_i^n &= 0 . \end{aligned}\right\} \qquad [2.16]$$

2.2. Fuerzas no concurrentes en el plano.

2.2.1. Reducción de sistemas no concurrentes.

En la reducción de sistemas concurrentes analizada gráficamente en 2.1.1, nos limitábamos a construir el polígono de fuerzas, obteniendo así el vector representativo de la resultante del sistema. Como necesariamente ésta debía pasar por el punto de concurrencia, la recta de acción de la misma se obtenía trazando por este último una paralela al vector representativo de la resultante.

Tratándose de sistemas de fuerzas no concurrentes, el simple trazado del polígono de fuerzas no es suficiente para definir la resultante, por cuanto no se conoce ningún punto de su recta de acción.

Un primer procedimiento para hallar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes, consiste en determinar la resultante de dos cualesquiera de ellas por aplicación del principio del paralelogramo de fuerzas, deslizar dicha resultante parcial hasta el punto de intersección de su

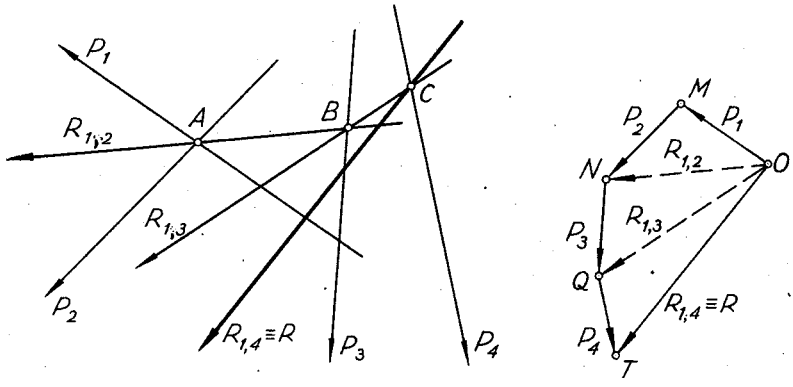


Fig. 2.17.

recta de acción con otra cualquiera de las fuerzas, componerla con la misma, y, procediendo en forma similar con las restantes fuerzas, llegar a obtener la resultante buscada. Sea, por ejemplo, el sistema P_1, P_2, P_3 y P_4 de la figura 2.17.

La resultante de P_1 y P_2 pasará por el punto de concurrencia A, de las mismas, y su dirección e intensidad estarán dadas en el polígono de fuerzas por su vector representativo $R_{1,2}$. La resultante de P_3 y $R_{1,2}$ pasará evidentemente por el punto B, en que ambas concurren, y su vector representativo en el polígono de fuerzas será $R_{1,3}$. Finalmente, componiendo esta última con P_4, la resultante, que a la vez será la resultante total del sistema, pasará por C, punto de concurrencia de $R_{1,3}$ y P_4, quedando definidas su intensidad y dirección por el vector $R_{1,4} \equiv R$.

Cuando se trata de sistemas constituidos por gran número de fuerzas, esta forma de operar resulta un tanto laboriosa. Salvo en casos especiales, la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes se efectúa mediante el trazado de un polígono funicular.

2.2.2. Polígono funicular.

Sea el sistema de fuerzas no concurrentes de la figura 2.18. Fijada una escala de fuerzas cualquiera, tracemos el polígono de fuerzas llevando, uno a continuación del otro, los vectores representativos de las

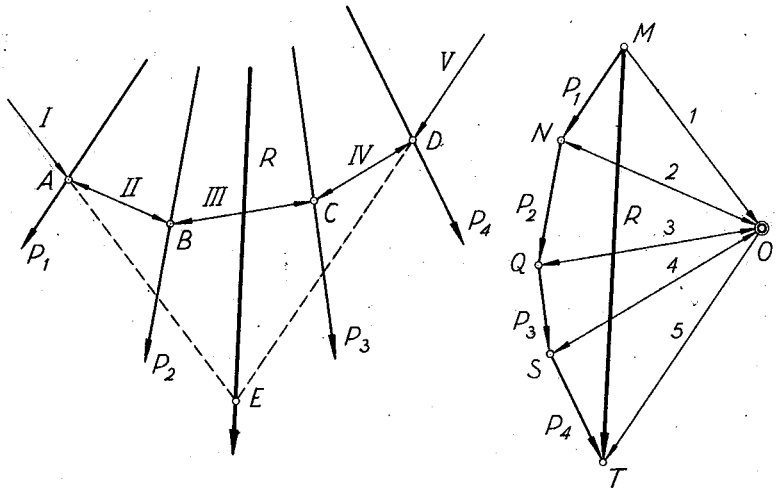


Fig. 2.18.

fuerzas $P_1 \ldots P_4$. Elegido un punto arbitrario O, que denominaremos polo del polígono funicular, proyectemos, desde el mismo, el origen y extremo de los vectores representativos de las fuerzas, obteniendo los segmentos $1 \ldots 5$, llamados *rayos polares*. Por un punto cualquiera del pla-

no, tracemos la paralela I al rayo polar *1*, hasta cortar en *A* la recta de acción de la fuerza P_1. Por dicho punto, tracemos una paralela II al rayo polar *2*, hasta cortar la recta de acción de la fuerza P_2 en *B*. En forma similar tracemos las sucesivas paralelas a los restantes rayos polares, hasta obtener la última paralela V al rayo polar *5*. La rectas I, II .. V, se denominan lados del polígono funicular y el conjunto, *polígono funicular* del sistema de fuerzas $P_1 \ldots P_4$. Prolongado el primero y último lados del polígono funicular, su intersección es un punto de la recta de acción de la resultante del sistema, la que queda completamente definida por cuanto su intensidad y dirección corresponden a las del vector representativo de la misma, *MT*, en el polígono de fuerzas.

Para demostrar lo anterior, consideremos en el polígono de fuerzas al triángulo *MNO*. En éste, podemos admitir a la fuerza P_1 como resultante de las fuerzas *MO* y *NO*, cuyas rectas de acción son los lados I y II del funicular, paralelos a las mismas y concurrentes en *A* con la recta de acción de P_1. Análogamente, P_2 puede considerarse como resultante de *NO* y *OQ*, cuyas rectas de acción son los lados II y III del polígono funicular, que concurren en *B* con la recta de acción de P_2 y, en forma similar, podemos considerar a P_3 y P_4 como resultantes, respectivamente de *QO* y *OS* la primera y de *SO* y *OT* la segunda, siendo las correspondientes rectas de acción, los lados III y IV del funicular para el primer sistema y IV y V para el segundo, concurrentes en *C* y *D* con las rectas de acción de sus respectivas resultantes P_3 y P_4. Luego, podemos reemplazar el sistema $P_1 \ldots P_4$ por uno equivalente cuyas rectas de acción son los lados I, II ... V del polígono funicular. Ahora bien, las fuerzas *NO* y *ON*, por ser opuestas, constituyen un sistema nulo, ocurriendo lo mismo con *OQ*, y *QO* y *OS* y *SO*, por lo que es posible eliminarlas del sistema sin que el efecto se altere. Se tiene así que el nuevo sistema, equivalente al dado, se reduce a dos fuerzas cuyas rectas de acción son los lados I y V del funicular, y sus intensidades y sentidos corresponden a los vectores *MO* y *OT* del polígono de fuerzas.

Al ser equivalentes ambos sistemas, tendrán la misma resultante que, evidentemente, pasará por el punto *E* de concurrencia de las fuerzas cuyas rectas de acción son los lados I y V del funicular, y su recta de acción será paralela al vector *MT*, representativo de la intensidad de la misma.

Para el trazado del polígono funicular de figura 2.18, el polo *O* y el punto de arranque fueron elegidos arbitrariamente. Si, manteniendo el mismo polo, hubiéramos partido de otro punto para el trazado del primer lado del funicular, habríamos llegado a un polígono paralelo y si, en cambio, hubiésemos cambiado de polo eligiendo otro punto para el trazado de los rayos polares, el polígono funicular resultaría deformado con respecto al primero. Sin embargo, en cualquier caso habríamos llegado a la misma

resultante, por cuanto para un mismo sistema plano de fuerzas, la resultante es única.

2.2.3. Propiedades de los polígonos funiculares.

De las consideraciones del último párrafo del apartado anterior, surge de inmediato una *primera propiedad* de los polígonos funiculares, cuyo enunciado es el siguiente:

Al deformar el polígono funicular de un mismo sistema de fuerzas, variando la posición del polo y del punto de arranque, el lugar geométrico de los puntos de intersección de los lados extremos es una recta que coincide con la recta de acción de la resultante del sistema. Si así no fuera, es decir, si el lugar geométrico de las intersecciones de los lados extremos no fuera una recta sino una curva cualquiera, como el vector representativo de la resultante en el polígono de fuerzas es siempre el mismo (fig. 2.18), y por quedar definida la recta de acción de la resultante por la paralela a este último vector trazada por el punto de intersección de los lados extremos del funicular, según lo hemos demostrado en 2:2.2., existirían tantas resultantes del sistema como puntos de intersección y, como de éstos existen infinitos, por ser infinito el número de polígonos funiculares de un mismo sistema de fuerzas, llegaríamos al absurdo de que un sistema plano de fuerzas admite infinitas resultantes.

La *segunda propiedad* de los polígonos funiculares dice que *los lados homólogos (o correspondientes) de dos polígonos funiculares cualesquiera de un mismo sistema plano de fuerzas, se cortan en puntos de una recta denominada eje polar, que es paralela a la recta determinada por los polos de los respectivos polígonos funiculares.*

Para demostrar lo anterior, consideremos el sistema de fuerzas de la figura 2.19 y, construido el polígono de las mismas, tracemos con polos arbitrarios O_1 y O_2 los respectivos polígonos funiculares I, II ... IV y I', II' ... IV'. Hallemos las intersecciones M y M' de los pares de lados homólogos I, I' y II, II' respectivamente. Estos dos puntos definen una recta $M\,M'$, que de acuerdo con el enunciado anterior constituye el *eje polar*.

Consideremos los cuadrivértices completos $M\,N\,M'\,N'$ y $A\,B\,O_1\,O_2$.

En los mismos, los lados $M\,N$, $M\,N'$, $M'\,N$, $M'\,N'$ y $N\,N'$ son respectivamente paralelos, por construcción, a los lados $A\,O_1$, $A\,O_2$, $B\,O_1$, $B\,O_2$ y $A\,B$. Estamos pues ante dos cuadrivértices completos que tienen cinco pares de lados paralelos y, en consecuencia, el sexto para $M\,M'$ y $O_1\,O_2$ también resultará paralelo. Es decir que los pares de lados homólogos I, I' y II, II' se cortan en puntos de una recta paralela a la recta definida por los polos. Considerando ahora el cuadrivértice completo $M'\,M''\,Q'\,Q$, podríamos

demostrar en la misma forma que el lado $M'M''$ es paralelo a O_1O_2, y como M' es común a los cuadrivértices $MM'NN'$ y $M'M''QQ'$, queda con ello demostrada la segunda propiedad de los polígonos funiculares.

Es fácil observar que, si el polo del segundo polígono funicular se ubica sobre o en la prolongación de cualquiera de los rayos polares del primer polígono funicular dicho rayo polar será común para ambos polígonos de fuerzas.

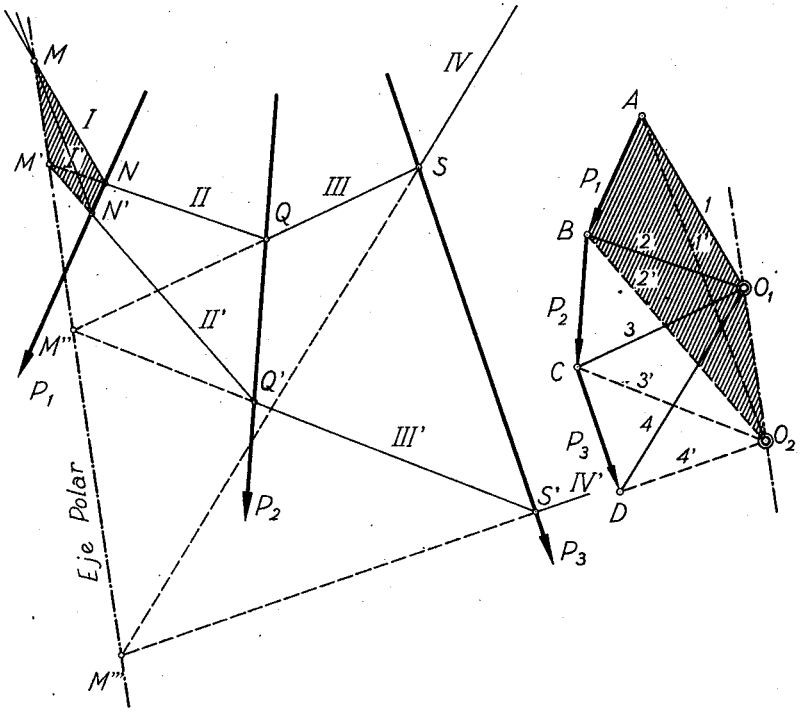


Fig. 2.19.

Como consecuencia tendremos, que en los dos polígonos funiculares resultarán paralelos entre sí los lados que correspondan a dicho rayo polar, y el eje polar también será paralelo a esos lados.

En el ejemplo de figura 2.20 a, el segundo polo O_2 que se ha ubicado sobre el segundo rayo polar, y trazado un segundo funicular con dicho polo, resultan paralelos entre sí los lados II y II'. El eje polar, también paralelo a estos lados, queda definido por las intersecciones M y T de otros dos pares de lados homólogos.

Como también es posible variar el punto de arranque del segundo polígono funicular, tendremos tantos polígonos funiculares (para el polo

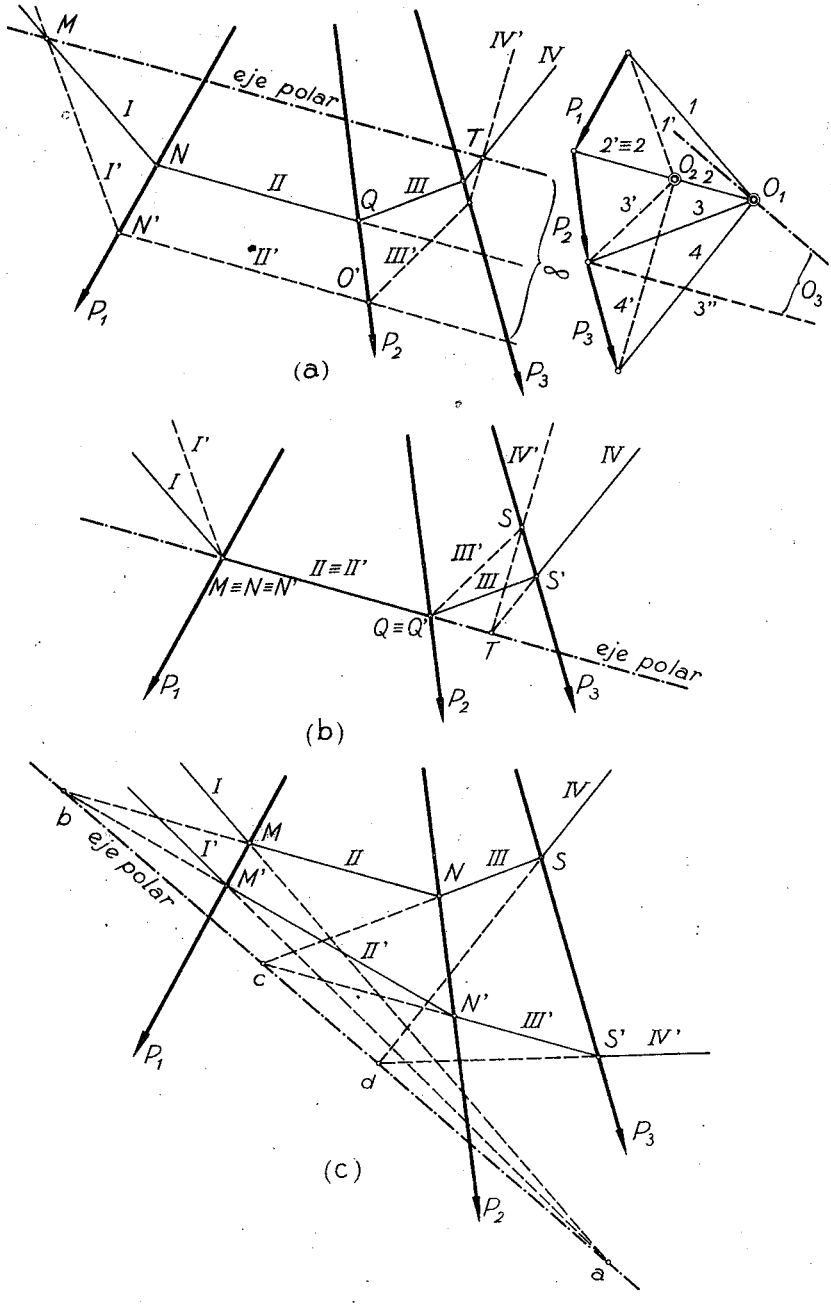

M
eje polar
I
I'
N
N'
II
II'
Q
O'
III
III'
IV'
IV
T
P1
P2
P3
(a)
1
1'
2'≡2
O2
2
O1
3'
3
4
4'
3"
O3
I'
I
II≡II'
M≡N≡N'
Q≡Q'
III'
III
S
S'
(b)
b
eje polar
c
d
a
(c)

Fig. 2.20.

O_2) como puntos de arranque consideremos, todos ellos paralelos entre sí. Y cada uno de estos funiculares nos determinarán, conjuntamente con el primer funicular, ejes polares, todos ellos paralelos entre sí, y paralelos a los lados II y II'. Es evidente que uno de estos ejes polares coincidirá con II, $\equiv$ II', tal como lo muestra la figura 2.20 b.

Procediendo a la inversa, dado un polígono funicular de un sistema de fuerzas, podemos trazar un segundo polígono funicular del mismo sistema sin necesidad de ubicar previamente su polo ni trazar los rayos polares. En la figura 2.20 c, para el mismo sistema de fuerzas analizado anteriormente y con el mismo polígono de fuerzas de polo O_1, hemos trazado el funicular I, II ... IV. Elegida arbitrariamente una recta como eje polar se determinan los puntos *a*, *b*, c y *d* en que las prolongaciones de los lados I ... IV del funicular cortan a dicho eje polar.

Trazando ahora el lado I' del nuevo funicular, el mismo debe necesariamente pasar por *a*, y cortar a la recta de acción de la fuerza P_1 en M'. Por dicho punto debe pasar el segundo lado del nuevo funicular, y como también debe cortarse sobre el eje polar con el lado II del primer funicular, dicho lado II' será la recta bM', que prolongada corta a la recta de acción de P_2 en N'. Por dicho punto pasa el tercer lado del segundo funicular, que por las mismas razones anteriores estará dado por la recta cN'. Mediante iguales consideraciones determinamos el cuarto y último lado del segundo funicular. Como se ve, no ha sido necesario conocer a priori la posición del polo del segundo funicular. Si quisiéramos determinarlo, bastaría trazar por O_1, en el polígono de fuerzas, una paralela al eje polar adoptado, y luego, paralelamente a uno cualquiera de los lados del nuevo funicular, el correspondiente rayo polar (en el ejemplo el rayo 3''). La intersección de ambas partes define el polo buscado.

En determinados casos, se requiere que el polígono funicular de un cierto sistema de fuerzas, pase por dos puntos determinados del plano. Este problema puede resolverse utilizando precisamente la segunda propiedad de los polígonos funiculares. Sea por ejemplo el sistema $P_1 \ldots P_4$ de figura 2.21, y se pide trazar un polígono funicular del mismo cuyo primer lado pase por el punto *A* y cuyo cuarto lado pase por el punto *B*.

Con polo arbitrario *O* trazamos un primer polígono funicular, haciendo pasar el lado I por el punto *A*. En general, el cuarto lado no pasará por *B*. Si ello ocurriera, de hecho el problema estaría resuelto. Elegimos como eje polar una recta coincidente con el lado I del primer funicular, y, en consecuencia, el primer lado del funicular buscado coincidirá con dicha recta. Además, sobre la misma se deben cortar los lados del funicular trazado, con los correspondientes del funicular buscado. Prolongado el lado IV hasta cortar al eje polar en *K*, y uniendo este punto con el *B*, dicha recta constituye el lado IV' del funicular que cumple las condiciones impuestas, es decir, que su primer y cuarto lados pasen por *A* y *B* respec-

tivamente. Para completar el trazado tenemos dos caminos a seguir: o bien determinamos el polo O' y los correspondientes rayos polares 1', 2' etc. en la forma conocida, o sino, prescindimos de la determinación de O' y utilizamos la propiedad segunda del polígono funicular. En figura 2.21, el trazado del funicular pedido se ha realizado utilizando ambas soluciones.

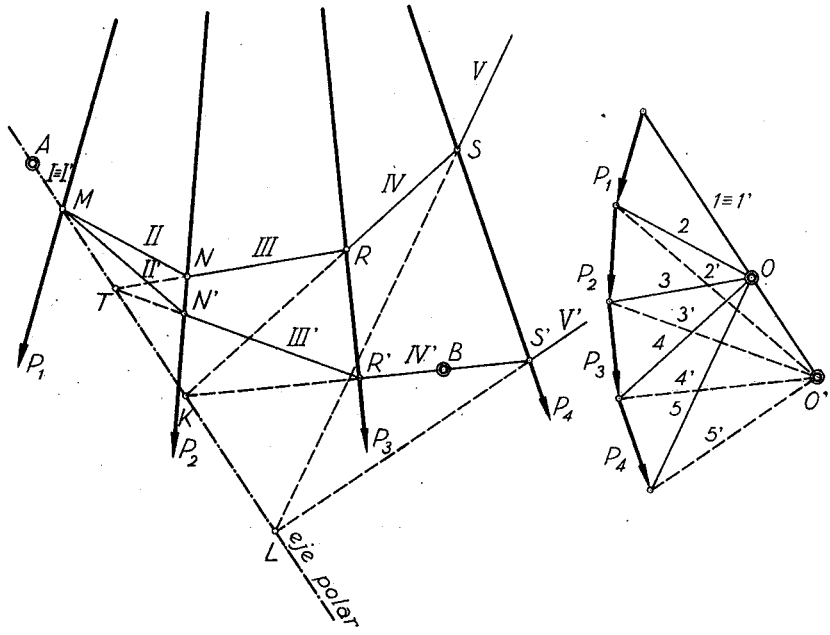


Fig. 2.21.

Es posible, sin embargo, trazar un polígono funicular que pase por dos puntos establecidos, sin recurrir al eje polar. Sea por ejemplo el sistema de fuerzas de figura 2.22, en el que se desea trazar un polígono funicular cuyos lados extremos (primero y último) pasen por los puntos A y B respectivamente. Para resolver el problema, trazamos con polo arbitrario O un polígono funicular cualquiera del sistema de fuerzas, y determinamos su resultante R, en la forma conocida.

Dos rectas cualesquiera que se corten en un punto de la recta de acción de R pueden considerarse como lados extremos de un polígono funicular del sistema. En consecuencia, trazando por A y B dos rectas rectas cualesquiera que se corten en M', por ejemplo, las mismas serán los lados extremos de un polígono funicular del sistema, dado que cumplen la condición impuesta. Trazando ahora por el origen y extremo del vector representativo de la resultante, en el polígono de fuerzas, paralelas a las

rectas concurrentes en M' que pasan por A y B, en su intersección tendremos el polo O' del funicular buscado, que se completa en la forma conocida.

Al resolver el problema anterior, hemos trazado por A y B, dos rectas arbitrarias, imponiéndoles la sola condición de que se corten sobre la recta de acción de la resultante. Existen infinitos pares de rectas que pasando

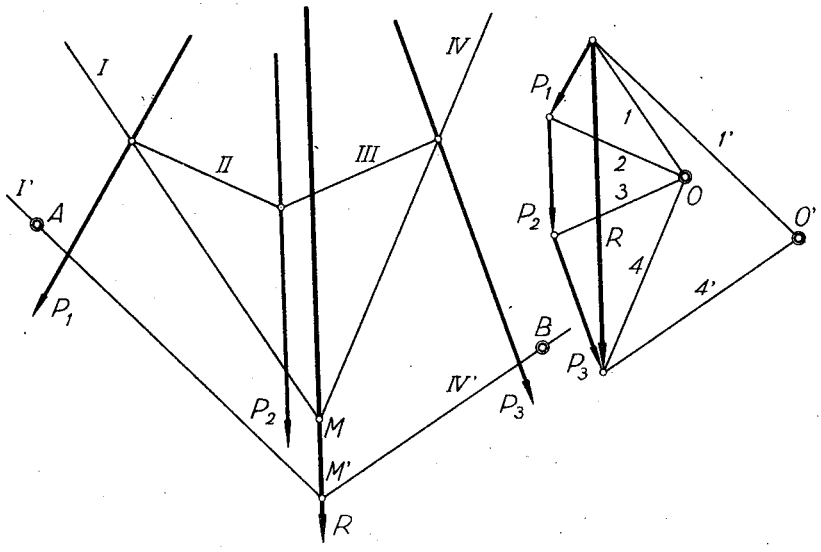


Fig. 2.22.

por A y B cumplen con dicha condición y, como cada par de ellas conduce a un polígono funicular distinto, deducimos que, para un mismo sistema de fuerzas, existen infinitos polígonos funiculares que pasen por dos puntos dados.

La tercera propiedad de los polígonos funiculares, se refiere precisamente a los polos de estos infinitos polígonos funiculares que pasan por dos puntos dados, y su enunciado dice: *el lugar geométrico de los polos de los infinitos polígonos funiculares de un mismo sistema de fuerzas que pasan por dos puntos dados, es una recta que, pasando por el polo de uno cualquiera de ellos, es paralela a la recta determinada por los dos puntos.*

Para demostrarlo, consideremos el sistema de figura 2.23 y los puntos A y B, coplanares con el mismo. Utilizando cualquiera de los procedimientos explicados en párrafos anteriores, trazamos un polígono funicular que pase por A y B, cuyo polo será el punto O'. Ubicada la resultante R del sistema, tracemos por A y B dos rectas cualesquiera que se corten sobre la resultante en el punto U, y, en el polígono de fuerzas, dos para-

lelas a las mismas por los puntos M y S respectivamente. Estas dos últimas determinan el punto O''. Uniendo A con B y O con O'', quedan formados los cuadrivértices completos $AUBT$ y $MO'SO''$, que tienen cinco pares de lados paralelos, por construcción, a saber:

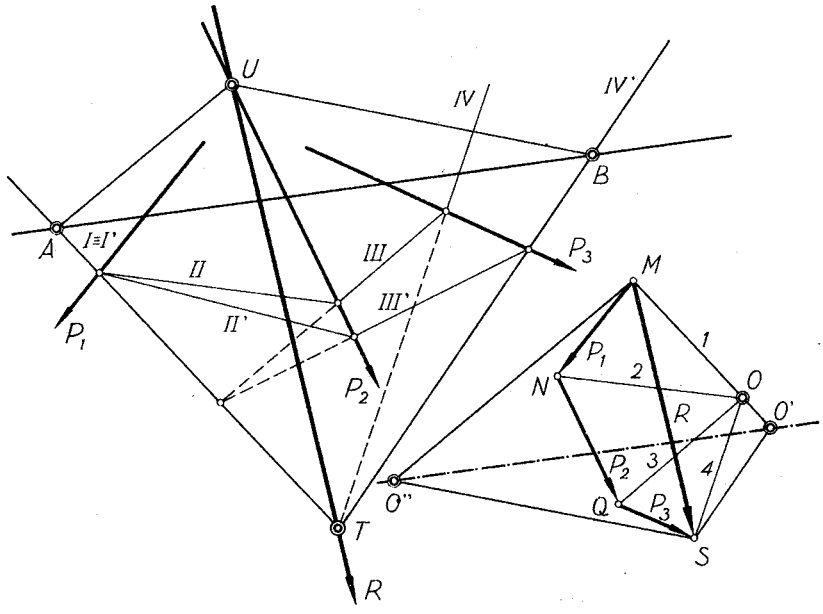


Fig. 2.23.

$$AT \;/\!/\; MO'$$
$$BT \;/\!/\; O'S$$
$$AU \;/\!/\; O''M$$
$$BU \;/\!/\; O''S$$
$$UT \;/\!/\; MS$$

En consecuencia, el sexto par también será paralelo, es decir $O'O'' \;/\!/\; AB$.

Ahora bien, los lados AU y BU, por cortarse sobre la resultante del sistema y por ser paralelos a MO'' y SO'' del polígono de fuerzas, pueden ser considerados como lados extremos de un polígono funicular que pasa por A y B y cuyo polo es O'', ubicado sobre la recta $O'O''$, que por lo que acabamos de ver, es paralela a la recta AB. Dado que tanto O' como O'' son polos de funiculares que pasan por A y B y siendo U un punto cualquiera de la recta de acción de la resultante, cualquier otro punto

que hubiéramos elegido sobre dicha recta de acción nos habría conducido a dos lados extremos de un funicular pasante por A y B cuyo polo estaría ubicado sobre la recta $O'O''$, quedando así demostrada la tercera propiedad de los polígonos funiculares.

Hemos visto que por dos puntos dados pasan infinitos polígonos funiculares de un mismo sistema de fuerzas. Cuando uno de los puntos de pasaje impuestos es impropio (definido por una direccción), la determi-

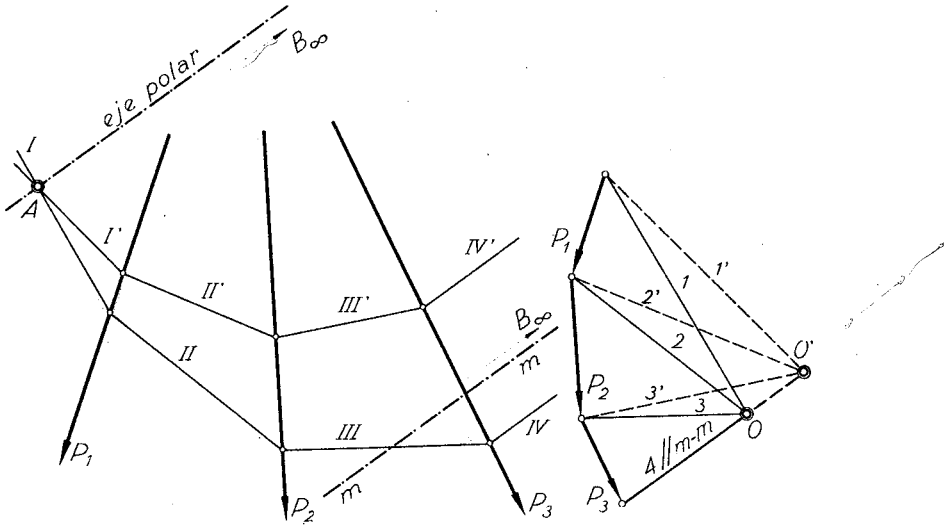


Fig. 2.24.

nación del polo de uno cualquiera de los funiculares que cumplen la condición impuesta se simplifica enormemente. En efecto, sea el sistema de fuerzas de figura 2.24, y se pide trazar un polígono funicular cuyo primer lado pase por el punto A y el último por el punto impropio de la recta m–m, B_∞.

Si el último lado del funicular ha de pasar por el punto impropio de m–m, necesariamente debe ser paralelo a dicha recta, y también lo será el cuarto rayo polar. Construido el polígono de fuerzas, por el extremo del vector representativo de P_3 trazamos una paralela a m–m y, sobre la misma elegimos un punto cualquiera O que adoptamos como polo del funicular. Una vez trazados los restantes rayos polares comenzamos la construcción del polígono funicular haciendo pasar el primer lado por A. El último lado pasará por el punto impropio B_∞, porque al ser paralelo al cuarto rayo polar, también lo será z, a la recta m–m. Cualquier otro punto

que hubiéramos elegido como polo, siempre que estuviese ubicado sobre el cuarto rayo polar, conduciría a un funicular que cumple con las condiciones impuestas. En efecto, por la tercera propiedad de los polígonos funiculares, el lugar geométrico de los polos de los funiculares que pasan por dos puntos dados, es una recta paralela a la recta definida por estos últimos, y que pasa por uno de los polos, recta que, en el caso analizado, coincide con el cuarto rayo polar por cuanto el eje polar también es paralelo a la recta m–m por ser B_∞ impropio.

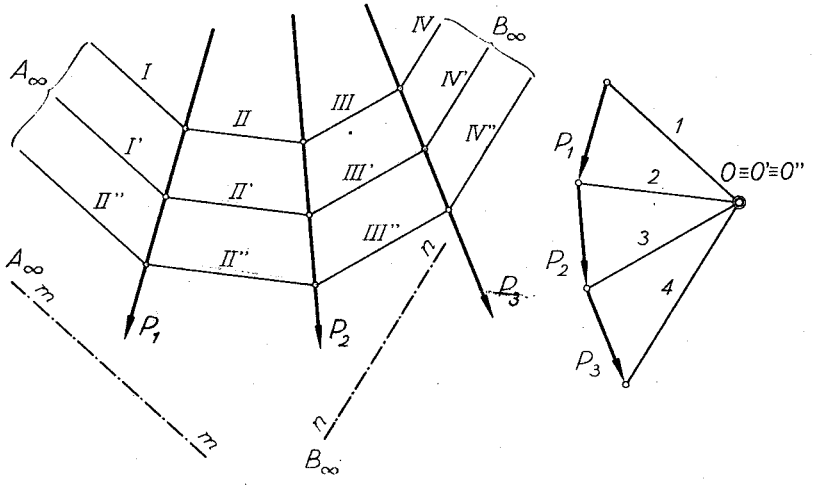


Fig. 2.25.

Un caso particular se presenta cuando los dos puntos por donde debe pasar el funicular son impropios. En el sistema de figura 2.25 la condición impuesta es que los lados I y IV pasen por los puntos A_∞ y B_∞, impropios de las direcciones m–m y n–n respectivamente. Trazado el correspondiente polígono de fuerza, es evidente que en éste los rayos polares 1 y 4 deben ser paralelos a las direcciones m–m y n–n respectivamente, y en la intersección de ellos tendremos el polo de *todos* los polígonos funiculares del sistema dado que pasan por A_∞ y B_∞. En efecto, cualquiera sea el punto de arranque, el primer lado del funicular, por ser paralelo al primer rayo polar, también resultará paralelo a m–m, y en consecuencia pasará por A_∞, ocurriendo lo mismo con el último lado, que pasará por B_∞. En este caso los infinitos polígonos funiculares resultarán paralelos entre sí, el polo será único y el eje polar será la recta impropia del plano.

2.2.4. Polígono funicular que pasa por tres puntos dados del plano.

Para un mismo sistema plano de fuerzas, existe un único polígono funicular que cumple la condición de pasar por tres puntos dados. Sea el sistema de fuerzas de figura 2.26 y se pide trazar un polígono funicular

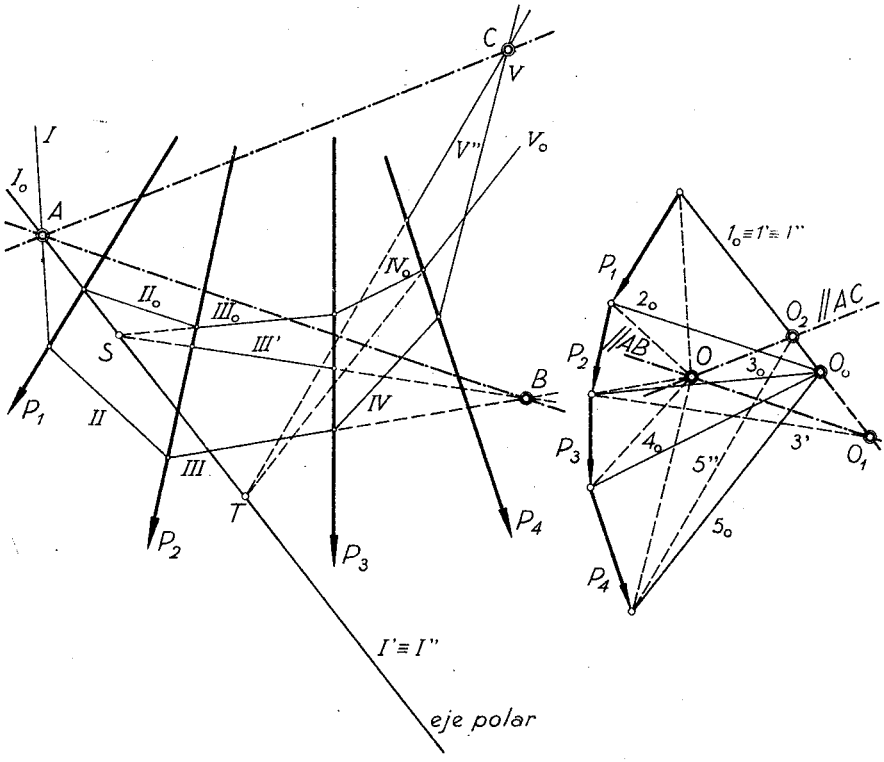


Fig. 2.26.

del mismo cuyos primero, tercero y quinto lados pasen respectivamente por los puntos *A*, *B*, y *C*.

Para resolver el problema trazamos primeramente con polo O_0 arbitrario, un polígono funicular cualquiera I_0, II_0, ... V_0 haciendo pasar su primer lado por *A*. Salvo coincidencia, los lados tercero y quinto no pasarán ni por *B* ni por *C*. Adoptando el lado I_0 como eje polar, determinamos el punto *S* en que el lado III_0 corta al mismo, y uniendo dicho punto con el punto *B*, obtendremos el tercer lado de un polígono funicular que pase por *A* y *B*. Salvo coincidencia, la tercera condición no se cumplirá. El polo O_1 del funicular así obtenido será el punto de in-

tersección del primer rayo polar (paralelo al eje polar) con la paralela al al lado III' trazado por el extremo del vector representativo de P_2. Y el lugar de los polos de los infinitos polígonos funiculares del sistema dado que pasan por A y B, será una recta trazada por O_1 y paralela a la recta AB. De entre esos infinitos polígonos funiculares, habrá uno que, además, pasa por C, y que será la solución buscada. Para determinarlo, tracemos ahora un polígono funicular cuyo primer lado pase por A y el quinto por C, utilizando el mismo eje polar. Por construcción el primer lado del funicular trazado ya cumple con una de las condiciones. Hallada la intersección del lado V_0 con el eje polar (punto T), uniendo este punto con el C, la recta así determinada es el quinto lado (V'') de un funicular que pasa por A y C, cuyo polo O_2 lo obtenemos en la intersección del primer rayo polar con una paralela al lado V'' trazada por el extremo del vector representativo de P_4. Y el lugar de los polos de los infinitos funiculares que cumplen la condición de que sus primer y quinto lados pasen respectivamente por A y C será una recta paralela a la AC trazada por O_2. De estos infinitos polígonos funiculares habrá uno que, además de pasar por A y C, lo hará por B y el polo O de dicho polígono funicular será precisamente la intersección de las paralelas a AB y AC trazadas por O_1 y O_2 respectivamente. Ubicado el polo O y completados los rayos polares, trazamos el funicular buscado de lados I, II ... ... V, que constituye la solución del problema.

El trazado de un polígono funicular que pase por tres puntos dados puede realizarse sin recurrir a los ejes polares, utilizando resultantes parciales. En el sistema de la figura 2.27, donde se pide trazar un funicular cuyos lados I, III y V pasen por A, B y C respectivamente, se han determinado las resultantes parciales $R_{1.2}$ y $R_{3.4}$ de los grupos de fuerzas comprendidos entre los lados del funicular a los que se les ha impuesto condiciones, es decir I-III y III-V.

Trazadas por A y B dos rectas cualesquiera que se corten en un punto S de la recta de acción de la resultante $R_{1,2}$, las mismas pueden considerarse como lados extremos de un funicular de P_1 y P_2, que pasa por A y B, y cuyo polo será el punto O_1 de intersección de los rayos polares paralelos a los mismos, trazados por el origen de P_1 y extremo de P_2 respectivamente, en el polígono de fuerzas. El lugar de los polos de los infinitos funiculares que cumplen la condición de pasar por A y B será una recta paralela a la AB trazada por O_1, y uno de dichos polos conducirá a un funicular que cumple la condición de pasar también por C. Repitiendo el procedimiento con $R_{3,4}$, obtenemos un polo O_2 de un funicular que pase por B y C, y el lugar geométrico de los polos de los infinitos funiculares que pasan por B y C será la paralela a BC traza-

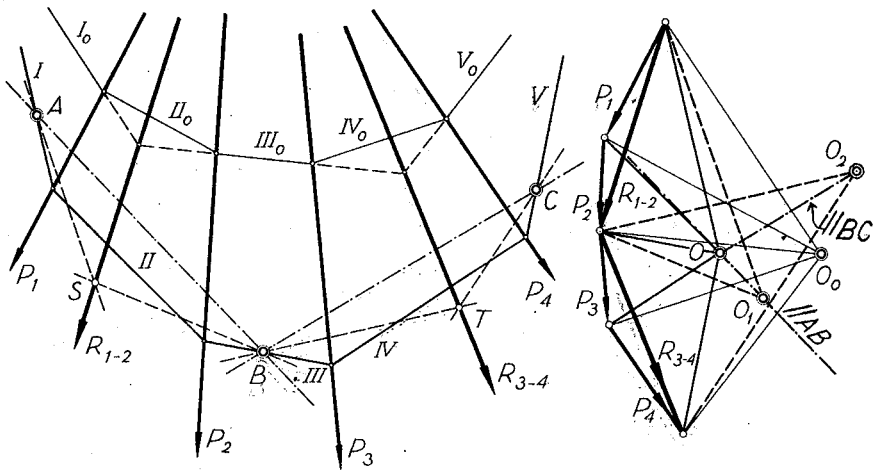


Fig. 2.27.

dada por O_2. Finalmente el polo O buscado estará en la intersección de las paralelas a AB y BC trazadas por O_1 y O_2 respectivamente.

En el trazado de funiculares por tres puntos prefijados pueden presentarse tres casos particulares: que uno, dos o los tres puntos sean impropios.

Si por ejemplo, en el sistema de figura 2.28 se requiere el trazado de un polígono funicular que pase por A, B y C_∞, se procede en forma similar al caso en que los tres puntos son propios, determinando primeramente un polígono funicular que pase por A y B, sea mediante ejes polares o bien utilizando resultante parciales. Determinado el lugar de los polos de los infinitos funiculares que pasan por A y B, es decir la paralela a AB trazada por O_1, como el último lado debe pasar por C_∞ debe resultar paralelo a la recta m–m que define la dirección de este último punto. Trazando por el extremo del vector representativo de P_4 un rayo polar paralelo a m–m, su intersección con la paralela a AB trazada por O_1, determina el polo O buscado.

En el caso de figura 2.29, en que se pide que los lados III y V del funicular pasen respectivamente por los puntos B_∞ y C_∞, el problema se resuelve de la manera siguiente. Como los lados III y V deben ser paralelos a las direcciones m–m y n–n respectivamente, también lo serán los correspondientes rayos polares. En consecuencia, trazando en el polígono de fuerzas una paralela a m–m por el origen del vector representativo de P_3 y otra a n–n por el extremo del representativo de P_4, su intersección nos determina el polo O buscado. En efecto, una vez completado los rayos polares de polo O, si comenzamos el trazado haciendo pasar el pri-

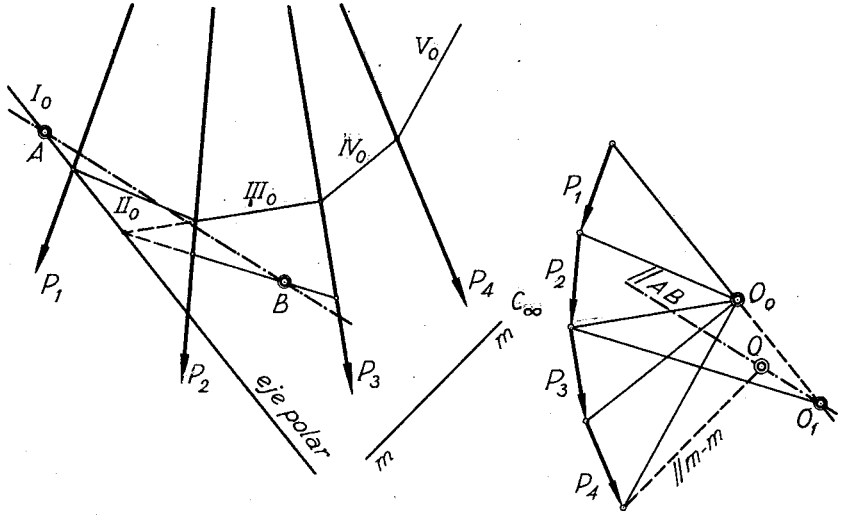


Fig. 2.28.

mer lado por *A*, de hecho los lados III y V cumplirán las restantes condiciones impuestas la polígono funicular.

Finalmente, si los tres puntos por donde debe pasar el polígono funicular son impropios, el problema sólo tiene solución si los rayos polares paralelos a las direcciones que definen los puntos impropios concurren a un mismo punto, que en tal caso será el polo del funicular buscado.

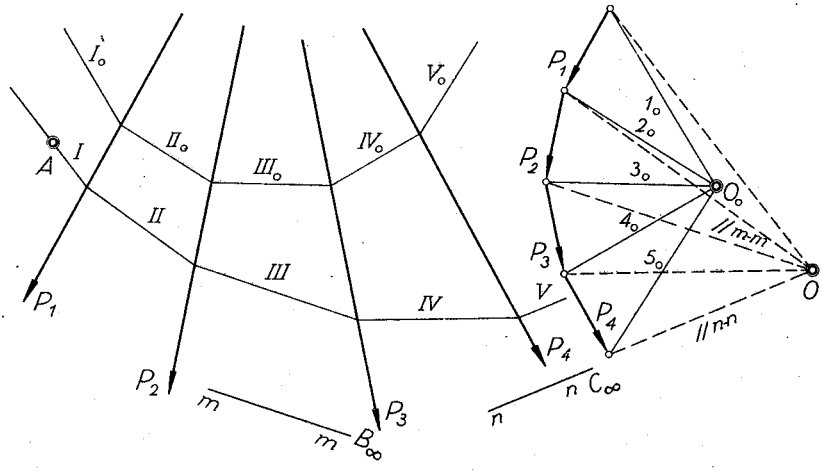


Fig. 2.29.

Construido el polígono de fuerzas correspondiente al sistema de figura 2.30, al que se le impone la condición de que sus lados I, III y V pasen, respectivamente por los puntos A_∞, B_∞ y C_∞, las paralelas a m–m y n–n, trazadas por el origen de P_1 y el extremo de P_2 en el polígono de

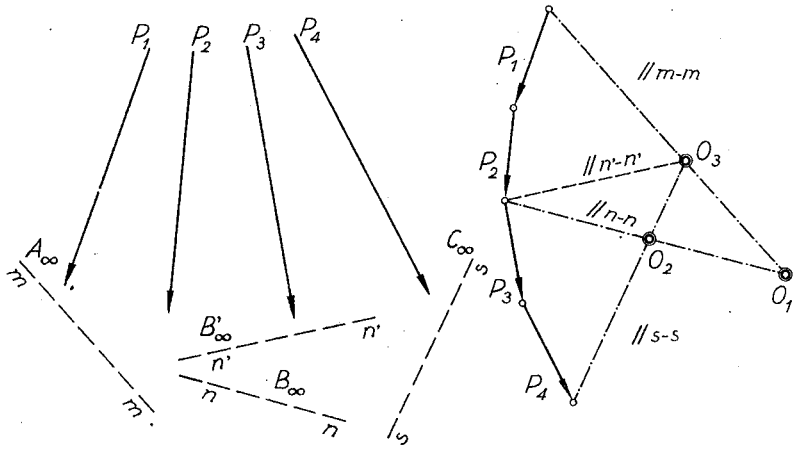


Fig. 2.30.

fuerzas, definen un polo O_1 correspondiente a un funicular que pasará por A_∞ y B_∞ pero no por C_∞, por cuanto el quinto rayo polar no resulta paralelo a s–s. Análogamente, las paralelas a n–n y s–s, trazadas por el origen y extremo de P_3 y P_4, determinan un segundo polo O_2, correspondiente a un funicular que pasará por B_∞ y C_∞, pero no por A_∞ por cuanto, el rayo primer polar correspondiente a este polo no resulta paralelo a la dirección m–m. Finalmente, operando en forma semejante con las paralelas m–m y s–s trazadas por el origen y extremo de P_1 y P_4 respectivamente, obtenemos un tercer polo O_3 que define un funicular que pasará por A_∞ y C_∞, pero no por B_∞, por análogas razones. Surge de inmediato que el problema tendrá solución, solamente si los tres polos coinciden en un único punto, que será el polo del funicular buscado. Tal situación se presentará cuando las paralelas a las direcciones dadas, trazadas en el polígono de fuerzas por donde corresponda en cada caso, sean concurrentes, lo que se verifica en figura 2.30 si se establece que el lado III' del funicular debe pasar por B'_∞ impropio de la dirección n'–n'.

De lo expuesto surge que un polígono funicular queda definido cuando se le impone el cumplimiento de tres condiciones, tales como obligar a tres de sus lados a pasar por puntos determinados. Es evidente que dos de dichas condiciones pueden ser impuestas a un mismo lado, pero no las tres.

Si consideramos el caso de un sistema de fuerzas simétrico respecto de un eje, tal como el de la figura 2.31 en que el eje de simetría es el y–y, dicho sistema conducirá a un polígono de fuerzas que también tendrá un eje de simetría, el z-z, normal al y–y. Si elegimos como polo un punto

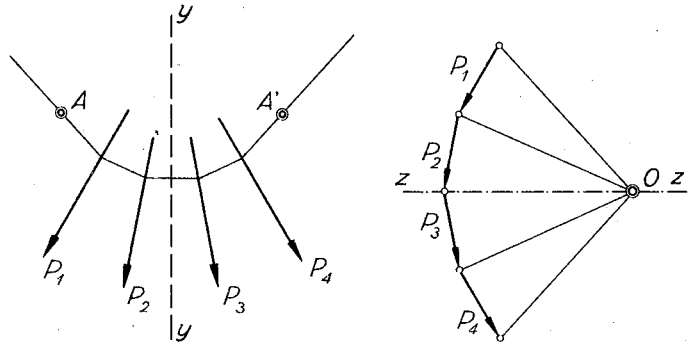


Fig. 2.31.

ubicado sobre el eje de simetría del polígono de fuerzas, ello equivale a imponer dos condiciones al funicular. En efecto, de hecho el polígono funicular resultará simétrico respecto del eje y–y, de modo que si lo hacemos pasar por un punto determinado, el A, por ejemplo, por razones de simetría deberá pasar por su simétrico A'. La tercera condición establece la ubicación del polo sobre el eje z–z.

2.2.5. Aplicación del polígono funicular a la determinación gráfica del momento de una fuerza con respecto a un punto.

La determinación del momento de una fuerza con respecto a un punto, puede efectuarse en forma gráfica, utilizando el polígono funicular, como veremos a continuación.

Sean la fuerza P y el punto A que dista d(m) de la recta de acción de P (fig. 2.32), y se pide hallar gráficamente el momento de P respecto de A. Supongamos que la escala del dibujo sea α m/cm, y, adoptando una escala de fuerzas β kg/cm, construyamos el vector representativo de la fuerza P. Con polo O tracemos un polígono funicular de P y prolonguemos sus dos únicos lados hasta cortar una recta paralela a P trazada por A. Llamemos δ (cm) el segmento intersecado por esta última recta con los lados extremos del funcular. Trazando ahora por O, polo funicular, una normal al vector representativo de P, la distancia OH, se denomina *distancia polar*, la que en lo sucesivo designaremos h.

Demostraremos a continuación que el momento de P con respecto a A, está dado por el producto del segmento δ, leído en la escala de longitudes, por la distancia h, leída en la escala de fuerzas.

Por construcción, los triángulos MQV y OST son semejantes, y en consecuencia se tiene

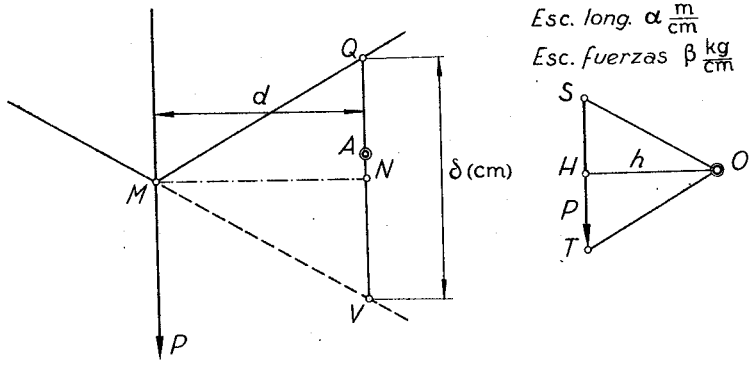


Fig. 2.32.

$$\frac{MN}{QV} = \frac{OH}{ST}, \qquad [2.17]$$

pero $OH = h$ y $QV = \delta$ y, por otra parte

$$MN = \frac{d}{\text{Esc. Long}} \quad \text{y} \quad ST = \frac{P}{\text{Esc. Fuerz.}}. \qquad [2.18]$$

Luego, reemplazando en [2.17] y transponiendo términos resulta

$$Pd = \delta.\text{h. Esc. Long.} \times \text{Esc. Fuerz.} \qquad [2.19]$$

pero $Pd = M$, y en consecuencia

$$M = \delta(\text{cm}).h(\text{cm}).\alpha \text{ m/cm}.\beta \text{ kg/cm}. \qquad [2.20]$$

Esta expresión también puede interpretarse diciendo que el momento M está dado por el producto del segmento δ leído en la escala de longitudes por la distancia polar leída en la escala de fuerzas. De ello deducimos que la distancia polar no es una longitud sino una fuerza. El producto de h por ambas escalas se denomina también *escala de momentos*.

En este caso el momento de P respecto de A estará dado directamente por δ(cm) leído en esta última escala.

La construcción gráfica anterior es aplicable cuando se trata de determinar el momento respecto de un punto cualquiera de un sistema de varias fuerzas. En efecto, construido el polígono funicular del mismo, con polo O, y ubicada la resultante, (fig. 2.33), se prolongan los lados extremos y por el centro de momentos M se traza una paralela a dicha resultante. El segmento δ determinado sobre la misma por los lados extremos del funicular, leído en la escala de momentos, nos da el momento buscado. Al determinar la escala de momentos, la distancia polar a considerar, h, es la distancia normal del polo al vector representativo de R.

El mismo funicular nos permite también determinar el momento de parte de las fuerzas constituyentes del sistema, con respecto a cualquier punto. Así en la figura 2.33, hemos determinado el momento respecto de M de las fuerzas P_1 y P_2, trazando por dicho punto una paralela a la resultante $R_{1,2}$ de estas últimas, que determina, en su intersección con la prolongación de los lados I y III del funicular, el segmento δ_1 que, leído en la correspondiente escala de momentos, nos da el valor buscado. En la nueva escala de momentos, la distancia polar a considerar será h_1, medida normalmente desde el polo O al vector representativo de la resultante $R_{1,2}$.

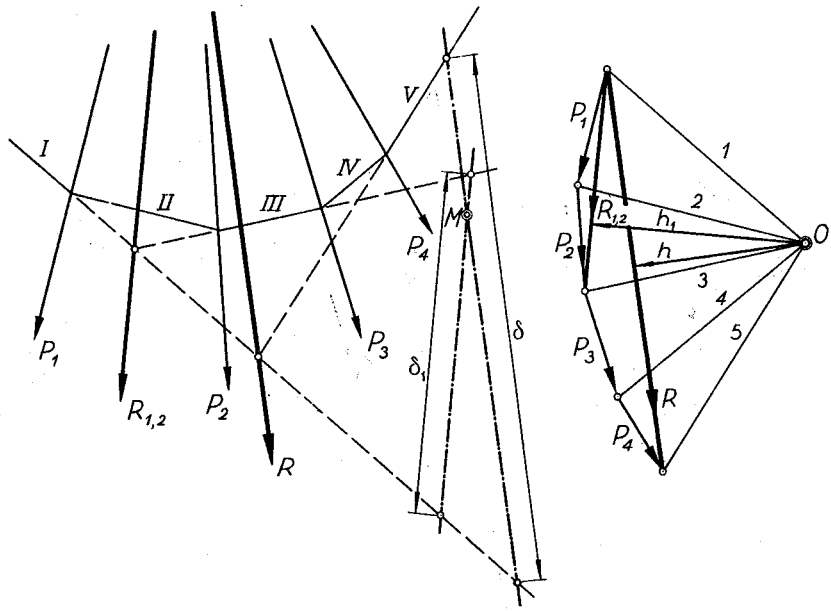


Fig. 2.33.

2.2.6. Pares de fuerzas.

Al trazar el polígono funicular de un sistema de fuerzas puede suceder que en el correspondiente polígono de fuerzas, el extremo del vector represntativo de la última fuerza coincida con el origen del de la primera, como en el caso de la figura 2.34. Si ello ocurre, evidentemente, el vector representativo de la resultante será nulo y, además, el primero y último rayo polar también coincidirán, por lo que el primero y último lados del polígono funicular resultarán paralelos.

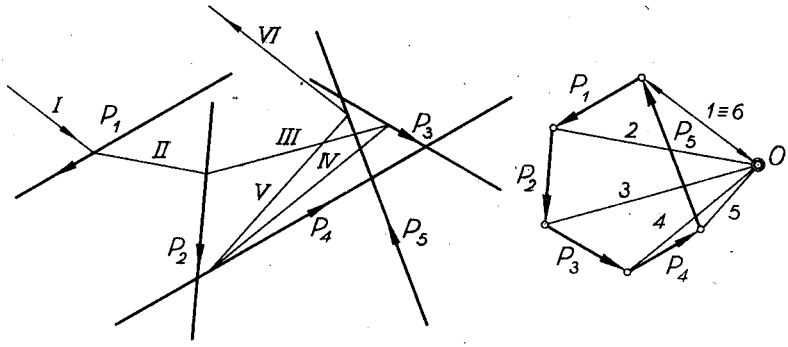


Fig. 2.34.

En el parágrafo 2.2.2, cuando justificamos la construcción del polígono funicular, vimos que es posible reemplazar el sistema dado por otro equivalente, constituido por dos únicas fuerzas, cuyas rectas de acción son precisamente, los lados extremos del polígono funicular y, cuyas intensidades y sentidos están dados por el primero y último rayos polares, leídos en la escala de fuerzas.

En el caso que estamos analizando, los lados extremos del funicular son paralelos por ser coincidentes los correspondientes rayos polares. Estos últimos, interpretados como vectores representativos de fuerzas, tienen signos contrarios, por lo que el sistema equivalente al dado estará constituido por dos fuerzas de igual intensidad, sentido contrario y rectas de acción paralelas, es decir, un par de fuerzas. Existe otra forma de justificar lo anterior, y es la siguiente: el polígono funicular nos da, en la intersección de sus lados extremos, un punto de la recta de acción de la resultante del sistema considerado y, por otra parte, el correspondiente polígono de fuerzas nos determina el vector representativo de la misma. Si el polígono de fuerzas es cerrado, la intensidad de la resultante será nula y si, al mismo tiempo, los lados extremos del funicular resultan paralelos, se cortarán en el punto impropio de su dirección común. Tendremos así

que el sistema se ha reducido a una fuerza de intensidad nula y cuya recta de acción es la recta impropia del plano, es decir, a un par de fuerzas conforme a la interpretación de este último elemento que hemos dado en 1.

2.2.7. Equilibrio de sistemas no concurrentes.

En el parágrafo anterior nos hemos ocupado de los sistemas cuyo polígono de fuerzas es cerrado y cuyo polígono funicular resulta abierto. Si en el caso de figura 2.34, al trazar el polígono funicular, el primero y último lados hubiesen coincidido, evidentemente el sistema se habría reducido a dos fuerzas opuestas, constituyendo un sistema nulo, es decir, en equilibrio. Ello nos permite enunciar la siguiente condición gráfica para el equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano:

Es condición necesaria y suficiente para que un sistema plano de fuerzas no concurrentes se encuentre en equilibrio, que tanto el polígono de fuerzas como el polígono funicular, resulten cerrados.

La condición es necesaria, porque de ser abierto uno de los polígonos y cerrado el otro, el sistema se reduciría a un par o bien a una resultante, y es suficiente, porque de ser cerrados ambos polígonos, el sistema equivalente es nulo, es decir habrá equilibrio.

2.2.8. Casos particulares de polígonos funiculares.

En los parágrafos anteriores hemos analizado tres casos posibles en lo que se refiere a polígonos funiculares y de fuerzas:

a) polígono funicular abierto y polígono de fuerzas abierto.

b) polígono funicular abierto y polígono de fuerzas cerrado.

c) polígono funicular cerrado y polígono de fuerzas cerrado.

En el primer caso, el sistema se reducía a una resultante; en el segundo a un par de fuerzas y en el tercero, el sistema se encontraba en equilibrio.

Existe, sin embargo, una cuarta posibilidad: que en el polígono funicular el primero y último lados coincidan y el polígono de fuerzas sea abierto (fig. 2.35 a). Constituye, en realidad, un caso especial del *a*), y ocurre si el polo se elige sobre la recta determinada por el origen del vector representativo de la primera fuerza y el extremo del de la última. En este caso el sistema se reduce a una única resultante cuya recta de acción coincide con los lados extremos del funicular y cuya intensidad está dada por la diferencia de las intensidades de las fuerzas que tienen por rectas

de acción dichos lados extremos. En general, al elegir el polo en la forma indicada, los lados extremos del funicular suelen no coincidir, reduciéndose entonces a dos fuerzas paralelas (fig. 2.35 b) que es necesario componer para obtener la resultante del sistema. Como resulta mucho más simple

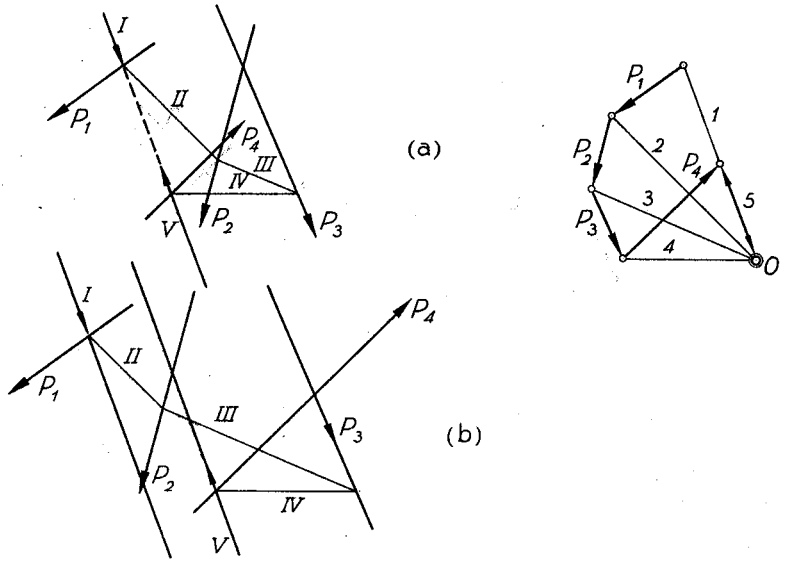


Fig. 2.35.

determinar la resultante mediante un funicular en la forma corriente, salvo casos especiales conviene siempre elegir como polo un punto que no se encuentre en las condiciones indicadas al principio.

2.2.9. Determinación analítica de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes

Sea el sistema de fuerzas no concurrentes de la figura 2.36, del que se pide hallar la resultante R. Consideremos un punto cualquiera A. Conforme a lo establecido en 1.12., el sistema dado será equivalente a otro constituido por fuerzas P'_1, P'_2 y P'_3 iguales a las P_1, P_2 y P_3 en dirección y sentido pero aplicadas en A y a un sistema de pares M_1, M_2 y M_3, cuyos momentos sean iguales a los productos $P_1 \cdot d_1$, $P_2 \cdot d_2$ y $P_3 \cdot d_3$ respectivamente, siendo d_1, d_2 y d_3 las correspondientes distancias de las rectas de acción de las fuerzas al punto A elegido. El sistema de fuerzas P' concurrentes en A, admite una resultante, cuyas proyecciones sobre ambos ejes coordenados tienen la expresión

$$\left.\begin{aligned} R' &= R.\cos\,\varphi_R = \sum_1^n P_i \cos\,\varphi_i \\ R' &= R.\text{sen}\,\varphi_R = \sum_1^n P_i \,\text{sen}\,\varphi_i \end{aligned}\right\} \qquad [2.21]$$

y cuya intensidad es

$$R' = \sqrt{R'_z{}^2 + R'_y{}^2} \qquad [2.22]$$

quedando definidos su dirección y sentido por

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,\varphi_R &= \frac{R'_y}{|R'|} \\ \cos\,\varphi_R &= \frac{R'_z}{|R'|} \end{aligned}\right\} \qquad [2.23]$$

Por otra parte, siendo los pares M_1, M_2 y M_3 coplanares, su suma algebraica nos dará el par resultante M, conforme al teorema de Varignon. Es decir, que hemos reducido el sistema primitivo a una fuerza R' aplicada en A y un par de momento M. Pero, de acuerdo con 1.12., este sistema es equivalente a una única fuerza $R \equiv R'$ ubicada a una distancia de A, que llamaremos d, tal que cumpla la condición $R.d = M$. Dicha fuerza será la resultante del sistema de fuerzas dado, y es indepen-

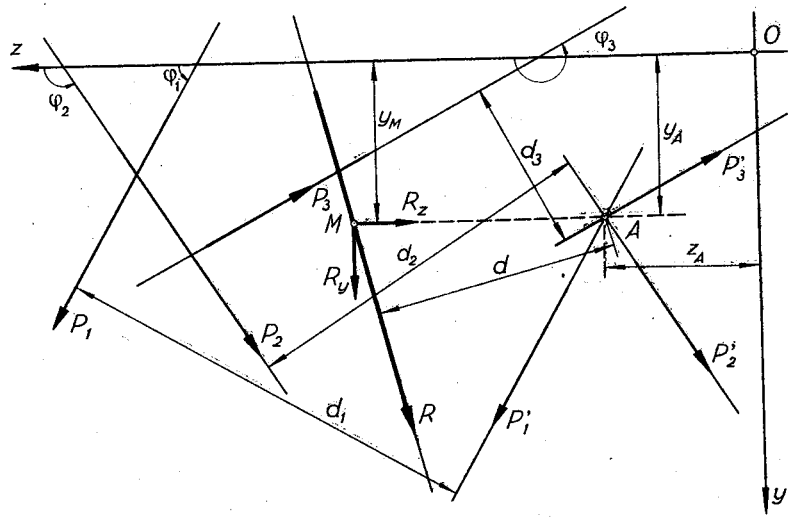


Fig. 2.36.

diente del punto que se elija como centro de reducción. En efecto, cualquiera sea el punto elegido al proyectar las fuerzas sobre ambos ejes coordenados, sus proyecciones no cambian, manteniéndose constante su suma y, en consecuencia, la intensidad y dirección de R.

Por tanto, la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes queda definida mediante tres condiciones, que hemos expresado en forma de dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera del plano. Las dos primeras ecuaciones nos determinan la intensidad y dirección de la resultante y la tercera nos permite ubicar un punto de su recta de acción. Escrita la ecuación de momentos en la forma indicada en 1.17. se tiene

$$R_z = \sum_1^n P_i . \cos \varphi_i = \sum_1^n H_i$$

$$R_y = \sum_1^n P_i . \operatorname{sen} \varphi_i = \sum_1^n V_i \qquad [2.24]$$

$$M_R = \sum_1^n P_i \ [\operatorname{sen} \varphi_i (z_A - z_i) -$$

$$- \cos \varphi_i (y_A - y_i)] = \sum_1^n M_i$$

A los efectos prácticos de la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas, una vez establecida la intensidad y dirección de la misma mediante las dos primeras de las ecuaciones [2.24], sólo es necesario calcular las coordenadas de un punto de su recta de acción, que será paralela a la dirección de R. Para determinar dicho punto, llamemos Z_R e Y_R a las componentes horizontal y vertical de R, y de acuerdo al teorema de Varignon, tendremos:

$$M_R = Y_R (z_A - z_i) - Z_R (y_A - y_i) \qquad [2.25]$$

ecuación de la recta de acción de la resultante. Supongamos ahora que la resultante se desliza sobre su recta de acción hasta aplicarse en un punto de esta última que tenga una de sus coordenadas igual a la correspondiente del punto elegido como centro de momentos. En la figura 2.37 el punto considerado es el M, teniéndose

$$y_M = y_A .$$

En consecuencia, para dicho punto la [2.25] se transforma en

$$M = Y_R\,(z_A - z_M)\,, \qquad [2.26]$$

y, finalmente, la restante coordenada que fija la posición de M será

$$z_M = z_A - \frac{M_R}{Y_R} \qquad [2.27]$$

con lo que queda completamente determinada la resultante del sistema de fuerzas *.

* La determinación de la resultante de un sistema plano no concurrente sobre la base de dos ecuaciones de proyección y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera, puede justificarse además en las dos formas siguientes.

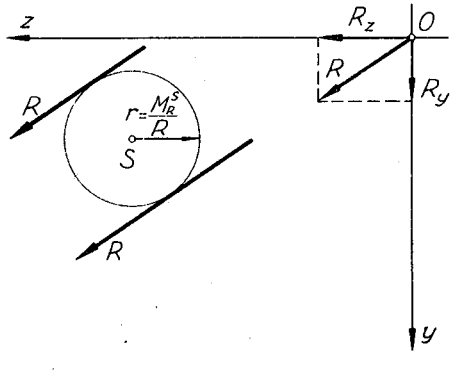


Fig. A.

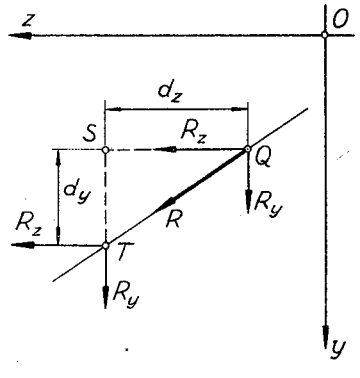


Fig. B.

Supongamos (fig. A) que en el sistema dado se conoce la suma de sus proyecciones sobre dos ejes: $R_z = \Sigma\, R_i \cos\varphi_i$; $R_y = \Sigma\, R_i \operatorname{sen}\varphi_i$, y su momento respecto de M_i^S de un punto cualquiera S. Conocidas R_z y R_y, la intensidad de R se obtiene de $|R| = \sqrt{R_z^2 + R_y^2}$ y su argumento φ_R de $\cos\varphi_R = R_z / |R|$. Si con centro en S trazamos una circunferencia de radio $r = M_R^S / R$, cualquier recta tangente a la misma puede ser la recta de acción de una fuerza de intensidad R cuyo momento respecto de S sea precisamente M_R^S. De entre esas infinitas rectas tangentes existen dos que cumplen con la condición de que su argumento sea igual al de la resultante buscada. Y, de ambas, la recta de acción de la resultante será aquella que conduzca a un momento respecto de S del mismo signo que M_R^S.

La otra forma de demostrar el problema es la siguiente. Supongamos, (fig. B), aplicada la resultante, de la que se conocen sus componentes R_z y R_y, en un punto de su recta de acción ubicado sobre la vertical del punto S, con respecto al cual se conoce su momento. Este momento será igual a la suma de los momentos de R_z y R_y,

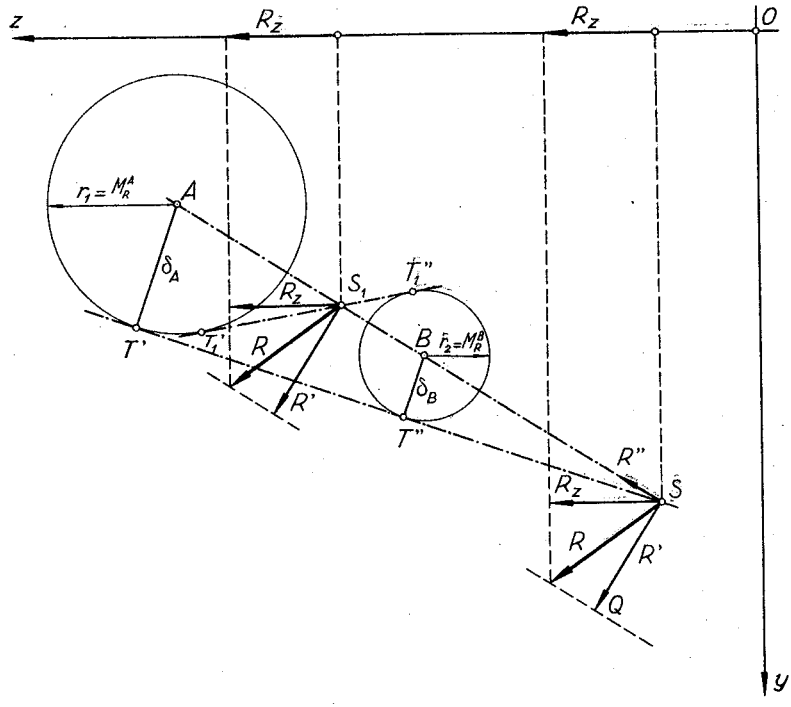


Fig. 2.37.

Las tres ecuaciones de condición que definen la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes, pueden plantearse también en forma de dos ecuaciones de momentos respecto a dos puntos cualesquiera del plano y una ecuación de proyección sobre un eje, siempre que este último no sea normal a la recta definida por los puntos con respecto a los que se toman momentos. En efecto, si en el sistema de fuerzas P_i de la figura 2.37, su-

---

pero como R_y pasa por S, su momento será nulo, restando en consecuencia $M_R^S = R_z . d_y$, de donde

$$d_y = \frac{M_R^S}{R_z} .$$

Análogamente, si aplicamos R en un punto de su recta de acción ubicado sobre la horizontal de S, por las mismas consideraciones anteriores llegamos a

$$d_z = \frac{M_R^S}{R_y} .$$

Luego, si por S trazamos una vertical y una horizontal, y sobre las mismas ubicamos los puntos T y Q a las distancias d_y y d_z, dichos puntos pertenecerán a la recta de acción de R, la que en esta forma queda completamente definida.

ponemos conocidos los momentos del sistema respecto a los puntos A y B, y la proyección del mismo respecto al eje z, tendremos

$$\left.\begin{aligned} M_R^A &= \sum_1^n M_i^A \\ M_R^B &= \sum_1^n M_i^B \\ R_z &= \sum_1^n R_i \cos\varphi_i = \sum_1^n H_i \end{aligned}\right\} \qquad [2.28]$$

Tracemos ahora con centro en A y B, dos circunferencias cuyos radios r_1 y r_2, representen respectivamente, en una escala cualquiera, los momentos M_R^A y M_R^B, que supondremos del mismo signo. Uniendo A con B y trazando una de las dos tangentes comunes exteriores a ambas circunferencias, dichas rectas se cortarán en un punto S, que será un punto de la recta de acción de la resultante buscada. En efecto, por el punto S pasan las rectas de acción de las infinitas fuerzas cuyos momentos respecto de A y B son precisamente, M_R^A y M_R^B. Para demostrarlo, consideremos una cualquiera de ellas, y descompongámosla en una componente dirigida según AB y otra paralela a los segmentos δ_A y δ_B, determinados por los centros de las circunferencias y los puntos de tangencia con las mismas, de la recta que define a S. De acuerdo con el teorema de Varignon, los momentos de la fuerza que estamos considerando con respecto a A y B, es decir M_R^A y M_R^B, serán iguales a la suma de los momentos de las componentes, respecto a los mismos puntos. De estas componentes, la que actúa según AB tiene momento nulo respecto a ambos puntos, o sea que los momentos del sistema respecto a A y B serán iguales a los momentos de la componente paralela a la dirección AT' (o BT''). Si consideramos a las rectas AS y $T'S$ como lados de un funicular de dicha componente, su momento respecto de A y B estará dado por los segmentos δ_A y δ_B leídos en la correspondiente escala, por ser precisamente paralelos a la componente y estar intersecados por los lados extremos del funicular, con lo que queda demostrado que por S pasa una fuerza paralela a AT' (o BT'') cuyos momentos respecto de A y B son iguales a los momentos del sistema respecto de los mismos puntos. Entre las infinitas fuerzas que pasan por S y cuya componente en la dirección indicada cumpla con la condición establecida habrá una que es la resultante buscada. Para determinarla, supongámosla descompuesta en una componente R'' según AB y otra R' normal a dicha dirección. Por lo que acabamos

de exponer, su intensidad R' debe ser tal que su momento respecto a A o B sea igual M_R^A o M_R^B luego

$$|R'| = \frac{|M_R^A|}{AS} = \frac{|M_R^B|}{BS} \qquad [2.29]$$

quedando definido su sentido conforme al signo de los momentos. Llevando a partir de S el vector representativo de R' y trazando por su extremo una paralela a AS, sobre la misma debe encontrarse el extremo del vector representativo de R. Para ubicar el extremo de dicho vector, disponemos de la tercera ecuación de condición, es decir la ecuación de proyección del sistema sobre el eje z, que nos da el valor de la componente de R en dicha dirección, o sea R_z. Llevado a partir de S el vector representativo de R_z la intersección de la vertical trazada por su extremo con la paralela a AB trazada por Q nos define el extremo del vector representativo de la resultante. Queda así demostrado que es posible definir la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes en base a dos ecuaciones de momentos y una ecuación de proyección sobre un eje.

Cuando los signos de los momentos respecto a A y B son contrarios, la tangente común a considerar es una de las dos interiores, con puntos de tangencia en T_1' y T_1'' que determinan, en su intersección con AB, el punto S_1, como perteneciente a la recta de acción de la resultante. El resto del razonamiento es, para este caso, similar al que acabamos de exponer *.

* Es posible justificar que la resultante de un sistema plano de fuerzas no concurrentes queda definida mediante una ecuación de proyección sobre un eje y dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos cualesquiera, en la forma siguiente:

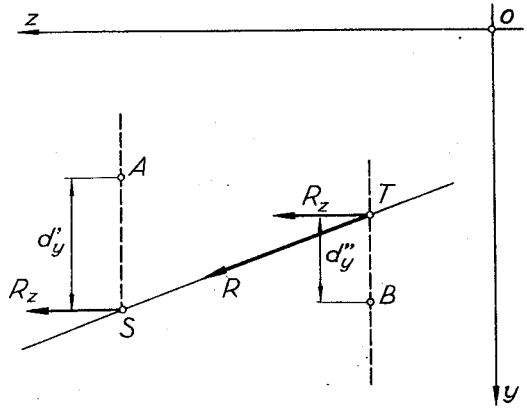


Fig. C.

Si en lugar de adoptar como eje de proyección el z, se hubiese elegido un eje normal a la recta AB, la proyección de la resultante sobre dicho eje sería idéntica a la componente R', quedando por ello indeterminada la resultante R del sistema.

Existe una tercera posibilidad, en lo que se refiere al planteo de las ecuaciones de condición, para la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes. Es posible definir dicha resultante mediante tres condiciones de momentos respecto de tres puntos cualesquiera, siempre que los mismos no se encuentren alineados, como lo demostraremos a continuación.

Supongamos conocidos los momentos del sistema P_i de la figura 2.38, respecto de los tres puntos A, B y C. Tendremos así

$$\begin{aligned} M_R^A &= \sum_1^n M_i^A \\ M_R^B &= \sum_1^n M_i^B \\ M_R^C &= \sum_1^n M_i^C \end{aligned} \qquad [2.30]$$

Con centro en A, B y C tracemos tres circunferencias cuyos radios r_1; r_2 y r_3 representen en la escala correspondiente, los valores de M_R^A, M_R^B y M_R^C respectivamente. Unamos A con B y A con C y tracemos las tangentes comunes a las circunferencias, exteriores o interiores según corresponda, de acuerdo a los respectivos signos de los momentos.

De acuerdo con lo que hemos demostrado antes, el punto L, intersección de las rectas AB y $T_1 T_2$, pertenece a las rectas de acción de infi-

---

Sea el sistema de la figura C, y supongamos conocidos sus momentos respecto de los puntos A y B y su proyección sobre el eje z, es decir:

$$\begin{aligned} \Sigma M_i^A &= M_R^A \\ \Sigma M_i^B &= M_R^B \\ R_z &= \Sigma R_i \cos \varphi_i \end{aligned}$$

Suponiendo aplicada la resultante en un punto de su recta de acción ubicada sobre la vertical de A, por ser nulo el momento de R_y respecto de A resulta

$$M_R^A = R_z \, d'_y$$

Por un razonamiento análogo llegamos a que $M_R^B = R_z d''_y$. En consecuencia, si sobre las verticales de A y B, y a partir de dichos puntos llevamos las distancias d'_y y d''_y dirigidas en forma tal que conduzcan a momentos de R respecto de A y B del mismo signo que M_R^A y M_R^B respectivamente, los puntos S y T así determinados definen la recta de acción de R, la que de esta manera, queda completamente determinada.

nitas fuerzas cuyos momentos respecto de A y de B son, respectivamente M_R^A y M_R^B. Una de ellas, evidentemente, será la resultante del sistema. Por el punto S, definido por la intersección de AC con $T_1' T_3$, pasan también infinitas fuerzas cuyos momentos respecto de A y C son respectivamente M_R^A y M_R^C, una de las cuales corresponderá a la resultante del sistema. Pero como dicha resultante, por lo que acabamos de ver,

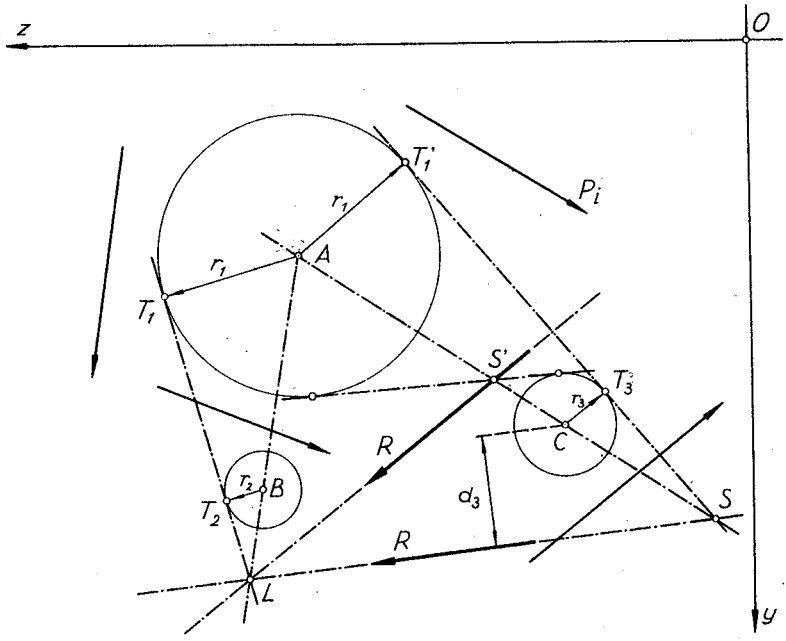


Fig. 2.38.

también debe pasar por L, la única posibilidad que le resta es que su recta de acción sea LS. Conocida la recta de acción de R, el cálculo de su intensidad es inmediato. En efecto, considerando el punto C por ejemplo, se debe tener

$$R.d_3 = M_R^C \quad \therefore \quad |R| = \frac{|M_R^C|}{d_3} \qquad [2.31]$$

quedando el sentido fijado por el signo de M_R^C.

En el caso tratado en figura 2.38, se ha supuesto que los tres momentos eran del mismo signo, por lo que se trazaron las tangentes exteriores comunes. Si, por ejemplo, los momentos respecto de A y B tuviesen el mismo signo, y el con respecto a C, distinto, para los círculos de centros A y C correspondería trazar la tangente interior, llegándose a que en tal caso la recta de acción buscada sería la LS'.

La determinación de la resultante en base a tres ecuaciones de momentos, puede justificarse también en la forma siguiente.

Se conocen para el sistema P_i (no indicado en figura 2.39) sus momentos respecto a los puntos A, B y C, que son respectivamente iguales a los momentos de la resultante respecto a los mismos puntos: M_R^A M_R^B y M_R^C.

Consideremos las rectas AB, BC y CA en figura 2.39. Podemos suponer las mismas como rectas de acción de tres componentes de la resultante R', R'' y R''', por constituir un sistema equivalente a la misma, las sumas de sus momentos respecto de los tres puntos A, B y C serán respectivamente iguales a M_R^A M_R^B y M_R^C. Ahora bien, al considerar el momento del nuevo sistema respecto de cada uno de los puntos A, B y C se anulan los momentos de las componentes que concurren al punto considerado. Por ejemplo, para C se anulan los momentos de R'' y R''', resultando en consecuencia

$$M_R^C = R'.d' \; ; \quad M_R^B = R''.d'' \; ; \quad M_R^A = R'''.d''' \qquad [2.32]$$

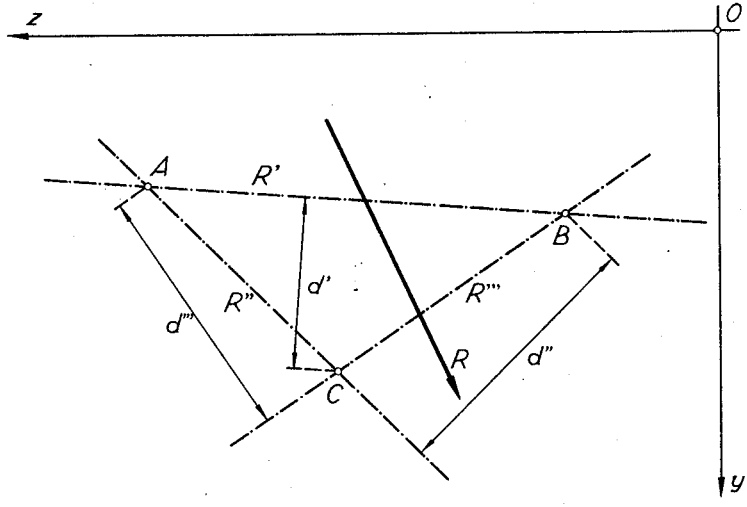


Fig. 2.39.

De estas expresiones se deducen de inmediato las intensidades de R', R'' y R''', y su sentido surge del signo de los correspondientes momentos. Conocidas las tres componentes de R, ésta queda totalmente definida.

Es evidente que si los tres centros de momentos se encuentran alineados, no puede determinarse la resultante del sistema. En efecto, si

ello ocurriese, en la fig. 2.38 los puntos L y S coincidirían en un mismo punto de la recta A, B, C, resultando indeterminada la recta de acción de la resultante.

2.2.10. Casos especiales de reducción de sistemas de fuerzas no concurrentes. Pares. Equilibrio.

Si al plantear las ecuaciones [2.24] nos encontramos que las dos de proyección son nulas, siendo distinta de cero la ecuación de momentos; es decir, si se tiene

$$\left.\begin{aligned} H_i &= 0 \\ V_i &= 0 \\ M_i &= M_R \end{aligned}\right\} \qquad [2.33]$$

el sistema se reduce a un par de fuerzas, y en tal caso la tercera ecuación conduce a un valor constante cualquiera sea el centro de momentos elegido, valor que será precisamente el momento del par. Por tanto, $\sum M = M_R = C^{te}$.

También se reducirá el sistema a un par de fuerzas si en lugar de plantear dos ecuaciones de proyección y una de momentos, planteamos tres ecuaciones de momentos respecto a tres puntos no alineados, y para las tres la suma de los momentos son iguales entre sí en valor y signo. De estar alineados los tres centros de momentos, el sistema podría reducirse también a una resultante, cuya recta de acción sería paralela a la recta definida por los puntos elegidos como centros de momentos. Queda dicho en el parágrafo 2.2.10. que en este caso la resultante no queda definida.

Cuando planteadas las tres ecuaciones [2.24] o tres ecuaciones de momentos respecto de tres puntos no alineados, o bien dos ecuaciones de momentos y una ecuación de proyección sobre un eje que no sea normal a la recta definida por los centros de momentos, las tres ecuaciones resultan iguales a cero, el sistema de fuerzas considerado se encontrará en equilibrio, como lo justificaremos a continuación.

2.2.11. Condiciones analíticas, necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes.

Las condiciones analíticas, necesarias y suficientes, que debe cumplir un sistema plano de fuerzas no concurrentes para estar en equilibrio, son tres, y pueden ser expresadas de tres modos distintos, a saber:

a) dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes no coincidentes ni paralelos y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera, nulas.

b) una ecuación de proyección sobre un eje y dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos cualesquiera, nulas, siempre que el eje de proyección no sea normal a la recta determinada por los centros de momento.

c) tres ecuaciones de momentos respecto a tres puntos no alineados, nulas.

Mediante tres ecuaciones de proyección sobre tres ejes no es posible establecer el equilibrio de un sistema de fuerzas, por cuanto, como veremos más adelante, la tercera ecuación de proyección es consecuencia de las dos primeras.

Caso a)

Consideremos un sistema de fuerzas no concurrentes P_i (fig. 2.40 a) y proyectémoslo sobre el eje z. Establecida la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre dicho eje encontramos que su suma vale cero, es decir

$$\sum_{1}^{n} = H_i = 0 \qquad [2.34]$$

Si ello ocurre, existen tres posibilidades:

1º De existir resultante, necesariamente debe ser normal al eje z, por cuanto su proyección debe ser nula.

2º El sistema se reduce a un par de fuerzas, dado que la proyección de un par sobre cualquier eje es siempre nula.

3º El sistema es nulo, es decir, se encuentra en equilibrio.

Si proyectado el sistema sobre el eje y, la suma de las proyecciones de las fuerzas es nula, las posibilidades para la resultante son las mismas anteriores, con la única diferencia de que, de existir resultante, necesariamente debe ser normal al eje y.

Si simultáneamente el sistema cumple con las condiciones

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{n} H_i &= 0 \\ \sum_{1}^{n} V_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [2.35]$$

queda automáticamente descartada la posibilidad de la existencia de una resultante, por cuanto una fuerza no puede tener una recta de acción que sea normal a dos ejes no coincidentes. En consecuencia, un sistema para el que se cumplan las condiciones [2.35] sólo puede reducirse a un par o bien encontrarse en equilibrio. Finalmente, si planteada la ecuación de momentos de todas las fuerzas del sistema respecto a un punto cualquiera del plano, su suma resulta igual a cero, queda descartada la posibilidad de

que el sistema se reduzca a un par de fuerzas, por cuanto el momento de un par respecto de un punto cualquiera es constante, e igual al momento del par.

Caso b)

Si en el sistema de fuerzas de figura 2.40 b tomamos momentos de las fuerzas que lo constituyen, respecto del punto A, y su suma es cero, es decir

$$\sum_{1}^{n} M_i^A = M_R^A = 0 \qquad [2.36]$$

es posible que

1º De existir la resultante, necesariamente debe pasar por A, por cuanto el momento del sistema es igual al momento de la resultante, y este queda expresado por el producto de dos factores: $R \cdot d$, llamando d a la distancia de la recta de acción de R al centro de momentos. Para que dicho producto sea nulo es necesario que lo sea uno de los factores, y como R no es cero, ya que admitimos la existencia de la resultante, debe serlo d.

2º El sistema se encuentra en equilibrio. Queda excluida la posibilidad de que el sistema se reduzca a un par de fuerzas, por cuanto el momento de un par respecto de un punto cualquiera no puede ser nulo.

Si al tomar momentos respecto de B resulta nula la suma de los mismos, caben las mismas posibilidades, es decir, que R pase por B o que exista equilibrio.

De cumplirse simultáneamente la nulidad de momentos respecto de A y B, es necesario o bien que el sistema se encuentre en equilibrio o que la resultante pase por A y B.

Ahora bien, si al proyectar el sistema de fuerzas sobre un eje resulta nula la suma de las proyecciones, es posible que el sistema se encuentre en equilibrio o que la resultante sea normal al eje. Si se cumplen simultáneamente las tres condiciones, no siendo el eje perpendicular a $A\,B$, la única posibilidad que le resta al sistema es la de encontrarse en equilibrio, por cuanto, de existir resultante, por las dos primeras condiciones debería pasar por A y B, y por la tercera, ser normal al eje de proyección, lo que es imposible, por cuanto una fuerza no puede tener más de una recta de acción.

Caso c)

Por lo expuesto al tratar el caso b), si al tomar momentos del sistema respecto de los puntos A y B, las sumas de los mismos resultan nulas simultáneamente, es posible o bien que el sistema se encuentre en equilibrio o que la resultante, si existe, pase por dichos puntos (fig. 2.40 c). Planteada una tercera ecuación de momentos respecto de un punto C, si resulta nula simultáneamente con las anteriores, evidentemente la única

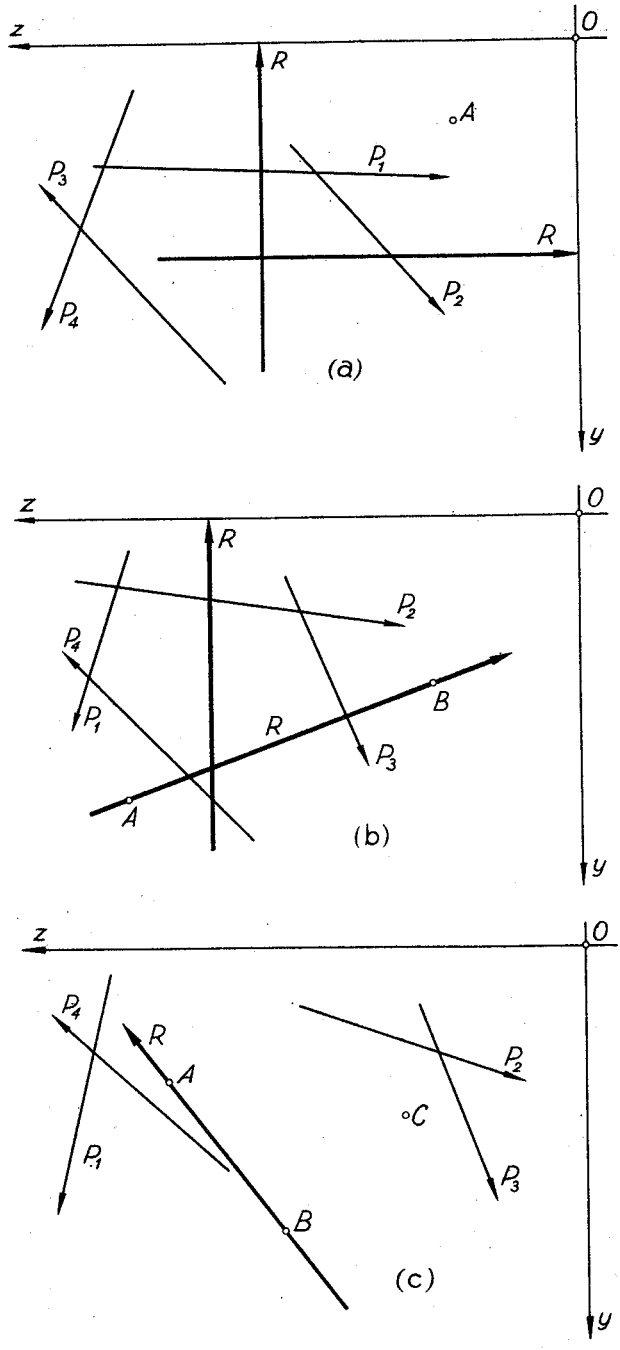


Fig. 2.40.

posibilidad es que el sistema se encuentre en equilibrio, pues es imposible que la resultante pase simultáneamente por *A, B* y *C*.

No es posible establecer el equilibrio de un sistema de fuerzas mediante tres ecuaciones de proyección. En efecto, al discutir el caso a), vimos que si se cumplían simultáneamente las condiciones de proyección nula respecto de dos no coincidentes, o bien el sistema se encontraba en equilibrio o se reducía a un par de fuerzas. Si proyectamos el sistema sobre un tercer eje y la suma de las proyecciones es nula, siempre existe la posibilidad de que el sistema se reduzca a un par de fuerzas, por cuanto, como se sabe, la proyección de un par siempre es nula. En consecuencia, la tercera ecuación de proyección no implica imponer al sistema ninguna nueva condición.

2.2.12. Descomposición de sistemas no concurrentes. Solución gráfica de Culmann.

Hemos visto que tanto para la reducción como para el equilibrio de sistemas planos de fuerzas no concurrentes, disponíamos de tres ecuaciones de condición. Como consecuencia de ello, siempre será posible resolver problemas que involucren la existencia de tres incógnitas. De ahí que sea factible la descomposición de una fuerza en tres componentes, pero no así en cuatro o más, por cuanto ello conduciría a un problema indeterminado.

Discutiremos a continuación la solución gráfica del problema de la descomposición de una fuerza en tres componentes coplanares, conocida con el nombre de problema de *Culmann*.

Dada una fuerza *P*, si se pide descomponerla en tres componentes coplanares, de acuerdo con la ubicación de las rectas de acrión de estas últimas, pueden presentarse los cuatro casos siguientes:

a) Las tres rectas de acción concurren a un punto de la recta de acción de la fuerza dada.

b) Las tres rectas de acción concurren a un punto que no pertenece a la recta de acción de la fuerza dada.

c) Dos de las rectas de acción de las componentes incógnitas concurren a un punto de la recta de acción de la fuerza dada y la tercera no.

d) Las cuatro rectas de acción forman cuadrilátero.

El caso a) conduce a un problema indeterminado, por tratarse en realidad de un caso de fuerzas concurrentes a un punto, y para el que sólo se dispone de dos ecuaciones de condición, siendo tres las incógnitas.

El caso b) no tiene sentido, por cuanto, conforme al principio del paralelogramo, siempre las componentes deben concurrir a un punto con la resultante.

En el caso c), el problema se reduce a descomponer la fuerza P en las dos componentes cuyas rectas de acción concurren con P, siendo nula la tercera componente. Esto último puede demostrarse aplicando el teorema de Varignon. En efecto si tomamos momentos del sistema respecto del punto de concurrencia, como el momento de P respecto de dicho punto debe ser igual a la suma de los momentos de las tres componentes incógnitas, resulta que el momento de la componente no concurrente debe ser cero, por serlo el momento de P y los momentos de las dos restantes componentes. Y al ser nulo el momento de la tercera componente, necesariamente debe ser cero su intensidad, por cuanto la misma no pasa por el centro de momentos.

Queda, en consecuencia, como único posible, el caso en que las cuatro rectas de acción formen cuadrilátero.

Sea la fuerza P (fig. 2.41), a descomponer en tres componentes cuyas rectas de acción sean (1), (2), y (3). Si llamamos P_1, P_2 y P_3 a las componentes buscadas, podemos escribir la siguiente ecuación vectorial

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 \qquad [2.37]$$

de la que se tiene

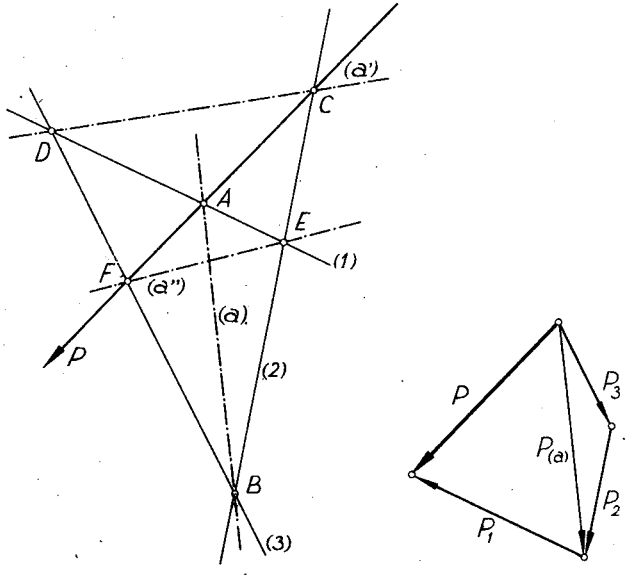


Fig. 2.41.

$$\vec{P} + (\vec{-P_1}) = \vec{P_2} + \vec{P_3}. \qquad [2.38]$$

Esta última igualdad establece que la resultante de P y $(-P_1)$ es igual a la resultante de P_2 y P_3. Procediendo gráficamente (fig. 2.41) determinamos el punto A, intersección de las rectas de acción de P y de la componente P_1, por donde pasará la recta de acción de la resultante de ambas, y luego el punto B, intersección de las rectas de acción de las componentes P_2 y P_3, por donde, a su vez, pasará la recta de acción de su resultante. Como, de acuerdo con la ecuación [2.38] ambas resultantes son idénticas, su recta de acción será evidentemente la definida por los puntos A y B. Esta recta se denomina recta auxiliar de Culmann. Estamos ahora en condiciones de descomponer a la fuerza P en la componente P_1 y en otra que tiene por recta de acción la recta auxiliar de Culmann (a), que es lo que se ha efectuado en el polígono de fuerzas de fig. 2.41.

Como la componente auxiliar P_a concurre a un punto con las componentes P_2 y P_3, es posible descomponerla en estas últimas direcciones, con lo que queda resuelto el problema. Del polígono de fuerzas surge también el cumplimiento de la ecuación vectorial [2.38]. En efecto, puede observarse en el mismo que la fuerza P_a es resultante de P_2 y P_3 y también de P y la fuerza opuesta a P_1, es decir $(-P_1)$.

En la ecuación [2.38] hemos transpuesto al primer miembro la fuerza P_1, pero podría habérselo hecho sea con la P_2 o la P_3. En uno u otro caso habríamos obtenido las resultantes de P y $(-P_2)$ o de P y $(-P_3)$ en el primer miembro, circunstancia que, interpretada gráficamente, nos habría conducido a determinar las intersecciones de P con (2) o (3), según el caso (puntos C y F de figura 2.41). Ello nos permite deducir que existen tres rectas auxiliares de Culmann a, a' y a'', que son en realidad las tres diagonales del cuadrilátero formado por las cuatro rectas de acción. Cualquiera de ellas puede utilizarse indistintamente para resolver el problema, conduciendo al mismo resultado.

Si, en lugar de buscar las componentes de P según las tres rectas de acción dadas, se pidiera equilibrar dicha fuerza mediante tres fuerzas que actúen según dichas rectas, el problema se resolvería en la misma forma, bastando cambiar el sentido a las componentes, con lo que se obtendrían las equilibrantes pedidas.

2.2.13. Descomposición de sistemas no concurrentes. Solución gráfico-numérica de Ritter.

En 2.2.10 vimos que la resultante de un sistema no concurrente quedaba definida mediante tres ecuaciones que establecieran la igualdad en-

tre los momentos de la misma respecto a tres puntos no alineados y los momentos del sistema respecto de los mismos puntos. Si el elemento conocido es la resultante y se pide hallar sus componentes según tres rectas de acción determinadas, al plantear una ecuación de momentos respecto a un punto cualquiera A (fig. 2.42), la misma contendrá tres incógnitas: las intensidades de las componentes según las tres rectas de acción dadas.

Planteadas otras dos ecuaciones de momentos respecto de otros dos puntos B y C, no alineados con A, ellas nos permiten completar un sistema de tres ecuaciones simultáneas entre las tres incógnitas, que nos resuelven el problema. Para el caso de figura 2.42 el sistema sería, llamando P_1, P_2 y P_3 las intensidades de las componentes incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} P_1.d_1 + P_2.d_2 + P_3.d_3 &= P.d \\ P_1.d_1' + P_2.d_2' + P_3.d_3' &= P.d' \\ P_1.d_1'' + P_2.d_2'' + P_3.d_3'' &= P.d'' \end{aligned}\right\} \qquad [2.39]$$

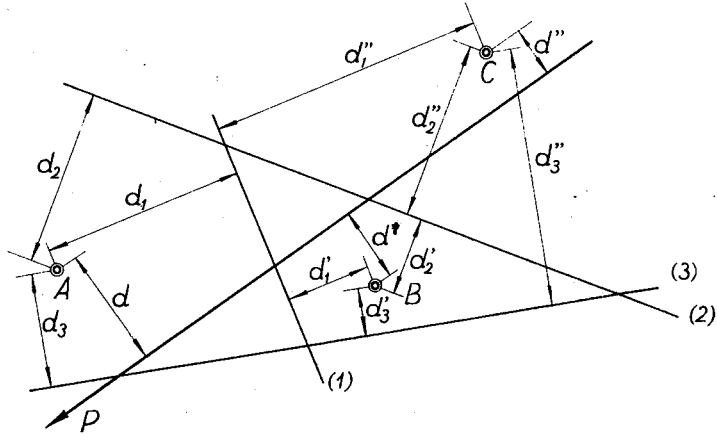


Fig. 2.42.

La resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es siempre laborioso, sea que se lo encare por determinantes o bien por eliminación o sustitución.

Si en la matriz del sistema [2.39] fueran nulos todos los coeficientes, salvo los correspondientes a la diagonal principal, el sistema se transformaría en un sistema de tres ecuaciones independientes con una incógnita cada uno, de solución inmediata.

Ello es lo que se persigue con el método de Ritter.

Si elegimos como primer centro de momentos al punto de intersección de las rectas de acción de dos de las componentes incógnitas por

ejemplo el A en figura 2.43, al tomar momentos de P y con respecto al mismo del sistema incógnito, se anularán los momentos de las dos componentes cuyas rectas de acción concurran a dicho punto, P_1 y P_2 en este caso.

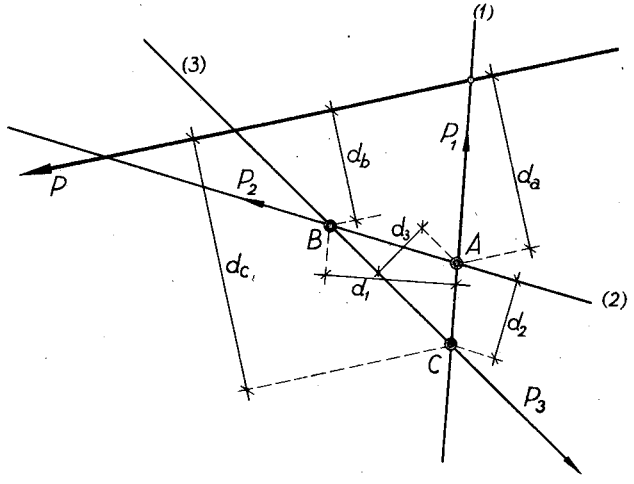


Fig. 2.43.

La primera ecuación será, en consecuencia,

$$P.d = P_3.d_3 \ , \qquad [2.40]$$

que nos permite despejar directamente la intensidad de la componente P_3

$$|P_3| = \frac{|P.d|}{d_3} \qquad [2.41]$$

El sentido de la misma se reduce en base a la siguiente consideración:

Como el momento de la componente P_3 respecto de A debe ser igual al de P respecto del mismo punto, tanto en valor absoluto como en signo, el sentido de la componente P_3 deberá ser tal que dé un momento respecto de A del mismo signo que P. En el caso presente, el momento de P respecto de A es negativo, por cuanto tiende a producir un giro en sentido opuesto al de las agujas del reloj. En consecuencia, el sentido de P_3 será el indicado en figura 2.43, por cuanto tiende a producir un giro del mismo signo que P.

Eligiendo ahora como centro de momentos el punto B, intersección de las rectas de acción de los componentes P_2 y P_3, obtenemos una ecuación semejante a [2.40], en la que aparece como incógnita la intensidad

de P_1. Finalmente, tomando momentos respecto a C, intersección de las rectas de acción de P_1 y P_3, al anularse los momentos de estas componentes se obtiene en base a las mismas consideraciones efectuadas para permite despejar el valor de la intensidad de P_2. El sentido de estas componentes se obtiene en base a las mismas consideraciones efectuadas para determinar el sentido de P_3.

2.2.14. Descomposición de sistemas no concurrentes. Solución analítica.

El problema de la descomposición de una fuerza en tres componentes puede encararse también desde un punto de vista analítico. En efecto, sea el sistema de figura 2.44 donde se pide hallar las componentes de P según las rectas de acción (1), (2) y (3), que llamaremos respectivamente

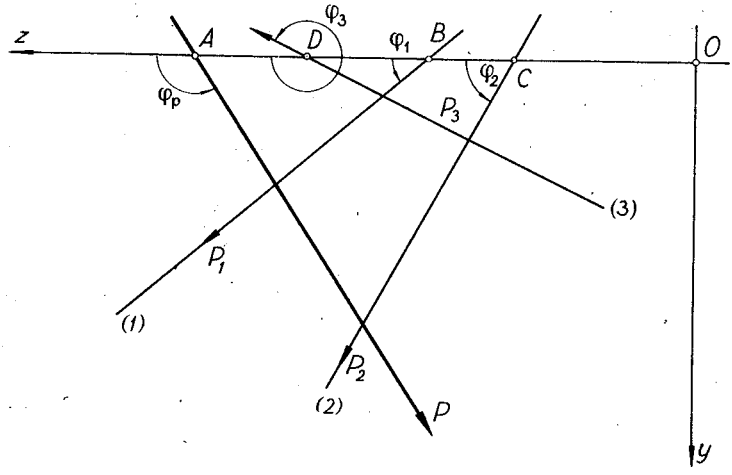


Fig. 2.44. -

P_1, P_2 y P_3. Referidas P y las rectas de acción (1), (2), y (3) a un sistema de ejes coordenados z, y, se tienen conocidos la intensidad de P y su argumento φ, así como también los argumentos de las tres componentes incógnitas, las que, para definirlos, supondremos *positivas*, siguiendo la convención de signos para fuerzas establecida en 1.15. Las incógnitas son las intensidades P_1, P_2 y P_3 de las tres incógnitas. Para establecer su valor, disponemos de tres ecuaciones de condición, que, de acuerdo con lo visto en 2.2.10., es posible expresarlo de tres maneras distintas:

a) Dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes no coincidentes ni paralelos y una ecuación de momentos respecto de un punto.

b) Una ecuación de proyección sobre un eje y dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos, siempre que los mismos no definan una recta normal al eje.

c) Tres ecuaciones de momentos respecto de tres puntos no alineados.

Desarrollaremos en detalle solamente el primer caso, por cuanto los dos restantes son fáciles de plantear en base a los elementos dados en 2.2.10.

La primera ecuación establece que la proyección de P sobre el eje z debe ser igual a la suma de las proyecciones de las componentes incógnitas. En consecuencia

$$P \cos \varphi_P = P_1 . \cos \varphi_1 + P_2 . \cos \varphi_2 + P_3 . \cos \varphi_3 \quad . \qquad [2.42]$$

Proyectando ahora sobre el eje y, se tiene análogamente:

$$P \operatorname{sen} \varphi_P = P_1 . \operatorname{sen} \varphi_1 + P_2 . \operatorname{sen} \varphi_2 + P_3 . \operatorname{sen} \varphi_3 \quad . \qquad [2.43]$$

La tercera ecuación será de momentos respecto a un punto cualquiera. Para plantearla debemos elegir un punto de la recta de acción de la fuerza P y de cada una de las componentes incógnitas, y adoptar un centro de momentos. Para simplificar el planteo adoptaremos como centro de momentos el origen de coordenadas y como puntos de aplicación de las fuerzas, los puntos en que sus respectivas rectas de acción cortan el eje z. En esta forma, se anularán los momentos de las componentes horizontales y además, serán nulas las coordenadas del centro de momentos. Tendremos en consecuencia:

$$\begin{aligned} P . \operatorname{sen} \varphi_P (-z_A) &= P_1 . \operatorname{sen} \varphi_1 (-z_B) + \\ &+ P_2 . \operatorname{sen} \varphi_2 (-z_C) + P_3 . \operatorname{sen} \varphi_3 (-z_D) \quad . \end{aligned} \qquad [2.44]$$

Las ecuaciones [2.42], [2.43] y [2.44] constituyen un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas, que nos resuelven el problema. Si al despejar los valores de P_1, P_2 y P_3, alguno de ellos resulta de signo negativo, significa que el sentido que le corresponde es contrario al supuesto al establecer los correspondientes argumentos.

2.2.15. Casos particulares de descomposición de una fuerza en tres componentes.

Al aplicar los procedimientos de Culmann o de Ritter a la descomposición de una fuerza en tres componentes, pueden presentarse algunos

casos particulares, según sea la posición relativa de las rectas de acción de las componentes.

Si dos de las rectas de acción de las componentes incógnitas son paralelas, como ocurre con las rectas *(1)* y *(2)* de figura 2.45, el procedi-

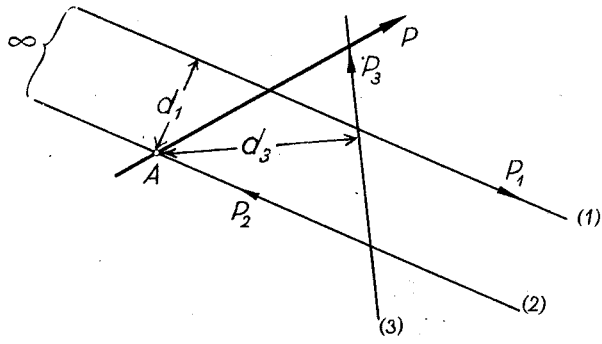


Fig. 2.45.

miento de Ritter, aparentemente no podría aplicarse para determinar la componente según *(3)*. En efecto, de acuerdo con el procedimiento de Ritter, para determinar el valor de P_3 deberíamos tomar momentos con respecto al punto de intersección de las rectas de acción *(1)* y *(2)*. Como dicho punto es impropio, por ser paralelas las rectas, tal operación es imposible. El problema se resuelve determinando primeramente, una de las componentes restantes, P_1 o P_2, indistintamente, en la forma habitual. Conocida dicha componente, la P_1 por ejemplo, se adopta como centro de momentos el punto *(A)* de intersección de la recta de acción de P con la recta *(2)*, con lo que aparecen en la ecuación los momentos de P_1, conocido, y de P_3, incógnita, resultando, por ser cero el momento de P:

$$P_1 . d_1 + P_2 . d_3 = 0 \qquad [2.45]$$

de donde

$$|P_3| = \frac{|P_1 . d_1|}{d_3} . \qquad [2.46]$$

Otro caso particular se presenta cuando una de las rectas de acción de las componentes incógnitas es paralela a la fuerza conocida, y las dos rectas de acción restantes son paralelas entre sí (fig. 2.46). En este caso la componente P_1 es igual en intensidad y sentido a la fuerza P, y las componentes P_2 y P_3 forman un par de fuerzas cuyo momento es igual en magnitud y signo al momento de P con respecto a un punto cualquiera de la recta de acción de P_1. Ello puede demostrarse aplicando tanto el procedimiento de Culmann como el de Ritter.

Si nos proponemos hallar las tres componentes de P por el procedimiento de Culmann, podríamos adoptar como recta auxiliar la definida por los puntos de intersección de la recta de acción de P con la recta *(1)*, por una parte, y por la otra por la intersección de las rectas *(2)* y *(3)*. Pero, los dos puntos así determinados son impropios, y, en consecuencia la recta auxiliar de Culmann resulta ser la recta impropia del plano. Debemos entonces descomponer P en una componente cuya recta de acción es

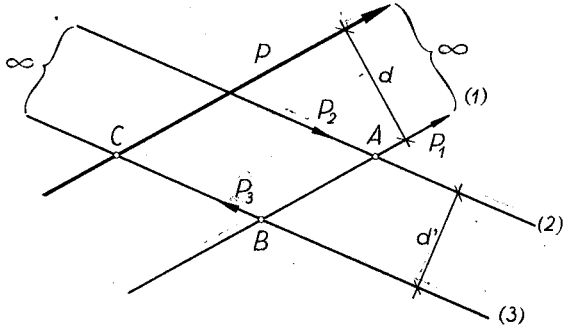


Fig. 2.46.

impropia y otra paralela a sí misma. La componente impropia es un par, y la componente P_1 resulta ser igual en intensidad y sentido a P. La intensidad del par es igual al momento de P respecto a un punto cualquiera de la recta de acción de P_1. Este caso ha sido tratado en 1.12., al hablar de translación de fuerzas. En cuanto a P_2 y P_3, para determinarlas debemos descomponer la componente impropia (par de fuerzas) en *(2)* y *(3)*, que son paralelas. Es evidente que las mismas, al tener por resultante la componente impropia, que es un par de fuerzas, debe a su vez constituir otro par equivalente. Luego, sus intensidades serán iguales al cociente del par por la distancia que separa ambas rectas de acción; es decir, si

$$M = P.d \qquad [2.47]$$

resulta

$$|P_1| = |P_2| = \left|\frac{M}{d'}\right| = \left|\frac{P.d}{d'}\right| . \qquad [2.48]$$

El sentido de las mismas será tal que conduzca a un par de igual signo que el del momento $P.d$.

Aplicando el procedimiento de Ritter, para determinar la componente P_2 tomaríamos momentos respecto del punto B, intersección de las rectas de acción *(1)* y *(3)*. Tendríamos así

$$|P_2| = \left|\frac{P.d}{d'}\right| \qquad [2.49]$$

y tomando momento respecto de A, obtendríamos

$$|P_3| = \left|\frac{P.d}{d'}\right| \qquad [2.50]$$

Evidentemente resulta $|P_2| = |P_3|$ y, en cuanto a los sentidos respectivos, de la figura surge de inmediato que deben ser contrarios. En consecuencia P_2 y P_3 forman un par de fuerzas.

Para determinar la restante componente, no podemos tomar momentos respecto del punto de intersección de las rectas de acción de P_2 y P_3, por ser impropio. Lo haremos, en cambio, respecto de C, intersección de la recta de acción de P con la P_3.

Tenemos así, por ser nulo el momento de P respecto de C:

$$P_1.d + P_2.d' = 0 \qquad [2.51]$$

de donde

$$P_1.d = -P_2.d' \qquad [2.52]$$

y finalmente

$$|P_1| = \left|\frac{P_2.d'}{d}\right| . \qquad [2.53]$$

Pero reemplazando el valor de P_2 dado por la [2.49] se tiene

$$|P_1| = \left|\frac{P.d.d'}{d'.d}\right| = |P| . \qquad [2.54]$$

En cuanto al sentido de P_1, la [2.52] nos dice que su momento respecto de C debe ser opuesto al de P_2, de donde resulta el sentido indicado en figura 2.46, es decir, coincidente con el de P.

En ciertas circunstancias, puede presentarse el problema de descomponer una fuerza P, en tres componentes, dos de cuyas rectas de acción serán propias y la tercera impropia. Este problema, como lo veremos de inmediato, es equivalente al de descomponer una fuerza en dos componentes de rectas de acción propias, y en un par.

Sea, por ejemplo, la fuerza P, de figura 2.47, de la que se pide hallar sus componentes según las rectas propias *(1)* y *(2)* y la recta impropia del plano. Si se hubiese establecido que la tercera componente fuera un par, el problema no varía, por cuanto sabemos que la resultante de un

par puede considerarse como una fuerza de intensidad infinitamente pequeña, cuya recta de acción es la impropia del plano.

Aplicando el procedimiento de Culmann elegimos como recta auxiliar *(a)*, la determinada por el punto *(A)* de intersección de las rectas de

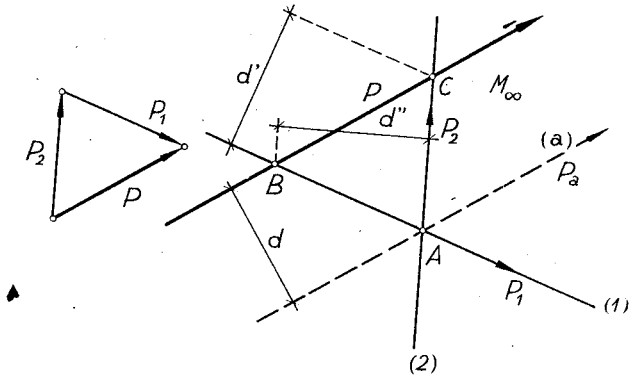


Fig. 2.47.

acción *(1)* y *(2)* y el M_∞, definido por la intersección de la recta de acción de P con la recta impropia del plano. Descomponiendo P en la componente auxiliar P_a y en la componente impropia, resulta evidente que

$$| P_a | = | P | \qquad [2.55]$$

coincidiendo además sus sentidos, y que, por otra parte, la componente impropia resulta ser un par de momento

$$M = P.d \; . \qquad [2.56]$$

Descomponiendo ahora P_a en las direcciones *(1)* y *(2)*, en el polígono de fuerzas se obtienen las intensidades y sentidos de P_1 y P_2. Si utilizamos el procedimiento de Ritter, tomamos momentos en primer término respecto del punto A, intersección de las rectas *(1)* y *(2)*, teniéndose, como componente impropia, el par

$$P.d = M \; . \qquad [2.57]$$

Conocida la componente impropia, tomando momentos respecto de los puntos B y C obtenemos respectivamente:

$$M + P_2.d'' = P.d + P_2.d'' = 0 \qquad [2.58]$$

$$M + P_1.d' = P.d + P_1.d' = 0 \qquad [2.59]$$

que nos conducen a

$$|P_2| = \left|\frac{P.d}{d''}\right| \qquad [2.60]$$

$$|P_1| = \left|\frac{P.d}{d'}\right| \quad . \qquad [2.61]$$

En cuanto a los sentidos de P_1 y P_2 se obtienen en la forma conocida, es decir, teniendo en cuenta que, de acuerdo con las [2.58] y [2.59] deben conducir a momentos respecto de B y C que sean opuestos a los de P respecto de los mismos puntos.

2.2.16. Aplicación del polígono funicular a un caso particular de descomposición de una fuerza en dos componentes.

En algunos problemas, puede presentarse el caso de tener que descomponer una fuerza en dos componentes, de una de las cuales se conoce un punto de su recta de acción y de la otra este último elemento. Cuando el punto de intersección de las rectas de acción de la fuerza dada y de la componente cae dentro de los límites del dibujo, la solución es inmediata mediante un simple polígono de fuerzas, por cuanto la recta de acción de la segunda componente queda definida por dicho punto de intersección y el punto que es dato del problema. Si, en cambio, dicho punto de intersección es inaccesible, el problema se resuelve sea por aplicación de la proposición de Desargues o bien mediante un polígono funicular.

Sea, la fuerza R, a descomponer en la componente cuya recta de acción es la recta *(2)* y en otra que pase por el punto A.

En figura 2.48 a, hemos resuelto el problema aplicando la proposición de Desargues. Para ello construimos el triángulo AMN, siendo A el punto dado y M y N puntos cualesquiera de la recta de acción de R y P_2 respectivamente, y por un punto cualquiera N' de esta última trazamos dos rectas paralelas respectivamente a NA y NM. Por el punto M' en que la última paralela corta a la recta de acción de R trazamos una paralela a MA, y su intersección A' con la paralela a NA trazada por N' nos define un punto que, unido con el A, determina la recta de acción de la componente P_1. Las intensidades y sentidos de ambas componentes, se obtienen del correspondiente polígono de fuerzas.

Para resolver el problema mediante la aplicación del polígono funicular, se procede en la forma que muestra la figura 2.48 b. Para ello se trazan dos rectas (I y III) que se corten sobre la recta de acción de la fuerza a descomponer, haciendo pasar una de ellas por el punto A. Dichas

rectas pueden interpretarse como lados de un funicular de R, que, a su vez, serán lados extremos del polígono funicular del sistema constituido por las dos componentes incógnitas.

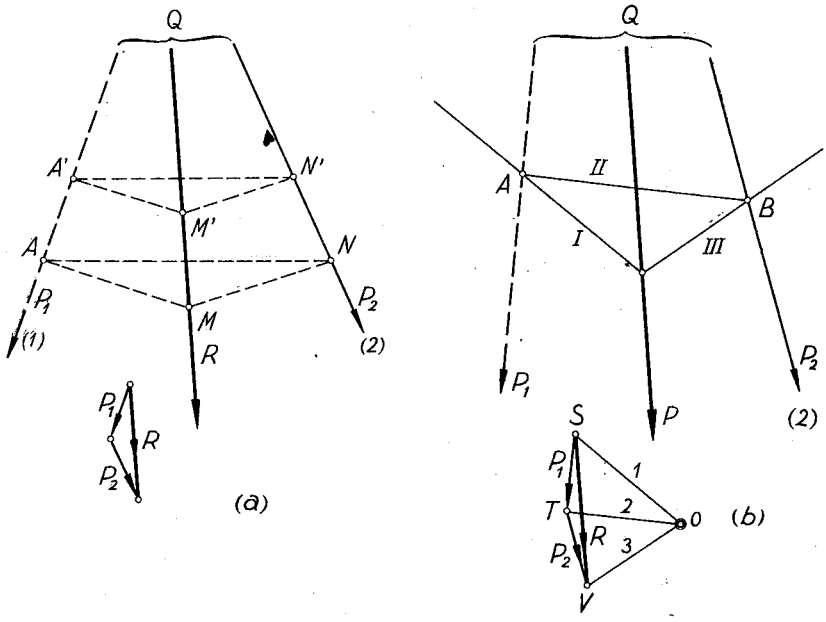


Fig. 2.48.

Este último polígono funicular por corresponder a un sistema de dos fuerzas debe constar de tres lados y, como el segundo lado o lado intermedio debe cortarse con los lados extremos sobre las rectas de acción de las fuerzas, evidentemente será la recta AB de figura 2.48 b. Si por el origen y extremo del vector representativo de R trazamos dos rectas paralelas respectivamente a los lados I y III, en su intersección definen un punto 0 que será el polo del polígono funicular de P_1 y P_2. Trazando por dicho polo una recta paralela al lado II, dicho rayo polar deberá pasar por el origen del vector representativo de P_2, cuyo extremo coincide en V con el extremo del vector representativo de R. Trazando por V una paralela a la dirección 2, su intersección con el rayo polar 2 determina el punto T, siendo el vector V–T representativo de P_2. El punto T es a la vez, extremo del vector representativo de P_1, por ser el punto de concurrencia de P_2 y el rayo polar 2. Como el origen de P_1 en el polígono de fuerzas debe coincidir con el origen del vector representativo de R, el vector T–S será representativo de P_1. Por lo tanto la paralela a T–S trazada por A, será la recta de acción de P_1, quedando así resuelto el problema planteado.

2.3. Fuerzas paralelas en el plano.

2.3.1. Reducción de sistemas de fuerzas paralelas.

Los sistemas de fuerzas paralelas constituyen un caso especial de los sistemas de fuerzas concurrentes, en que el punto de concurrencia es el punto impropio de la dirección de las fuerzas.

Si se trata de hallar la resultante de un sistema de dos fuerzas paralelas, por razones obvias, no es aplicable directamente el principio del paralelogramo de fuerzas. La solución gráfica del problema se obtiene mediante el trazado de un polígono funicular o bien en la forma que explicamos a continuación.

Sean las fuerzas paralelas P_1 y P_2 de figura 2.49 aplicadas en los puntos A y B respectivamente de un cuerpo rígido, y se pide hallar su resultante. Aplicando en A y B dos fuerzas opuestas Q y $-Q$, dirigidas según la recta AB, en virtud del tercer principio de la Estática, el efecto del sistema P_1, P_2 no se altera. Componiendo ahora Q y $-Q$ con P_1 y P_2 respectivamente, se obtienen las resultantes R_1 y R_2 y, en virtud del teorema de la transmisibilidad de las fuerzas, es posible desplazar sus puntos de aplicación sobre sus rectas de acción hasta el punto M de intersección de las mismas.

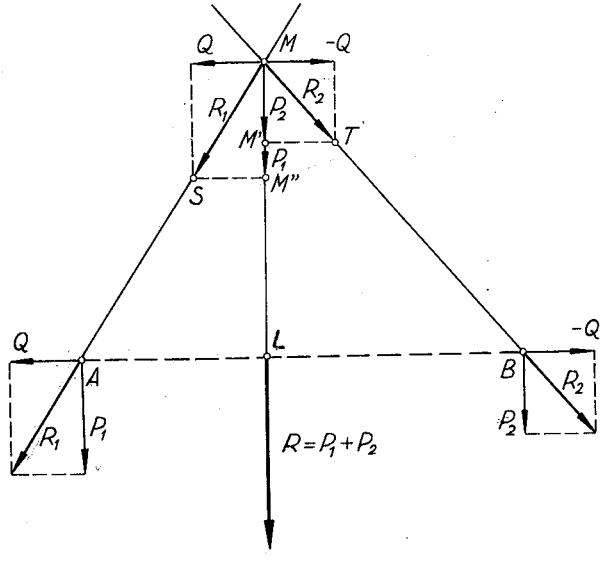


Fig. 2.49.

Descomponiéndolas ahora en sus componentes originarias, Q y $-Q$ pueden eliminarse por constituir un sistema nulo, y restan las fuerzas colineales P_1 y P_2, cuya resultante R viene dada por la suma algebraica de las mismas, siendo su recta de acción paralela a la dirección común de las componentes.

La recta de acción de la resultante divide al segmento AB en los segmentos AL y LB, inversamente proporcionales a las intensidades de P_2 y P_1 respectivamente. En efecto, los triángulos MLA y $MM''S$ son semejantes por construcción, y en los mismos se verifica:

$$\frac{LA}{M''S} = \frac{ML}{MM''} . \qquad [2.62]$$

Análogamente, en los triángulos MLB y $MM'T$, semejantes, se tiene

$$\frac{LB}{M'T} = \frac{ML}{MM'} . \qquad [2.63]$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones resulta

$$\frac{LA.M'T}{LB.M''S} = \frac{MM'}{MM''} . \qquad [2.64]$$

Pero $M'T = M''S$ por ser representativos de las intensidades de Q y $-Q$ respectivamente. Además $MM' = P_2$ y $MM'' = P_1$, luego reemplazando y simplificando en [2.64], se tiene

$$\frac{LA}{LB} = \frac{P_2}{P_1} \qquad [2.65]$$

La expresión [2.65] nos conduce a la siguiente construcción gráfica simple para hallar un punto de la recta de acción de la resultante de dos fuerzas paralelas.

Si en el sistema de figura 2.50 llevamos sobre la recta de acción de P_1 el vector representativo de P_2, y viceversa, y luego unimos el origen de P_1 con el extremo de P_2, y el origen de esta última con el extremo de la primera, resultan formados los triángulos semejantes $LL'S$ y $MM'S$, en los que se verifica que

$$\frac{LL'}{MM'} = \frac{LS}{SM} = \frac{AS}{SB} \qquad [2.66]$$

Pero $LL' = P_2$ y $MM' = P_1$, luego, reemplazando en [2.66]

$$\frac{AS}{SB} = \frac{P_2}{P_1} \qquad [2.67]$$

Es decir, que el punto S así determinado, divide la distancia AB entre las rectas de acción de las componentes, en dos segmentos inversamente proporcionales a las intensidades de las mismas. En consecuencia de acuerdo con [2.65], S será un punto de la recta de acción de la resultante R del sistema, la que de este modo queda completamente determinada. En efecto, su recta de acción será paralela a la dirección común de las componentes, porque debe pasar por el punto de concurrencia de ambas, en este caso impropio, y su intensidad estará dada por la suma de las intensidades de las componentes, coincidiendo su sentido con el de éstas.

De la construcción anterior surge que, siempre, la resultante de dos fuerzas paralelas del mismo sentido queda ubicada entre las rectas de acción de las componentes y más cerca de la mayor de ellas; que su dirección y sentido coinciden con las de éstas y que su intensidad es igual a la suma de las intensidades de las componentes.

Si ambas componentes tienen sentidos contrarios, la recta de acción de la resultante será exterior a las componentes. En efecto, repitiendo la construcción anterior en el caso de figura 2.50, como las dos fuerzas tienen sentidos contrarios, las rectas definidas por el origen del vector representativo de una, y extremo del de la otra, no resultan cruzadas, sino que se cortan fuera de la zona comprndida entre ambas rectas de acción. En este caso, como surge del análisis de la figura 2.51, la resultante se halla ubicada del lado de la componente de mayor intensidad, tiene su mismo sentido, y su intensidad es igual a la diferencia de las intensidades de las componentes.

En 1.10 expresamos que la resultante de un par de fuerzas podía asimilarse a una fuerza de intensidad infinitamente pequeña, cuya recta de

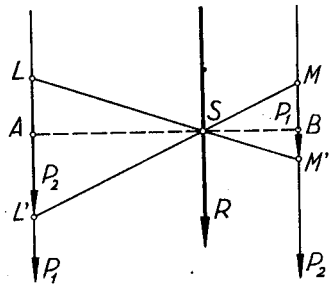


Fig. 2.50.

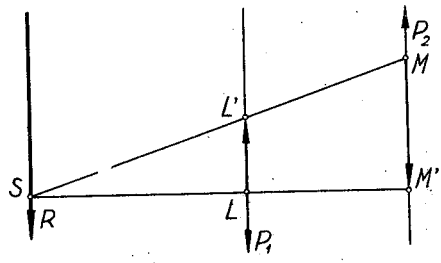


Fig. 2.51.

acción coincidía con la recta impropia del plano. Ello surge de inmediato, por extensión del problema de la composición de dos fuerzas paralelas de sentidos contrarios. En efecto, sea el sistema de figura 2.52, constituido por las fuerzas $|P_1| > |P_2|$, de sentidos contrarios. Definida su resultante R mediante la construcción explicada en párrafos anteriores, supongamos que aumente la intensidad de P_2 manteniéndose constante la de P_1. Evidentemente, el punto S, que define la posición de la resultante, se desplazará hacia la izquierda, en este caso, pasando a ocupar la posición S'. A medida que aumenta la intensidad de P_2 tanto más se alejará la recta de acción de R. En el límite, cuando $|P_1| = |P_2|$, las rectas ML' y $M'L$ resultarán paralelas y su punto de intersección S_∞ será impropio. Es decir que la recta de acción de la resultante pasará por el punto impropio S_∞ y como, además, debe concurrir al punto común de las rectas de acción de P_1 y P_2 que es impropio, contendrá dos puntos impropios siendo, en consecuencia, la recta impropia del plano. Por otra parte, al tender a igualarse las intensidades de las componentes, su diferencia, que como dijéramos antes, nos da la intensidad de la resultante, tiende a un valor infinitamente pequeño. Pero si $|P_1| = |P_2|$, el sistema constituye un par de fuerzas, con lo que queda demostrado que la resultante de un par puede asimilarse a una fuerza de intensidad infinitamente pequeña, cuya recta de acción coincide con la recta impropia del plano *.

La determinación de la resultante de dos fuerzas paralelas mediante el trazado de un polígono funicular es inmediata y no ofrece mayor difi-

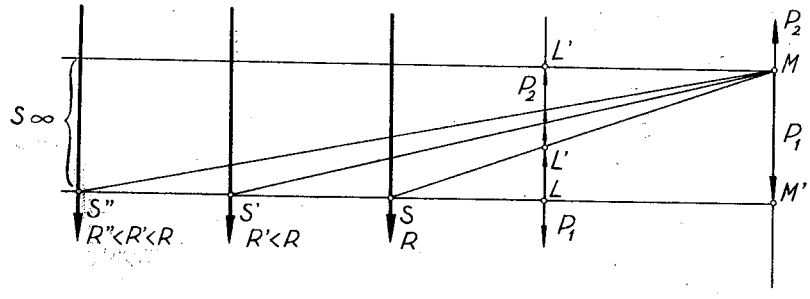


Fig. 2.52.

* Suele expresarse que la resultante de un par es una fuerza de intensidad cero y cuya recta de acción coincide con la recta impropia del plano. Esta definición es errónea, por cuanto si el sistema se reduce a una fuerza de intensidad cero, constituye un sistema nulo cuyo momento respecto de un punto cualquiera también debe ser nulo. Este no es el caso de un par por cuanto el momento de un par es constante con respecto a cualquier punto. Por otra parte, el par constituye un sistema irreductible, y su interpretación como una fuerza infinitamente pequeña actuando según la recta impropia del plano es al solo objeto de facilitar la resolución de ciertos problemas.

cultad, por lo que no entraremos en su detalle, haciéndolo en cambio al tratar la reducción de sistemas de más de dos fuerzas paralelas.

Si el sistema está constituido por más de dos fuerzas paralelas, su resultante puede hallarse mediante la aplicación reiterada de los procedimientos anteriormente descriptos. Para ello se determinaría primeramente la resultante de dos fuerzas cualesquiera. Luego se compondrá dicha resultante parcial con otra de las fuerzas y así sucesivamente, hasta componer la resultante de las primeras n–1 fuerzas con la fuerza de orden n, que será la resultante del sistema.

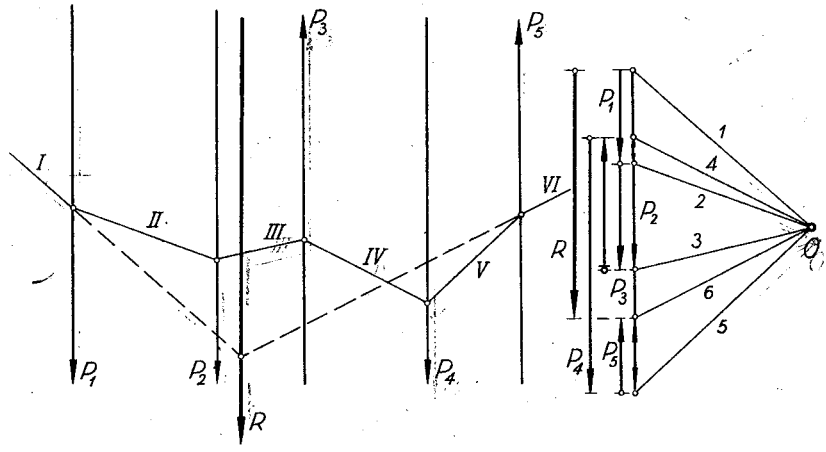


Fig. 2.53.

Esta manera de proceder es larga y engorrosa por lo que resulta más expeditivo, en el caso de varias fuerzas paralelas, el trazado de un polígono funicular de las mismas, cuyos lados extremos en su intersección, definen un punto de la recta de acción de la resultante. La intensidad y sentido de la misma se obtienen del polígono de fuerzas que, en este caso, degenera en una recta, ya que los vectores representativos de todas las fuerzas componentes tienen la misma dirección. En la figura 2.53 se ha procedido a determinar la resultante del sistema de fuerzas dado mediante un polígono funicular. La sencillez del procedimiento, por otra parte detallado en 2.2.2 al tratarse la reducción de sistemas no concurrentes, exime de mayores comentarios.

2.3.2. Descomposición (Equilibrio) de fuerzas paralelas.

El problema de la descomposición de una fuerza en dos componentes cuyas rectas de acción sean paralelas a la misma, o el problema inverso del

equilibrio de una fuerza mediante dos que le sean paralelas, se soluciona gráficamente mediante la utilización del polígono funicular.

Sea, por ejemplo, la fuerza R de figura 2.54, y se pide hallar sus componentes P_1 y P_2, cuyas rectas de acción son las paralelas (1) y (2). Para resolver el problema trazamos con polo O un polígono funicular cualquiera de R. Por ser el sistema incógnito P_1, P_2 equivalente a R, los lados extremos de un funicular de P_1, P_2 deben cortarse sobre un punto de la recta de acción de su resultante, en este caso R. En conse-

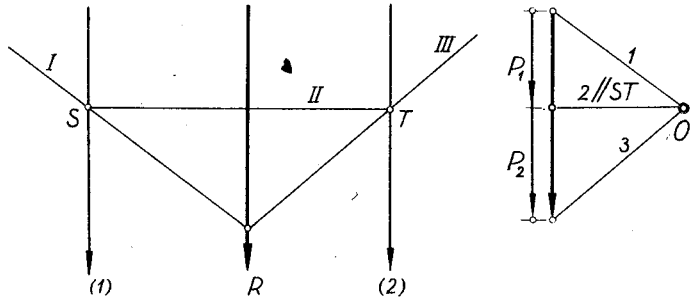


Fig. 2.54.

cuencia, los lados I y III del funicular trazado pueden considerarse como lados extremos del funicular del sistema incógnito. El lado II o intermedio de este funicular, debe concurrir con el lado I en un punto de la recta de acción de P_1, y con el lado III en otro de la recta de acción de P_2. En consecuencia, será la recta ST. Trazando por O una paralela a dicho lado intermedio, la misma constituirá el 2º rayo polar, que deberá pasar por el extremo del vector representativo de P_1 y por el origen del de P_2 en el polígono de fuerzas. Por lo tanto, su intersección con el vector representativo de R definirá los vectores representativos de las componentes buscadas, las que quedan perfectamente individualizadas, por cuanto en el polígono de fuerzas, los rayos polares se suceden en el mismo orden de secuencia en que aparecen los correspondientes lados en el polígono funicular. Así, por ejemplo, si los lados I y II del polígono funicular se cortan sobre la recta de acción de P_1, en el polígono de fuerzas los rayos polares respectivamente paralelos, es decir, el 1 y el 2, pasarán por el origen y extremo del vector representativo de P_1. Si se hubiese planteado el problema inverso, es decir, si se pudiera equilibrar R mediante dos fuerzas cuyas rectas de acción fueran (1) y (2), la construcción gráfica habría sido la misma, siendo necesario únicamente cambiar el sentido a las componentes P_1 y P_2 para obtener las correspondientes equilibrantes.

Si las rectas de acción de las componentes incógnitas estuvieran ubicadas a un mismo lado de la resultante R, tal el caso de figura 2.55, el problema se resuelve en forma semejante. Trazado un funicular de R, se determinan los puntos S y T en que sus lados I y III cortan respectivamente a las rectas de acción de las componentes buscadas. La recta ST constituye el lado II intermedio del polígono funicular de P_1 y P_2, cuya

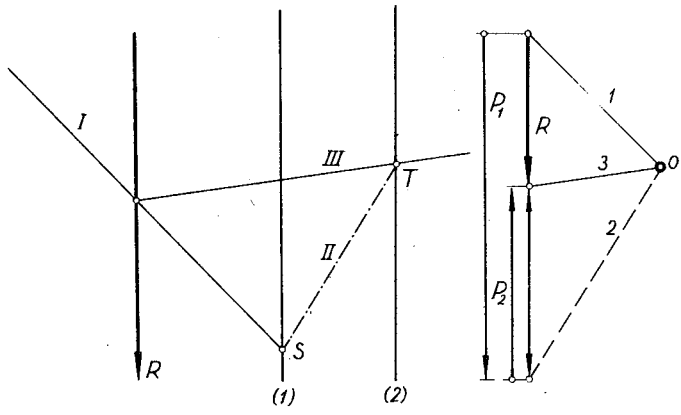


Fig. 2.55.

paralela trazada por O nos define sobre el vector representativo de R las componentes buscadas. En este caso, como es lógico, ambas tienen sentidos contrarios, correspondiendo a P_1 por ser más próxima a R el mayor valor absoluto y el mismo sentido que la resultante.

2.3.3. Determinación analítica de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas. Equilibrio.

Por ser los sistemas de fuerzas paralelas casos particulares de los sistemas de fuerzas concurrentes, sólo deberán plantearse para los mismos dos ecuaciones de condición.

Estas ecuaciones de condición podrán plantearse en forma de una ecuación de proyección respecto de un eje, siempre que el mismo no sea normal a la dirección común de las fuerzas, y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera del plano, o bien dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos cualesquiera, siempre que los mismos no definan una recta paralela a la dirección común del sistema. La posibili-

dad de plantear dos ecuaciones de proyección sobre dos ejes no coincidentes queda excluida, por cuanto una sería consecuencia de la otra.

Por lo tanto, la resultante de un sistema de fuerzas paralelas quedará determinada analíticamente si se cumple cualquiera de los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} R \cdot \cos \varphi_R &= \sum_1^n P_i \cdot \cos \varphi_i \\ M_R^A &= \sum_1^n M_i^A \end{aligned} \qquad [2.68]$$

o bien

$$\begin{aligned} M_R^A &= \sum_1^n M_i^A \\ M_R^B &= \sum_1^n M_i^B \end{aligned} \qquad [2.69]$$

Al resolver problemas relativos a sistemas de fuerzas paralelas conviene orientar el sistema de ejes de referencia en forma que uno de ellos coincida con la dirección común de las fuerzas. En esta forma las expresiones [2.68] y [2.69] se simplifican en el primer caso y adoptan la forma siguiente, en el supuesto de haber orientado el eje y paralelamente a las fuerzas:

$$\begin{aligned} R \equiv R_y &= \sum_1^n P_i \\ R\,(z_A - z_R) &= \sum_1^n P_i\,(z_A - z_i) \end{aligned} \qquad [2.70]$$

donde z_A es la abscisa del punto A, centro de momentos adoptado, z_R la abscisa de un punto cualquiera de la recta de acción R y z_i la correspondiente a las rectas de acción de cada una de las fuerzas componentes.

La primera de las [2.70] nos dan la intensidad y sentido de R. Su dirección es conocida por coincidir con la del sistema, y la segunda ecuación tiene como única incógnita z_R, quedando así completamente determinada la resultante.

Si se utilizan dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos A y B, las [2.69] toman la forma siguiente:

$$R(z_A - z_R) = \sum_1^n P_i(z_A - z_i)$$
$$R(z_B - z_R) = \sum_1^n P_i(z_B - z_i) \qquad [2.71]$$

sistema de dos ecuaciones simultáneas, donde las incógnitas son la intensidad de R y la abscisa z_R de su recta de acción; resuelto el sistema queda definida la resultante R.

2.3.4. Condiciones analíticas para el equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas.

El caso más general de los sistemas de fuerzas paralelas es aquél en que existen fuerzas de sentidos contrarios. Halladas las resultantes de las fuerzas de uno y otro sentido, pueden presentarse los casos siguientes:

a) Las rectas de acción de las resultantes parciales coinciden.

b) Las rectas de acción de las resultantes parciales no coinciden.

Cada uno de estos dos casos admite a su vez dos posibilidades:

1) Las dos resultantes tienen la misma intensidad.

2) La intensidad de las dos resultantes es distinta.

Como los sentidos de las dos resultantes parciales son siempre contrarios, el análisis de los casos a) y b) en sus dos posibilidades nos conduce a las siguientes conclusiones:

Caso a–1: El sistema se encuentra en equilibrio, por cuanto se ha reducido a un sistema de dos fuerzas opuestas, es decir, nulo.

Caso b–1: El sistema se reduce a un par de fuerzas. En efecto, el sistema se ha reducido a dos fuerzas de igual intensidad, sentidos contrarios y cuyas rectas de acción son paralelas, condiciones éstas que definen el par de fuerzas.

Caso a–2: El sistema admite una resultante, por cuanto las dos resultantes parciales son fuerzas colineales que, sumadas algebraicamente, nos conducen a la resultante del sistema.

Caso b–2: También en este caso el sistema se reduce a una resultante única. En efecto, se tienen dos fuerzas paralelas, de distintas intensidades, sentidos y rectas de acción, que compuestas nos dan la resultante buscada.

Los casos *a* y *b* en sus posibilidades 2, se contemplan analíticamente mediante las ecuaciones [2.70] o [2.71].

Si, tanto las expresiones [2.70] como las [2.71] resultan nulas, las mismas establecen el equilibrio del sistema considerado. En efecto, en el primer caso, si al proyectar el sistema de fuerzas sobre un eje paralelo a su dirección común, la suma de las proyecciones de las fuerzas es nula, la intensidad de la resultante debe ser cero, y, necesariamente, el sistema debe encontrarse en equilibrio por cuanto, al ser nula la suma de los momentos del sistema respecto de un punto cualquiera, queda excluida la posibilidad de que el sistema se reduzca a un par. En el segundo caso, es decir, si se han planteado dos ecuaciones de momentos respecto de dos puntos A y B, y las mismas son simultáneamente nulas, necesariamente debe existir equilibrio. En efecto, por la condición de momento nulo respecto de A, o bien la resultante es nula o pasa por A. Por la segunda, o R es nula o pasa por B. Como A y B no definen una recta paralela a la dirección común de las fuerzas, queda excluida la posibilidad de existencia de una resultante y, en consecuencia, el sistema debe encontrarse en equilibrio.

Finalmente, si en las [2.70], la ecuación de proyección es nula pero la de momentos es distinta de cero, el sistema se reduce a un par de fuerzas. En efecto, todo par de fuerzas tiene momento distinto de cero respecto de un punto cualquiera del plano, pero su proyección sobre cualquier eje es nula. De haberse planteado las condiciones [2.71], el sistema se reduce a un par de fuerzas en el caso en que ambas ecuaciones tengan el mismo valor numérico e igual signo. Ello es evidente, por cuanto los puntos elegidos como centros de momentos son arbitrarios, y el momento de un par de fuerzas es constante cualquiera sea el centro elegido.

Resumiendo, diremos que un sistema general de fuerzas paralelas en el plano, interpretado analíticamente, presenta las siguientes posibilidades:

a) El sistema admite resultante si se cumple

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^n P_i \neq 0 \\ \sum_1^n M_i^A \neq 0 \end{array}\right\} \quad \text{o bien} \quad \left.\begin{array}{l} \sum_1^n M_i^A \neq 0 \\ \sum_1^n M_i^B \neq 0 \end{array}\right\} \qquad [2.72]$$

b) El sistema se reduce a un par de fuerzas cuando

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n P_i &= 0 \\ \sum_1^n M_i^A &\neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien} \quad \sum_1^n M_i^A = \sum_1^n M_i^B = \text{C}^{\text{te.}} \qquad [2.73]$$

c) El sistema se encuentra en equilibrio si

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n P_i &= 0 \\ \sum_1^n M_i^A &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien} \quad \sum_1^n M_i^A = \sum_1^n M_i^B = 0 \qquad [2.74]$$

2.3.5. Centro de fuerzas paralelas.

Sean las fuerzas paralelas P_1 y P_2, de figura 2.56, aplicadas en los puntos A y B de un mismo cuerpo rígido. Su resultante será una fuerza de intensidad $R = P_1 + P_2$, paralela a sus componentes y cuya recta de acción se encuentra ubicada a distancias tales de las mismas que cumplan con la condición

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_2}{d_1}. \qquad [2.75]$$

La recta de acción de la resultante corta la recta AB en un punto C. Si ahora giramos las fuerzas un ángulo α cualquiera, alrededor de sus puntos de aplicación, la resultante, evidentemente, también girará el mismo ángulo, porque debe ser paralela a sus componentes. El giro de la resultante ocurre alrededor del punto C mencionado. En efecto, cualquiera sea la dirección de las fuerzas paralelas, la recta de acción de la resultante debe ocupar una posición tal que cumpla con la condición [2.75].

Si por C trazamos la recta MN, normal a la nueva dirección de las fuerzas, quedan

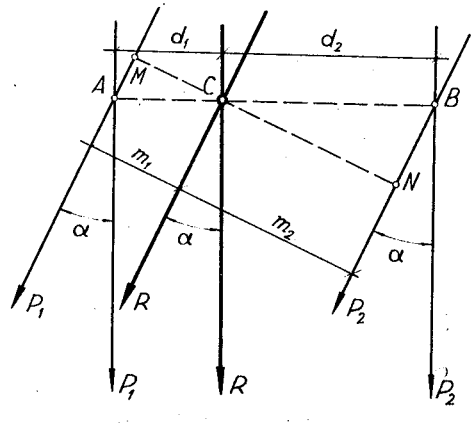


Fig. 2.56.

formados los triángulos semejantes AMC y BNC, en los que se verifica que

$$\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC} \qquad [2.76]$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{d_1}{m_1} = \frac{d_2}{m_2} \qquad [2.77]$$

de donde, por la [2.75]

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{P_1}{P_2} \qquad [2.78]$$

es decir que C es un punto de la recta de acción de la resultante de las fuerzas, actuando en la nueva dirección. Como el ángulo girado por las fuerzas paralelas se eligió arbitrariamente, queda con ello demostrado que, al girar las fuerzas alrededor de su punto de aplicación de un ángulo cualquiera, su resultante gira el mismo ángulo alrededor de un punto, alineado con los puntos alrededor de los cuales giran las fuerzas componentes. Dicho punto se denomina *centro de fuerzas paralelas.*

El concepto de centro de fuerzas paralelas se extiende también al caso de sistemas constituidos por cualquier número de fuerzas paralelas. En efecto, consideremos el sistema $P_1 \ldots P_4$ de figura 2.57, y hallemos primeramente el centro C_1 de las fuerzas P_1 y P_2, por donde pasará la resultante $R_{1,2}$ de las mismas.

Siendo $R_{1,2}$ equivalente al sistema P_1, P_2, estamos en condiciones de hallar en la forma conocida, el centro C_2 correspondiente al sistema constituido por $R_{1,2}$ y P_3. En forma semejante hallamos el centro

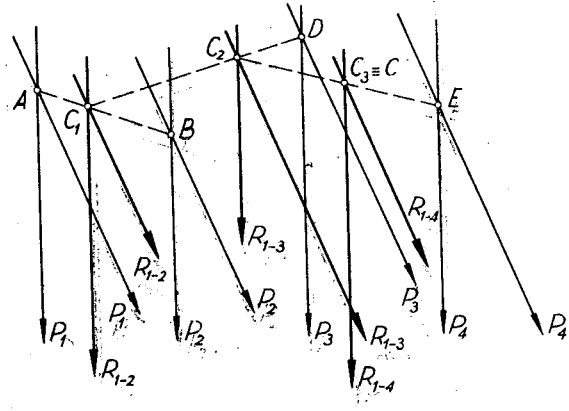


Fig. 2.57.

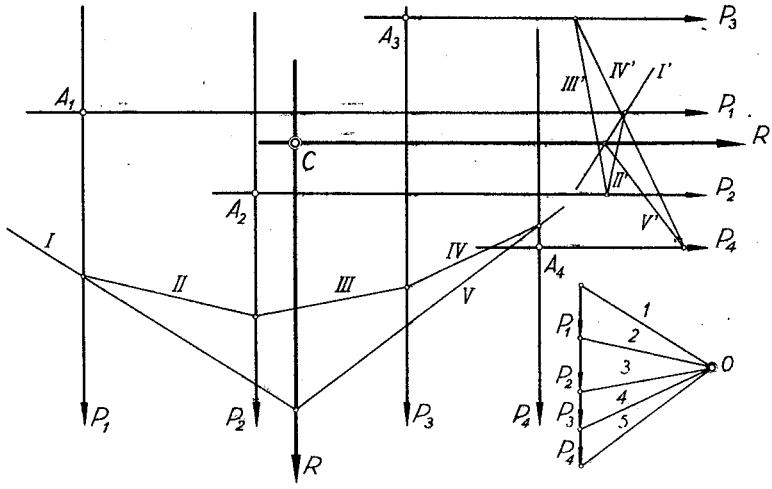


Fig. 2.58.

C_3, correspondiente a $R_{1,3}$ y P_4, que será el centro C del sistema de fuerzas praralelas dado.

Esta forma de proceder resulta un tanto laboriosa, por lo que es más simple determinar el centro de fuerzas paralelas en la forma siguiente.

Teniendo en cuenta que el centro de un sistema no varía, cualquiera sea el ángulo que giren las fuerzas que lo constituyen, hagamos actuar primeramente las fuerzas aplicadas en los puntos dados, en una dirección determinada, y hallemos su resultante mediante el trazado de un polígono funicular. Giremos ahora 90° todas las fuerzas del sistema, y determinemos nuevamente su resultante. Si se utiliza para el trazado de los polígonos de fuerzas la misma distancia polar, los rayos polares del segundo polígono de fuerzas serán normales a los del primero. En consecuencia, su construcción no será necesaria, siendo suficiente trazar un polígono funicular cuyos lados sean respectivamente ortogonales con los del primero. Ello es lo que se ha efectuado en el caso de figura 2.58. Determinadas las dos resultantes, su intersección nos define el centro de fuerzas paralelas del sistema dado.

El centro de fuerzas paralelas puede también determinarse analíticamente. Supongamos un sistema de fuerzas paralelas, aplicadas en los puntos A_i de figura 2.59, referidos a los ejes coordenados z, y y hagámoslo actuar según la dirección de ambos ejes. La segunda de las ecuaciones [2.70] nos definía una coordenada de un punto de la recta de acción de la resultante. Si la aplicamos para cada una de las direcciones en que he-

mos hecho actuar las fuerzas del sistema, y si, además, elegimos como centro de momentos al origen O de coordenadas, tendremos.

$$\left.\begin{aligned} R(-y_R) &= \sum_1^n P_i(-y_i) \\ R(-z_R) &= \sum_1^n P_i(-z_i) \end{aligned}\right\} \qquad [2.79]$$

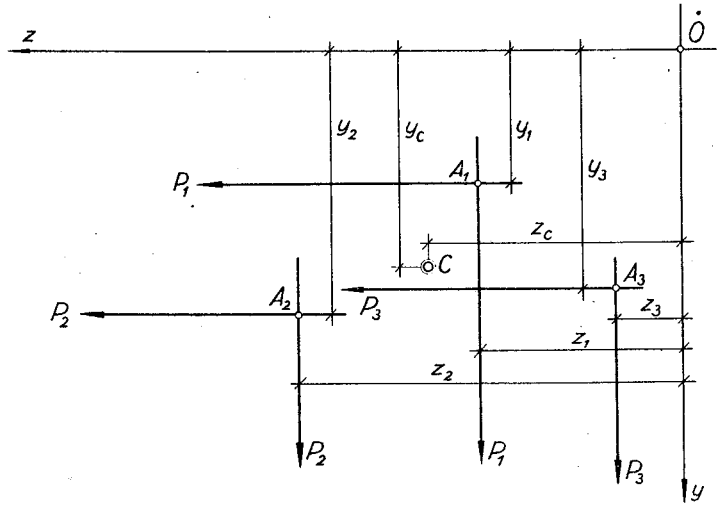


Fig. 2.59.

Cada una de las [2.79] representa la ecuación de una recta (recta de acción de la resultante), paralela respectivamente a cada uno de los ejes coordenados, cuya intersección corresponde al centro de fuerzas paralelas del sistema dado, cuyas coordenadas serán

$$z_G = \frac{\sum_1^n P_i z_i}{R} \qquad [2.80]$$

$$y_G = \frac{\sum_1^n P_i y_i}{R}$$

Si aumentamos la intensidad de las fuerzas en forma proporcional, la posición del centro de fuerzas paralelas no varía. En efecto, aumentar proporcionalmente la intensidad de las fuerzas del sistema significa multipli-

car la intensidad de cada una de ellas por un mismo factor constante. Dicho factor aparecerá n veces, tanto en el numerador como en el denominador de los segundos miembros de las expresiones [2.80] que definen el centro de fuerzas paralelas y, en consecuencia, puede eliminarse por simplificación, quedando dichas expresiones sin modificar.

Si todas las fuerzas del sistema tuviesen la misma intensidad P, las expresiones [2.80] tomarían la forma siguiente:

$$z_G = \frac{P\sum_1^n z_i}{nP} = \frac{\sum_1^n z_i}{n}, \qquad y_G = \frac{P\sum_1^n y_i}{nP} = \frac{\sum_1^n z_i}{n}; \qquad [2.81]$$

es decir, que las coordenadas del centro de fuerzas paralelas se obtendrían como promedio de las correspondientes coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas del sistema.

3. Sistemas espaciales de fuerzas.

3.1. Fuerzas concurrentes en el espacio.

En el espacio, el menor número de fuerzas que pueden integrar un sistema concurrente es tres, por cuanto, si se tratara de sólo dos, sus rectas de acción definirían un plano, y se estaría en el caso de un sistema plano. En lo que sigue, para el tratamiento analítico de los problemas inherentes a sistemas de fuerzas en el espacio, adoptaremos una terna izquierda de ejes ortogonales, tales como los indicados en la figura 1.27.

3.1.1. Composición gráfica de fuerzas concurrentes en el espacio.

Sea un punto A de un cuerpo rígido, figura 3.1, al que concurren tres fuerzas P_1, P_2 y P_3, no coplanares, de las que nos proponemos hallar su resultante R. Si, consideramos dos de ellas, las P_1 y P_2 por ejemplo, al ser coplanares, podemos aplicar el principio del paralelogramo de fuerzas, y determinar su resultante $R_{1,2}$. Trabajando ahora en el plano definido por esta última y la tercera componente P_3, en forma análoga podemos hallar su resultante que, a la vez, es la resultante total del sistema dado. Vemos en la figura que la resultante R constituye la diagonal del paralelepípedo constituido con aristas iguales a los vectores representativos de las fuerzas componentes.

Observando en la figura 3.1 la secuencia A, M, N, T, vemos que en la misma aparecen unos a continuación de otros los vectores representativos de las fuerzas P_1, P_2 y P_3, y que el vector representativo de la resultante R queda definido entre los puntos A y T; es decir, entre el origen del vector representativo de P_1 y el extremo del de P_3, respectivamente.

En consecuencia, para hallar la resultante de tres fuerzas concurrentes en el espacio, no es necesario construir el paralelepípedo de fuerzas, equivalente al paralelogramo del caso de fuerzas en el plano, sino que es suficiente construir un *polígono espacial* de fuerzas (figura 3.1 b), llevando uno a continuación del otro, orientados, los vectores representativos de las fuerzas componentes.

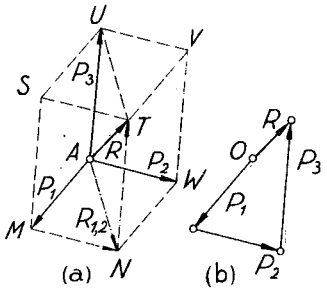


Fig. 3.1.

El procedimiento explicado puede extenderse al caso de un número cualquiera de fuerzas concurrentes en el espacio. Basta para ello hallar primeramente la resultante de tres cualesquiera de ellas, y luego componerla con otra. La nueva resultante hallada se compone a su vez con otra de las fuerzas hasta hallar la resultante total del sistema.

La determinación de la resultante de un sistema constituido por un número cualquiera de fuerzas se simplifica si se utiliza un polígono espacial por cuanto, en tal caso, basta llevar, a partir de un punto cualquiera, uno a continuación del otro, los vectores representativos de las componentes, quedando definido el vector representativo de la resultante por el origen del representativo de la primera fuerza y el extremo del de la última.

Prácticamente, si se desea proceder en forma gráfica a hallar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio, es necesario

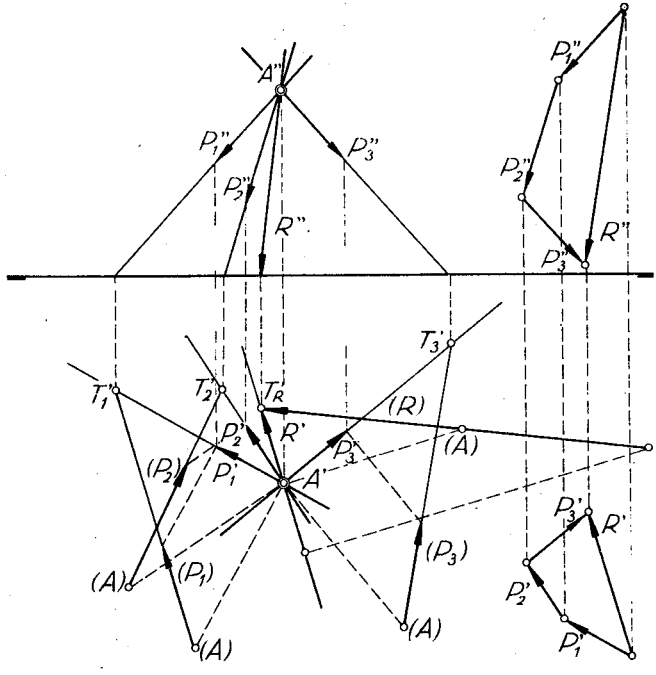


Fig. 3.2.

trabajar en método Monge, con las proyecciones de las fuerzas sobre dos planos ortogonales. Como la resultante de las proyecciones de un sistema de vectores sobre un plano es igual a la proyección de la resultante del mismo, el problema se reduce a hallar las resultantes de dos sistemas concurrentes planos, que constituirán las proyecciones buscadas. Conocidas éstas, mediante el simple abatimiento del plano proyectante de la icnografía de R, y su desproyección, se obtiene la intensidad de la misma. En la figura 3.2 se ha ilustrado, mediante un ejemplo, la composición gráfica de un sistema constituido por tres fuerzas concurrentes, dadas por sus proyecciones orto e icnográficas. La sencillez del procedimiento, que constituye una simple aplicación de métodos de Geometría Descriptiva, nos exime de mayores comentarios al respecto.

3.1.2. Equilibrio y descomposición de fuerzas concurrentes en el espacio. Solución gráfica.

Si dado un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio construimos su polígono espacial de fuerzas, y encontramos que el extremo del último vector representativo de las fuerzas coincide con el origen del representativo de la primera, resulta entonces que el vector que representa a la resultante es de intensidad cero. El sistema equivalente al dado será nulo y, en consecuencia, habrá equilibrio. Es decir, que la condición gráfica para que un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio se encuentre en equilibrio es que su polígono espacial de fuerzas sea cerrado.

Observando la figura 3.1 a, vemos que los planos *STMN*, *TVNW* y *STUV*, cuya intersección determina el punto T, extremo del vector representativo de R, son paralelos respectivamente a los planos determinados dos a dos por las direcciones de las fuerzas, y pasan por el extremo del vector representativo de la tercera. En consecuencia, dada una fuerza R y tres direcciones concurrentes con la misma, si se pide hallar las componentes de aquélla según estas tres últimas direcciones, bastará trazar por el extremo del vector representativo de R tres planos, paralelos respectivamente a los planos determinados dos a dos por las tres direcciones dadas. La intersección de cada plano con una de las direcciones, definirá el extremo de un vector, que será representativo de la intensidad de la correspondiente componente.

No obstante, como veremos más adelante, existen otros procedimientos para descomponer una fuerza en tres componentes concurrentes en el espacio a un punto de su recta de acción, de más simple aplicación que el descripto. No debe olvidarse que, tratándose de fuerzas en el espacio, no es posible operar con ellas como en el caso de sistemas planos de fuerzas, siendo necesario recurrir a los procedimientos de la Geometría Descripti-

va. Precisamente, la forma indicada para descomponer una fuerza en tres componentes, si bien conceptualmente es simple, prácticamente resulta sumamente laboriosa.

3.1.3. Composición analítica de fuerzas concurrentes en el espacio.

Sea, figura 3.3, una fuerza P aplicada en O y llevemos a partir de su punto de aplicación el vector representativo de la misma. Consideremos ahora la terna izquierda x, y, z y hagamos coincidir su origen con el punto de aplicación de P. Si llamamos α, β y γ los ángulos que la dirección de la fuerza (con el sentido de la misma) forma con los ejes coordenados x, y, z respectivamente, las proyecciones de P sobre cada uno de ellos tendrán las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P.\cos\alpha \\ P_y &= P.\cos\beta \\ P_z &= P.\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad [3.1]$$

Los tres cosenos se denominan *cosenos directores* de la dirección de la fuerza, y entre los tres debe cumplirse la relación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad [3.2]$$

Conocidas las proyecciones de una fuerza sobre tres ejes coordenados ortogonales, la misma queda completamente definida. En efecto, de la observación de la figura 3.3 surge que dichas proyecciones son, a la vez, sus componentes según tres direcciones ortogonales, siendo el vector representativo de P la diagonal del paralelepípedo rectángulo, en este caso, construido con aristas iguales a los vectores representativos de las tres proyecciones.

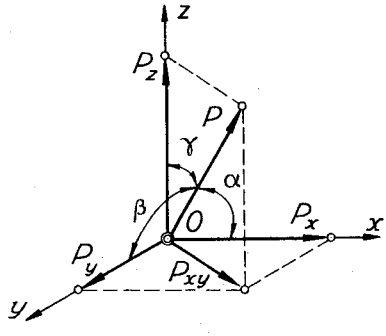


Fig. 3.3.

De figura 3.3 se tiene:

$$|P_{xy}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \qquad [3.3]$$

y

$$|P| = \sqrt{P_{xy}^2 + P_z^2}\,; \qquad [3.4]$$

de donde, reemplazando [3.3] en [3.4]

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}\,. \qquad [3.5]$$

Es decir que, dadas las proyecciones de una fuerza sobre tres ejes coordenados ortogonales, la misma queda completamente definida, por cuanto su intensidad se obtiene mediante la expresión [3.5] y su dirección se establece calculando sus cosenos directores mediantes las expresiones

$$\cos\alpha = \frac{P_x}{|P|}\,,$$

$$\cos\beta = \frac{P_y}{|P|}\,, \qquad [3.6]$$

$$\cos\gamma = \frac{P}{|P|}\,.$$

El sentido de P depende del signo relativo de sus cosenos directores que permiten establecer el octante en que se halla ubicada la fuerza. A fin de facilitar la ubicación de la fuerza en los distintos octantes, se ha confeccionado el cuadro siguiente, en el que se indican los octantes según el sentido de los correspondientes semiejes, y los respectivos signos de los cosenos directores.

octante	x	y	z	cos α	cos β	cos γ
1	+	+	+	+	+	+
2	−	+	+	−	+	+
3	−	−	+	−	−	+
4	+	−	+	+	−	+
5	+	+	−	+	+	−
6	−	+	−	−	+	−
7	−	−	−	−	−	−
8	+	−	−	+	−	−

Consideremos ahora el caso de figura 3.4, donde se trata de un sistema de n fuerzas P_i, concurrentes al punto A, no coplanares, de las que se pide hallar la resultante R.

De las fuerzas dadas se conocen su intensidad P_i y sus cosenos directores: cos α_i, cosβ_i, cosγ_i, que cumplen la condición de que la suma de sus cuadrados es igual a la unidad. Para hallar analíticamente la resultante del sistema, seguiremos un razonamiento análogo al empleado para hallar la resultante de un sistema concurrente en el plano. Haciendo coincidir el origen de coordenadas con el punto de concurrencia de las fuerzas y proyectando cada una de ellas sobre los tres ejes resulta:

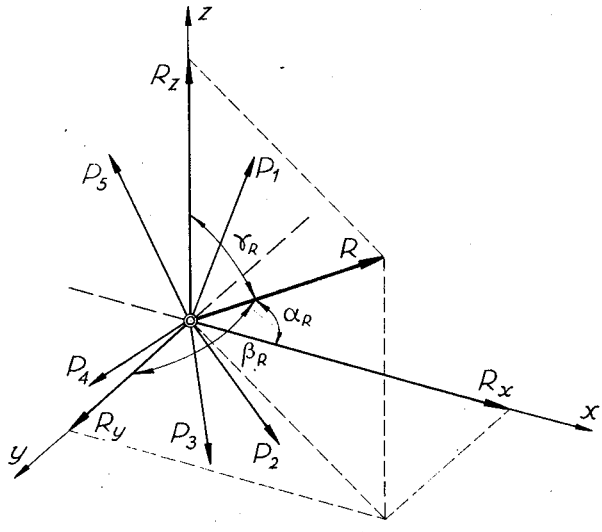


Fig. 3.4.

$$\left.\begin{array}{lll} X_1 = P_1.\cos\alpha_1 \; ; & Y_1 = P_1.\cos\beta_1 \; ; & Z_1 = P_1.\cos\gamma_1 \\ X_2 = P_2.\cos\alpha_2 \; ; & Y_2 = P_2.\cos\beta_2 \; ; & Z_2 = P_2.\cos\gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\

Esta resultante queda completamente definida mediante tres ecuaciones de proyección sobre los tres ejes coordenados. En efecto, las [3.8] nos definen sus tres componentes:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_1^n P_i \,.\cos\alpha_i \\ R_y &= \sum_1^n P_i \,.\cos\beta_i \\ R_z &= \sum_1^n P_i \,.\cos\gamma_i \end{aligned}\right\} \qquad [3.9]$$

Determinadas las componentes, la intensidad se obtiene de

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad [3.10]$$

y la dirección mediante los cosenos directores, cuya expresión es la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_R &= \frac{R_x}{|R|} \\ \cos\beta_R &= \frac{R_y}{|R|} \\ \cos\gamma_R &= \frac{R_z}{|R|} \end{aligned}\right\} \qquad [3.11]$$

3.1.4. Momento de una fuerza respecto de un eje.

En el espacio, el momento de una fuerza respecto de un punto cualquiera se define en la misma forma que para los sistemas planos, por cuanto la recta de acción de la fuerza y el centro de momentos definen un plano que contiene a ambos.

Consideremos ahora, figura 3.5, una fuerza P y un eje cualquiera e, no coplanar con la recta de acción de P,

Se define como *momento* de la fuerza P respecto del eje e, al momento de la proyección de P sobre un plano normal al eje, con respecto al punto en que el eje corta al plano de proyección.

Por comodidad, en el caso de figura 3.5 hemos elegido un eje normal al plano x y, en consecuencia, este último constituye el plano sobre el que se debe proyectar la fuerza. Llamando P' a la proyección de P se tiene:

$$M_e = P' \,.\, d_1 \qquad [3.12]$$

El momento de una fuerza respecto de un eje será nulo cuando lo sea uno de los dos factores del segundo miembro de la expresión [3.12]. Si P' es nula, o P es cero o es normal al plano de proyección y, en consecuencia, es paralela al eje. En cambio, si la distancia d_1 es cero, P' y, en consecuencia también P, cortan al eje. Descartando el caso en

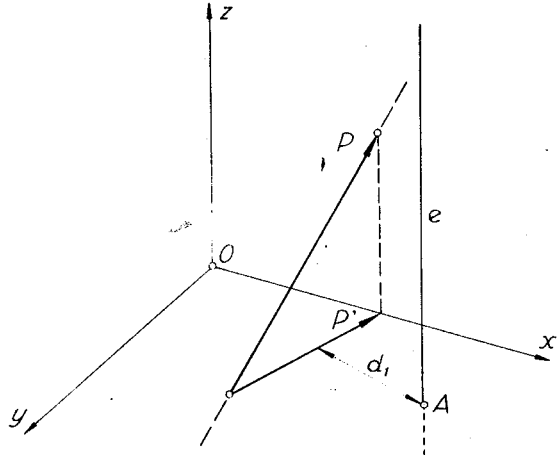


Fig. 3.5.

que P sea nula, las restantes posibilidades que se presentan para P, se resumen en una única: el momento de una fuerza respecto de un eje será nulo cuando el eje y la recta de acción de la fuerza sean *coplanares*.

Entre el momento de una fuerza respecto de un eje y el momento de la misma fuerza respecto de un punto cualquiera de dicho eje existe una relación, que demostraremos a continuación. Sea, figura 3.6 la fuerza P, un eje e y un punto O del mismo. El momento de P respecto de O será igual al producto de la intensidad de P por la distancia de O a su recta de acción, es decir:

$$M_p^o = P.d_1 \ . \qquad [3.13]$$

Si sobre la recta de acción de P llevamos, a partir de un punto cualquiera, el vector representativo de la misma, de acuerdo con lo establecido en 1.6, el valor numérico del momento de P respecto de O estará dado por el doble del área de la superficie del triángulo MNO. A su vez, y conforme a lo que acabamos de ver, el momento de P respecto del eje e tiene por expresión:

$$M_P^e = P'.d \qquad [3.14]$$

y su valor numérico será igual al doble del área de la superficie del triángulo $M'N'O$, que tiene por base la proyección del vector representativo P sobre el plano π, normal a e, y por altura la distancia entre O y la recta de acción de P'.

Si adoptamos la representación vectorial para ambos momentos, tendremos los vectores M_P^e y M_P^o, normales a los planos definidos por O y las rectas de acción de P' y P respectivamente, y cuyas direcciones forman un ángulo φ igual al ángulo diedro de los planos mencionados.

Por otra parte, se tiene:

$$\text{área } M'N'O = \text{área } MNO \,.\cos\varphi \qquad [3.15]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{2} P'.d = \frac{1}{2} P.d_1 \cos\varphi \;; \qquad [3.16]$$

es decir

$$M_P^e = M_P^o \cos\varphi \;. \qquad [3.17]$$

En consecuencia, el momento de una fuerza respecto de un eje, es igual a la proyección sobre dicho eje, del momento de la misma fuerza respecto de un punto cualquiera del eje.

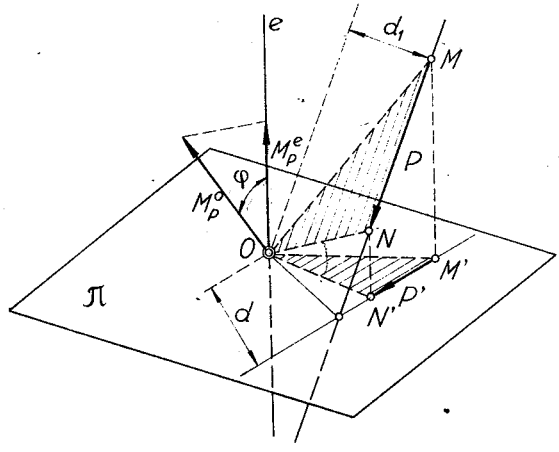


Fig. 3.6.

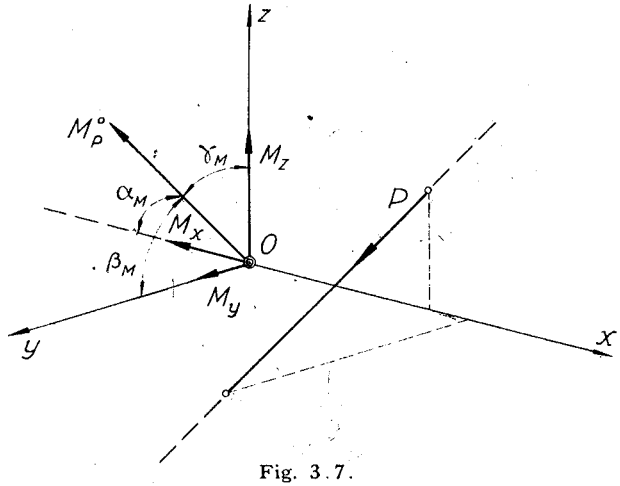


Fig. 3.7.

Si tenemos por ejemplo, figura 3.7, una fuerza P en el espacio y tomamos momento de la misma respecto del origen de coordenadas, este momento podemos representarlo vectorialmente por el vector M_p^o, normal al plano determinado por la recta de acción de P y el punto O, de intensidad igual a $P.d$, siendo d la distancia de O a P, y cuyo sentido será tal que responda a la regla establecida en 1.7. Este vector momento forma, con respecto a los tres ejes coordenados, los ángulos α_M, β_M y γ_M. Proyectándolo sobre los tres ejes tendremos:

$$M_x = M_p^o \cos \alpha_M$$

$$M_y = M_p^o \cos \beta_M \qquad [3.18]$$

$$M_z = M_p^o \cos \gamma_M$$

Pero, de acuerdo con la [3.17], estas expresiones corresponden precisamente a los momentos de P respecto de los ejes x, y z. En consecuencia, tenemos que los momentos de una fuerza P respecto de tres ejes ortogonales constituyen precisamente las componentes según dichos ejes del vector momento de la misma fuerza respecto del punto de concurrencia de los ejes.

El teorema de Varignon, demostrado en 1.8, puede extenderse al caso del momento respecto de un eje, de dos fuerzas concurrentes y de su resultante. En efecto, sea el sistema de figura 3.8 constituido por las fuerzas P_1 y P_2 aplicadas en A, y sea R su resultante. Consideremos un eje e cualquiera del espacio, y un plano π normal al mismo.

Proyectado el sistema de fuerzas sobre el plano, obtenemos un nuevo sistema concurrente en A'. Si O es el punto en que el eje corta al plano, de acuerdo con el Teorema de Varignon, el momento de R' respecto de O será igual a la suma algebraica de los momentos de P'_1 y P'_2 respecto del mismo punto, es decir

$$M^{o}_{R'} = M^{o}_{P'_1} + M^{o}_{P'_2} . \qquad [3.19]$$

Pero, por definición de momento de una fuerza respecto de un eje, se tiene que

$$M^{o}_{R'} = M^{e}_{R} ; \quad M^{o}_{P'_1} = M^{e}_{P_1} ; \quad M^{o}_{P'_2} = M^{e}_{P_2} ; \qquad [3.20]$$

Reemplazando las igualdades [3.20] en [3.19] resulta

$$M^{e}_{R} = M^{e}_{P_1} + M^{e}_{P_2} . \qquad [3.21]$$

Es decir, que el momento de la resultante de dos fuerzas concurrentes respecto de un eje cualquiera del espacio, es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes respecto del mismo eje.

Si en lugar de tratarse de sólo dos fuerzas concurrentes, tuviéramos un sistema de n fuerzas concurrentes y no coplanares, podemos extender a este caso los conceptos anteriores. En efecto, si tomamos dos cualesquiera de las fuerzas, por lo que hemos visto, la suma de sus momentos es igual al momento de su resultante. Considerando ahora esta resultante una tercera fuerza, ambas admitirán, a su vez, una nueva resultante cuyo momento respecto del eje elegido será igual a la suma algebraica

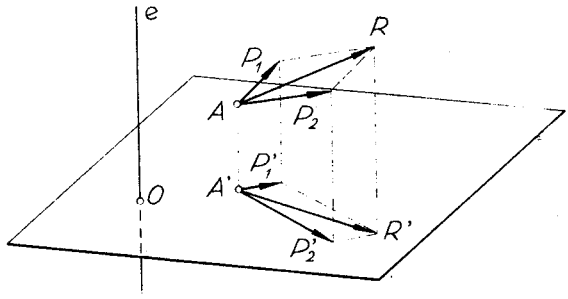


Fig. 3.8.

de los momentos de la primitiva resultante y la tercera fuerza respecto del mismo eje. Aplicando sucesivamente este concepto con todas las nuevas resultantes parciales, diremos que el momento de un sistema de fuerzas concurrentes y no coplanares respecto de un eje cualquiera del espacio, es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes respecto del mismo eje. Analíticamente, su expresión es

$$M_R^e = \sum_1^n M_i^e \ . \qquad [3.22]$$

Si, en cambio, estableciéramos, para un sistema de fuerzas concurrentes y no coplanares, los momentos no ya respecto de un eje sino de un *punto* del espacio, con respecto al mismo, el momento de la resultante del sistema se obtendría como suma *geométrica* o vectorial de los momentos de las componentes. Ello resulta evidente si se adopta la representación vectorial de los momentos. En efecto, como las rectas de acción de las fuerzas que constituyen el sistema no son coplanares, los planos definidos por cada una de ellas con el punto elegido como centro de momentos no son coincidentes y, en consecuencia, los ejes de los vectores representativos de los momentos constituirán una radiación de rectas, y al no ser colineales, no será posible sumarlos algebraicamente, pero sí geométricamente.

3.1.5. Expresión analítica del momento de una fuerza respecto de un eje.

Consideremos, figura 3.9, la fuerza P aplicada en A, y descompongámosla en sus componentes según los ejes coordenados, P_x, P_y y P_z. Conforme al teorema de Varignon, el momento de P respecto de cualquiera de los ejes será igual a la suma algebraica de los momentos de sus componentes. En este caso, y con respecto a cualquiera de los tres ejes, siempre habrá una componente paralela al eje con respecto al que se toma momentos y, en consecuencia, su momento respecto del mismo será nulo. Llamando x, y, z a las coordenadas de A, y teniendo en cuenta la convención de signos establecida en 1.17, se tiene

$$\begin{aligned} M_x &= P_z . y - P_y . z \\ M_y &= P_x . z - P_z . x \\ M_z &= P_y . x - P_x . y \ , \end{aligned} \qquad [3.23]$$

expresiones que determinan los momentos de P respecto de los tres ejes coordenados los que, a su vez, constituyen las proyecciones sobre di-

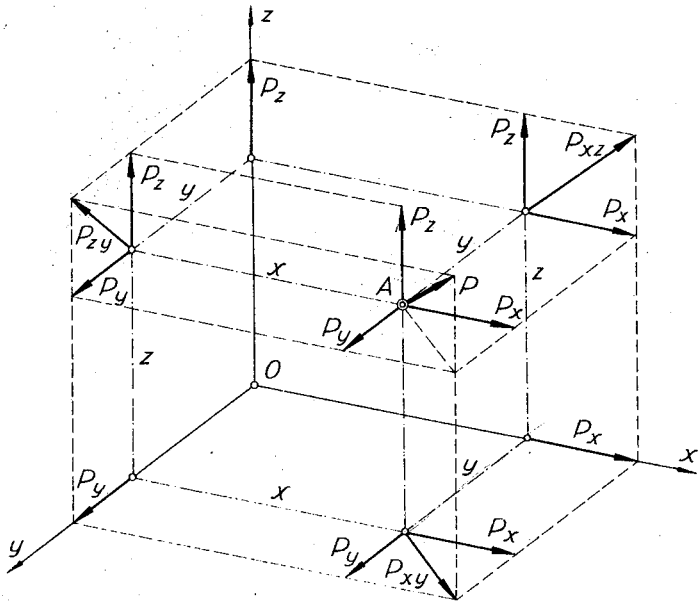


Fig. 3.9.

chos ejes del vector representativo del momento de la fuerza con respecto al origen de coordenadas.

El momento de P respecto de O queda perfectamente definido mediante las cuaciones [3.23]. En efecto, siendo M_x, M_y y M_z representables mediante tres vectores ortogonales, dirigidos según x, y, z; componiéndolos resulta

$$| M_P^o | = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}\,, \qquad [3.24]$$

expresión que nos da la intensidad del momento, buscada.

La dirección del eje del vector representativo del mismo se obtiene de las expresiones que nos dan sus cosenos directores:

$$\cos \alpha_M = \frac{M_x}{| M_P^o |}\,; \quad \cos \beta_M = \frac{M_y}{| M_P^o |}\,; \quad \cos \gamma_M = \frac{M_z}{| M_P^o |} \qquad [3.25]$$

y que deben cumplir con la condición de que la suma de sus cuadrados valga la unidad.

Si en lugar de una fuerza se trata de un sistema de n fuerzas concurrentes en A, y no coplanares, el momento de su resultante respecto de O queda definido por las expresiones:

$$|M^o| = \sqrt{(\Sigma M_x)^2 + (\Sigma M_y)^2 + (\Sigma M_z)^2}$$

$$\cos \alpha_M = \frac{\Sigma M_x}{|M_R^o|} \; ; \quad \cos \beta_M = \frac{\Sigma M_y}{|M_R^o|} \; ; \quad \cos \gamma_M = \frac{\Sigma M_z}{|M_R^o|} \qquad [3.26]$$

3.1.6. Descomposición de una fuerza en tres direcciones concurrentes a un punto de su recta de acción y no coplanares con la misma.

Al tratar en 3.1.2 el equilibrio y descomposición de fuerzas concurrentes en el espacio, enunciamos un procedimiento para proceder a la descomposición de una fuerza en tres en el espacio y anunciamos la existencia de otros, más simples, de los que nos ocuparemos a continuación. Tres son los procedimientos que consideraremos:

a) Procedimiento gráfico de Culmann.

b) Procedimiento gráfico-numérico de Ritter.

c) Procedimiento analítico.

a) Procedimiento gráfico de Culmann.

Supongamos, figura 3.10 una fuerza P aplicada en A y tres direcciones (1), (2) y (3), concurrentes en A y no coplanares. Se trata de hallar las componentes de P cuyas rectas de acción sean precisamente las rectas dadas. Para resolver el problema se procede en forma similar que en el problema de Culmann en el plano. La fuerza dada y una de las direcciones, la (1) por ejemplo, definen un plano, el π en la figura 3.10. Las otras dos direcciones determinan un segundo plano, π', cuya intersección con el plano π define la recta (a), que pasa por A y es coplanar con P y (1) por una parte y, por la otra, con (2) y (3). En consecuencia, será posible descomponer P en las direcciones (1) y (a) y, a su vez, la componente según (a) en las direcciones (2) y (3), que constituyen conjuntamente con la componente según (1) la solución del

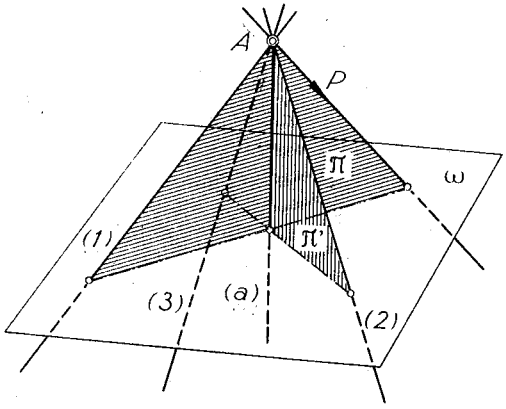


Fig. 3.10.

problema. Prácticamente, es necesario trabajar en proyección Monge, que es lo que se ha hecho en el problema de la figura 3.11. En el mismo, una vez determinada la proyección icnográfica de la intensidad de P, mediante un simple abatimiento del plano proyectante de su recta de acción,

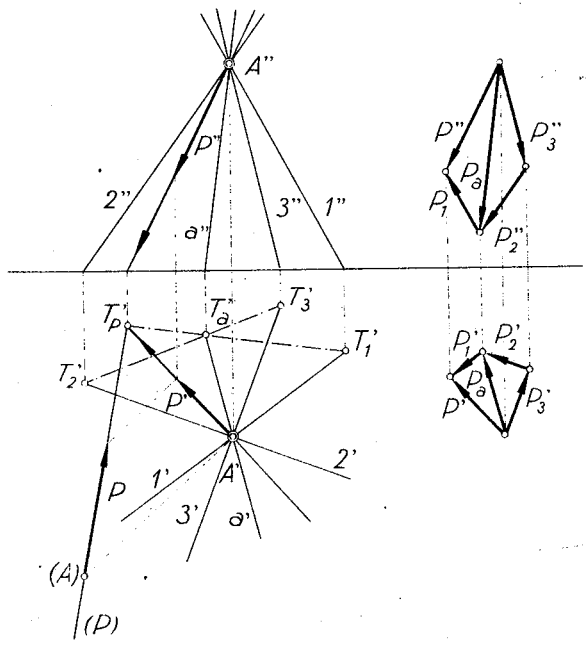


Fig. 3.11.

se pasa a su proyección ortográfica. Luego se determinan las trazas icnográficas de los planos definidos por P y (1), y por (2) y (3). Su intersección será la traza icnográfica de la recta intersección de ambos planos, la que, a su vez, es la recta de acción de la componente auxiliar. Luego se procede a descomponer, tanto en icnografía como en ortografía, P en (1) y (a), y esta última en (2) y (3).

b) Procedimiento gráfico numérico de Ritter.

Este procedimiento consiste en plantear tres ecuaciones de momento respecto de tres ejes cualesquiera, entre la fuerza P y sus tres componentes incógnitas, cuyas rectas de acción son las rectas dadas.

De proceder en esta forma, se llegaría a un sistema simultáneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Por ello, y procediendo en forma análoga al caso plano, se eligen los ejes en forma tal que con respecto a cada

uno de ellos se anulen los momentos de dos de las componentes incógnitas. Para ello, y conforme a lo establecido en 3.1.4, bastará elegir ejes que sean coplanares con las rectas de acción de dos de las componentes incógnitas o, en otras palabras, que cada eje corte a dos de las direcciones incógnitas. En la figura 3.12, se trata de descomponer la fuerza P aplicada en A, en las direcciones (1), (2) y (3), mediante tres condiciones

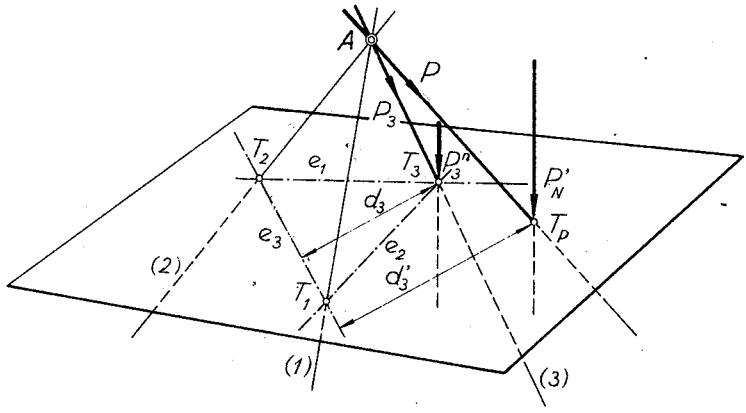


Fig. 3.12.

de momentos respecto de tres ejes. Para ello, consideremos un plano cualquiera π y llamemos T_1, T_2, T_3 y T_P a las trazas sobre dicho plano de las direcciones (1), (2) y (3) y de la recta de acción de P, respectivamente.

Como hemos dicho antes, los ejes con respecto a los cuales tomaremos momentos deben cortar cada uno de ellos a dos de las direcciones de las componentes incógnitas. Por razones de simplicidad, adoptaremos como ejes las rectas definidas por las trazas dos a dos de las tres direcciones; es decir, las rectas e_1, e_2 y e_3. Tomando momentos respecto de e_3 por jemplo, se anularán los correspondientes a las componentes P_1 y P_2 cuyas rectas de acción (1) y (2) son coplanares con e_3 por cortarse con la misma en los puntos T_1 y T_2 respectivamente.

Como, de acuerdo al teorema de Varignon extendido al espacio, se debe tener:

$$M_P^e = M_{P_1}^e + M_{P_2}^e + M_{P_3}^e , \qquad [3.27]$$

resulta, en consecuencia, que

$$M_P^e = M_{P_3}^e . \qquad [3.28]$$

La igualdad [3.28] debe cumplirse tanto en intensidad como en sentido. De acuerdo con la definición de momento de una fuerza respecto de un eje, para calcular el primer término de la expresión [3.28] debemos proyectar la fuerza P sobre un plano normal a e_3. Esta proyección —que denominaremos P'— puede ser descompuesta en dos componentes, una de ellas contenida en el plano π que llamaremos P'_T y otra normal al mismo, P'_N. De acuerdo a lo visto en 3.1.4, el momento de P' respecto del punto de intersección del eje e_3 con el plano normal al mismo será igual a la suma de los momentos respecto de dicho punto de sus componentes P'_T y P'_N. Teniendo en cuenta que P'_T y e_3 son coplanares —pues ambos están contenidos en el plano— el momento buscado será igual al producto de P'_N por la distancia de su recta de acción al punto en que el plano normal al eje e_3 corta a éste, o sea la distancia que media entre e_3 y la traza de P sobre el plano π, es decir d'_3 en la figura 3.12. Razonando en forma similar para la componente incógnita P_3, la [3.28] toma la expresión siguiente:

$$P'_N \cdot d'_3 = P^n_3 \cdot d_3 \qquad [3.29]$$

de donde

$$| P^n_3 | = \frac{P'_N}{d_3} d'_3 \,. \qquad [3.30]$$

En las expresiones anteriores P^n_3 es la componente normal al plano π de P_3, proyección de P_3 sobre un plano normal a e_3. Conocido el valor de P^n_3, una simple desproyección sobre la dirección de P'_3 nos permite obtener esta última, mediante cuyo abatimiento se determina el valor de P_3. En cuanto al sentido, el mismo será tal que conduzca a un momento de P_3 respecto de e_3 de igual signo que el momento de P respecto del mismo eje. Operando en forma semejante con los ejes e_1 y e_2, obtenemos las dos restantes componentes incógnitas.

Para proceder prácticamente es necesario recurrir al método de Monge, que es lo que se ha efectuado en figura 3.13, donde nos hemos limitado a las construcciones necesarias para determinar la componente de P según la dirección (1). El eje con respecto al cual se toman momentos es el e_1, determinado por las trazas icnográficas de las rectas (2) y (3). Tomando momentos resulta

$$P_N \cdot d'_1 = P^n_1 \cdot d_1 \,. \qquad [3.31]$$

Si abatimos el plano proyectante de P alrededor de su proyección icnográfica, podemos ubicar sobre la recta de acción abatida de P, y a

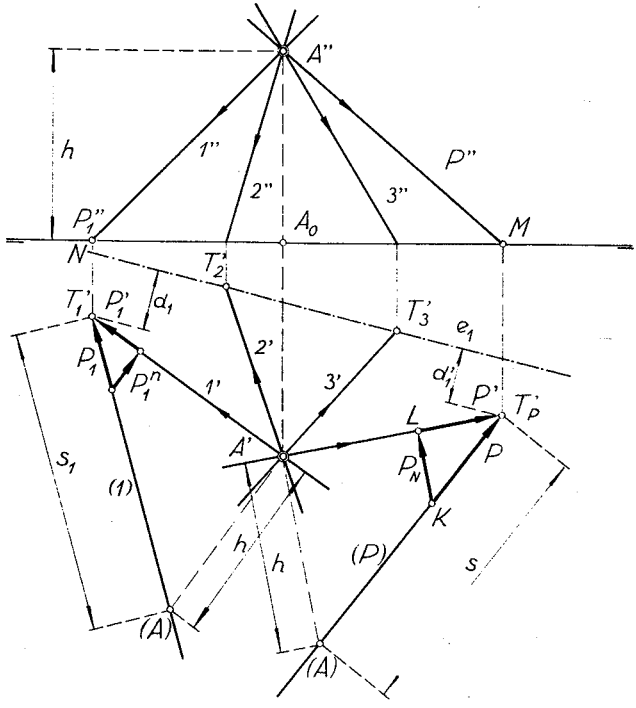


Fig. 3.13.

partir de un punto cualquiera, su vector representativo que, descompuesto en una componente horizontal y otra normal, nos permite obtener el valor de P_V.

Observando los triángulos semejantes LKT_l' y $A'(A)T_l'$ si llamamos s la longitud del segmento $(A)T_l'$ y h la altura del punto de concurrencia A sobre el plano icnográfico, tenemos

$$\frac{P}{s} = \frac{P_V}{h} \qquad [3.32]$$

de donde

$$P_V = P\frac{h}{s} . \qquad [3.33]$$

Operando en forma semejante con la componente incógnita P_1, y llamando s_1 a la longitud del segmento de su recta de acción comprendido entre el punto de concurrencia A y su traza icnográfica, llegamos a

$$P_1'' = P_1\frac{h}{s_1} \qquad [3.34]$$

Reemplazando las [3.33] y [3.34] en la [3.31], resulta

$$P.\frac{h}{s}.d'_1 = P_1\frac{h}{s_1}d \quad . \qquad [3.35]$$

Simplificando y despejando $\mathbf{P_1}$:

$$\left| P_1 \right| = \frac{s_1}{s}.\frac{d'_1}{d_1}.P \qquad [3.36]$$

Esta última expresión nos da la intensidad de la componente buscada (P_1 en este caso), en función de P y cuatro distancias de determinación simple e inmediata. Expresiones similares, obtenidas eligiendo como ejes de momentos las rectas determinadas por las correspondientes trazas, nos permiten calcular las dos componentes restantes. En cuanto al signo de P_1, lo determinamos en base a las consideraciones siguientes: la componente P_N está dirigida según el sentido de las z negativas, es decir, hacia abajo. Como tanto la traza de P como la de P_1 están ubicadas del mismo lado del eje con respecto al cual tomamos momentos, es evidente que ambas componentes normales, deben tener el mismo sentido para que sus momentos resulten del mismo signo. En consecuencia, la componente normal de P_1 estará dirigida según las z negativas, y el sentido correspondiente a P_1 será el indicado en la figura 3.13.

c) *Procedimiento analítico.*

Para hallar analíticamente las componentes de una fuerza según tres direcciones no coplanares y concurrentes a un punto de su recta de acción utilizaremos las expresiones [3.9], que establecen la igualdad entre la proyección sobre tres ejes de la resultante de un sistema de fuerzas y la suma de las correspondientes proyecciones de las fuerzas que lo componen. En el caso que nos ocupa, se conocen las proyecciones de la resultante, siendo incógnitas las proyecciones de las componentes. Tenemos así:

$$\left.\begin{aligned} P.\cos\alpha &= P_1.\cos\alpha_1 + P_2.\cos\alpha_2 + P_3.\cos\alpha_3 \\ P.\cos\beta &= P_1.\cos\beta_1 + P_2.\cos\beta_2 + P_3.\cos\beta_3 \\ P.\cos\gamma &= P_1.\cos\gamma_1 + P_2.\cos\gamma_2 + P_3.\cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \qquad [3.37]$$

En este sistema de tres ecuaciones las incógnitas son las intensidades P_1, P_2 y P_3 de las componentes, calculables por cualquiera de los procedimientos conocidos.

3.1.7. Condiciones analíticas necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio.

Para que un sistema de fuerzas no coplanares que concurren a un punto cualquiera se encuentre en equilibrio, es necesario que cumpla con tres condiciones. Estas tres condiciones de equilibrio, necesarias y suficientes, pueden ser expresadas en las formas que se expresan a continuación:

a) Mediante tres condiciones de nulidad de proyección del sistema sobre tres ejes.

b) Mediante dos condiciones de nulidad de proyección del sistema sobre dos ejes, y una condición de nulidad de momentos respecto de un tercer eje. En este caso el eje con respecto al cual se toman momentos no puede ser cualquiera, como veremos al analizar en detalle el caso.

c) Mediante dos condiciones de nulidad de momentos respecto de dos ejes, y una condición de nulidad de proyección sobre un tercer eje. Este último eje no puede ser cualquiera.

d) Mediante tres condiciones de nulidad de momentos respecto de tres ejes. Los ejes no pueden ser cualesquiera, como se verá al tratar más adelante el caso.

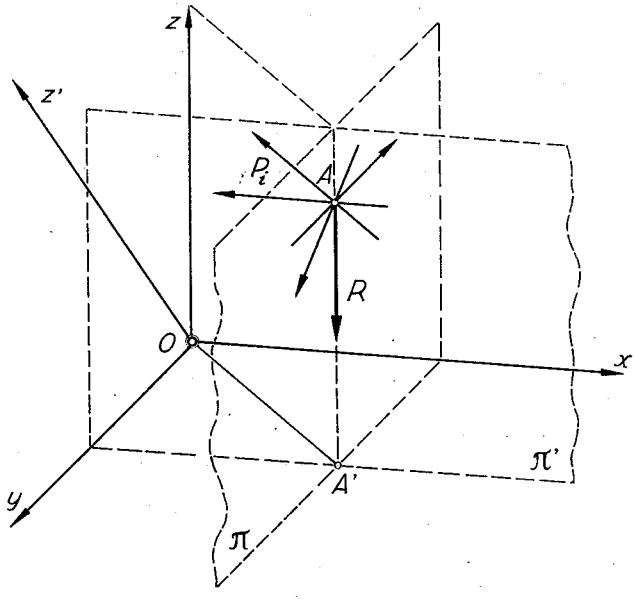


Fig. 3.14.

Justificaremos a continuación cada una de las posibilidades indicadas.

Caso a): Tres condiciones de nulidad de proyección sobre tres ejes. Consideremos, figura 3.14, un sistema P_i no coplanar y concurrente a un punto del espacio A. Supongamos que, elegida la terna x, y, z, y proyectadas las fuerzas sobre cada uno de los ejes, al establecer la suma de las correspondientes proyecciones resulte:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n X_i &= \sum_1^n P_i . \cos \alpha_i = 0 \\ \sum_1^n Y_i &= \sum_1^n P_i . \cos \beta_i = 0 \\ \sum_1^n Z_i &= \sum_1^n P_i . \cos \gamma_i = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3.38]$$

Por tratarse de un sistema concurrente, en ningún caso puede reducirse a un par de fuerzas. En consecuencia, si se cumple que

$$\sum_1^n X_i = 0 \qquad [3.39]$$

existen las posibilidades siguientes:

1º De reducirse el sistema a una resultante, esta debe ser normal al eje x; es decir, debe estar contenida en el plano π normal a dicho eje, que pasa por A.

2º El sistema se encuentra en equilibrio; es decir, su resultante es nula. Si simultáneamente se cumple también que

$$\sum_1^n Y_i = 0 \qquad [3.40]$$

las posibilidades para el sistema de fuerzas son las siguientes:

1º: Si existe resultante, su recta de acción, además de pasar por el punto de concurrencia A, debe ser normal al plano xy; es decir, estará dirigida según el eje z. En efecto, por cumplirse que $\sum_1^n X_i = 0$, vimos que la resultante, de existir, necesariamente debía estar contenida en un plano normal al eje x. Además, por razones semejantes, el hecho de que se verifique $\sum_1^n Y_i = 0$, impone a la resultante, de existir, la condición

de encontrarse en el plano π'. normal al eje y que pasa por A. El cumplimiento simultáneo de las [3.39] y [3.40], impone que la resultante, de existir, tenga por recta de acción la AA', definida por la intersección de los planos π y π'.

2º: El sistema se encuentra en equilibrio.

Finalmente, si además de cumplir con las condiciones $\sum_1^n X_i = 0$ y $\sum_1^n Y_i = 0$, el sistema cumple también con la condición de que $\sum_1^n Z_i = 0$, evidentemente, la única posibilidad que le resta es la de encontrarse en equilibrio, por cuanto, de existir resultante, para que su proyección sobre un eje cualquiera no perpendicular a AA' sea nula, es preciso que ella misma sea nula.

Caso b) Dos condiciones de nulidad de proyección sobre dos ejes y una condición de nulidad de momentos con respecto a un tercer eje.

Consideremos el mismo sistema de la figura 3.14 y supongamos que para el mismo se cumplan las condiciones

$$\begin{aligned} \sum_1^n X_i &= 0 \\ \sum_1^n Y_i &= 0 \\ \sum_1^n M_z &= 0 \end{aligned} \qquad [3.41]$$

El cumplimiento simultáneo de las dos primeras ecuaciones [3.41], ya analizado en el caso a), impone a la resultante, de existir, la condición de que su recta de acción, además de pasar por A, sea la intersección de los planos normales a los ejes x é y. La tercera de las [3.41] no impone al sistema ninguna nueva condición. En efecto, el cumplimiento simultáneo, de las dos condiciones anteriores, obliga a la resultante, en caso de existir, a que su recta de acción sea paralela al eje z, por lo que de hecho resulta coplanar con el eje, de modo que, cualquiera sea su intensidad, su momento es nulo respecto al mismo. En consecuencia, el eje con respecto al cual se toman momentos del sistema, no debe cortar la recta de intersección de los planos que, pasando por el punto de concurrencia del sistema, sean normales a los ejes con respecto a los cuales se proyecta el sistema, y como caso particular, no debe ser normal al plano definido por los otros dos ejes.

Si como eje de momentos elegimos el z' (fig. 3.14), el cumplimiento simultáneo de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n X_i &= 0 \\ \sum_1^n Y_i &= 0 \\ \sum_1^n M_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3.42]$$

asegura el equilibrio del sistema, por cuanto, para que se cumpla la tercera condición, $\sum_1^n M_z = 0$, es necesario que la resultante sea nula; es decir, que exista equilibrio conforme a lo establecido en 3.1.4 al definir el momento de una fuerza respecto de un eje.

Caso c) Dos condiciones de nulidad de momentos respecto de dos ejes y una condición de nulidad de proyección respecto de un tercer eje.

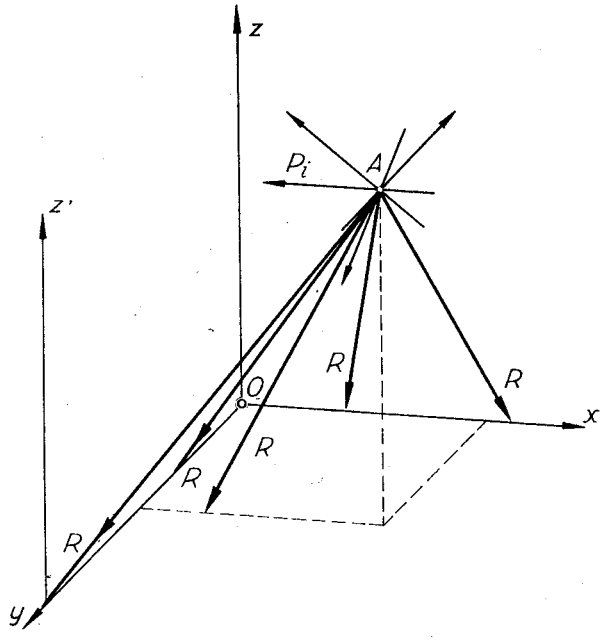


Fig. 3.15.

Refiriéndonos al sistema de figura 3.15, si tomamos momentos del sistema P_i respecto de los ejes x é y y luego proyectamos el mismo bre el eje z y encontramos que se cumple que

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n M_x &= 0 \\ \sum_1^n M_y &= 0 \\ \sum_1^n Z &= 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad [3.43]$$

El cumplimiento de la primera ecuación supone una de las posibilidades siguientes:

1º El sistema se encuentra en equilibrio (resultante nula).

2º De existir resultante, la misma, además de pasar por el punto A de una concurrencia del sistema, debe cortar el eje x; es decir, debe ser coplanar con el mismo.

El cumplimiento de la segunda ecuación; es decir, $\sum_1^n M_y = 0$, implica las mismas posibilidades para el sistema, pero en este caso la resultante, de existir, debe ser coplanar con el eje y.

Si se cumplen simultáneamente ambas condiciones, de no haber equilibrio, la única posibilidad para la resultante es que su recta de acción, además de pasar por A, pase por O, punto de intersección de los ejes x é y.

Finalmente, si se cumple además de las anteriores, la condición de proyección nula del sistema sobre el eje z, evidentemente la única posibilidad que le resta es la de encontrarse en equilibrio. Es evidente que el eje sobre el cual se establece la condición de proyección no puede ser normal a la recta definida por el punto de concurrencia de las fuerzas y el punto común a ambos ejes con respecto a los cuales se toman momentos (punto O). En efecto, de serlo, resultaría normal a la recta de acción de una posible resultante que hiciera cumplir al sistema con las dos condiciones de momento. En tal caso, de hecho se cumpliría la condición de proyección nula, sin imponer al sistema ninguna nueva condición.

Caso d). Tres condiciones de nulidad de momentos respecto de tres ejes. Supogamos que en el caso de la figura 3.15 tomamos momentos del sistema dado, respecto de los tres ejes x, y, z, y encontramos que se cumplen las condiciones

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n M_x &= 0 \\ \sum_1^n M_y &= 0 \\ \sum_1^n M_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3.44]$$

El cumplimiento simultáneo de las dos primeras ecuaciones [3.44] ya ha sido analizado al tratar el caso anterior. Conduce, como se ha visto a las dos posibilidades siguientes:

1º: El sistema se encuentra en equilibrio.

2º: Si existe resultante, la misma, además de pasar por A, debe hacerlo por O, intersección de los ejes con respecto a los cuales se toman momentos.

La condición de momentos nulos respecto del eje z, concurrente en O con los dos restantes, no impone ninguna nueva condición al sistema. En efecto, si existe resultante, por las dos primeras condiciones, la misma debe pasar por O, y, en consecuencia, es coplanar con el eje z, y de hecho su momento es nulo respecto de dicho eje. En consecuencia, para establecer el equilibrio de un sistema de fuerzas no coplanares y concurrentes, mediante tres ecuaciones de momentos respecto de tres ejes, dos de ellos pueden ser cualesquiera, pero el tercer eje debe ser tal que no resulte coplanar con la recta que, pasando por el punto de concurrencia de las fuerzas, corta los dos primeros ejes. En el caso de la figura 3.15, si la tercera ecuación de momentos se establece respecto de un eje tal como el z', que no corta la recta OA, de ser nula la suma de los momentos del sistema con respecto al mismo; es decir, si

$$\sum M'_z = 0 \ , \qquad [3.45]$$

queda asegurado el equilibrio, por cuanto, necesariamente, la resultante debe ser nula para que se cumpla [3.45].

3.2. Pares de fuerzas en el espacio.

3.2.1. Translación de pares de fuerzas.

Al estudiar en 1.9 las propiedades de los pares de fuerzas, vimos que es posible trasladar arbitrariamente en su plano un par de fuerzas

sin que se alteren las condiciones de equilibrio del cuerpo rígido sobre el que actúa. Veremos a continuación, que si un par de fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido se desplaza paralelamente a sí mismo, es decir, se traslada a un plano paralelo al suyo, su efecto sobre el cuerpo rígido no se altera.

Para demostrar lo anterior, consideremos un par de momento M, actuando en un plano π cualquiera (fig. 3.16) materializado por las fuerzas paralelas P y $-P$, separadas de una distancia d tal que se cumpla $M = P.d$. Supongamos aplicadas dichas fuerzas en los puntos A y B, respectivamente y consideremos un segundo plano π, paralelo

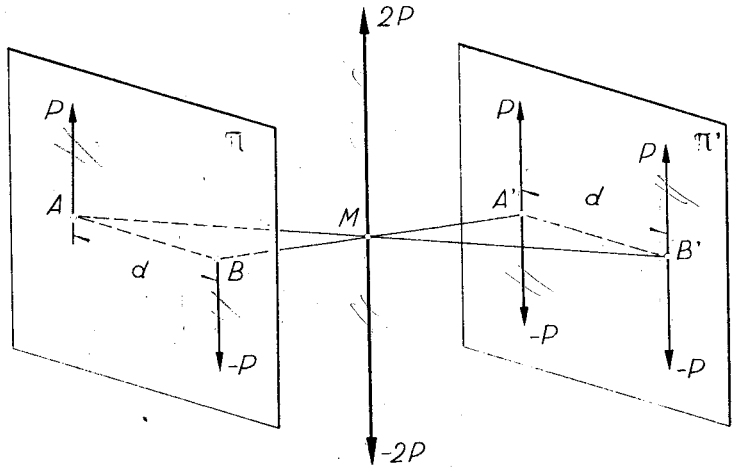


Fig. 3.16.

al anterior y ubicado a una distancia cualquiera del mismo. Apliquemos en los puntos A' y B' del plano π, separados de la misma distancia d y ubicados en el mismo plano horizontal que contiene a A y B, dos sistemas nulos de fuerzas, constituidos cada uno por dos fuerzas opuestas P y $-P$ paralelas y de igual intensidad que las fuerzas aplicadas en los puntos A y B del plano π. Las fuerzas P aplicadas en A y B', coplanares por ser paralelas, admiten una resultante de intensidad $2P$, paralela a las componentes y de igual sentido que éstas, aplicada, por razones de simetría, en M, punto medio de la distancia AB'. Análogamente, las fuerzas $-P$ aplicadas en B y A', admiten a su vez una resultante de intensidad $-2P$ aplicada también en M, y de su misma dirección y sentido. Las dos resultantes $2P$ y $-2P$ constituyen un sistema nulo, restando solamente una fuerza P aplicada en A' y otra $-P$ en B', separadas de la distancia d. Estas fuerzas constituyen un par de momento $M = P.d$, que actúa en el plano π' y equivalente al par

de momento M actuante en el plano π. Hemos trasladado así el par M de un plano a otro paralelo, sin que su efecto se alterara.

Como consecuencia de lo anterior, si sobre un cuerpo rígido actúan pares de fuerzas M_i, ubicados en planos paralelos cualesquiera, su efecto será igual al de un único par, denominado par resultante, que actúa en un plano cualquiera, paralelo a los anteriores, cuya intensidad es igual a la suma algebraica de las intensidades de los pares componentes, y cuyo signo será el que resulta de dicha suma; es decir:

$$M_R = \sum_1^n M_i \quad . \qquad [3.46]$$

3.2.2. Composición de pares que actúan en planos no paralelos.

Consideremos dos planos cualesquiera π y π', que se cortan según la recta MN, figura 3.17, y supongamos que sobre los mismos actúen los pares de fuerzas M_1 y M_2 respectivamente, negativos ambos, conforme con la convención que hemos adoptado. Elijamos sobre la recta de intersección de los planos, dos puntos cualesquiera A y B separados una distancia d. Al par M_1 podemos suponerlo constituido por dos fuerzas actuantes en el plano π, normales a MN, y aplicadas en los puntos A y B, fuerzas que llamaremos P_1 y $-P_1$ y que cumplen la condición

$$P_1 = \frac{M_1}{d} \quad . \qquad [3.47]$$

Análogamente, el par M_2 podemos imaginarlo constituido por dos fuerzas P_2 y $-P_2$, actuantes ahora en el plano π' normales a MN y aplicadas también en A y B, tales que satisfagan la condición

$$P_2 = \frac{M_2}{d} \quad . \qquad [3.48]$$

Componiendo las fuerzas aplicadas en A, obtendremos una resultante R, ubicada en un plano normal a la recta MN, por cuanto sus componentes P_1 y P_2 de-

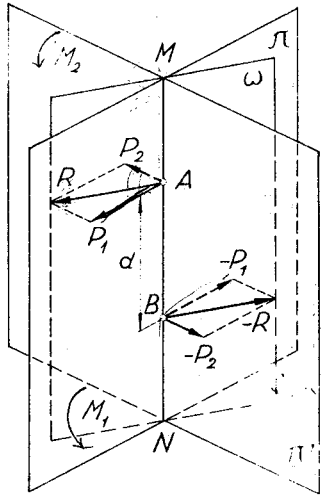


Fig. 3.17.

finen un plano que es normal a dicha recta por construcción. Lo mismo ocurre con la resultante $-R$ de las fuerzas $-P_1$ y $-P_2$ aplicadas en B, por idénticas razones. En consecuencia R y $-R$ actuarán en planos paralelos y, a su vez, se encontrarán en el mismo plano vertical, por cuanto sus respectivas direcciones quedan definidas por las diagonales de dos paralelogramos de fuerzas antimétricos. Como evidentemente sus intensidades son iguales, las mismas constituyen un par de fuerzas, de intensidad $M_R = R.d$, que es el par resultante de los pares M_1 y M_2.

La demostración anterior puede extenderse al caso de un número cualquiera de pares que actúan en planos distintos, no paralelos. En tal caso, para hallar el par resultante del sistema de pares dado, se halla primeramente el par resultante de dos cualesquiera, en la forma explicada. Luego se compone dicho par resultante parcial con otro de los pares del sistema, y así sucesivamente hasta hallar el par resultante total.

3.2.3. Representación vectorial de los pares de fuerzas.

En el parágrafo 1.11, vimos que un par de fuerzas puede representarse mediante un vector libre, de módulo igual a la intensidad del momento del par, dirigido según una normal al plano de este último y cuyo sentido responde a la convención adoptada.

Esta forma de representar los pares, facilita enormemente el operar con pares en el espacio. Así, por ejemplo, para hallar el par resultante de dos pares que actúan en planos no paralelos, tales los M_1 y M_2 de la figura 3.18, bastará llevar a partir de un punto cualquiera del espacio, los vectores representativos de dichos pares normales respectivamente a los planos π y π' en que éstos actúan, y dirigidos conforme con la convención adoptada. Componiendo dichos vectores, obtendremos un vector resultante, que será representativo del par resultante buscado. Este par actuará en un plano ω, normal a la dirección del vector representativo de M_R y su sentido será tal que un observador ubicado según M_R, vea girar al par en el sentido de las agujas del reloj.

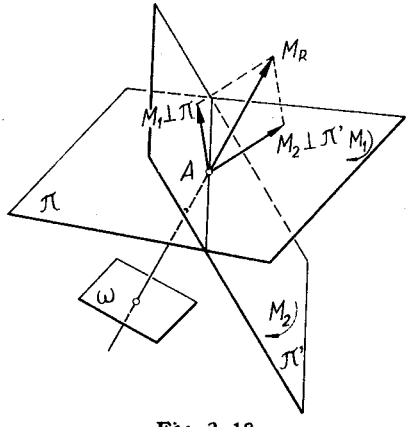


Fig. 3.18.

Si se tratara de un sistema constituido por un número cualquiera de pares actuantes en planos no paralelos, el problema de hallar el par resultante se simplifica si se trabaja con los vectores representativos de los pares. En efecto, como los pares pueden trasladarse en su plano y a planos paralelos sin que su efecto se altere, los correspondientes vectores representativos podrán deslizar a lo largo de su recta de acción o trasladarse paralelamente a sí mismos. En consecuencia, eligiendo un punto arbitrario del espacio, y llevando al mismo los vectores representativos de los distintos pares del sistema, podremos componerlos en la forma vista para el caso de fuerzas concurrentes a un punto del espacio, y hallar así el vector representativo del par resultante, que yacerá en un plano normal a dicho vector.

3.2.4. Composición analítica de pares de fuerzas.

Sea, figura 3.19, un par de momento M que actúa en un plano cualquiera π. Dicho par lo podemos representar por un vector M, normal al mismo, aplicado en un punto cualquiera del plano π. Consideremos ahora una terna de ejes ortogonales x, y, z, y traslademos a su origen O el vector M, lo que es lícito, por cuanto ello significa trasladar el par M a un plano paralelo al π y que pase por O. Proyectando el vector M sobre los tres ejes coordenados, llegamos a las expresiones

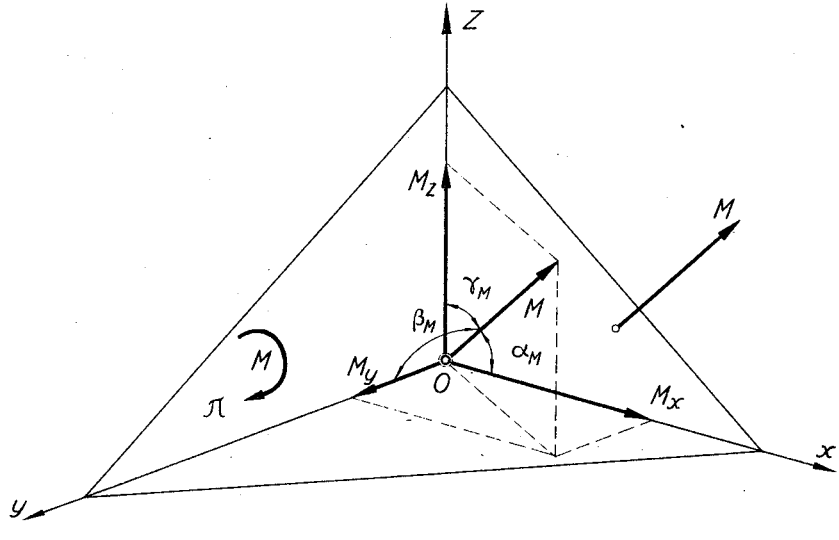


Fig. 3.19.

siguientes, similares a las establecidas en 3.1.4 para el momento de una fuerza respecto de un punto en el espacio —fórmulas [3.18]—:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M.\cos\alpha_M \\ M_y &= M.\cos\beta_M \\ M_z &= M.\cos\gamma_M \end{aligned}\right\} \qquad [3.49]$$

Estas expresiones representan también —ver [3.17]— los momentos del par M respecto de los ejes x, y, z. De ello se deduce que un par de fuerzas en el espacio queda definido cuando se conocen sus momentos respecto de tres ejes. En efecto, elevando al cuadrado ambos miembros de las [3.49] y sumando, por ser $\cos^2\alpha_M + \cos^2\beta_M + \cos^2\gamma_M = 1$ se tiene:

$$|M| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \ . \qquad [3.50]$$

La dirección y sentido del vector M resultan de sus cosenos directores, definidos por las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_M &= \frac{M_x}{|M|} \\ \cos\beta_M &= \frac{M_y}{|M|} \\ \cos\gamma_M &= \frac{M_z}{|M|} \end{aligned}\right. \qquad [3.51]$$

Si en lugar de un único par, se tratara de un sistema de pares M_i, las proyecciones del par resultante se obtendrían mediante las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} M_x^R &= \sum_1^n M_x^i \\ M_y^R &= \sum_1^n M_y^i \\ M_z^R &= \sum_1^n M_z^i \end{aligned}\right\} \qquad [3.52]$$

donde M_x^i, M_y^i y M_z^i constituyen los momentos de los pares componentes respecto de los tres ejes coordenados.

Finalmente, el módulo del vector representativo del par resultante, que a la vez corresponde a la intensidad del momento del mismo, resulta de la expresión

$$| M_R | = \sqrt{M_x^{R^2} + M_y^{R^2} + M_z^{R^2}} \qquad [3.53]$$

y su dirección y sentido quedan definidas por

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha_{M_R} &= \frac{M_x^R}{| M_R |} \\ \cos \beta_{M_R} &= \frac{M_y^R}{| M_R |} \\ \cos \gamma_{M_R} &= \frac{M_z^R}{| M_R |} \end{aligned}\right\} \qquad [3.54]$$

3.2.5. Condiciones analíticas de equilibrio de sistemas de pares en el espacio.

Es evidente que para que un sistema de pares en el espacio se encuentre en equilibrio, es necesario que el par resultante sea nulo. Para que ello se cumpla, es necesario y suficiente que la suma de los momentos de los pares componentes, respecto de tres ejes, sea nula. Consideremos un sistema de pares aplicados a un cuerpo rígido, que actúan en planos cualesquiera, y supongamos que, tomando momentos respecto del eje x, se verifique:

$$\sum_1^n M_x^i = 0 \; . \qquad [3.55]$$

Si ello se cumple, existen dos posibilidades en lo que al par resultante se refiere:

a) El par es coplanar con el eje x o yace en un plano paralelo al mismo.

b) El par resultante es nulo; es decir, hay equilibrio.

Si al tomar momentos respecto del eje y encontramos que

$$\sum_{1}^{n} M_{y}^{i} = 0 \qquad [3.56]$$

las posibilidades son similares; es decir,

a) El par es coplanar con el eje y o yace en un plano paralelo al mismo.

b) El sistema se encuentra en equilibrio.

De cumplirse simultáneamente las condiciones [3.55] y [3.56] las posibilidades para el sistema son las siguientes:

a) El par resultante, de existir, yace en el plano xy, o en uno paralelo a éste.

b) El sistema se encuentra en equilibrio.

Finalmente, si establecida la condición de momentos respecto del eje z, la misma resulta nula, es decir:

$$\sum_{1}^{n} M_{z}^{i} = 0 \qquad [3.57]$$

ello implica necesariamente:

a) El par resultante es coplanar con el eje z o yace en un plano paralelo al mismo.

b) El sistema se encuentra en equilibrio.

Si la condición [3.57] se cumple simultáneamente con las anteriores, la única posibilidad que le resta al sistema es la de encontrarse en equilibrio; es decir, par resultante nulo, por cuanto, al imponer las dos primeras condiciones la necesidad de que el par resultante, de existir, sea coplanar con x é y, de hecho queda excluida la posibilidad a) contemplada en la tercera condición de momentos nulos.

Por consiguiente, para que un sistema de pares en el espacio se encuentre en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que se cumpla simultáneamente que

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{n} M_{x}^{i} &= 0 \\ \sum_{1}^{n} M_{y}^{i} &= 0 \\ \sum_{1}^{n} M_{z}^{i} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3.58]$$

3.3. Fuerzas paralelas en el espacio.

3.3.1. Resultante de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio.

Análogamente al caso de sistemas de fuerzas paralelas en el plano, los sistemas de fuerzas paralelas espaciales constituyen un caso particular de los sistemas de fuerzas concurrentes en el espacio.

Si sobre un cuerpo rígido actúa un sistema P_i de fuerzas paralelas espaciales, para hallar su resultante R es necesario componer primeramente dos cualesquiera de las fuerzas componentes, operando en el plano definido por sus rectas de acción, y utilizando cualquiera de los procedimientos descriptos en 2.3.1 para la reducción de sistema planos paralelos. Hallada esta primera resultante parcial, se la compone con otra de las fuerzas, lo que permite hallar una segunda resultante parcial, que lo será de las tres primeras fuerzas consideradas. Procediendo en forma similar con las restantes fuerzas, se llega a una última resultante que será la resultante buscada del sistema.

Cuando el sistema se compone de fuerzas de distintos sentidos, halladas las resultantes de ambos sentidos en la forma indicada, pueden presentarse los siguientes casos:

1) Las dos resultantes tienen la misma recta de acción.

2) Las rectas de acción de ambas resultantes no coinciden.

En ambos casos se pueden presentar las dos posibilidades siguientes:

a) Las intensidades de ambas resultantes son las mismas.

b) Las dos resultantes son de distinta intensidad.

Analizaremos a continuación las distintas posibilidades que pueden presentarse.

Cuando las dos resultantes tienen la misma recta de acción e igual intensidad, al ser sus sentidos contrarios, constituyen un sistema nulo y, en consecuencia, existe *equilibrio*. Si, en cambio, las intensidades difieren, constituyen un sistema colineal, cuya suma algebraica nos dará la resultante R del sistema.

En el caso en que las rectas de acción de ambas resultantes sean distintas, así como también sus intensidades, el sistema se habrá reducido a dos fuerzas paralelas de sentidos contrarios que, compuestas en la forma

conocida, nos conducen también a la resultante R del sistema. Si, en cambio, las intensidades son iguales, al ser contrarios sus sentidos, el sistema se habrá reducido a un *par de fuerzas.*

Un procedimiento práctico para la determinación de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio es el que justificaremos a continuación. Sea el sistema P_1, P_2 y P_3 de la figura 3.20, y refirámoslo a una terna de ejes coordenados ortogonales x, y, z, orientada en forma que uno de los ejes, el z por ejemplo, esté dirigido según la dirección común de las fuerzas. Supongamos haber determinado su resultante R y proyectemos esta última y el sistema componente en los planos ortográfico y de perfil, es decir, xz é yz respectivamente. Siendo las fuerzas y su resultante paralelas al eje z, se proyectarán en ambos planos en verdadera magnitud y, además, la proyección de la resultante resultará ser la resultante de las proyecciones.

Si ahora abatimos ambas proyecciones alrededor de los ejes x é y, las mismas se dispondrán sobre las trazas icnográficas de los planos proyectantes, y constituirán dos sitemas planos de fuerzas paralelas, ortogonales entre sí. Las rectas de acción de las dos resultantes abatidas, se cortarán en un punto, que es la traza icnográfica T'_R de la resultante R del sistema, como es dable observar en la figura. En consecuencia, para hallar la resultante de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio, bastará considerar un plano normal a la dirección común de las fuerzas y determinar las trazas sobre dicho plano de las rectas de acción de las fuerzas. Halladas las trazas, se abaten las fuerzas alrededor de las mismas sobre el plano considerado, en dos direcciones normales entre sí, y se determinan las resultantes de los dos sistemas abatidos, mediante el trazado de polígonos funiculares.

La intersección de las rectas de acción de las resultantes así determinadas será la traza sobre el plano considerado de la resultante del sistema; la intensidad y sentido se obtienen de la suma algebraica de las fuerzas componentes.

3.3.2. Reducción de sistemas de fuerzas paralelas en el espacio. Solución analítica.

Consideremos el mismo sistema de fuerzas de figura 3.20, referido a la terna x, y, z, y en que se ha hecho coincidir al eje z con la dirección común de las fuerzas.

Si tomamos momentos del sistema respecto del eje x, de acuerdo

con el teorema de Varignon, llamando y la distancia genérica de la recta de acción de cada una de las fuerzas al eje x, tendremos:

$$R.y_R = \sum_1^n P_i.y_i \quad . \qquad [3.59]$$

Procediendo ahora a tomar momentos respecto del eje y, se tiene:

$$R.x_R = \sum_1^n P_i.x_i \quad . \qquad [3.60]$$

Las expresiones [3.59] y [3.60] corresponden a las ecuaciones de dos planos, paralelos a los planos xz é yz respectivamente, cuya intersección define la recta de acción de la resultante R del sistema. Resta ahora determinar su intensidad y sentido, para lo cual proyectamos el sistema sobre el eje z que, por ser paralelo a la dirección común de las fuerzas, conduce a que las mismas se proyecten en verdadera magnitud. Resulta así:

$$R = \sum_1^n P_i \; ; \qquad [3.61]$$

ecuación que nos da la intensidad y sentido de la resultante como suma algebraica de las componentes.

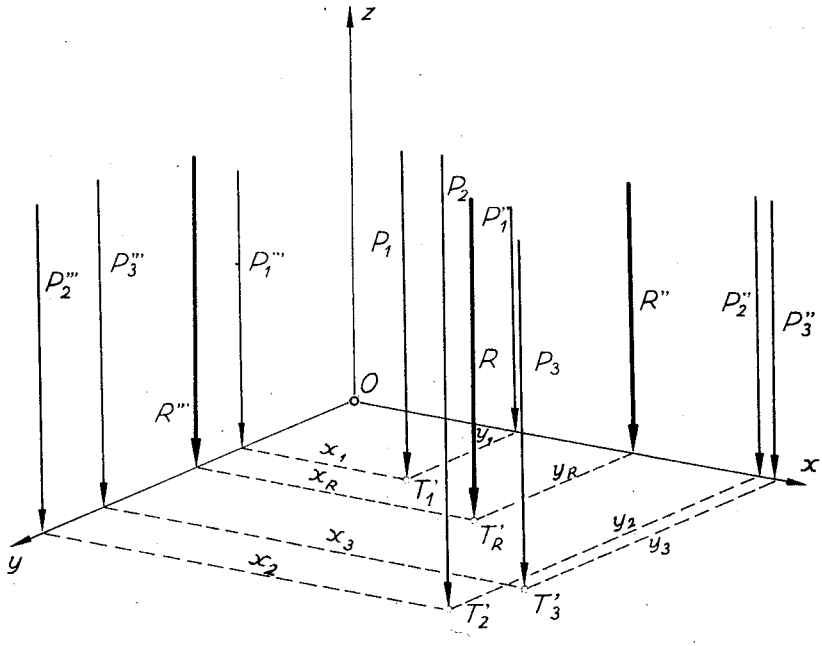


Fig. 3.20.

Si suponemos aplicadas las fuerzas en las trazas icnográficas de sus rectas de acción, los valores de x_R e y_R dados por las [3.59] y [3.60] corresponden a las coordenadas en el plano icnográfico de la traza de la resultante R. Vemos, pues, que es posible definir la resultante de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio, mediante dos ecuaciones de momentos respecto de dos ejes y una ecuación de proyección respecto de un tercero, es decir mediante el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} M_R^x &= \sum_1^n M_i^x \\ M_R^y &= \sum_1^n M_i^y \\ R &= \sum_1^n P_i \end{aligned}\right\} \qquad [3.62]$$

Si establecidas, para un sistema de fuerzas paralelas en el espacio, las tres condiciones [3.62], encontramos que la tercera de ellas, es decir, la condición de proyección sobre un eje es nula, evidentemente queda descartada la posibilidad de que el sistema se reduzca a una resultante; tampoco el sistema podrá estar en equilibrio por cuanto las dos primeras ecuaciones tienen un valor perfectamente determinado. En consecuencia, la única posibilidad que le resta al sistema es la de reducirse a un par de fuerzas.

Finalmente, si las tres condiciones son nulas, es decir si se cumple

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n M_i^x &= 0 \\ \sum_1^n M_i^y &= 0 \\ \sum_1^n P_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3.63]$$

el sistema de fuerzas paralelas en el espacio se encuentra en equilibrio.

3.3.3. Centro de fuerzas paralelas en el espacio.

El concepto de centro de fuerzas paralelas, establecido en 2.3.5 para los sistemas planos de fuerzas paralelas, se extiende al caso de fuerzas paralelas en el espacio, como veremos a continuación.

Consideremos, figura 3.21, el sistema P_1, P_2, P_3, aplicado en los puntos A_1, A_2 y A_3, respectivamente, cuyas coordenadas respecto del sistema de ejes elegidos, sean x_i, y_i, z_i. Supongamos conocida la re-

sultante de dos de las fuerzas, las P_1 y P_3 por ejemplo, resultante que llamaremos $R_{1,3}$ y que estará aplicada en el punto C', centro de fuerzas paralelas en el plano definido por las rectas de acción de ambas fuerzas. Hagamos girar las direcciones de las dos fuerzas un mismo ángulo φ en dos planos paralelos, en torno a sus puntos de aplicación, con lo que resultan nuevamente paralelas.

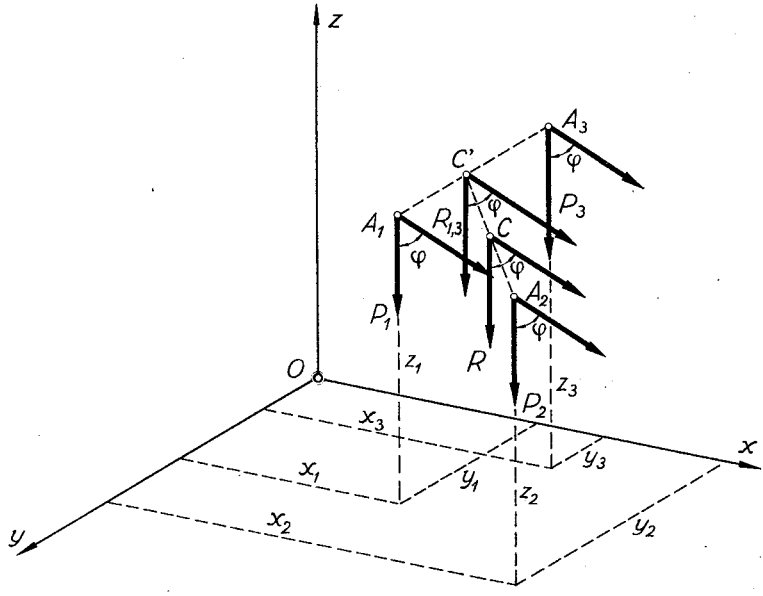


Fig. 3.21.

La resultante $R_{1,3}$ del nuevo sistema paralelo, deberá pasar por C' para que cumpla con la relación [2.63], que define la posición de la resultante de dos fuerzas paralelas planas. En consecuencia, como $R_{1,3}$ deberá encontrarse en el plano definido por P_1 y P_3 en su nueva posición y ser paralela a las mismas, en definitiva habrá girado alrededor de C' el mismo ángulo φ que las componentes, y en un plano paralelo al plano en que giraron aquéllas.

Considerando ahora la resultante de P_2 y $R_{1,3}$, aplicada en C y repitiendo el razonamiento anterior, llegamos a que la misma habrá girado el ángulo φ alrededor de C disponiéndose en una dirección paralela a la de las fuerzas, una vez giradas, dicho ángulo φ. Este punto C constituye el *centro de fuerzas paralelas en el espacio,* y es independiente de la dirección en que actúen las mismas.

Interesa en ciertos casos conocer las coordenadas cartesianas del centro de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio. Para determinarlas,

consideremos la terna de ejes x, y, z, y supongamos actuando el sistema en dirección paralela al plano x, y. De acuerdo con el teorema de Varignon, el momento del sistema de fuerzas respecto de un eje cualquiera debe ser igual al momento de su resultante. Luego, si consideramos un eje cualquiera de dicho plano, perpendicular a la dirección común de las fuerzas, y llamamos x_i, y_i, z_i, las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas, tomando momentos del sistema respecto del eje elegido se tiene:

$$z_R . R = \sum_1^n P_i . z_i \quad , \qquad [3.64]$$

donde z_R es la distancia al plano xy de un punto cualquiera de la recta de acción de la resultante. La [3.64] es la ecuación de un plano paralelo al xy, que contiene a la recta de acción de R.

Haciendo actuar ahora las fuerzas paralelamente al plano xz, y tomando momentos respecto de un eje contenido en el mismo, normal a la dirección de las fuerzas, resulta:

$$y_R . R = \sum_1^n P_i . y_i \quad , \qquad [3.65]$$

ecuación que corresponde a un plano paralelo al xz, y que también contiene la recta de acción de R. Finalmente, haciendo girar las fuerzas hasta disponerlas paralelas al plano yz y tomando momentos respecto de un eje del mismo, normal a la dirección de las fuerzas, se tiene:

$$x_R . R = \sum_1^n P_i . x_i \quad ; \qquad [3.66]$$

ecuación de un plano paralelo al yz, y que también contiene la recta de acción de R.

Estos tres planos se cortan en un punto de coordenadas x_R, y_R, z_R, por donde pasan las resultantes del sistema de fuerzas dado, cuando actúa en las direcciones establecidas. En consecuencia, será el punto por el cual pasará la resultante, cualquiera sea la dirección en que actúe el sistema de fuerzas paralelas aplicadas a los puntos dados; es decir, el centro de fuerzas paralelas.

Llamando ahora x_C, y_C, z_C, a sus coordenadas, y recordando que, por tratarse de fuerzas paralelas, se tiene que $R = \sum_u^n P_i$, las tres ecuaciones anteriores nos conducen a las coordenadas cartesianas del centro de fuerzas paralelas, cuyas expresiones son

$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{\sum_1^n P_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \\ y_G &= \frac{\sum_1^n P_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \\ z_G &= \frac{\sum_1^n P_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \end{aligned}\right\} \qquad [3.67]$$

3.4. Fuerzas no concurrentes en el espacio.

3.4.1. Reducción de sistemas de fuerzas no concurrentes en el espacio.

Los sistemas de fuerzas no concurrentes en el espacio, como su nombre lo indica, son aquellos sistemas aplicados a un cuerpo rígido en que las rectas de acción de las fuerzas que lo constituyen pertenecen a planos distintos. Se los suele denominar también sistemas "gausos", nombre que proviene de la corrupción del término francés "gauche" con que se denominan las superficies no desarrollables.

Tratándose de sistemas no concurrentes en el espacio, no cabe hablar de una *resultante* del mismo, en el sentido con que, al tratar en 1.5 el primer principio de la Estática, definiéramos la resultante de dos fuerzas concurrentes. En efecto, si analizamos las fuerzas actuantes sobre el sólido del ejemplo de figura 3.22, donde las mismas actúan según aristas no concurrentes, vemos que sus rectas de acción no concurren a un punto común, por lo que es imposible la aplicación del paralelogramo de fuerzas que nos permitiría hallar la resultante, en pasos sucesivos.

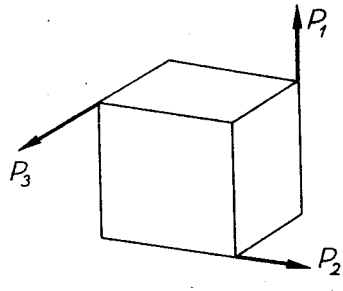


Fig. 3.22.

En consecuencia, es necesario reemplazar el sistema por otro equivalente, y del que sea factible hallar su resultante.

Para resolver el problema, consideremos el sistema de la figura 3.23,

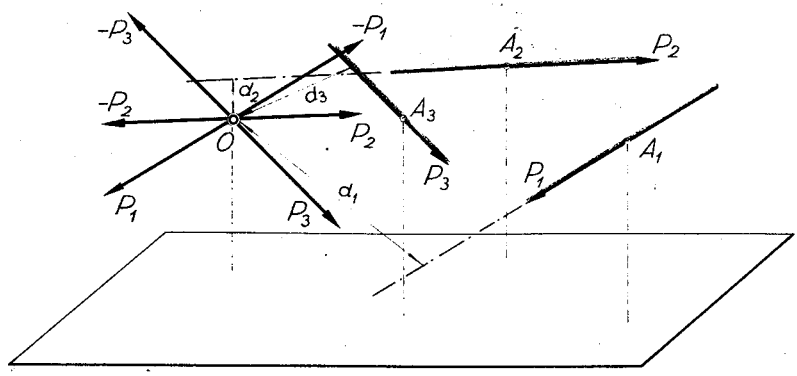


Fig. 3.23.

al que, por razones de simplicidad, supondremos constituido por sólo tres fuerzas, P_1, P_2 y P_3, aplicadas a un cuerpo rígido, y sean A_1, A_2 y A_3, respectivamente, puntos de sus rectas de acción.

Elijamos un punto O perteneciente al mismo cuerpo rígido y al que en lo sucesivo denominaremos *centro de reducción*, y apliquemos al mismo dos fuerzas opuestas, paralelas a P_1 y de su misma intensidad. La fuerza P_1, que suponemos aplicada en A_1 y la $-P_1$, que lo es en O, constituyen un par de fuerzas. Llamando d_1 la distancia del centro de reducción a la recta de acción de P_1, el momento de dicho par será

$$M_1 = P_1 \cdot d_1 \qquad [3.68]$$

y lo representaremos mediante un vector de módulo M_1, normal al plano definido por O y la recta de acción de P_1, y orientado conforme con la convención adoptada. (Por razones de claridad no se han representado en la figura los vectores momento).

Conforme con lo establecido en 1.12, el sistema constituido por la fuerza P_1 aplicada en O y el par de momento M_1, es equivalente a la fuerza P_1 cuya recta de acción pasa por A_1. Operando en forma similar con las restantes fuerzas, tendremos, en definitiva, un sistema equivalente al dado, constituido por tres fuerzas P_1, P_2 y P_3 concurrentes en O y paralelas a las dadas, y tres pares de momentos M_1, M_2 y M_3.

Estamos en condiciones ahora de componer las tres fuerzas P_1, P_2 y P_3 aplicadas en el centro de reducción, hallando su resultante R, que en lo sucesivo denominaremos *resultante de reducción**. Procediendo en

* Generalmente, en los tratados de la materia se acostumbra a denominar la resultante así determinada como *resultante de traslación* del sistema. Entendemos que tal designación es errónea, por cuanto no es posible trasladar una fuerza paralelamente a sí misma sin que su efecto se altere. Preferimos emplear la expresión *resultante de reducción*, por entender que con ello se expresa lo que realmente se realiza: reemplazar cada fuerza por un sistema equivalente. Y precisamente, una de las acepciones del término *reducción* es "reemplazar una cosa por otra que le sea equivalente".

forma análoga con los vectores momento, representativos de los pares M_1, M_2 y M_3, obtendremos un vector momento resultante, representativo del *par de reducción* del sistema, que denominaremos M.

Si variamos el centro de reducción, la resultante de reducción no varía, pero sí el par de reducción, que podrá diferir tanto en intensidad como en sentido y en la dirección del eje de su vector momento. En efecto, el vector R lo hemos obtenido como resultante de los vectores representativos de las fuerzas componentes, supuestas aplicadas en O en el caso analizado. Si como centro de reducción elegimos otro punto cualquiera del espacio, el polígono vectorial que nos define R, será el mismo. En cambio, al variar el centro de reducción, las distancias de éste a las rectas de acción de cada una de las fuerzas cambiarán, modificándose con ello las intensidades de los pares, así como también los planos en que actúan.

Podemos decir entonces que la resultante de reducción es un *invariante* del sistema de fuerzas espaciales, que por su naturaleza denominaremos *invariante vectorial.*

Consideremos ahora un sistema cualquiera de fuerzas espaciales P_i, y supongamos que, elegido como centro de reducción el punto O (fig. 3.24) resultan ser R y M respectivamente la resultante y el par de reducción.

Elijamos una terna ortogonal, haciendo coincidir su origen con el centro de reducción O, y orientémosla en forma tal que el eje z coin-

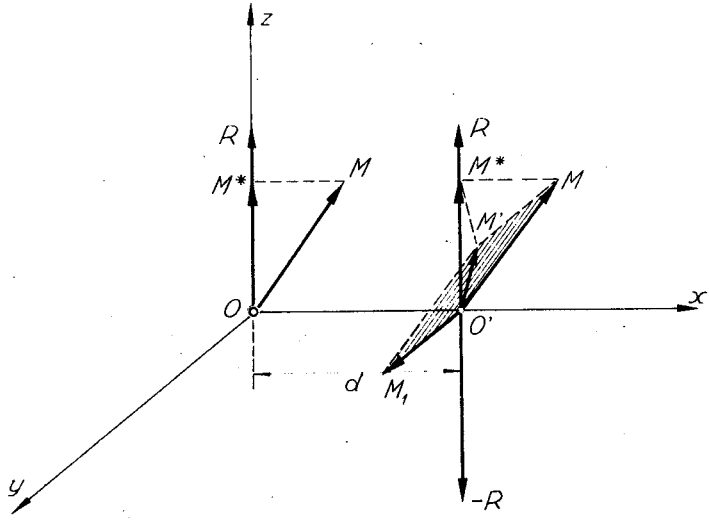


Fig. 3.24.

cida con el vector resultante de reducción y que el vector momento de reducción quede ubicado en el plano xz. Si proyectamos el vector momento de reducción sobre la resultante de reducción, obtendremos un vector momento que llamaremos M^*. Demostraremos a continuación, que cualquiera sea el centro de reducción adoptado, la proyección del par de reducción sobre la resultante de reducción es constante; es decir, constituye otro invariante, que por su naturaleza denominaremos *invariante escalar* *.

En efecto, elijamos otro punto cualquiera O', que por comodidad de dibujo lo hemos ubicado sobre el eje x, y reduzcamos el sistema a dicho punto. Para ello, una vez reducido el sistema al punto O, bastará aplicar en O' dos fuerzas R y $-R$, paralelas a la resultante de reducción en O. La fuerza R aplicada en O y su paralela $-R$, que lo es en O', constituyen un par de momento $M_1 = R.d$ que actúa en el plano zx y cuyo vector momento será normal a dicho plano. Por tratarse de vectores libres, podemos aplicar en O' los vectores momentos M y M_1, cuyo vector resultante M' constituirá el vector momento del par de reducción del sistema respecto del punto O'. Si ahora proyectamos el vector momento M' sobre la dirección de R, dicha proyección coincidirá con la proyección del vector M aplicado en O' sobre la dirección de R. En efecto, la recta que une los extremos de los vectores M y M' es, por construcción, paralela al vector M_1, el que, contenido en el plano xy, es normal a la dirección de R. Por tanto, el plano que siendo paralelo al xy contenga la recta mencionada, definirá, en su intersección con R, el extremo del vector proyección que, en consecuencia, será el mismo tanto para M' como para M.

En consecuencia, la proyección del vector momento de reducción sobre la dirección de la resultante de reducción es constante al variar el centro de reducción. En cambio, sí varía la componente del vector momento de reducción normal a la dirección del vector resultante. Ello puede observarse en figura 3.25, donde un sistema de fuerzas P_i se ha reducido primeramente a un punto O', ubicado sobre el eje x. Eligiendo un segundo centro de reducción O'' sobre el mismo eje, por lo dicho, la resultante de reducción será la misma que para O', así como también la componente del vector momento de reducción en la dirección de R, es decir M^*. Lo único que varía es la componente de M normal a la dirección de R, siendo esta variación lineal. En efecto, la reducción del sistema a O'' se obtiene, una vez conocidos los elementos resultantes de la reducción a O', aplicando en O'' un sistema nulo constituido por dos fuerzas R y $-R$, paralelas a la resultante de reducción. El momento

* El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por el coseno del ángulo que forman sus direcciones; es decir, la proyección de uno sobre el otro, y es una magnitud escalar.

del nuevo par es igual al producto de la intensidad de R por la distancia entre O' y O''.

Como la intensidad de R es constante y d varía linealmente, también lo hará M', que además podrá llegar a cambiar de sentido, como puede observarse en figura 3.25 para el centro de reducción O'''. Si M' puede cambiar de sentido, evidentemente habrá un punto que tomado

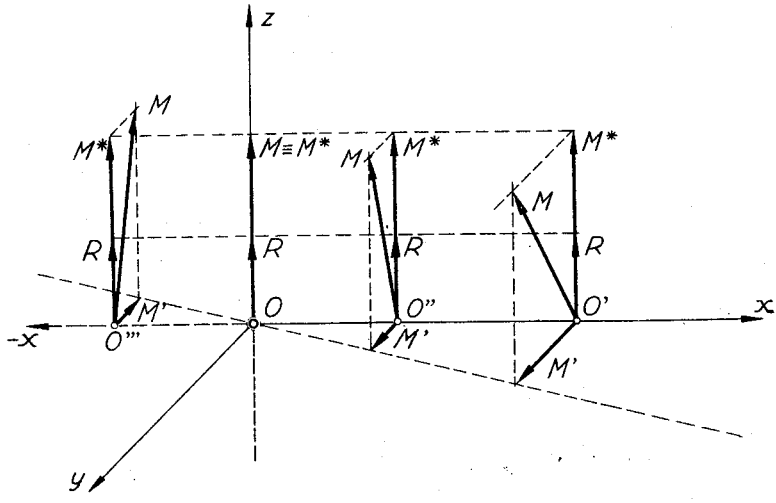


Fig. 3.25.

como centro de reducción conduzca a un par resultante de reducción, cuyo vector momento sea paralelo a la dirección de la resultante de reducción, por anulación de la componente M' normal a esta última dirección, tal el punto O de la figura 3.25. Si, una vez hallado el punto para el cual se cumple lo anterior, consideramos sucesivos centros de reducción ubicados sobre la recta de acción de la resultante de reducción correspondiente a O, cualquiera sea el punto considerado, como el momento de R respecto del mismo es siempre nulo, para dichos puntos la recta de acción del vector momento de reducción coincidirá con la del vector resultante de reducción. El lugar geométrico de dichos puntos se denomina *eje central* del sistema de fuerzas.

Definiremos, en consecuencia, como *eje central* de un sistema de fuerzas en el espacio, al lugar geométrico de los puntos que tomados como centro de reducción dan origen a un vector momento paralelo al vector resultante de reducción.

En tal caso, el plano en que actúa el par de reducción es normal a la dirección de la resultante, y al conjunto de ésta y el par se lo suele denominar *torsor de fuerzas.*

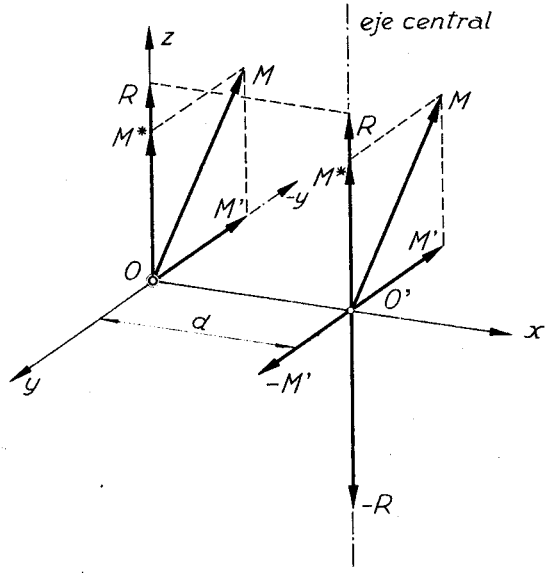


Fig. 3.26.

Para determinar el eje central de un sistema de fuerzas en el espacio se procede en la forma siguiente. Consideremos, figura 3.26, un sistema P_i reducido al centro O. Conocidos la resultante de reducción y el correspondiente par resultante, hagamos coincidir una terna de ejes con el centro de reducción y orientémosla en forma tal que el eje z coincida con el vector representativo de la resultante de reducción, y que el vector momento quede ubicado en el plano yz. Proyectando este último sobre la dirección de R y sobre su normal obtenemos los vectores momento M^* y M'. Por definición de eje central cualquier punto del mismo que consideremos como centro de reducción, nos conducirá a que la proyección M' del vector momento sea nula. En consecuencia, bastará hallar un punto tal que, con respecto al mismo, el momento de R aplicado en O tenga el mismo valor absoluto que M', y su vector representativo tenga la misma dirección y sentido contrario. En el caso de figura 3.26, como M' está dirigido según el eje y, el par que lo anule deberá actuar en el plano normal; es decir el zx. Luego el nuevo centro de reducción deberá estar ubicado sobre el eje x, y a una distancia d de O tal que se cumpla

$$|M'| = |R| \cdot d \qquad [3.69]$$

El nuevo centro de reducción O', que es a la vez un punto del eje central del sistema queda ubicado a la derecha de O, sobre la rama positiva del eje x, por cuanto, el vector representativo del momento de R respecto de O' debe estar dirigido según el semieje positivo y para que anule el vector M'.

Un sistema de fuerzas en el espacio puede reducirse a dos fuerzas no concurrentes. En efecto, consideremos en la figura 3.27 un sistema cualquiera que, una vez reducido al punto O, nos conduce a una resultante de reducción R y al correspondiente par resultante M, represen-

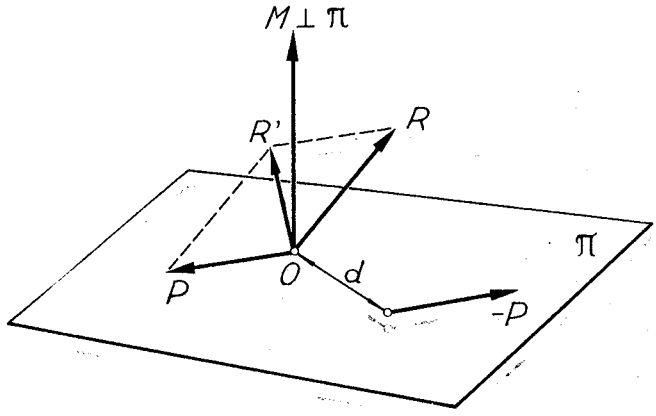


Fig. 3.27.

tado en la figura por su vector momento. Consideremos ahora el plano π, normal al vector momento, en que actúa el par, y supongamos a éste formado por dos fuerzas P, de intensidad cualquiera, y separadas por una distancia d tal que se cumpla la condición $M = P.d$. Aplicando una de las fuerzas en O, podemos componerla con R, obteniéndose así un nuevo sistema equivalente al anterior, constituido por las fuerzas R' —resultante de R y P— y $-P$, no coplanares.

Como el par M puede ser representado por infinitos conjuntos de dos fuerzas paralelas de igual intensidad y sentido contrario y, además, el plano en que actúa el par puede desplazarse paralelamente a sí mismo, existirán infinitos sistemas de dos fuerzas no coplanares equivalentes al sistema dado.

Para proceder gráficamente a la reducción de un sistema de fuerzas en el espacio se opera de la forma siguiente. En la figura 3.28 hemos representado en perspectiva, y referido a una terna de ejes, un sistema constituido por tres fuerzas P_1, P_2 y P_3. Como centro de reducción adoptamos el origen de coordenadas, aunque podríamos haber elegido otro

punto cualquiera. Determinadas las trazas sobre el plano xy (icnográfico) de cada una de las rectas de acción de las fuerzas, apliquemos en las mismas los vectores representativos de las fuerzas y descompongamos cada uno de ellos en una componente normal al plano xy y otra según la proyección de la correspondiente recta de acción. Estas componentes las denominaremos respectivamente componente vertical y componente horizontal. Hemos reemplazado así el sistema dado por otros dos sistemas que en conjunto le son equivalentes: un sistema plano, constituido por las componentes horizontales, y otro de fuerzas paralelas en el espacio, formado por las componentes verticales.

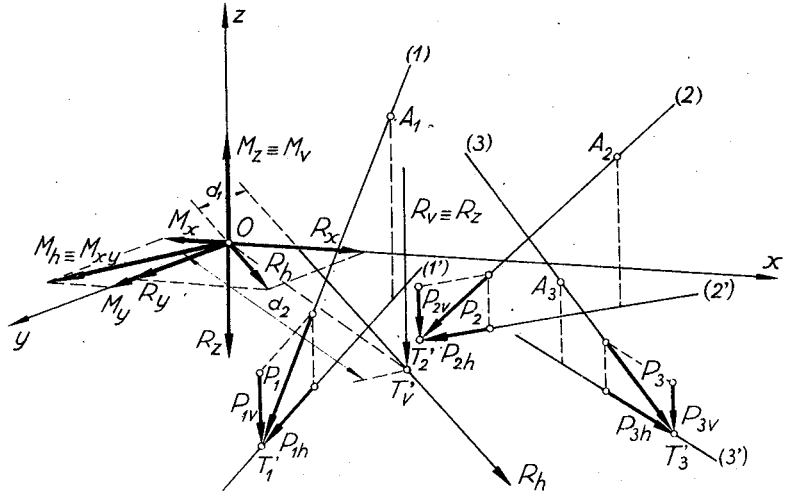


Fig. 3.28.

Determinamos ahora, mediante el trazado de un polígono funicular (omitido en la figura), la resultante de las componentes horizontales, que denominaremos R_h, y luego, por abatimientos según las direcciones x é y, y en la forma explicada en 3.3.1, la traza T_v de la recta de acción de la resultante de las componentes verticales R_v. La intensidad y sentido de esta última, por tratarse de fuerzas paralelas, resultan de la suma algebraica de las componentes.

Conocidas R_h y R_v, procedemos a reducirlas al origen O. La reducción de la primera de ellas nos conduce a una fuerza R_h aplicada en O y a un par de momento $M_v = M_z = R_h \cdot d_1$, cuyo vector momento estará dirigido según el eje z y será la componente, según dicho eje, del vector momento de reducción del sistema. Su sentido se obtiene de aplicar la convención adoptada.

R_h, que yace en el plano xy, admite las componentes R_x y R_y según los ejes x é y, que a la vez serán las correspondientes componentes de la resultante de reducción.

Operando ahora con R_v, su reducción a O da origen a un par de momento $M_h = M_{xy} = R_v \cdot d_2$, cuyo vector momento, ubicado en el plano xy es normal al plano definido por O y la recta de acción de R_v, y a una fuerza R_v aplicada en O. Esta última constituye la componente R_z de la resultante de reducción y en cuanto a M_{xy}, sus dos componentes M_x y M_y lo son también del par resultante de reducción. Conocidos R_x, R_y, R_z y M_x, M_y, M_z, por simple composición geométrica, obtenemos M y R, par y resultante de reducción del sistema.

Prácticamente se opera en proyección Monge y una vez conocidas las tres componentes de R y M según los ejes coordenados, basta hallar sus proyecciones icnográficas, lo que es inmediato, para luego, abatiendo los respectivos planos proyectantes, obtener por composición de aquéllas con las componentes verticales, R y M en verdadera magnitud.

3.4.2. Reducción de sistemas de fuerzas espaciales. Solución analítica.

La solución gráfica de los problemas relativos a sistemas de fuerzas no concurrentes espaciales resulta un tanto laboriosa, siendo necesario recurrir en general a la representación Monge y operar efectuando abatimientos, tanto de rectas como de planos proyectantes. Por ello, es mucho más simple encarar la resolución de los distintos problemas mediante procedimientos analíticos.

Dado un sistema de fuerza P_i y elegido un centro de reducción, en el caso más general, el sistema equivale a una resultante de reducción y a un par de reducción, R y M respectivamente.

Si hacemos coincidir el origen de una terna de ejes coordenados con el centro de reducción, y proyectamos sobre los mismos los vectores representativos de R y M tendremos:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M \cdot \cos \alpha_M \\ M_y &= M \cdot \cos \beta_M \\ M_z &= M \cdot \cos \gamma_M \\ R_x &= R \cdot \cos \alpha_R \\ R_y &= R \cdot \cos \beta_R \\ R_z &= R \cdot \cos \gamma_R \end{aligned}\right\} \qquad [3.70]$$

Pero, por otra parte, la resultante de reducción se obtiene como resultante de un sistema de fuerzas P_i aplicadas en O. Por consiguiente, podemos escribir

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_1^n P_i \cdot \cos \alpha_i \\ R_y &= \sum_1^n P_i \cdot \cos \beta_i \\ R_z &= \sum_1^n P_i \cdot \cos \gamma_i \end{aligned}\right\} \qquad [3.71]$$

También, el vector momento resultante de reducción se obtiene como suma geométrica de los vectores momento, representativos de los pares, originados por la reducción al centro O de las distintas fuerzas que constituyen el sistema. En consecuencia, tendremos que su proyección sobre los tres ejes será igual a la suma de las proyecciones de los pares componentes, es decir

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \sum_1^n M_i^x \\ M_y &= \sum_1^n M_i^y \\ M_z &= \sum_1^n M_i^z \end{aligned}\right\} \qquad [3.72]$$

Estas tres últimas ecuaciones, además de representar las proyecciones sobre los tres ejes del vector momento de reducción, corresponden a los momentos respecto de los tres ejes del sistema dado.

En consecuencia, para reducir un sistema de fuerzas espaciales a un punto, basta establecer las tres ecuaciones de proyección [3.71] y las tres condiciones de momentos respecto de los tres ejes [3.72]. Las mismas nos dan los valores de las proyecciones de la resultante de reducción, que a la vez son sus componentes según los ejes coordenados, y las tres componentes del vector momento resultante, según los mismos ejes.

La intensidad de la resultante de reducción se obtiene de la expresión

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \; . \qquad [3.73]$$

Los cosenos directores de la misma, que definen su dirección y sentido se obtienen de

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha_R &= \frac{R_x}{|R|} \\ \cos \beta_R &= \frac{R_y}{|R|} \\ \cos \gamma_R &= \frac{R_z}{|R|} \end{aligned}\right\} \qquad [3.74]$$

Análogamente, el par resultante de reducción resulta de la expresión

$$|M| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \ . \qquad [3.75]$$

quedando definida la dirección y sentido del vector momento por sus cosenos directores:

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha_M &= \frac{M_x}{|M|} \\ \cos \beta_M &= \frac{M_y}{|M|} \\ \cos \gamma_M &= \frac{M_z}{|M|} \end{aligned}\right\} \qquad [3.76]$$

Considerando las ecuaciones [3.71] y [3.72], pueden presentarse para las mismas, los siguientes casos:

a)	b)	c)	d)
$R_x \neq 0$	$R_x \neq 0$	$R_x = 0$	$R_x = 0$
$R_y \neq 0$	$R_y \neq 0$	$R_y = 0$	$R_y = 0$
$R_z \neq 0$	$R_z \neq 0$	$R_z = 0$	$R_z = 0$
$M_x \neq 0$	$M_x = 0$	$M_x \neq 0$	$M_x = 0$
$M_y \neq 0$	$M_y = 0$	$M_y \neq 0$	$M_y = 0$
$M_z \neq 0$	$M_z = 0$	$M_z \neq 0$	$M_z = 0$

Caso a) Constituye el caso general. Cuando al establecer las seis ecuaciones de condición resultan todas ellas distintas de cero, el sistema de fuerzas se reduce a una única fuerza aplicada en el centro de reducción, la resultante de reducción, y a un par resultante o, lo que es equivalente, a dos fuerzas no coplanares.

Caso b) Cuando son nulas las condiciones de momento respecto de tres ejes, pero las de proyección tienen un valor determinado, el sistema se reduce a una única fuerza, la resultante de reducción, que pasa precisamente por el centro de reducción elegido, para el que, además, se anula el par de reducción. También el sistema se reduce a una única fuerza, cuando en el caso a) la resultante de reducción pertenece al mismo plano que el par de reducción. En tal caso, es posible la composición de $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{M}$, obteniéndose una única fuerza como sistema equivalente.

Caso c) En este caso, en que las tres proyecciones de la resultante de reducción son nulas, el sistema se reduce a un par de fuerzas, cualquiera sea el centro de reducción adoptado.

Caso d) Si las sumas de las proyecciones del sistema sobre los tres ejes son nulas, y también lo son las sumas de los momentos respecto de tres ejes, en consecuencia son nulos tanto el par como la resultante de reducción, y por ende el sistema se encuentra en equilibrio, lo que justificaremos a continuación, al tratar de las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes.

3.4.3. Condiciones analíticas, necesarias y suficientes, para el equilibrio de un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes.

Sea un sistema de fuerzas P_i, espaciales y no concurrentes, y elijamos un centro de reducción arbitrario O, haciéndolo coincidir con el origen de una terna de ejes coordenados x, y, z. Supongamos que, proyectando el sistema sobre el eje x, encontramos que la suma de las proyecciones es nula; es decir,

$$\sum_1^n P_i . \cos \alpha_i = R_x = 0 \ . \qquad [3.77]$$

Si ello se cumple, existen las tres posibilidades siguientes:

a) La resultante de reducción se encuentra en plano zy.

b) El sistema se reduce a un par de fuerzas.

c) El sistema se encuentra en equilibrio.

Si proyectando el sistema sobre el eje y encontramos que, además de la [3.77], se cumple para el mismo

$$\sum_1^n P_i . \cos \beta_i = R_y = 0 \qquad [3.78]$$

las posibilidades del sistema son las siguientes:

a) La resultante de reducción es normal al plano xy; es decir, está dirigida según el eje z.

b) El sistema se reduce a un par de fuerzas.

c) El sistema se encuentra en equilibrio.

Finalmente, si proyectando el sistema sobre el eje z simultáneamente con las [3.77] y [3.78] se cumple

$$\sum_1^n P_i . \cos \gamma_i = R_z = 0 \qquad [3.79]$$

evidentemente queda descartada la posibilidad de que al reducir el sistema a un punto cualquiera, exista una resultante de reducción. En efecto, el cumplimiento de las [3.77] y [3.78] obligaría a la misma a ser paralela al eje z, pero la [3.79] le exige que, de existir, debe ser normal a z, condiciones éstas imposibles de cumplir simultáneamente, salvo que la resultante de reducción sea nula.

Resumiendo: si las sumas de las proyecciones sobre tres ejes de un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes son simultáneamente nulas, el sistema se reduce a un par de fuerzas o bien se encuentra en equilibrio.

Tomando ahora momentos del sistema respecto del eje x, si la suma de los mismos es nula, es decir si

$$\sum_1^n M_i^x = M_x = 0 \qquad [3.80]$$

puede ocurrir:

a) El sistema se reduzca a un par de fuerzas, cuyo vector momento sea normal al eje x.

b) El sistema se encuentra en equilibrio.

Si tomamos momentos respecto del eje y, y simultáneamente con la [3.80], se cumple

$$\sum_1^n M_i^y = M_y = 0 \qquad [3.81]$$

existen las siguientes posibilidades para el sistema:

a) El sistema se reduce a un par de fuerzas, cuyo vector momento es normal al plano xy, y por lo tanto tiene la dirección del eje z, por cuanto debe simultáneamente cumplir con la condición de ortogonalidad con los ejes x é y.

b) El sistema se encuentra en equilibrio.

Finalmente, si además de cumplir el sistema con todas las condiciones expuestas, al tomar momentos del mismo respecto del eje z, resulta

$$\sum_1^n M_z^i = M_z = 0 \ ; \qquad [3.82]$$

sólo resta la posibilidad de que el sistema se encuentre en equilibrio, por cuanto, de reducirse a un par, el cumplimiento de la [3.82] exigiría al mismo que su vector momento fuera normal al eje z; es decir, paralelo al plano xy, lo que es imposible, por cuanto las condiciones impuestas anteriormente exigían que fuera ortogonal a dicho plano.

En consecuencia, es condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes se encuentren en equilibrio que sean nulas las sumas de las proyecciones del mismo sobre tres ejes, y que los momentos del sistema respecto de los mismos ejes también sean nulos.

El equilibrio de un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes puede establecerse también de las siguientes maneras:

1º: Mediante seis condiciones de nulidad de momentos respecto de seis ejes cualesquiera, de los cuales tres pueden ser concurrentes a un punto.

2º: Mediante cinco condiciones de nulidad de momentos respecto de cinco ejes y una condición de nulidad de proyección sobre un eje.

3º: Mediante cuatro condiciones de nulidad de momentos respecto de cuatro ejes, y dos condiciones de nulidad de proyección, sobre dos ejes.

Discutiremos a continuación los tres casos indicados.

Consideremos un sistema de ejes concurrentes, y hagamos coincidir su origen con el centro de reducción de un sistema de fuerzas espaciales no concurrentes. Si al tomar momentos del sistema respecto de dichos ejes encontramos que las sumas de los mismos son nulos, ello significa que, para el centro de reducción elegido, el sistema se reduce a una resultante, siendo nulo el par de reducción o se encuentra en equilibrio.

Si, elegido un cuarto eje no concurrentes con los anteriores, la suma de los momentos del sistema respecto del mismo es nula, las posibilidades del sistema son:

a) Si el sistema admite resultante de reducción, la misma, además de pasar por O, centro de reducción, corta el nueve eje.

b) El sistema se encuentra en equilibrio.

Si con respecto a un quinto eje, coplanar o no con el anterior, la suma de los momentos del sistema también es nula, ello implica: o bien el equilibrio del sistema o sino, si el sistema admite resultante de reducción, la misma aparte de pasar por O, centro de reducción, y cortar el cuarto eje, se apoya también en el quinto eje. En caso que los dos últimos ejes fueran coplanares, la resultante de reducción pasaría por el punto de concurrencia de ambos.

Finalmente, si elegido un sexto eje, la suma de los momentos del sistema respecto del mismo resulta nula, sólo resta la posibilidad de equilibrio, salvo que los tres últimos ejes fueran concurrentes, pues de ser así, el sistema podría admitir una resultante de reducción que pasaría por el punto de concurrencia de los ejes, siendo de hecho nulos los momentos respectivos.

El segundo caso, es decir, cuando el equilibrio se establece mediante cinco condiciones de nulidad de momentos respecto de cinco ejes y una condición de nulidad de proyección sobre un eje, se justifica de la manera siguiente: Establecidas las cinco condiciones de nulidad de momentos respecto de cinco ejes, las posibilidades del sistema, por lo visto en el caso anterior, se reducen a:

a) Si el sistema admite una resultante de reducción, la misma pasa por el centro de reducción y corta los dos ejes restantes.

b) El sistema se encuentra en equilibrio; es decir, la resultante de reducción es nula.

Si ahora proyectamos el sistema sobre un eje cualquiera, siempre que no sea normal a la dirección de la resultante de reducción en caso de existir la misma, y encontramos que la suma de las proyecciones es nula, evidentemente el sistema se encuentra en equilibrio, porque dicha suma de proyecciones es igual a la proyección de la resultante y, si esta proyección es nula, debe serlo también la resultante de reducción.

Finalmente, consideremos el caso en que, planteadas cuatro condiciones de momentos, tres con respecto a los tres ejes que pasan por el centro de reducción y una respecto de un cuarto eje, todas ellas resultan nulas.

Evidentemente, las posibilidades que se presentan para el sistema son dos: equilibrio o, de existir resultante de reducción, la misma pasa por el centro O y corta el cuarto eje. Si proyectado el sistema sobre un quinto eje, la suma de sus proyecciones es nula, podría ocurrir, aparte del equilibrio, que la resultante de reducción, además de pasar por O y cortar el cuarto eje, fuera normal al quinto. Finalmente, si elegido un sexto eje, la suma de las proyecciones del sistema es nula, la única posibilidad que le resta al sistema es la de encontrarse en equilibrio

3.4.4. Descomposición de una fuerza en seis componentes en el espacio.

Hemos visto que en los problemas relativos a sistemas de fuerzas espaciales no concurrentes, es posible plantear seis ecuaciones de condición. En consecuencia, será posible resolver problemas que impliquen la existencia de seis incógnitas.

Uno de los problemas más importantes relativos a sistemas de fuerzas en el espacio es el de hallar las componentes (o equilibrantes), según seis direcciones no concurrentes, de una una fuerza o sistema de fuerzas espaciales. Como veremos más adelante, este problema se presenta en el estudio de los sólidos espaciales vinculados.

En consecuencia, dada una fuerza, definida en el espacio por las coordenadas de un punto de su recta de acción, por su intensidad y los cosenos directores que establecen su dirección, y seis rectas cualesquiera en el espacio, de las que se conocen las coordenadas de un punto de las mismas y los correspondientes cosenos directores, si se pide hallar las componentes (o equilibrantes) de la misma según las seis rectas dadas, las únicas incógnitas del problema serán las seis intensidades de las componentes. Estamos, pues, ante un problema de seis incógnitas, resoluble mediante el planteo de seis ecuaciones de condición entre la fuerza dada y las seis componentes incógnitas. Estas ecuaciones de condición, pueden plantearse como ecuaciones de proyección o de momentos respecto de ejes, con las mismas posibilidades vistas al analizar las condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio.

Para que el problema tenga solución es condición indispensable que a lo sumo cinco de las seis rectas de acción de las componentes (o equilibrantes) incógnitas sean cortadas por un mismo eje. De no ser así, es decir, si el eje corta las seis rectas de acción, los momentos de las componentes respecto de dicho eje resultarían nulos, lo que sólo es posible si la fuerza a descomponer también se apoya sobre el eje.

Esta condición general conduce a las siguientes condiciones particulares, a ser satisfechas por las rectas de acción de las componentes incógnitas, para que el problema de la descomposición tenga solución:

1º: A un punto propio o impropio no pueden concurrir más de tres rectas de acción. En efecto, de concurrir cuatro, por el punto de concurrencia siempre es posible trazar un eje que se apoye en las dos restantes rectas de acción.

2º: No más de tres rectas de acción pueden ser coplanares. De ser cuatro las rectas coplanares, las trazas de las dos restantes sobre dicho plano definen una recta que se apoya sobre las seis rectas de acción.

3º: A lo sumo cuatro de las rectas de acción pueden pertenecer a la misma serie reglada. Si pertenecieran cinco, la sexta recta de acción cortaría a la superficie reglada en un punto por donde pasaría una generatriz que se apoyaría sobre las seis rectas.

Existen dos casos particulares de descomposición de una fuerza en seis componentes, cuya solución gráfica es simple.

En el primero de ellos se trata de descomponer una fuerza R (figura 3.29) en seis componentes, tres de las cuales concurren a un punto A, y las tres restantes yacen en un mismo plano, que en el caso de la figura hemos supuesto coincidente con el plano xy. Para resolver el problema se determina primeramente la traza del plano determinado por

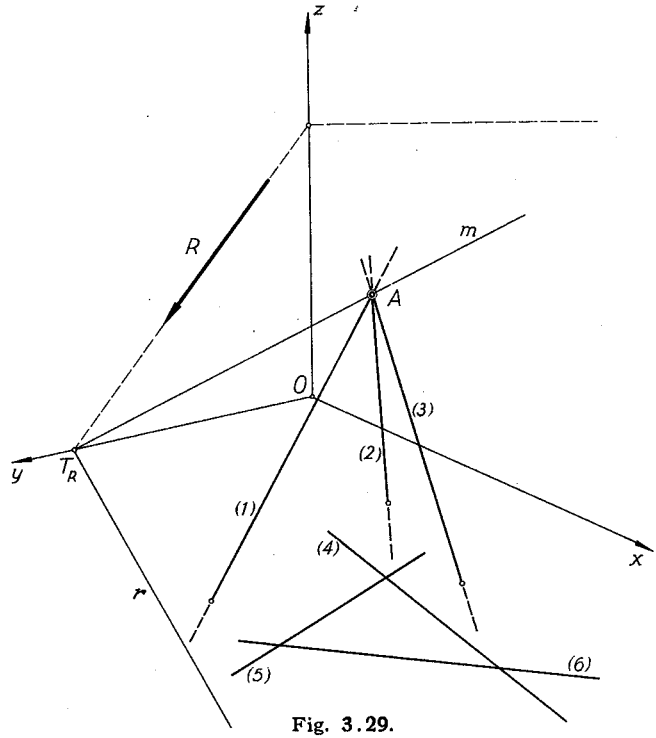


Fig. 3.29.

la fuerza a descomponer y el punto de concurrencia A, de tres de las componentes incógnitas, con el plano en que yacen las tres componentes restantes, el xy en el caso que nos ocupa. Dicha traza, que llamaremos r, contiene la traza T_R de la fuerza R. Determinada a continuación la recta m definida por A y T_R, que será coplanar con r y con la recta de acción de R, será posible descomponer esta última en las direcciones r y m. Halladas las componentes de R según estas direcciones, se descompone la componente según m en las direcciones (*1*), (*2*) y (*3*), concurrentes con ella en A, y luego la componente auxiliar según r, se descompone en las direcciones (*4*), (*5*) y (*6*), lo que es posible por ser las cuatro coplanares y no concurrentes.

Un segundo caso particular lo constituye el de figura 3.30, donde se trata de descomponer una fuerza R en seis componentes, de las que tres concurren a un punto A, dos a un punto B y la sexta pasa por un punto C. El problema se resuelve descomponiendo primeramente R en tres direcciones concurrentes a un punto D de su recta de acción y que pasen por A, B y C, direcciones que llamaremos m, n y q, respectivamente.

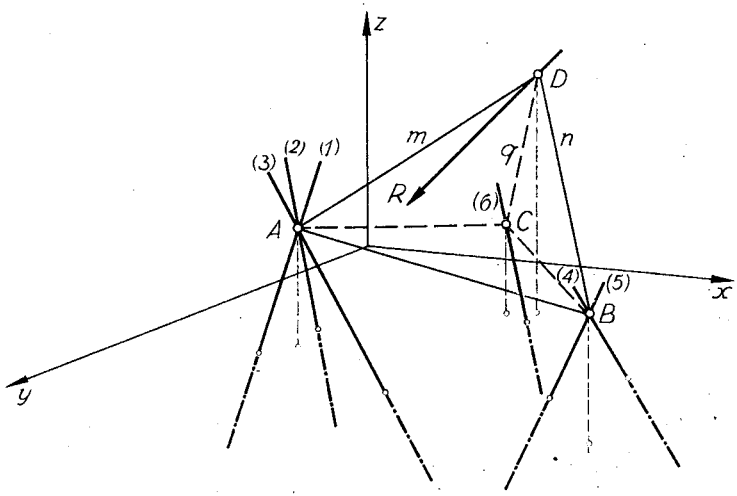


Fig. 3.30.

La componente según q la descomponemos en las direcciones (*6*), CB y CA concurrentes en C. Hallando luego la resultante de CB y n, concurrentes en B, la descomponemos en las direcciones (*4*), (*5*) y BA. Finalmente, componiendo las componentes m, CA y BA, concurrentes en A, descomponemos su resultante en las direcciones (*1*), (*2*) y (*3*), con lo que el problema queda resuelto.

4. Geometría de las masas.

4.1. Baricentros.

4.1.1. Centros de masas.

Consideremos, figura 4.1, un conjunto de puntos A_1, A_2, A_3, . . . , A_i, cuyas coordenadas genéricas con respecto a una terna $x\,.\,y\,.\,z$ son x_i, y_i, z_i. Supongamos que cada punto posea una masa m_i. Al conjunto de puntos materiales A_i de masa m_i, lo denominaremos en lo sucesivo *conjunto discreto de masas*.

Definimos como *momento estático o de primer orden* de la masa m_i respecto del plano xy, al producto de la masa m_i por su distancia z_i al mismo, es decir

$$S_i^{xy} = m_i \,.\, z_i \,. \qquad [4.1]$$

Análogamente, los momentos estáticos de la masa m_i respecto de los planos yz y zx tendrán las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} S_i^{yz} &= m_i \,.\, y_i \\ S_i^{zx} &= m_i \,.\, x_i \end{aligned} \qquad [4\text{-}2]$$

Se define como *centro de masa* del conjunto discreto a un punto material G, cuya masa es igual a la suma de las masas que componen el sistema, y cuyo momento estático respecto de cada uno de los tres planos xy, xz y zy es igual a la suma de los momentos estáticos respecto de dichos planos, de las ma-

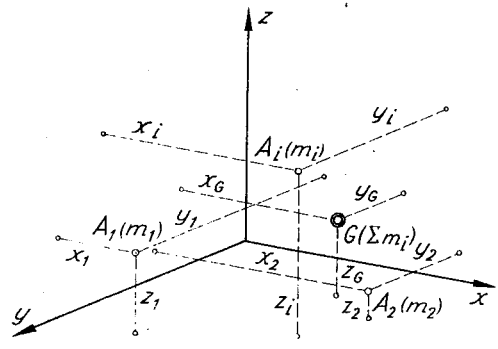


Fig. 4.1.

sas componentes del sistema. Es decir, un punto material tal que cumpla las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} M &= \sum_1^n m_i \\ M.x_G &= \sum_1^n m_i.x_i \\ M.y_G &= \sum_1^n m_i.y_i \\ M.z_G &= \sum_1^n m_i.z_i \end{aligned}\right\} \qquad [4.3]$$

donde x_G, y_G, z_G son las coordenadas respecto de los tres planos xy, xz é yz del centro de masas G, y M la masa total del sistema.

En consecuencia, la posición del centro de masas de un conjunto discreto queda definido por las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{\sum_1^n m_i.x_i}{\sum_1^n m_i} \\ y_G &= \frac{\sum_1^n m_i.y_i}{\sum_1^n m_i} \\ z_G &= \frac{\sum_1^n m_i.z_i}{\sum_1^n m_i} \end{aligned}\right\} \qquad [4.4]$$

Si todas las masas son coplanares, estando ubicados los puntos materiales sobre el plano zy por ejemplo, en las expresiones [4.3], por ser nulas todas las coordenadas x_i, se anulan los términos que las contengan, resultando como expresiones que definen en este caso el centro de masas, las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} M &= \sum_1^n m_i \\ M.z_G &= \sum_1^n m_i.z_i \\ M.y_G &= \sum_1^n m_i.y_i \,. \end{aligned}\right\} \qquad [4.5]$$

Los productos $m_i . z_i$ y $m_i . y_i$ se definen como *momentos estáticos* o de primer orden de la masa m_i respecto de los ejes y y z respectivamente. Las coordenadas del centro de masas, en este caso, serán:

$$z_G = \frac{\sum_1^n m_i . z_i}{\sum_1^n m_i} \qquad y_G = \frac{\sum_1^n m_i . y_i}{\sum_1^n m_i} \qquad [4.6]$$

En lo anterior hemos supuesto que las distancias, tanto a los planos como a los ejes coordenados, se medían normalmente a los mismos.

Si, en el caso de tomar momentos estáticos de un sistema de masas respecto de un plano, el xy, por ejemplo, conviniéramos en medir las distancias en una dirección que formara un ángulo φ con respecto al eje z, la distancia de un punto genérico tendría por expresión

$$z'_i = \frac{z_i}{\cos \varphi} . \qquad [4.7]$$

Si en la tercera de las expresiones [4-4] dividimos ambos miembros por $\cos \varphi$, resulta

$$\frac{z_G}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\sum_1^n m_i \cdot z_i}{\sum_1^n m_i} = \frac{\sum_1^n m_i \frac{z_i}{\cos \varphi}}{\sum_1^n m_i} \qquad [4.8]$$

Pero, de acuerdo con la [4.7], y llamando

$$z'_G = \frac{z_G}{\cos \varphi},$$

resulta finalmente

$$z'_G = \frac{\sum_1^n m_i . z'_i}{\sum_1^n m_i} . \qquad [4.9]$$

Si, con respecto a los planos xz é yz, las distancias se miden en direcciones que formen ángulos cualesquiera con los ejes normales a dichos planos se llega, para las dos restantes coordenadas del centro de masas, a expresiones correspondientes con la [9.4], teniéndose en definitiva

$$\left.\begin{aligned} x'_G &= \frac{\sum_1^n m_i x'_i}{\sum_1^n m_i} \\ y'_G &= \frac{\sum_1^n m_i y'_i}{\sum_1^n m_i} \\ z'_G &= \frac{\sum_1^n m_i z'_i}{\sum_1^n m_i} \end{aligned}\right\} \qquad [4.10]$$

Expresiones que definen el centro de masas, en una forma más general que las [4.4], por cuanto contemplan la posibilidad de que las distancias a los planos coordenados se midan en direcciones cualesquiera.

Para conjuntos discretos de masa, ubicados en un mismo plano, si las distancias a los ejes coordenados se miden en direcciones arbitrarias, las expresiones a que se llega son similares.

Consideremos las ecuaciones [4.5] y admitamos, por un momento, conocida la posición del centro de masas. Si los ejes con respecto a los cuales tomamos momentos estáticos pasan por dicho centro de masas, las distancia z_G é y_G serán iguales a cero, con lo que se anularán los miembros izquierdos de las dos últimas ecuaciones [4.5], resultando con ello:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n m_i . z_i &= 0 \\ \sum_1^n m_i . y_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [4.11]$$

es decir, la suma de los momentos estáticos de un conjunto plano discreto de masas respecto de un eje cualquiera que pase por su centro de masas, es nulo.

Análogamente, si en las [4.3], los planos respecto de las cuales se toman momentos estáticos pasan por el centro de masas, resultarán iguales a cero las tres coordenadas de este último, es decir x_G , y_G , z_G . En consecuencia, tendremos que

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n m_i . x_i &= 0 \\ \sum_1^n m_i . y_i &= 0 \\ \sum_1^n m_i . z_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [4.12]$$

es decir, que la suma de los momentos estáticos de un conjunto discreto de masas espaciales, respecto de un plano cualquiera que pase por el correspondiente centro de masas, es nula.

4.1.2. Determinación gráfica del momento estático con respecto a un eje de un conjunto discreto de masas plano.

En los desarrollos posteriores nos ocuparemos fundamentalmente de conjuntos de masas ubicados en un mismo plano. Por ello interesa especialmente la determinación de los momentos estáticos de masas y de magnitudes asimilables a ellas, no sólo por métodos analíticos sino también utilizando procedimientos gráficos.

La determinación gráfica del momento estático de una masa o de un conjunto discreto de masas respecto de un eje cualquiera de su plano, se efectúa utilizando una de las aplicaciones del polígono funicular. En el capítulo 2, al tratar en detalle el polígono funicular, vimos que, para determinar el momento de una fuerza respecto de un punto, bastaba trazar un polígono funicular de la misma, e intersecar con los lados extremos de aquél una paralela a la fuerza trazada por el centro de momentos. El momento estático resultaba de leer el segmento así determinado en la escala correspondiente. Dicho procedimiento se extendía al caso de un sistema de varias fuerzas, para el que la paralela trazada por el centro de momentos lo era a la resultante del sistema. Y particularmente, en el caso de un sistema de fuerzas paralelas, se trazaba una paralela a la dirección común de las fuerzas.

Sea el conjunto de masas discretas m_i aplicadas en los puntos A_i de figura 4.2 y sea z el eje con respecto al cual se desea calcular el momento estático del conjunto de masas.

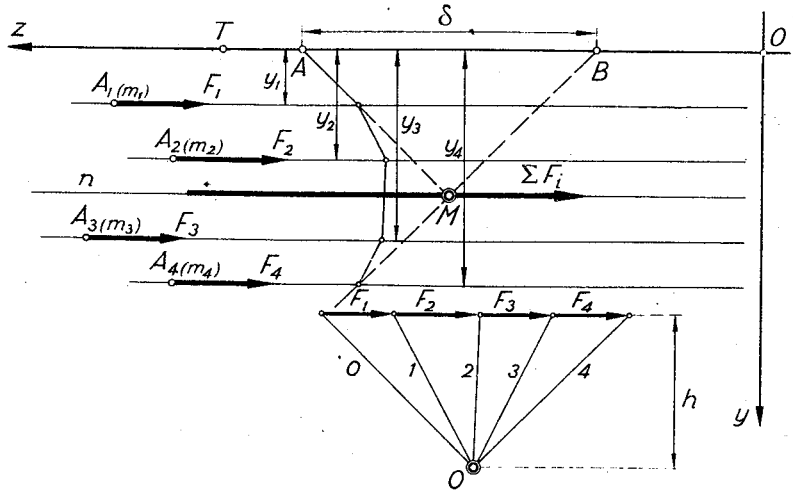


Fig. 4.2.

Supongamos aplicadas en los puntos A_i fuerzas F_i paralelas al eje z, de un mismo sentido, que puede ser cualquiera, por cuanto las masas tienen el mismo signo, y cuyas intensidades sean proporcionales a las masas m_i.

Sea T un punto cualquiera perteneciente al eje z. Si nos proponemos hallar el momento estático del sistema de fuerzas F_i respecto de T, basta construir con polo O un polígono funicular del sistema dado, y trazar luego por T una paralela a la dirección común de las fuerzas. El segmento intersecado sobre dicha recta por los lados extremos del polígono funicular, leído en la correspondiente escala de momentos, nos da el momento buscado.

Ahora bien, la expresión del momento estático del sistema respecto de T, tiene por expresión

$$\mathbf{M}_T = \sum_1^n F_i . y_i \qquad [4.13]$$

donde y_i corresponde a la distancia genérica del punto T a la recta de acción de cada fuerza. Pero, por otra parte, dicha ordenada también representa la distancia genérica de cada uno de los puntos A_i en que están aplicadas las masas m_i al eje z, y, además, las intensidades F_i corresponden a las magnitudes de las masas m_i. En consecuencia, podemos escribir

$$\sum_1^n F_i . y_i = \sum_1^n m_i . y_i \qquad [4.14]$$

Es decir que el segmento δ, leído en la escala correspondiente, nos da el valor numérico del momento estático del conjunto de masa m_i respecto del eje z. Al determinar la escala, que como sabemos es igual al producto de la escala de fuerzas por la escala de longitudes por la distancia polar h, debe tenerse presente que, en este caso, la escala de fuerzas no es tal sino una escala de masas, en la que hemos representado en el polígono de fuerzas, mediante los vectores F_i, las masas m_i.

La construcción de la figura 4.2 permite también interpretar las ecuaciones [4.4]. Si prolongamos el primero y último lados del polígono funicular, su intersección define el punto M. Si por dicho punto trazamos un eje paralelo a la dirección de las fuerzas ideales F_i, el segmento que sobre el mismo intersecan los lados extremos del funicular, es nulo y, en consecuencia, también será nulo el momento estático del conjunto de masas respecto de dicho eje.

Ahora bien, las ecuaciones [4.11] nos dicen que, con respecto a un eje cualquiera que pase por el centro de masas de un conjunto discreto, el momento estático de este último es nulo. Además, el eje *n-n* puede interpretarse como recta de acción de la fuerza resultante de las fuerzas ideales F_i, representativas de las masas m_i, resultante cuya intensidad será evidentemente igual a la masa total del sistema; es decir,

$$F_R = \sum_1^n F_i = \sum_1^n m_i \ . \qquad [4.15]$$

De todo ello se deduce que el eje *n-n* pasa por el centro de masas del sistema.

Si consideramos que en la construcción de la figura 4.2, que nos ha llevado a determinar un eje que pasa por el centro del conjunto de masas, las fuerzas ideales que representan las masas m_i se llevaron en una dirección arbitraria, deducimos que, llevando dichas fuerzas en otra dirección, obtendremos, mediante el trazado del correspondiente polígono funicular, otro eje que también pasará por el centro de masas. Surge de inmediato que este último, por pertenecer a ambos ejes, debe encontrarse necesariamente en la intersección de los mismos.

Es decir, que la determinación del centro de masas de un conjunto discreto plano, puede efectuarse como si se tratara de hallar el centro de un sistema de fuerzas paralelas, de intensidad igual a la intensidad de las masas componentes, y aplicadas precisamente en los puntos materiales en que estan últimas actúan.

Conviene, por razones de simplicidad, suponer el segundo sistema de fuerzas ideales con dirección normal al primero. En tal caso no es necesario el trazado de un segundo polígono de fuerzas, por cuanto los lados de ambos polígonos funiculares resultan perpendiculares.

4.1.3. Conjuntos continuos de masas. Baricentro.

El concepto de centro de masa que hemos definidos en 4.1.1. es independiente de la naturaleza de las masas que integran el sistema. Las masas son entes representables por magnitudes escalares y, en consecuencia, el concepto de centro de masa se generaliza al extenderlo a otras magnitudes, también representables por escalares, aunque su naturaleza difiera. Tales, por ejemplo, las longitudes, las superficies y los volúmenes.

Si consideramos los cuerpos materiales como conjuntos continuos de masas elementales distribuidas en el volumen de los mismos, el concepto de centro de masas adquiere capital importancia. En este caso las masas m_i, que suponíamos aplicadas en puntos materiales A_i, se transforman en elementos diferenciales de masa, dm, distribuidas en el volumen del cuerpo considerado, transformándose las ecuaciones generales [4.4] que definían las coordenadas del centro de masas, en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{\int x \, dm}{\int dm} \\ y_G &= \frac{\int y \, dm}{\int dm} \\ z_G &= \frac{\int z \, dm}{\int dm} \end{aligned}\right\} \qquad [4.16]$$

que corresponden a las coordenadas del centro de masa de un conjunto continuo.

Ahora bien, si un cuerpo material tiene un volumen V y su densidad es γ, variable de punto a punto, la masa aplicada en cada uno de ellos será:

$$dm = \gamma \, dV \quad . \qquad [4.17]$$

La masa total del cuerpo tendrá por expresión:

$$M = \int_V \mathrm{d}m = \int_V \gamma \, \mathrm{d}V \qquad [4.18]$$

transformándose las expresiones [4.16] en

$$x_G = \frac{\int_V x\gamma \, \mathrm{d}V}{\int_V \gamma \, \mathrm{d}V}$$

$$y_G = \frac{\int_V y\gamma \, \mathrm{d}V}{\int_V \gamma \, \mathrm{d}V} \qquad [4.19]$$

$$z_G = \frac{\int_V z\gamma \, \mathrm{d}V}{\int_V \gamma \, \mathrm{d}V} .$$

Particularmente, cuando la densidad sea constante a través de todo el volumen, γ desaparece de las expresiones [4.19], que en tal caso definen el punto G como centro de volumen, coincidente entonces con el centro de masa.

Considerando ahora los pesos de cada una de las masas elementales, tendremos un sistema de infinitas fuerzas paralelas de dirección vertical, de intensidades $\mathrm{d}P = g\,\mathrm{d}m$, siendo g la aceleración de la gravedad. La resultante de dicho sistema de fuerzas paralelas, que constituye el peso del cuerpo pasará por el *centro de gravedad,* coincidente con el centro de masas del sistema y que, a la vez, es el centro del sistema de fuerzas paralelas. Al centro de gravedad se lo designa también como *baricentro* del sistema de masas, denominación que se extiende a los centros de masas, de superficies y volúmenes, aunque impropiamente.

4.1.4. Baricentros de líneas y superficies.

Cuando una figura plana o una línea también plana, poseen un eje de simetría, su baricentro pertenece al mismo. En efecto, consideremos la superficie de figura 4.3, simétrica respecto del eje y. De acuerdo con lo visto en 4.1.2, el baricentro de la figura se hallará sobre la recta de acción de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas, de dirección cualquiera, cuyas intensidades correspondan a las masas componentes. En este caso, el sistema se compone de infinitas fuerzas de intensidad $\mathrm{d}F$ ($\mathrm{d}F$ = superficie elemental), que supondremos actuando en la dirección del eje y. A cada elemento de superficie $\mathrm{d}F$ ubicado al nivel y, y a una distancia z del eje de simetría, corresponderá otro elemento

dF, ubicado al mismo nivel que el anterior y a igual distancia z, pero sobre el segundo cuadrante. Las fuerzas representativas de ambas superficies elementales, tendrán igual intensidad, y por ser paralelas y del mismo sentido, su resultante tendrá por recta de acción el eje de simetría. Extendiendo el razonamiento al conjunto de sistemas constituido cada uno de ellos por dos fuerzas elementales, llegamos a la conclusión de que la

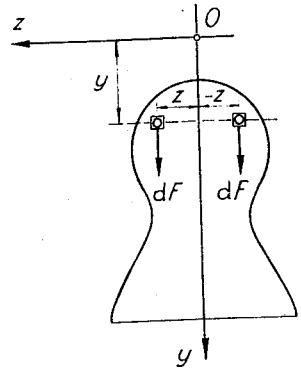


Fig. 4.3.

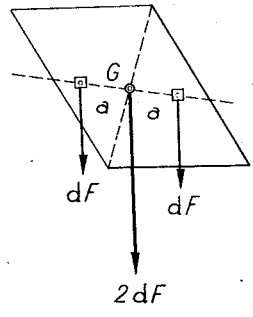


Fig. 4.4.

resultante total, que representa la superficie de la figura, tiene por recta de acción el eje de simetría. Y, como dicha resultante debe pasar necesariamente por el baricentro de la figura, éste se debe encontrar sobre el eje de simetría.

Si se tratara de una figura que admite un centro de simetría, el baricentro de la misma coincide con este último. En efecto, por el centro de simetría pasan infinitos ejes de simetría y, como, por lo visto anteriormente, el baricentro siempre se encuentra sobre un eje de simetría, es evidente que si la figura admite infinitos, el baricentro debe coincidir con el punto común a todos ellos, es decir, con el centro de simetría.

Existen figuras que, si bien no poseen centro de simetría, admiten un centro de figura. En tal caso, el baricentro coincide con este último. En efecto, consideremos la superficie de figura 4.4 y tracemos dos diámetros cualesquiera de la misma. Como se sabe, el centro de figura coincide con el punto de intersección de los diámetros. Ahora bien, sobre uno cualquiera de los diámetros supongamos dos elementos de superficie dF, ubicados a uno y otro lado del centro de figura y a igual distancia del mismo.

El centro de masa de estas dos masas parciales elementales, queda ubicado entre ambas y a igual distancia de cada una de ellas (concepto

de centro de fuerzas paralelas). Es decir, sobre el centro de figura. Para cualquier otro par de masas elementales, ubicadas sobre el mismo o distinto diámetro, el razonamiento es análogo, con lo que llegamos a que el centro de masa, es decir, el baricentro de la figura, coincide con el centro de la misma.

En el caso más general de una figura de contorno regular que no admita ni centro ni ejes de simetría, existen procedimientos gráficos derivados precisamente de las consideraciones analíticas que definen al baricentro, que permiten su determinación en forma relativamente simple. En otros casos es necesario dividir la figura en figuras parciales, cuyos baricentros son fáciles de determinar, para luego hallar el baricentro de la figura total como centro de fuerzas paralelas, de intensidad igual a las superficies parciales en que se ha dividido la figura, aplicadas en los baricentros de estas últimas. Cuando la figura se divide en sólo dos figuras parciales, tal el caso de la figura 4.5, el procedimiento se simplifica. En efecto, los baricentros de las superficies parciales se conocen, pues, por tratarse de figuras con dos ejes de simetría se encuentran en la intersección de los mismos. Trazando el funicular de las fuerzas ideales, representativas de las superficies parciales, que se suponen aplicadas en los respectivos baricentros, la intersección de sus lados extremos nos determina la recta de acción de la fuerza ideal resultante, F_R, recta que, como sabemos, contendrá el baricentro de la figura. Pero, por otra parte, como el baricentro coincide con el centro de dichas fuerzas paralelas, y éste se encuentra alineado con los correspondientes puntos de aplicación, la recta que une los baricentros parciales define, en su intersección con la recta de acción de F_R, el baricentro de la figura.

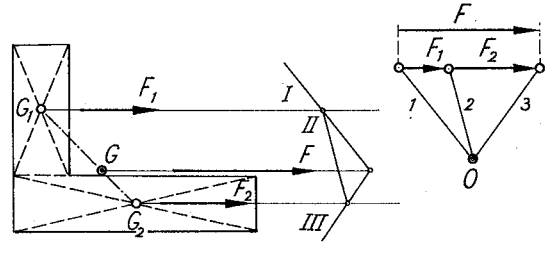


Fig. 4.5.

Cuando se trata de hallar el baricentro de una figura de contorno irregular, tal el caso de la figura 4.6, se procede a dividir la figura en superficies parciales mediante rectas paralelas a una dirección cualquiera, en forma tal que las figuras parciales resultantes sean asimilables a superficies cuyos baricentros sean de fácil determinación, así como también sus correspondientes áreas. Así, en el caso que nos ocupa, las figuras extremas superior e inferior, pueden, sin mayor error, asimilarse a superficies delimitadas por arcos de parábolas, y las restantes a trapecios.

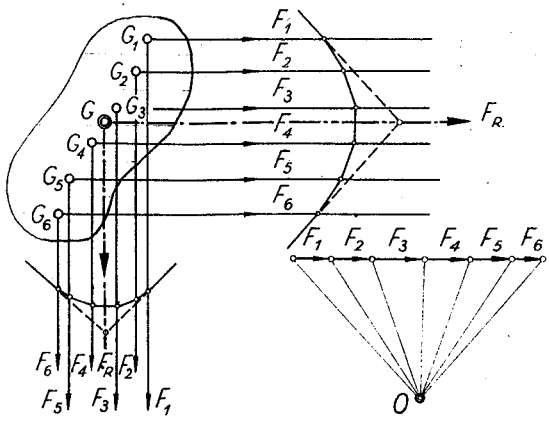


Fig. 4.6.

Hallados los baricentros parciales G_1, G_2 ... G_6 y las áreas de las distintas superficies, suponemos aplicadas en aquéllos fuerzas F_1, F_2 ... F_6 proporcionales a las superficies parciales, y paralelas a una dirección cualquiera. Trazado con polo O un funicular de dichas fuerzas, sus lados extremos definirán un punto de la recta de acción de la resultante F_R que contendrá el baricentro G de la figura. Haciendo actuar ahora las fuerzas en otra dirección, que en este caso por comodidad se ha supuesto normal a la anterior, la nueva resultante también contendrá el baricentro G que, en consecuecia, se encontrará en la intersección de las rectas de acción de ambas resultantes.

En el caso de figura 4.7, la superficie grisada puede considerarse como diferencia de dos superficies: un rectángulo mayor de perímetro $ABCD$, de área F_1 y baricentro G_1, y otro menor, interior, de contorno $A'B'C'D'$, área F_2 y baricentro G_2. El área de este segundo rectángulo es un área sustractiva ya que, restándola de la del rectángulo mayor, obtenemos el área de la figura dada. Como abstracción, podemos imaginar el rectángulo interior como una figura de área negativa. Para hallar

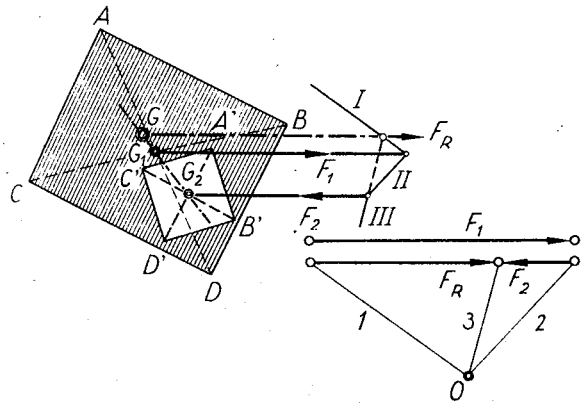


Fig. 4.7.

el baricentro total, bastará suponer aplicadas en los baricentros parciales, y actuando en una dirección cualquiera, fuerzas proporcionales a las respectivas áreas. En este caso, la fuerza ideal representativa del área del rectángulo interior, será de sentido contrario a la restante, por cuanto la resultante de ambas debe corresponder al área de la superficie dada. Una vez hallada, mediante el trazado del correspondiente polígono funicular, la recta de acción de la resultante F_R, el baricentro total queda determinado por la intersección de dicha recta con la definida por los baricentros parciales.

4.1.5. Determinación de baricentros de líneas.

Nos ocuparemos a continuación de la determinación gráfica del baricentro de algunas líneas, y de la justificación analítica de los procedimientos empleados.

a) Baricentro de una poligonal regular (figura 4.8).

Sea la poligonal regular de cuatro lados A-B-C-D-E, de la que se pide hallar el baricentro. Como la línea admite un eje de simetría, el baricentro debe pertenecer al mismo. Hagamos coincidir con dicho eje de simetría el semieje positivo z de un par de ejes coordenados, cuyo origen O coincida con el centro de la circunferencia de radio r, inscripta en la poligonal. Por el punto en que dicha circunferencia corta el eje z (punto N), tracemos una normal y llevemos sobre ésta, y a partir de N, un segmento igual al semidesarrollo de la poligonal, cuyo extremo determina el punto N''. Unamos N'' con O y por el extremo E de la poligonal tracemos una paralela a z, la que, en su intersección con $N''O$, determina un punto E'. Proyectando ahora E' sobre el eje z, dicha proyección es el punto G, baricentro de la poligonal.

Para justificar la construcción indicada, consideremos un lado cualquiera de la poligonal, el BC por ejemplo. Su baricentro, por razones de simetría, será el punto M, punto medio de BC. Análogamente, los baricentros de los restantes lados de la poligonial se encontrarán en los puntos medios de los mismos. Como el baricentro G de la poligonal se encuentra sobre el eje z, para definirlo bastará conocer su abscisa z. Para hallarla, planteamos una ecuación de momentos del sistema de masas respecto del eje y, cuya expresión será:

$$M.z_G = \sum_1^4 m_i.z_i \,. \qquad [4.20]$$

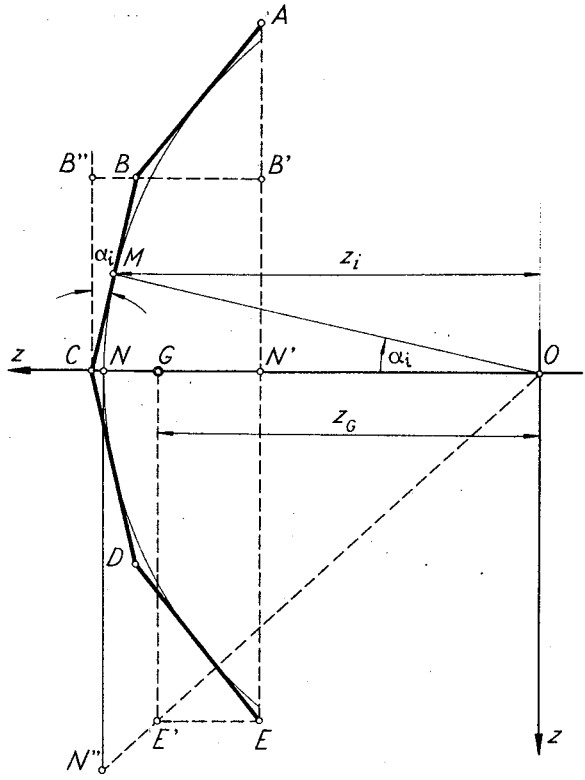


Fig. 4.8.

De la figura tenemos, para el lado BC:

$$\begin{aligned} m_i &= BC \\ z_i &= MO.\cos\alpha_i = r.\cos\alpha_i \end{aligned} \qquad [4.21]$$

y, en consecuencia,

$$m_i z_i = BC.r.\cos\alpha_i . \qquad [4.22]$$

Pero $BC.\cos\alpha_i = B''C = B'N'$; por razonamientos análogos para los restantes lados de la poligonal, y considerando que $r = NO$, llegamos a

$$\sum_1^4 m_i z_i = AE.NO . \qquad [4.23]$$

Además, la masa total M que aparece en [4.20] es, en este caso, igual a

la longitud del desarrollo de la poligonal, que llamaremos S. En consecuencia, reemplazando valores en la [4.20] se tiene:

$$S.z_G = AE.NO \qquad [4.24]$$

de donde

$$z_G = \frac{AE.NO}{S} . \qquad [4.25]$$

Volviendo a la construcción de figura 4.8, en los triángulos semejantes NON'' y GOE' se tiene:

$$\frac{NN''}{GE'} = \frac{NO}{GO} . \qquad [4.26]$$

Pero, $NN'' = \frac{1}{2} S$, por construcción, y $GE' = N'E = \frac{1}{2} AE$. Además $GO = z_G$. Luego, reemplazando en [4.26] y despejando z_G resulta:

$$z_G = \frac{\frac{1}{2} AE.NO}{\frac{1}{2}.S} = \frac{AE.NO}{S} , \qquad [4.27]$$

expresión idéntica a la [4.25], que justifica la construcción empleada.

b) Baricentro de un arco de circunferencia (fig. 4.9).

Consideremos el arco de circunferencia AMB, de radio r y ángulo central $2\ \alpha_0$. Haciendo coincidir el semieje positivo z de un par de ejes coordenados de origen O con el eje de simetría del arco, el baricentro de éste se encontrará sobre dicho semieje. Trazando por M una normal a z y llevando sobre la misma el semidesarrollo del arco, obtenemos un punto M''. Uniendo O con M'' y trazando por el extremo B del arco una paralela al eje z, su intersección con OM'' determina un punto B', que proyectado sobre el eje z define el punto G, baricentro del arco.

Para definir analíticamente la posición del baricentro, nos basta sólo fijar su coordenada z_G, por cuanto sabemos que, por razones de simetría, el mismo debe encontrarse sobre el eje z. La expresión de la abscisa z_G es

$$z_G = \frac{\int z\, dS}{S} , \qquad [4.28]$$

donde dS es un elemento de arco, z su abscisa y S la longitud total

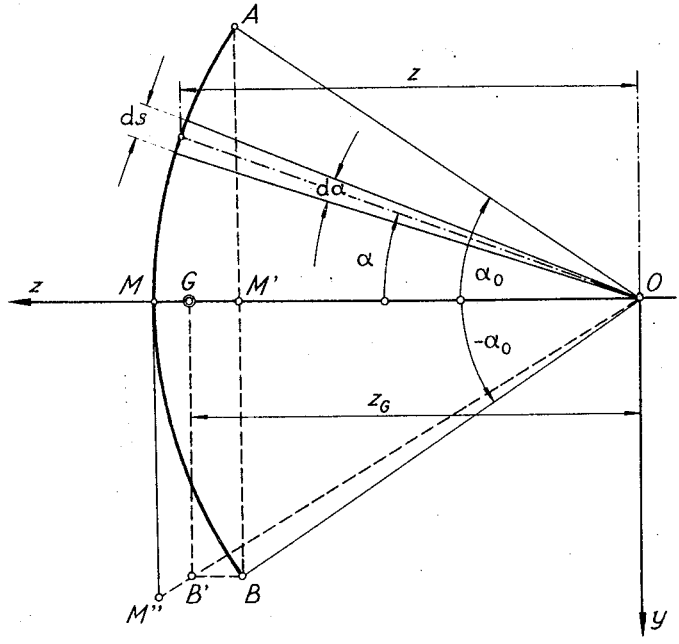


Fig. 4.9.

del arco de circunferencia. Ahora bien, llamando $d\alpha$ al ángulo al centro del elemento de arco, se tiene:

$$dS = r.d\alpha \qquad [4.29]$$

y

$$S = 2\int_0^{\alpha_0} r.d\alpha = 2r.\alpha_0 \qquad [4.30]$$

Reemplazando las [4.29] y [4.30] en la [4.28] resulta

$$z_G = \frac{2\int_0^{\alpha_0} r.z.d\alpha}{2r.\alpha_0} . \qquad [4.31]$$

Pero, $z = r.\cos\alpha$, luego

$$z_G = \frac{2r^2\int_0^{\alpha_0} \cos\alpha\, d\alpha}{2r.\alpha_0} \qquad [4.32]$$

e integrando el numerador

$$z_G = \frac{2\,r^2 . \operatorname{sen} \alpha_0}{2\,r\,\alpha_0} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha_0}{\alpha_0} . \qquad [4.33]$$

En los triángulos semejantes $MM''O$ y $GB'O$ tenemos

$$\frac{MM''}{GB'} = \frac{MO}{GO} . \qquad [4.34]$$

Pero $MM'' = \frac{1}{2} S$, por construcción. Además $MO = r$ y $GB' = M'B = r . \operatorname{sen} \alpha_0$. Luego, reemplazando en la [4.34] se llega a

$$\frac{\frac{1}{2} S}{r . \operatorname{sen} \alpha_0} = \frac{r}{z_G} \qquad [4.35]$$

de donde

$$z_G = \frac{2\,r^2 . \operatorname{sen} \alpha_0}{S} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha_0}{\alpha_0} . \qquad [4.36]$$

Llegamos así a una expresión idéntica a la [4.33], que justifica la construcción gráfica utilizada.

c) *Baricentro del perímetro de un triángulo* (figura 4.10).

En el triángulo de la figura 4.10 el baricentro del lado AB coincide con su punto medio C' y, análogamente, los de los lados BC y CA con sus puntos medios A' y B' respectivamente. En consecuencia, en dichos puntos podemos suponer aplicadas masas iguales a las longitudes de los lados correspondientes. Ahora bien, el centro de las masas aplicadas en C' y B' se encuentra sobre la recta $C'B'$, y será un punto A'' tal que para el mismo se cumpla

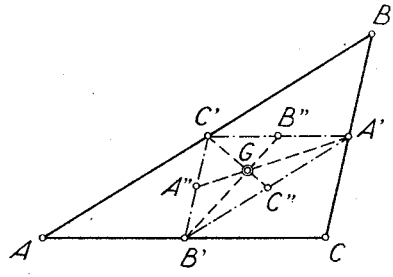


Fig. 4.10.

$$AB . C'A'' = AC . B'A'' \qquad [4.37]$$

o sea

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B'A''}{C'A''} . \qquad [4.38]$$

Pero, por semejanza de triángulos, se tiene

$$\left.\begin{aligned} A'C' &= \tfrac{1}{2}AC \\ A'B' &= \tfrac{1}{2}AB \end{aligned}\right\} \qquad [4.39]$$

Reemplazando las [4.39] en la [4.38] resulta:

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{B'A''}{C'A''} \qquad [4.40]$$

relación que se cumple sólo si el punto A'' se encuentra sobre la bisectriz del ángulo $C'A'B'$.

En A'' podemos suponer aplicada una masa igual a la suma de las masas aplicadas en B' y C'; es decir, $AB + BC$. Luego, el baricentro buscado debe encontrarse sobre la recta $A'A''$, bisectriz del ángulo $C'A'B'$, por cuanto en el punto A' actúa la masa BC.

Mediante un razonamiento análogo llegamos a la conclusión de que el baricentro G debe encontrarse sobre la recta $B'B''$, bisectriz del ángulo $A'B'C'$, y también sobre la recta $C'C''$, bisectriz del ángulo $A'C'B'$. En consecuencia, el baricentro del perímetro de un triángulo, se encuentra en la intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado, punto que a la vez constituye el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo interior.

4.1.6. Determinación de baricentros de la superficie de las figuras más importantes.

La determinación del baricentro de la superficie del cuadrado, círculo y polígonos regulares es inmediata, por cuanto, por tratarse de figuras con simetría central, coincide con el centro de simetría. Igualmente simple es la determinación del baricentro del rectángulo y paralelepípedo, que admiten centro de figura, coincidiendo el baricentro con éste que, a la vez, queda determinado por la intersección de dos diámetros cualesquiera, por ejemplo las diagonales.

Nos ocuparemos a continuación de la determinación del baricentro del triángulo, trapecio, sector circular y superficie delimitada por un arco de parábola, por tratarse de las superficies que más aplicación tienen en el estudio de la Estabilidad de las Estructuras.

a) Baricentro de la superficie del triángulo (figuras 4.11 y 4.12).

Consideremos en el triángulo de la figura 4.11 una faja de espesor infinitésimo, paralela a una de las bases, la AB, por ejemplo. La super-

ficie de dicha faja podemos suponerla concentrada a lo largo de su línea media, es decir, admitir una línea pesada, cuyo baricentro G_i se encontrará ubicado en el punto medio de su longitud. Repitiendo el razonamiento para una sucesión de infinitas fajas paralelas a la anterior, el conjunto de sus baricentros constituirán el lugar geométrico de puntos equidistantes de los lados AC y AB del triángulo; es decir, la mediana CC'. Sobre dicha mediana podemos imaginar distribuida el área de la superficie del triángulo, cuyo baricentro será, en consecuencia, un punto de la misma. Repitiendo el razonamiento para una sucesión de fajas de

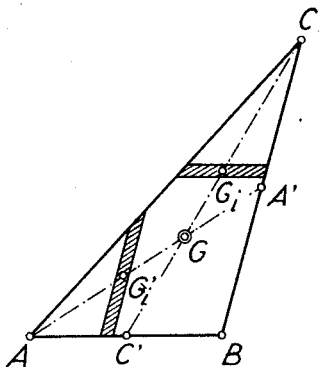


Fig. 4.11.

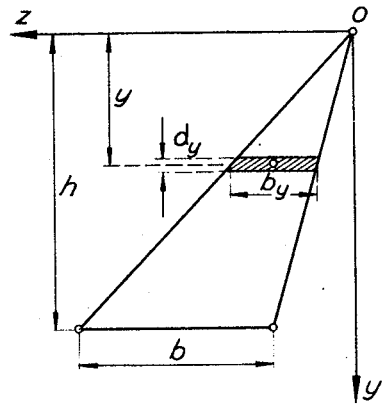


Fig. 4.12.

espesor infinitésimo paralelas a los restantes lados del triángulo, llegamos a la conclusión de que el baricentro del mismo debe encontrarse también sobre las dos restantes medianas. En consecuencia, el baricentro buscado se hallará en la intersección de las medianas.

Interesa conocer a qué distancia de la base se encuentra ubicado el baricentro del triángulo. Para determinarla consideremos, figura 4.12, un par de ejes coordenados cuyo origen haremos coincidir con uno de los vértices, disponiendo el eje z paralelo a la base opuesta.

Supongamos una faja de espesor dy y ancho b_y, ubicada a una distancia y del vértice. Dicha faja puede, sin mayor error, asimilarse a un rectángulo de superficie $dF = b_y dy$.

La distancia del baricentro de la figura al eje z resulta definida por la expresión

$$F.y'_G = \int_0^h y.dF = \int_0^h b_y\, y\, dy\,. \qquad [4.41]$$

Pero, por semejanza de triángulos, se tiene que

$$b_y = b\,\frac{y}{h} \qquad [4.42]$$

de donde

$$\int_0^h b_y\, y\, \mathrm{d}y = \frac{b}{h}\int_0^h y^2\, \mathrm{d}y = \frac{bh^2}{3} \qquad [4.43]$$

y reemplazando en [4.41]

$$F y'_G = \frac{bh^2}{3}\ . \qquad [4.44]$$

Pero, para el triángulo $F = \frac{1}{2}\,bh$, por lo que, reemplazando en la anterior y despejando y'_G resulta finalmente:

$$y'_G = \frac{2}{3}\,h \qquad [4.45]$$

Es decir, que el baricentro de la superficie de un triángulo se encuentra ubicado a 2/3 de la altura, medidos desde un vértice, o bien, a 1/3 de dicha distancia, medida a partir de la base considerada.

b) Baricentro de la superficie del trapecio (figs. 4.13 y 4.14).

Para la determinación del baricentro de la superficie de un trapecio existen diversos procedimientos gráficos, aparte del planteo general analítico. Nos ocuparemos de sólo dos de ellos, ambos gráficos. Del primero, porque si bien no es común utilizarlo en el caso del trapecio, es de aplicación general para determinar el baricentro de la superfiecie de un cuadrilátero cualquiera, y del segundo, por cuanto es el que utilizaremos en lo sucesivo, en los casos en que se presente este problema.

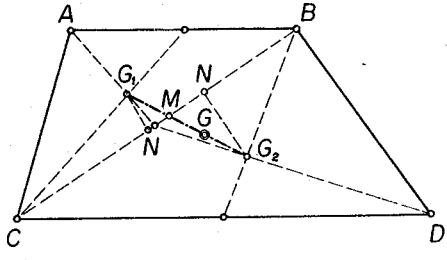


Fig. 4.13.

Sea el trapecio de la figura 4.13, que suponemos dividido en dos triángulos mediante el trazado de la diagonal BC. El baricentro del triángulo ABC será el punto G_1 ubicado en la intersección de dos de las medianas, conforme con lo visto anteriormente. Análogamente, en el triángulo BCD, su baricentro G_2 se encontrará en la intersección de las correspondientes medianas. El baricentro G del trapecio, considerado ahora como centro de las masas

aplicadas en los puntos G_1 y G_2, se debe encontrar sobre la recta determinada por éstos, y para el mismo se debe cumplir la relación

$$F_1 . G_1G = F_2 . G_2G \qquad [4.46]$$

donde F_1 y F_2 son, respectivamente, las masas aplicadas en G_1 y G_2, y corresponden a las áreas de los triángulos ABC la primera, y BCD la segunda.

Por tratarse de dos triángulos de base común, sus áreas serán proporcionales a las respectivas alturas y, por ende, a los tercios de las mismas. Como los segmentos G_1N y G_2N también son proporcionales al tercio de las correspondientes alturas, resulta, en consecuencia, que F_1 y F_2 serán proporcionales a G_1N y G_2N respectivamente. Luego, reemplazando en [4.46] y trasponiendo términos, resulta

$$\frac{G_1G}{G_2G} = \frac{G_2N}{G_1N} = \frac{F_2}{F_1} . \qquad [4.47]$$

Pero, por otra parte, se tiene también que:

$$\frac{G_2N}{G_2M} = \frac{G_1N}{G_1M} , \qquad [4.48]$$

por lo que resulta finalmente

$$\frac{G_1G}{G_2G} = \frac{G_2M}{G_1M} = \frac{F_2}{F_1} . \qquad [4.49]$$

En consecuencia, bastará llevar sobre G_1G_2 y a partir de G_2, un segmento $G_2G = G_1M$, cuyo extremo define el baricentro G buscado. Este procedimiento, como dijéramos, es aplicable también al caso general de un cuadrilátero cualquiera, ya que, en las consideraciones efectuadas, no se ha tenido para nada en cuenta el paralelismo de los lados AB y CD. En cambio, el método que explicaremos a continuación, sólo es lícito emplearlo para la determinación del baricentro de la superficie del trapecio.

Sea el trapecio de la figura 4.14. Su baricentro debe necesariamente encontrarse sobre la mediana MN del mismo, por constituir éste un elemento de simetría oblicua.

Dividiendo uno de los lados no paralelos, por ejemplo el BD, en tres partes iguales, quedan determinados los puntos S y T. Uniendo A con S y C con T, dichas rectas prolongadas determinan en su inter-

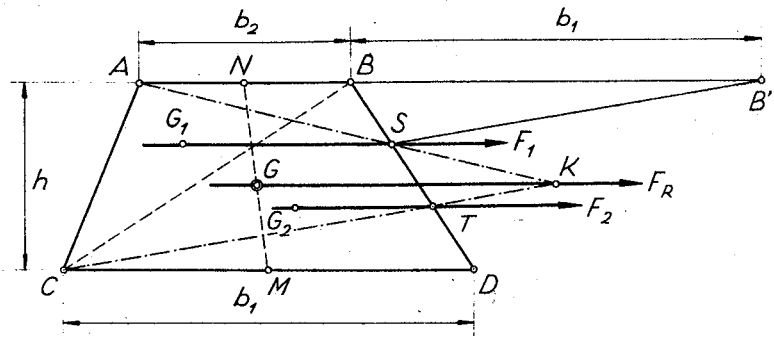


Fig. 4.14.

sección un punto K. Trazando ahora por este último punto una paralela a las bases del trapecio, dicha paralela, en su intersección con la mediana define el baricentro G buscado.

Para justificar la construcción anterior, dividamos el trapecio mediante la diagonal BC en los triángulos ABC y BCD. De utilizarse para la división la otra diagonal, la demostración sería semejante. Como se sabe, los baricentros respectivos G_1 y G_2, se encuentran ubicados a distancias de las bases iguales a los tercios de la altura h del trapecio. Trazando por cada baricentro una recta paralela a las bases, dichas rectas intersecarán el lado BD precisamente en los puntos S y T. Supongamos actuando sobre dichas rectas dos fuerzas F_1 y F_2, proporcionales a las áreas de los triángulos ABC y BCD respectivamente. La resultante de dichas fuerzas ideales, F_R, pasará por el baricentro buscado, el que quedará determinado por la intersección de la recta de acción de aquélla con la mediana NM.

Por tratarse de dos triángulos de igual altura, sus áreas resultan proporcionales a las correspondientes bases b_1 y b_2. Llevando a partir de B un segmento $BB' = b_1$, podemos imaginar a AB y BB' como vectores representativos de las fuerzas F_1 y F_2 respectivamente. Si elegimos el punto S como polo del polígono de fuerzas ABB', los rayos polares resultan ser AS, BS y $B'S$, y la poligonal $ASTC$ será el correspondiente polígono funicular. En efecto, el primer lado AS es paralelo al primer rayo polar por coincidir con éste. Lo mismo ocurre con el segundo lado ST con respecto al segundo rayo polar. En cuanto al tercer lado, consideremos los triángulos $BB'S$ y CDT. Ambos son semejantes por tener, por construcción, dos lados paralelos y de igual longitud (BB' y DC; BS y TD). Y consecuentemente, los lados SB' y CT resultan ser también paralelos. Y como SB' es el tercer rayo polar, CT será el tercer lado del polígono funicular de las fuerzas

F_1 y F_2, cuya resultante F_R pasará por el punto K, intersección de los lados extremos AS y CT, quedando con ello justificada la construcción utilizada para determinar el baricentro.

En ciertos problemas prácticos, interesa algunas veces conocer la distancia del baricentro del trapecio a una de sus bases, la mayor por ejemplo. Para hallarla, aplicamos la expresión que establece que la suma de los momentos estáticos de un sistema de masas respecto de un eje, es igual al momento estático de la masa total respecto del mismo eje. Consideremos el trapecio de la figura 4.15, del que queremos conocer la distancia de su baricentro a la base mayor. Hagamos coincidir el eje z de un par de ejes coordenados con la base mayor, y dividamos el trapecio en dos triángulos parciales ABC y BCD mediante una diagonal. Los baricentros de los triángulos quedan ubicados así: el del ABC a $\frac{2}{3}.h$ desde la base mayor, y el de BCD a $\frac{1}{3}.h$ desde la misma base. En consecuencia, llamando F_1 y F_2 las áreas de las superficies de los dos triángulos y F_R la superficie del trapecio, resulta

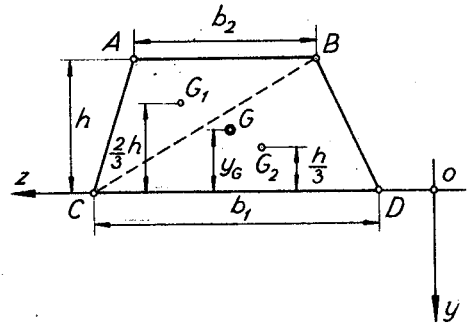


Fig. 4.15.

$$F_R.y_G = F_1.\tfrac{2}{3}h + F_2.\tfrac{1}{3}h . \qquad [4.50]$$

Pero, $F_R = \frac{1}{2}.(b_1 + b_2).h$; $F_1 = \frac{1}{2}.b_2.h$ y $F_2 = \frac{1}{2}.b_1.h$. En consecuencia, reemplazando en [4.50], y despejando y_G:

$$y_G = \frac{(2b_1 + b_2)}{3(b_1 + b_2)}.h \qquad [4.51]$$

c) *Baricentro del sector circular* (fig. 4.16).

Sea el sector circular AMB de centro O y radio r, del que se pide hallar el baricentro. Para ello, consideremos en el mismo un sector elemental que, sin mayor error, podemos asimilar a un triángulo de base dS y altura r. El baricentro de dicho triángulo se halla ubicado a $\frac{2}{3}r$ del centro O del sector. Asimilando ahora la superficie del sector a una sucesión de infinitos sectores elementales, sus respectivos baricentros se encontrarán a $\frac{2}{3}r$ de O. El lugar geométrico de dichos baricentros será,

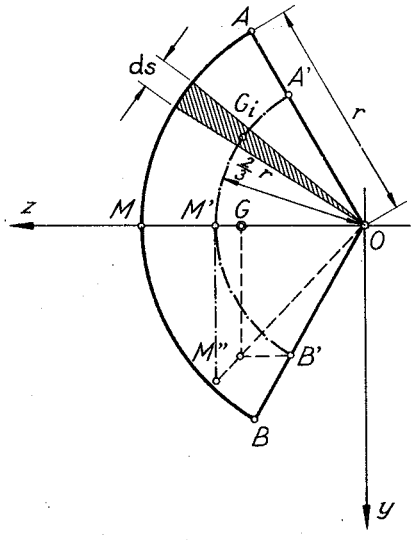


Fig. 4.16.

en consecuencia, un arco de circunferencia de radio $r' = \frac{2}{3}.h$. Podemos admitir que el área de la superficie del sector se encuentre concentrada a lo largo de dicho arco, asimilándolo a una línea pesada, con lo que la determinación del baricentro del sector circular se reduce a la determinación del correspondiente al arco de circunferencia $A'M'B'$, problema resuelto en 4.1.5 b).

d). Baricentro de la superficie delimitada por un arco de parábola (figura 4.17).

Sea la parábola de la figura 4.17 que, referida a los ejes x, y, responde a la ecuación

$$y^2 = 2pz \qquad [4.52]$$

Consideremos la superficie delimitada por dicha parábola y una recta normal al eje z ubicada a una distancia f del vértice de la misma. El baricentro de la superficie considerada se encontrará sobre el eje z, por cuanto constituye un eje de simetría y su distancia al vértice; es decir, su abscisa z_G, debe cumplir la relación:

$$z_G F = \int z\,dF \,. \qquad [4.53]$$

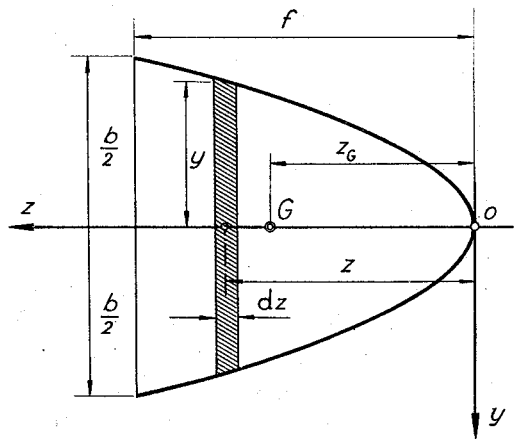


Fig. 4.17.

Llamando b la base del segmento parabólico y f la flecha de la parábola, el área valdrá

$$F = \tfrac{2}{3}.b.f \,. \qquad [4.54]$$

Consideremos ahora una superficie elemental, normal al eje z, de espesor dz y altura $2y$. El momento estático de dicha faja respecto del eje y será

$$z\,dF = 2yz\,dz \,. \qquad [4.55]$$

Pero, de [4.52] resulta $y = \sqrt{2pz}$. Reemplazando este valor y el de F dado por la [4.54], en la [4.53] e integrando se tiene:

$$z_G . \tfrac{2}{3} . b . f = 2\sqrt{2p} \int_0^f z^{3/2} . dz = \tfrac{4}{5}\sqrt{2p}\ f^{5/2} . \quad [4.56]$$

Considerando que $\tfrac{1}{2} . b = \sqrt{2pf}$ (ecuación [4.52]), reemplazando en [4.56] y despejando z_G, resulta finalmente

$$z_G = \tfrac{3}{5} f . \quad [4.57]$$

4.1.7. Teoremas de Pappus.

Los teoremas de *Pappus*, denominados también teoremas de *Guldin* por algunos autores, se refieren al área lateral y volumen de sólidos de revolución. El primero de ellos permite calcular el área de la superficie lateral de sólidos de revolución y su enunciado es el siguiente:

1er. Teorema de Pappus. El área de la superficie engendrada por una línea plana que gira alrededor de un eje coplanar sin cortarlo, es igual al producto de la longitud de la línea por la longitud del arco descrito por su baricentro.

Para demostrar el enunciado anterior, consideremos, figura 4.18, una línea AB ubicada en el plano xz, que gira alrededor del eje z un cierto ángulo α, generando una superficie. Sea dS un elemento infinitésimo de la longitud de la línea y x su distancia al eje z. Al girar la línea, el elemento dS generará una superficie elemental, cuya área será igual al producto de dS por la longitud del arco recorrido; es decir,

$$dF = \alpha . x . dS . \quad [4.58]$$

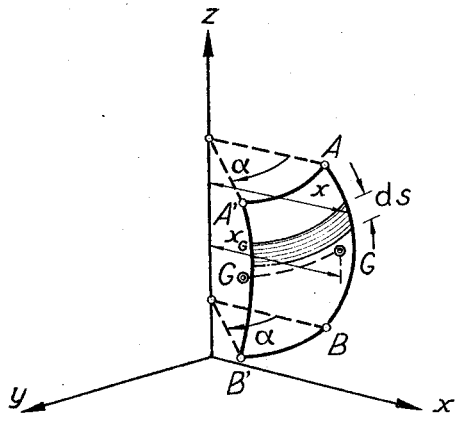


Fig. 4.18.

La superficie total generada por la línea al girar del ángulo α, será igual a la suma de las superficies elementales generadas por los infinitos elementos de línea dS; es decir:

$$F = \int \alpha x dS . \qquad [4.59]$$

Siendo α constante puede salir fuera de la integral. Por otra parte $\int x dS$ representa la suma de los momentos estáticos respecto del eje z de los infinitos elementos dS, suma que, conforme con la definición de baricentro, será igual al producto de la longitud S de la línea por la distancia x_G de su baricentro al eje z. En consecuencia, podemos escribir:

$$F = \alpha \int x dS = \alpha x_G S . \qquad [4.60]$$

Pero αx_G corresponde al arco recorrido por el baricentro de la línea, arco que llamaremos s_G. En consecuencia, resulta

$$F = s_G . S . \qquad [4.61]$$

que es lo que queríamos demostrar.

El segundo teorema de *Pappus* se refiere al volumen que engendra una superficie al girar alrededor de un eje de su plano, siendo su enunciado el siguiente:

2º Teorema de Pappus.

El volumen engendrado por una superficie que gira alrededor de un eje de su plano, sin cortarlo, es igual al producto del área de la superficie por la longitud del arco descrito por su baricentro.

En efecto, consideremos, figura 4.19, una superficie F contenida en el plano xz, que gira alrededor del eje z un cierto ángulo α. Un elemento dF de la misma, al girar, engendrará un volumen elemental $dV = \alpha . x . dF$, siendo α el ángulo girado y x la distancia del elemento de superficie al eje de rotación z. Al girar la superficie, los infinitos elementos dF, de la misma engendrarán un volumen cuya expresión será:

$$V = \int dV = \int \alpha x dF = \alpha \int x dF . \qquad [4.62]$$

Pero $\int x dF$ corresponde a la suma de los momentos estáticos de los elementos de superficie respecto del eje z, suma que, de acuerdo con la definición de baricentro, es igual al momento estático de la superficie total respecto del mismo eje, es decir:

$$\int x dF = x_G F \qquad [4.62]$$

donde x_G es la distancia al eje z del baricentro G de la superficie y F el área de esta última.

Luego, reemplazando en la [4.62] resulta:

$$V = \alpha x_G F \,. \qquad [4.64]$$

Pero, αx_G es la longitud del arco o recorrido por el baricentro G, longitud que llamaremos s_G, teniéndose finalmente:

$$V = s_G . F \qquad [4.65]$$

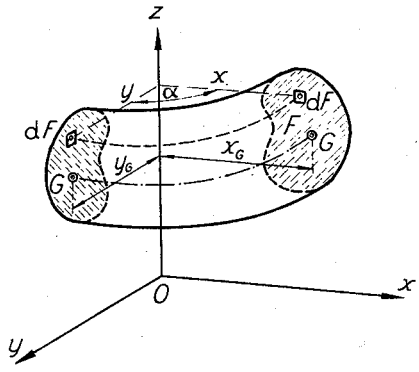


Fig. 4.19.

4.2. Momentos de segundo orden de superficies.

4.2.1. Definiciones.

Sea la superficie de la figura 4.20 a, y dos ejes cualesquiera z, y de su plano. Consideremos un elemento dF de superficie, cuyas distancias a los ejes indicados sean z é y. Se define como momento de segundo orden del elemento de superficie respecto del par de ejes z, y, al producto del área de la superficie elemental por las distancias a ambos ejes, es decir:

$$dJ_{zy} = zy . dF \,. \qquad [4.66]$$

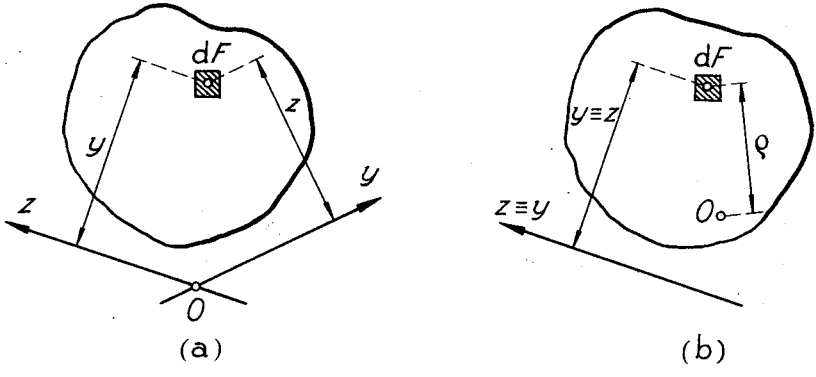


Fig. 4.20.

Integrando esta expresión sobre toda la superficie, tendremos el momento de segundo orden de la superficie respecto de los ejes considerados

$$J_{zy} = \int_F z\,y\,.\,\mathrm{d}F \qquad [4.67]$$

denominado corrientemente *momento centrífugo* de la superficie. Algunos autores acostumbran llamar *producto de inercia* al momento centrífugo, pero, en lo que sigue, adoptaremos la primera denominación.

Siendo las superficies magnitudes positivas, el momento centrífugo tendrá un signo que dependerá de los signos de las coordenadas de los elementos de superficie; es decir, que será función de los semiejes positivos adoptados. Así, por ejemplo, el momento centrífugo de la superficie de la figura 4.21 *a*, es positivo, por cuanto tanto las ordenadas y como las abscisas z de los infinitos elementos de superficie $\mathrm{d}F$, son positivos.

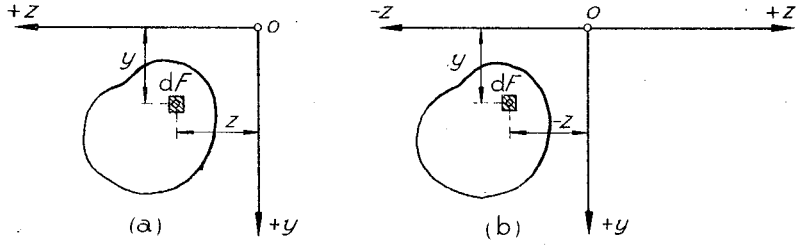


Fig. 4.21.

En cambio, si el semieje z lo orientamos hacia la izquierda, las abscisas z son todas negativas y, en consecuencia, también lo serán los productos zy, y por ende el momento centrífugo de la superficie.

Supongamos ahora que en la figura 4.20 *a* hacemos girar el eje y alrededor de O hasta superponerlo con el eje z, es decir, la situación de la figura 4.20 *b*. La distancia z del elemento $\mathrm{d}F$ al eje y coincidirá con la distancia y al eje z, por cuanto ambos ejes son coincidentes y, en consecuencia, la expresión [4.67] se transforma en

$$J_z = \int_F y^2\,\mathrm{d}F \qquad [4.68]$$

que define el *momento de inercia de la superficie* respecto del eje z. Es decir que el momento de inercia de una superficie respecto de un eje cualquiera de su plano es igual a la integral del producto del elemento diferencial de superficie por el cuadrado de su distancia al eje.

El momento de inercia es siempre positivo. En efecto, cualquiera sea el signo de la distancia del elemento de superficie al eje considerado, su cuadrado será siempre positivo y, en consecuencia, el momento de inercia, ya que las superficies son positivas. Excepcionalmente, podrá suponerse negativo un momento de inercia, al considerarla como elemento sustractivo para facilitar el cálculo del momento de inercia de una figura compuesta, como se verá más adelante.

Consideremos ahora en la figura 4.20 *b* un punto O y sea ϱ la distancia al mismo del elemento dF de superficie. Se denomina *momento de inercia polar* del elemento dF respecto del punto O, al producto de dF por el cuadrado de la distancia ϱ, es decir:

$$dJ_P = \varrho^2 . dF \qquad [4.69]$$

y la integral de esta expresión nos dará el *momento de inercia polar* de la superficie respecto del punto O, que se suele llamar *polo*.

$$J_P = \int_F \varrho^2 dF \qquad [4.70]$$

Por análogas razones que las aducidas en el caso del momento de inercia, el momento de inercia polar siempre es positivo.

El momento de inercia es el producto de una superficie por el cuadrado de una distancia; en consecuencia, estando medidas las áreas de las superficies en cm^2 (o m^2) y las distancias en cm (o en m), la unidad resultante para el momento de inercia (y, en general, para los momentos de segundo orden), será cm^4 (o m^4).

Sentado lo anterior, establezcamos el cociente entre el momento de inercia de una superficie y el área de la misma. Estando medida la primera magnitud en cm^4, por ejemplo, y la segunda en cm^2, el cociente entre ambas resultará medido en cm^2; es decir, será una magnitud que podremos interpretar como el cuadrado de una cierta longitud, que llamaremos *radio de giro de la superficie respecto del eje considerado*, e indicaremos con i, es decir

$$i^2 = \frac{J}{F} \qquad [4.71]$$

de donde

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} . \qquad [4.72]$$

Despejando el valor del momento de inercia de la [4.71] tenemos

$$J = F.i^2 ; \qquad [4.73]$$

es decir, que el momento de inercia de una superficie respecto de un eje puede concebirse como el producto de su área, supuesta concentrada en un cierto punto ubicado a una distancia del eje igual al correspondiente radio de giro, por el cuadrado de dicha distancia.

4.2.2. Momentos de segundo orden de superficies con respecto a ejes paralelos.

Supongamos la superficie de la figura 4.22, referida a un par de ejes ortogonales z, y, de origen O, y consideremos otro par de ejes z_G, y_G, paralelos a los anteriores y cuyo origen coincida con el baricentro G de la superficie. Llamemos a y b las distancias que separan respectivamente a los ejes z_G é y_G.

Llamando z é y las coordenadas de un elemento de superficie dF respecto de los ejes z, y, el momento centrífugo de la superficie respecto de este par de ejes tendrá por expresión

$$J_{zy} = \int zy\,dF . \qquad [4.74]$$

Pero, de la figura 4.22 se tiene:

$$\left.\begin{aligned} y &= b + y_G \\ z &= a + z_G \end{aligned}\right\} . \qquad [4.75]$$

Multiplicando entre sí ambas expresiones resulta:

$$zy = y_G z_G + ab + a y_G + b z_G . \qquad [4.76]$$

Introduciendo la expresión de zy dada por la [4.76] en la [4.74], y separando integrales se llega a

$$J_{zy} = \int z_G y_G\,dF + ab \int dF + a \int y_G.dF + b \int z_G.dF . \qquad [4.77]$$

Pero

$$\int z_G y_G \, dF = J_{z_G y_G} ; \int dF = F ; \quad \int y_G . dF = 0 \quad \text{y} \quad \int z_G . dF = 0$$

por representar las dos últimas integrales el momento estático de la superficie respecto de ejes baricéntricos. Reemplazando en la [4.77] llegamos a

$$J_{zy} = J_{z_G y_G} + F . a . b . \qquad [4.78]$$

Es decir, que el momento centrífugo (o, en general, el momento de segundo orden) de una superficie respecto de un par de ejes cualesquiera, es igual al momento centrífugo respecto de un par de ejes baricéntricos, paralelos a los anteriores más el producto del área de la superficie por las distancias que separan a los ejes.

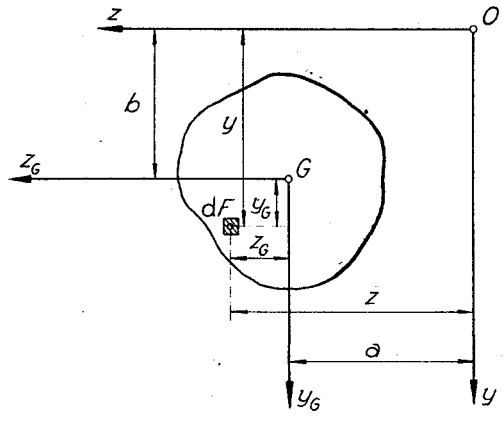


Fig. 4.22.

Particularmente, cuando los pares de ejes son coincidentes, el momento centrífugo se transforma en el momento de inercia, y la expresión [4.78] toma la forma genérica

$$J = J_G + F . d^2 \qquad [4.79]$$

donde J es el momento de inercia respecto de un eje cualquiera, J_G el correspondiente a un eje baricéntrico paralelo al anterior y d la distancia que separa ambos ejes. La expresión [4.79] se conoce con el nombre de *Teorema de Steiner*, cuyo contenido reza:

El momento de inercia de una superficie respecto de un eje cualquiera de su plano, es igual al momento de inercia de la misma respecto de un eje baricéntrico paralelo al anterior más el producto del área de la superficie por el cuadrado de la distancia que separa ambos ejes.

Dividiendo la expresión [4.79] por el área de la sección F, se tiene:

$$\frac{J}{F} = \frac{J_G}{F} + d^2 ; \qquad [4.80]$$

pero, por definición de radio de giro, $J/F = i^2$. En consecuencia

$$i^2 = i_G^2 + d^2 \qquad [4.81]$$

expresión que define el radio de giro de una superficie respecto de un eje en función del correspondiente a un eje baricéntrico paralelo al dado.

La expresión [4.81], interpretada gráficamente, nos dice que el radio de giro de una superficie respecto de un eje puede obtenerse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos correspondan: uno al radio de giro respecto de un eje baricentro paralelo al dado, y el otro a la distancia que separa ambos ejes (figura 4.23).

Como consecuencia resulta que, dada una superficie y un eje cualquiera de su plano, el radio de giro de la misma respecto del eje considerado es siempre mayor que la distancia del baricentro de la superficie, al mismo eje.

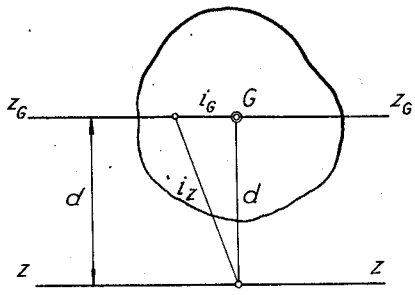


Fig. 4.23.

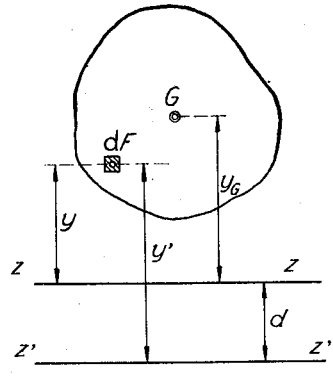


Fig. 4.24.

Deduciremos a continuación, la expresión del momento de inercia de una superficie respecto de un eje cualquiera en función del momento de inercia de otro eje, paralelo al anterior pero que no sea baricéntrico. Para ello consideremos la superficie de la figura 4.24 y los ejes z y z', paralelos entre sí y separados de una distancia d. Supongamos conocido J_z. Si $\mathrm{d}F$ es un elemento de superficie, con la notación de la figura, se tiene:

$$J_{z'} = \int y'^2 \, \mathrm{d}F \qquad [4.82]$$

pero $y' = y + d$. Luego, elevando al cuadrado y reemplazando en [4.82], resulta:

$$J_{z'} = \int y^2 \mathrm{d}F + 2\mathrm{d} \int y \, \mathrm{d}F + d^2 \int \mathrm{d}F \, . \qquad [4.83]$$

Siendo $\int y \mathrm{d}F = S_z$, momento estático de la superficie respecto del eje z, $\int y^2 \mathrm{d}F = J_z$ y $\int \mathrm{d}F = F$, se tiene:

$$J_{z'} = J_z + 2 d S_z + F d^2 \qquad [4.84]$$

Dividiendo la expresión anterior por F, y recordando que $S_z = F . y_G$, se llega a la siguiente expresión del radio de giro respecto del eje z' en función del correspondiente al eje z:

$$i_{z'}^2 = i_z^2 + 2 d y_G + d^2 . \qquad [4.85]$$

4.2.3. Momentos de inercia y radios de giro polares.

En 4.2.1 definimos al momento de inercia polar de una superficie como la integral de los productos de los elementos de superficie $\mathrm{d}F$ por sus respectivas distancias a un punto del plano denominado polo. Consideremos ahora la superficie de la figura 4.25 y el par de ejes coordenados z, y. El momento de inercia polar de la misma respecto del polo O, origen de coordenadas, será:

$$J_P = \int \varrho^2 \mathrm{d}F . \qquad [4.86]$$

Pero, de la figura se tiene

$$\varrho^2 = z^2 + y^2 ; \qquad [4.87]$$

luego reemplazando en [4.86]

$$J_P = \int z^2 \mathrm{d}F + \int y^2 \mathrm{d}F \qquad [4.88]$$

es decir

$$J_P = J_y + J_z \qquad [4.89]$$

Dividiendo la [4.89] por F se llega a

$$i_P^2 = i_y^2 + i_z^2 , \qquad [4.90]$$

expresión que nos permite calcular el radio de giro polar partiendo de los radios de giro correspondientes a dos ejes ortogonales que pasen por el polo.

El radio de giro polar $i_P = \sqrt{J_P/F}$ puede interpretarse como el radio de una circunferencia con centro en el polo, lugar geométrico de puntos en los cuales puede suponerse concentrada el área de la superficie que, multiplicada por dicho radio elevado al cuadrado, nos da el momento de inercia polar.

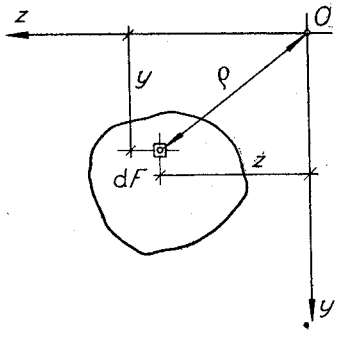


Fig. 4.25.

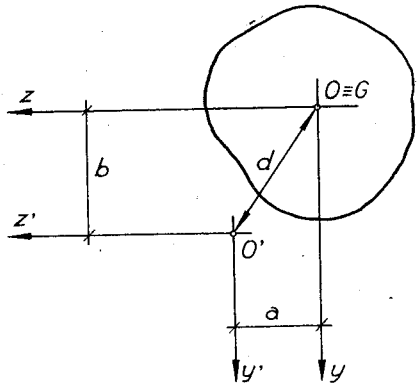


Fig. 4.26.

Sea ahora la superficie de la figura 4.26 y el par de ejes baricéntricos ortogonales z, y. Conocidos los momentos de inercia de la superficie respecto de ambos ejes, queda determinado el momento de inercia polar respecto del origen de los mismos, mediante la expresión

$$J_P = J_y + J_z \ .$$

Supongamos otro polo O', y ubiquemos un segundo par de ejes ortogonales z', y', paralelos a los anteriores y cuyo origen coincida con O'. De acuerdo con el teorema de Steiner tenemos:

$$\left.\begin{aligned} J_{z'} &= J_z + F.b^2 \\ J_{y'} &= J_y + F.a^2 \end{aligned}\right\} \qquad [4.91]$$

Sumando miembro a miembro las [4.91] resulta

$$J_{z'} + J_{y'} = J_z + J_y + F(a^2 + b^2) \qquad [4.92]$$

De acuerdo con la [4.89], $J_{z'} + J_{y'} = J_{P'}$ y $J_z + J_y = J_P$. Además, de la figura resulta $a^2 + b^2 = d^2$, siendo d la distancia que

separa ambos polos (uno de ellos, baricentro de la figura). En consecuencia, reemplazando en [4.71] se tiene:

$$J_{P'} = J_P + F.d^2 \; ; \qquad [4.93]$$

expresión que nos dice que el momento de inercia polar respecto de un polo que diste una distancia d del baricentro, es igual al momento de inercia polar baricéntrico más el producto del área de la superficie por el cuadrado de la distancia que separa ambos polos. Este enunciado puede considerarse como una extensión del Teorema de Steiner al caso de los momentos de inercia polares.

Si se tratara de dos polos, ninguno de los cuales fuera baricéntrico, caso de la figura 4.27, la expresión a que se llega es semejante a la [4.84], como veremos a continuación. Con la notación de la figura y teniendo presente la [4.84] resulta:

$$\left.\begin{aligned} J_{z'} &= J_z + 2\,a\,S_z + F\,a^2 \\ J_{y'} &= J_y + 2\,b\,S_y + F\,b^2 \end{aligned}\right\} \quad [4.94]$$

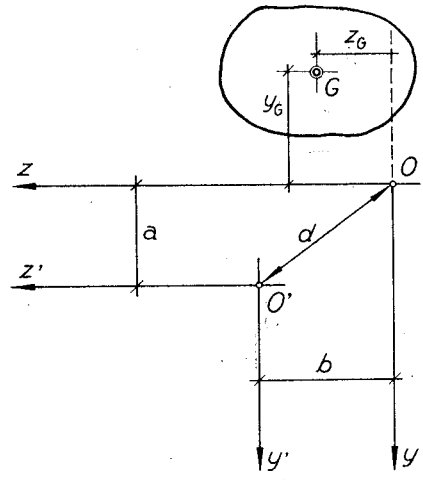


Fig. 4.27.

Sumando miembro a miembro, teniendo en cuenta la [4.89] y recordando que $S_z = F.y_G$ y $S_y = F.z_G$, resulta finalmente

$$J_{P'} = J_P + 2\,F(a y_G + b z_G) + F d^2 \qquad [4.95]$$

como expresión del momento de inercia polar respecto del polo O', en función del correspondiente al polo O.

4.2.4. Momentos de segundo orden con respecto a ejes de un mismo origen.

Sea la superficie de la figura 4.28 y consideremos un par de ejes coordenados z, y, de origen O. Para un elemento de superficie $\mathrm{d}F$, de coordenadas z, y, se tiene:

$$\mathrm{d}J_z = y^2\,\mathrm{d}F \; ; \quad \mathrm{d}J_y = z^2\,\mathrm{d}F \; ; \quad \mathrm{d}J_{zy} = z\,y\,\mathrm{d}F \; . \qquad [4.96]$$

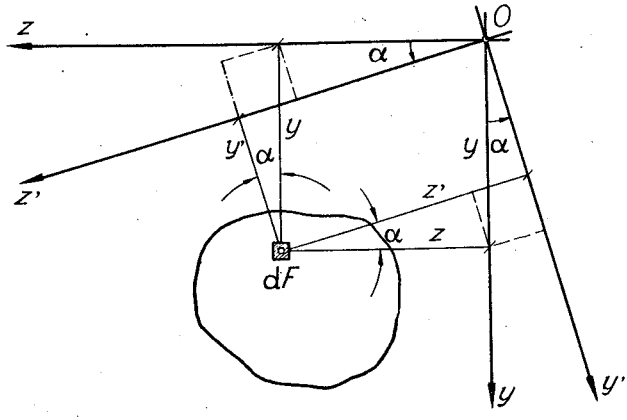


Fig. 4.28.

Integrando sobre toda la superficie, resulta

$$J_z = \int y^2 \, dF \; ; \; J_y = \int z^2 \, dF \; ; \; J_{zy} = \int z y \, dF \; . \qquad [4.97]$$

Giremos ahora los ejes, manteniéndolos ortogonales, un ángulo α, de modo que pasen a ocupar la posición z', y'.

Con respecto a los nuevos ejes, las coordenadas de dF, en función de z é y resultan:

$$\left.\begin{aligned} z' &= z.\cos\alpha + y.\operatorname{sen}\alpha \\ y' &= y.\cos\alpha - z.\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [4.98]$$

Los momentos de segundo orden respecto de los ejes z', y' serán

$$\left.\begin{aligned} J_{y'} &= \int z'^2 \, dF \\ J_{z'} &= \int y'^2 \, dF \\ J_{z'y'} &= \int z' y' \, dF \end{aligned}\right\} \qquad [4.99]$$

Reemplazando en las [4.99] los valores de z' é y' dados por las [4.98] se tiene:

$$\left.\begin{aligned} J_{y'} &= \int z^2.\cos^2\alpha.dF + \int y^2.\operatorname{sen}^2\alpha.dF + 2\int zy \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \, dF \\ J_{z'} &= \int y^2.\cos^2\alpha.dF + \int z^2.\operatorname{sen}^2\alpha.dF - 2\int zy \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \, dF \\ J_{z'y'} &= \int y^2.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha \, dF - \int z^2 \operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha \, dF + \\ &\quad (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\int zy.dF \end{aligned}\right\} \qquad [4.100]$$

es decir, de acuerdo con las [4.97], y teniendo en cuenta que

$$2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha \quad \text{y} \quad \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha :$$

$$\left.\begin{aligned} J_{y'} &= J_y . \cos^2\alpha + J_z . \operatorname{sen}^2\alpha + J_{zy} . \operatorname{sen} 2\alpha \\ J_{z'} &= J_z . \cos^2\alpha + J_y . \operatorname{sen}^2\alpha - J_{zy} . \operatorname{sen} 2\alpha \\ J_{z'y'} &= J_{zy} \cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}(J_z - J_y) \operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad [4.101]$$

Estas expresiones nos dan los momentos de segundo orden de la superficie respecto de los ejes ortogonales z', y', en función de los correspondientes a los ejes z, y.

Si en la segunda ecuación de las [4.101] hacemos $\alpha = 45°$ resulta:

$$J_{45°} = \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) - J_{zy} \quad [4.102]$$

de donde

$$J_{zy} = \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) - J_{45°} \quad [4.103]$$

expresión que permite calcular el momento centrífugo respecto de dos ejes ortogonales en función de tres momentos de inercia.

Analizando las ecuaciones [4.101], vemos que las mismas son función de α. Variando el ángulo que forman entre sí los dos pares de ejes, variarán los momentos de segundo orden. En lo que respecta a los momentos de inercia, nunca podrán anularse, ni admitir valores negativos, pero sí alcanzarán valores máximos o mínimos. En cambio, los momentos centrífugos, que pueden ser negativos, podrán tener valores nulos.

Aquellos pares de ejes para los cuales el momento centrífugo se anula, se denominan *ejes conjugados de inercia.* Existen infinitos pares de ejes conjugados de un mismo origen, y entre ellos un par ortogonal.

4.2.5. Ejes principales de inercia.

Se denominan ejes principales de inercia el par de ejes conjugados ortogonales. Para dicho par de ejes, los momentos de inercia alcanzan valores máximos o mínimos.

Consideremos la segunda de las expresiones [4.101], que nos da el valor de J_z en función de α. La función de J_z, pasará por un máximo (o mínimo) cuando

$$\frac{d J_{z'}}{d\alpha} = 0 \quad [4.104]$$

Derivando la correspondiente expresión de $J_{z'}$ e igualando a cero, tenemos:

$$\left(\frac{d J_{z'}}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = J_y \cdot 2 \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1 - J_z\, 2 \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1 - 2 \cos 2\alpha_1 J_{zy} = 0 \qquad [4.105]$$

de donde

$$(J_y - J_z) \operatorname{sen} 2\alpha_1 - 2 J_{zy} \cos 2\alpha_1 = 0 \qquad [4.106]$$

y finalmente

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2 J_{zy}}{J_y - J_z} . \qquad [4.107]$$

Existen dos valores del ángulo $2\alpha_1$ que satisfacen la [4.107] y que difieren entre sí de 180°. En consecuencia habrá también dos valores α_1, que difiriendo 90° también la satisfacen. Los ejes que corresponden a estos dos últimos valores de α_1 serán, pues, ortogonales, siendo $J_{z'}$ máximo para uno de ellos y mínimo para el restante.

Dichos ejes se denominan *ejes principales de inercia*, y los momentos de inercia correspondientes, *momentos principales de inercia*.

La determinación del valor de los momentos principales de inercia en función de los momentos de segundo orden, correspondientes a un par de ejes ortogonales, se efectúa del modo siguiente:

Recordando que

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) ; \quad \operatorname{sen}^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad [4.108]$$

y reemplazando estos valores en la segunda de las [4.101] se tiene:

$$J_{z'} = \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) + \tfrac{1}{2}(J_z - J_y)\cos 2\alpha - J_{zy} \operatorname{sen} 2\alpha \qquad [4.109]$$

y teniendo en cuenta la [4.107]

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) + \tfrac{1}{2}(J_z - J_y)\cos 2\alpha \left[1 - \frac{2 J_{zy}}{J_z - J_y} \operatorname{tg} 2\alpha\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) + \tfrac{1}{2}(J_z - J_y)\cos 2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) = \\ &= \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) \pm \tfrac{1}{2}(J_z - J_y)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} \end{aligned} \qquad [4.110]$$

Reemplazando el valor de $\operatorname{tg} 2\alpha$ dado por la [4.107], y teniendo en cuenta los dos signos del radical se llega a:

$$\left\{ \begin{aligned} J_1 &= J_{máx} = \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4 J_{zy}^2} \\ J_2 &= J_{mín} = \tfrac{1}{2}(J_z + J_y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4 J_{zy}^2} \end{aligned} \right\} \qquad [4.111]$$

que corresponden a los valores de los momentos principales de inercia. Si en la tercera de las [4.101] reemplazamos el valor de $\operatorname{tg} 2\alpha$ dado por la [4.107], tenemos:

$$J_{1,2} = J_{zy} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} + \frac{J_z - J_y}{2} \cdot \frac{\dfrac{2 J_{zy}}{J_y - J_z}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = 0 \qquad [4.112]$$

es decir que el *momento centrífugo respecto de un par de ejes principales de inercia es nulo.* Se deduce de ello, que estos ejes constituyen el único par de ejes conjugados ortogonales, entre los infinitos pares que pasan por un punto. Veamos ahora para qué pares de ejes el momento centrífugo alcanza valores extremos. Para ello, igualemos a cero la primera derivada de la tercera ecuación de las [4.101]. Tendremos:

$$\left[\frac{\mathrm{d} J_{z'y'}}{\mathrm{d}\alpha}\right]_{\alpha=\alpha_2} = -2 J_{zy} \operatorname{sen} 2\alpha_2 + (J_z - J_y) \cos 2\alpha_2 = 0 \qquad [4.113]$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{J_y - J_z}{2 J_{zy}} \; ; \qquad [4.114]$$

expresión que se satisface para dos valores de 2α que difieren 180°, y por ende, para valores de α que difieren 90°. Por otra parte, siendo

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_1} \qquad [4.115]$$

α_1 y α_2 diferirán entre sí 45°; es decir, que el par de ejes para los cuales el momento centrífugo es máximo o mínimo, bisecará el ángulo que forman entre sí los ejes principales de inercia.

Calcularemos a continuación los valores máximo y mínimo del momento centrífugo. Para ello, expresemos en la tercera de las [4.101] $\cos 2\alpha$ y $\operatorname{sen} 2\alpha$ en función de $\operatorname{tg} 2\alpha$, recordando para ello que

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \\ \cos 2\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \end{aligned}\right\} \qquad [4.116]$$

Se tiene así:

$$J_{z'y'} = \frac{J_{zy}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} + \frac{\frac{1}{2}(J_z - J_y)\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} \qquad [4.117]$$

Reemplazando en la anterior $\operatorname{tg} 2\alpha$ por su valor dado por la [4.114] se llega a

$$\left.\begin{aligned} J_{1'2'} &= +\sqrt{4J_{zy}^2 + (J_z J_y)^2} \quad \text{(máximo)} \\ J_{1''2''} &= -\sqrt{4J_{zy}^2 + (J_z J_y)^2} \quad \text{(mínimo)} \end{aligned}\right\} \qquad [4.118]$$

expresiones de los momentos centrífugos máximo y mínimo en función de los momentos de segundo orden respecto de un par de ejes ortogonales.

Si una figura admite un eje de simetría, el mismo es, a la vez, eje principal de inercia. En efecto, sea el caso de figura 4.29 y consideremos el par de ejes coordenados z, y, haciendo coincidir el eje y con el eje de simetría. A cada elemento de superficie dF ubicado a una abscisa z y ordenada y, le corresponderá su simétrico, de igual ordenada que el anterior, pero de abscisa $-z$. En consecuencia, a cada producto $zy\,dF$, que representa el momento centrífugo elemental le corresponderá otro producto $-zy\,dF$. y, al establecer la suma de todos ellos, es decir, la integral extendida a la superficie, se anularán mutuamente los productos, resultando con ello nula la integral. Como esta integral representa el momento centrífugo respecto del par de ejes ortogonales dados, al ser nulo, los ejes serán conjugados y, como sólo existe un par de ejes conjugados ortogonales que son precisamente los ejes principales de inercia, queda así demostrado que cuando una figura admite un eje de simetría, el mismo es, a la vez, principal de inercia.

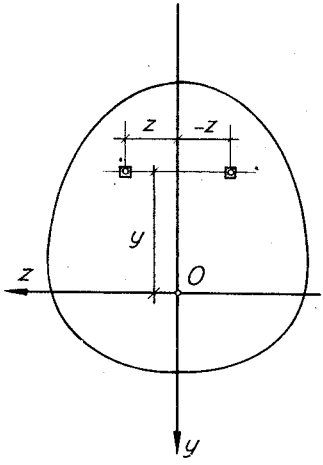


Fig. 4.29.

4.2.6. Momentos de segundo orden respecto de ejes oblícuos.

Sea la superficie de la figura 4.30 y consideremos un par de ejes ortogonales z, y, y, con el mismo origen, dos ejes u y v, que formen

con el eje z los ángulos α y β respectivamente. De la figura tenemos:

$$\left.\begin{aligned} v &= y.\cos\alpha - z.\operatorname{sen}\alpha \\ u &= z.\operatorname{sen}\beta - y.\cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad [4.119]$$

Por otra parte, sabemos que $J_u = \int v^2.dF$; $J_v = \int u^2 dF$ y $J_{uv} = \int uvdF$. Reemplazando en éstas los valores de u y v dados por las [4.119], resulta:

$$\left.\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2\alpha + J_y \operatorname{sen}^2\alpha - J_{zy} \operatorname{sen} 2\alpha \\ J_v &= J_z \cos^2\beta + J_y \operatorname{sen}^2\beta - J_{zy} \operatorname{sen} 2\beta \end{aligned}\right\} \qquad [4.120]$$

$$J_{uv} = J_{zy}(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) - J_z\cos\alpha\cos\beta - J_y \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\ .$$

Cuando u y v son ejes conjugados, el momento centrífugo respecto de los mismos es nulo. Si, dado un eje cualquiera u, queremos conocer la dirección del eje conjugado, es decir, el ángulo β que forma con el eje de las z, bastará para ello hacer igual a cero la tercera de las ecuaciones [4.120], y despejar el valor de $\operatorname{tg}\beta$.

Una vez igualada a cero la expresión de J_{uv}, dividiéndola por $\cos\alpha\cos\beta$ y simplificando, llegamos a

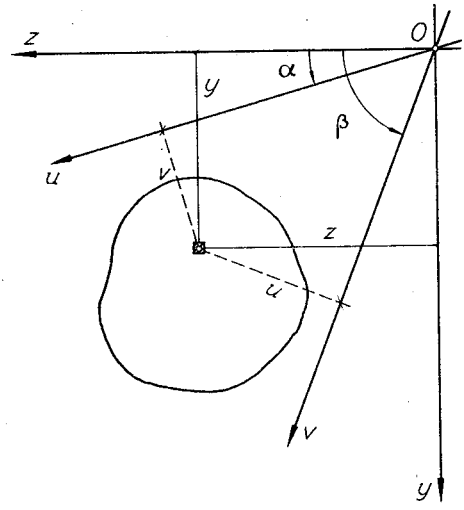


Fig. 4.30.

$$J_{zy}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) - J_z - J_y \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta = 0 \qquad [4.121]$$

Finalmente, despejando $\operatorname{tg}\beta$:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{J_z - \operatorname{tg}\alpha\, J_{zy}}{J_{zy} - \operatorname{tg}\alpha\, J_y} \qquad [4.122]$$

expresión que define la dirección β, conjugada de la α.

4.2.7. Determinación de momentos de inercia de figuras de contorno irregular.

Nos ocuparemos en primer término de la determinación de los momentos de inercia de figuras de contorno irregular; es decir, aquéllas cuyo contorno no responde a ley alguna.

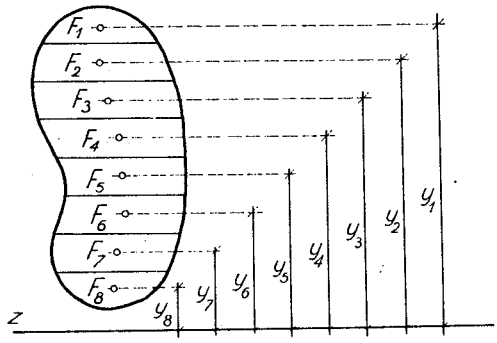


Fig. 4.31.

El problema se puede resolver por métodos numéricos o gráficos, como veremos a continuación.

a) Solución numérica.

Para calcular el momento de inercia de la superficie de la figura 4.31 respecto del eje z indicado en la misma, comenzaremos por dividirla en fajas paralelas a la dirección del eje, de reducido espesor, y en forma que las superficies resultantes sean tales que la determinación de su baricentro sea posible en forma simple, y cuyas áreas sean fáciles de calcular. Es así que las dos superficies parciales extremas, en el caso que nos ocupa, pueden sin mayor error asimilarse a sectores parabólicos, y las restantes a trapecios. Éstos, a su vez, pueden reemplazarse por rectángulos de igual área, por cuanto, dada su pequeña altura, la diferencia de ubicación de los baricentros es despreciable.

Calculadas las superficies parciales F_i, y determinadas las distancias y_i de cada baricentro al eje z, se establecen los productos $F_i \cdot y_i^2$, cuya suma nos da el momento de inercia buscado; es decir,

$$J_z = \sum_1^n F_i\, y_i^2 \,. \qquad [4.123]$$

El momento de inercia calculado mediante la expresión [4.123] es sólo aproximado. En efecto, el momento de inercia de la figura es igual a la suma de los momentos de inercia de las figuras parciales en que se la ha dividido. La expresión exacta del momento de inercia de una faja

i genérica, respecto del eje z, es, de acuerdo con el Teorema de Steiner, la siguiente:

$$J_z^i = J_{G_i}^i + F_i y_i^2$$

donde $J_{G_i}^i$ es el momento de inercia de la faja respecto de su propio eje baricéntrico paralelo al dado, F_i su área e y_i la distancia de su baricentro al eje z.

En consecuencia, la expresión exacta del momento de inercia de la figura respecto del eje z será:

$$J_z = \sum_1^n J_z^i = \sum_1^n J_{G_i}^i + \sum_1^n F_i y_i^2 \qquad [4.125]$$

Ahora bien, cuanto mayor sea el número de fajas en que se ha dividido la figura; o bien, cuanto menor sea la altura de cada una de ellas, o cuanto más alejado se encuentre el eje z del baricentro de cada faja, tanto menor será el valor relativo del término J_G^i frente al de J_z. En consecuencia, si la figura se divide en un número suficiente de fajas paralelas de reducido espesor, $J_{G_i}^i$ será despreciable, y la fórmula [4.125] puede reemplazarse sin mayor error por la [4.123].

b) Solución gráfica de Culmann.

El procedimiento gráfico de Culmann para la determinación de momentos de inercia, consiste en la interpretación gráfica de la fórmula aproximada [4.123]. Dividida la superficie (figura 4.32) en fajas paralelas a la dirección del eje respecto del cual se desea calcular el momento de inercia, y determinados los correspondientes baricentros, aplicamos en los mismos y paralelamente al eje, fuerzas F_i cuyas intensidades correspondan a las áreas de las fajas respectivas. Si en una escala de fuerzas α cm^2/cm llevamos vectores representativos de dichas fuerzas, y con polo O_1 y la distancia polar h_1 trazamos un primer polígono funicular I, II, ..., VI, la intersección de dos lados consecutivos, el I y II, por ejemplo, con el eje respecto del cual se busca el momento de inercia, determina un segmento A_1, A_2, que en la escala correspondiente representa el momento estático $F_1 y_1$ de la fuerza con respecto al eje. Supongamos ahora aplicadas en los baricentros nuevas fuerzas, cuyas intensidades correspondan a los respectivos momentos estáticos $F_i y_i$, y tracemos un polígono funicular de las mismas I', II'...VI'. Para el trazado de este segundo polígono funicular usamos como polígono de fuerzas directamente los segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., A_5A_6, determinados sobre el eje

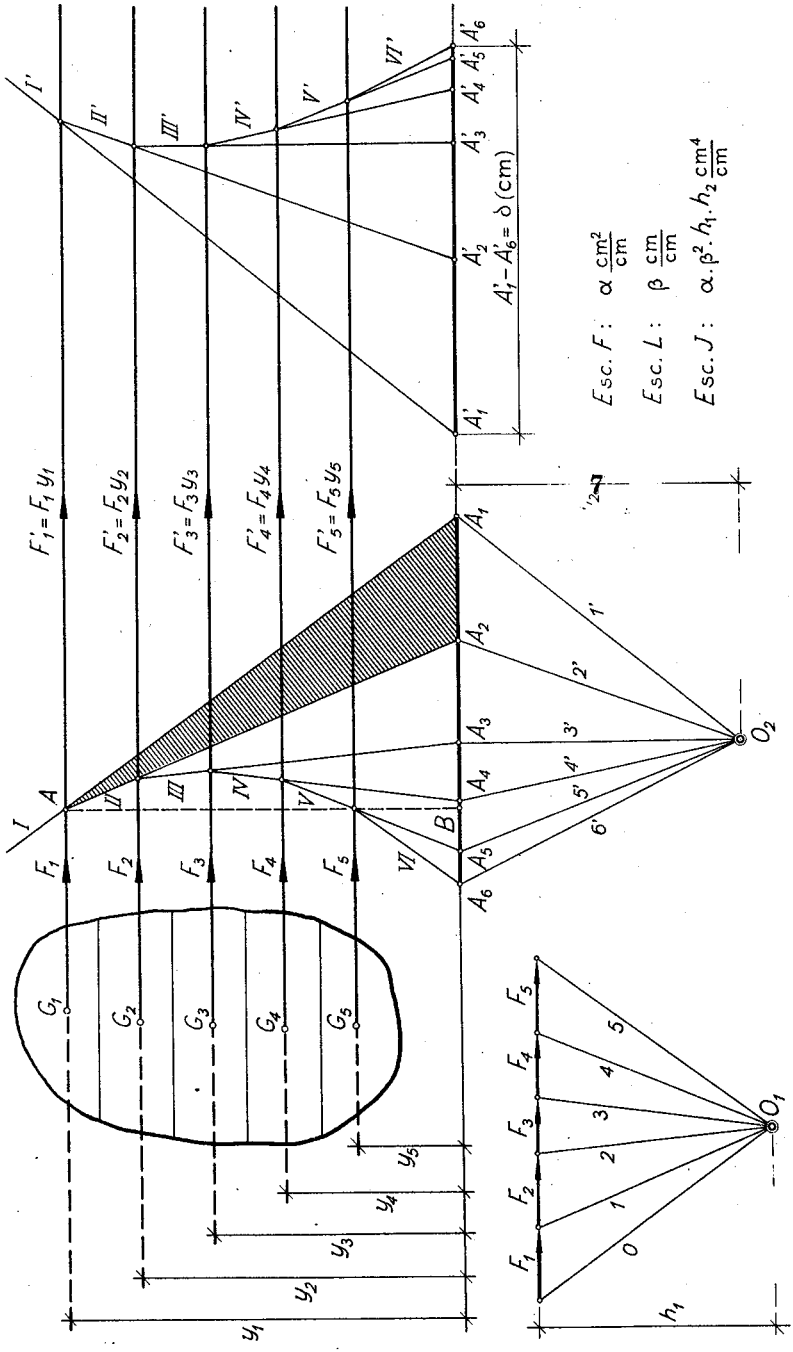


Fig. 4.32.

por la intersección con el mismo de los sucesivos lados del primer funicular, por cuanto dichos segmentos representan, en una cierta escala, los momentos estáticos que corresponden precisamente a las intensidades de las nuevas fuerzas ideales.

Trazado el nuevo funicular, dos lados consecutivos del mismo determinan sobre el eje un segmento, $A'_1 A'_2$ por ejemplo, que en la escala correspondiente representa, a su vez, el momento estático de la nueva fuerza aplicada en el baricentro, es decir $F'_1 . y_1$.

Pero, por ser $F'_1 = F_1 . y_1$, el segmento $A'_1 A'_2$ leído en la escala correspondiente, representa el valor $F_1 y_1^2$ y, en consecuencia, el segmento intersectado entre el primero y último lados del segundo funicular sobre el eje dado, $A'_1 A'_6 = \delta$ (cm), representará en la escala correspondiente, $\sum_1^n F_1 y_1^2$. La escala de momentos de inercia será igual a la escala de fuerzas en que se han representado las fuerzas ideales F'_i, multiplicada por la escala de longitudes y por la distancia polar h_2 del segundo polígono funicular. Pero la escala de fuerzas indicada es, a su vez, la escala en que leíamos los segmentos $A_1 A_2$, etc., determinados por el primer polígono funicular; es decir, una escala de momentos estáticos igual al producto de la escala de fuerzas en que se representaron los vectores F_i : multiplicada por la escala de longitudes y por la primera distancia polar h_1. En consecuencia, reemplazando esta segunda escala en la primera, resulta, en definitiva:

$$\text{Escala } J = \text{Esc}.F.\overline{\text{Esc}.L}^2 . h_1 . h_2 . \qquad [4.126]$$

Esta escala se suele denominar escala de *Culmann*.

En consecuencia, en el caso de la figura 4.32, el momento de inercia de la superficie respecto del eje z dado será igual a:

$$J_z = \delta(\text{cm}) . \left[\alpha . \beta^2 . h_1 . h_2 \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} \right] . \qquad [4.127]$$

c) *Solución gráfica de Mohr.*

Consideremos la misma superficie de la figura 4.32. Una vez trazado el polígono funicular con polo O_1 de las fuerzas F_i, representativas de las superficies parciales en que se ha dividido la figura, prolonguemos los dos primeros lados del mismo hasta cortar el eje z, con respecto al cual se busca el momento de inercia. Queda determinado así el triángulo $AA_1 A_2$, rayado en la figura, cuya superficie Ω, tendrá un área

$$\Omega_1 = \tfrac{1}{2} . A_1 A_2 . AB . \qquad [4.128]$$

Pero $$A_1 A_2 . \text{Esc.Mom.Estáticos} = F_1 . y_1 \qquad [4.129]$$

y además

$$AB . \text{Esc.Longitudes} = y_1 . \qquad [4.130]$$

En consecuencia, reemplazando en [4.128] resulta:

$$\Omega_1 = \tfrac{1}{2} . \frac{F_1 y_1}{\text{Esc.Mom.Est.}} . \frac{y_1}{\text{Esc.Long.}} \qquad [4.131]$$

de donde

$$F_1 y_1^2 = \Omega_1 2 . \text{Esc.Mom.Est.} \times \text{Esc.Long.} \qquad [4.132]$$

Ahora bien, la expresión [4.132] representa el momento de inercia con respecto a z, de la superficie de la primera faja en que dividiéramos la figura. Dicho momento de inercia está dado por el área de la superficie encerrada entre los dos primeros lados del polígono funicular y el eje z, leído en la escala correspondiente. Evidentemente, si queremos hallar el momento de inercia total, bastará sumar las áreas de los sucesivos triángulos formados con el eje z por dos lados consecutivos del polígono funicular. En otras palabras, de acuerdo con el procedimiento de Mohr, el momento de inercia de una figura respecto de un eje de su plano, se obtiene determinando el área de la superficie comprendida entre el polígono funicular del sistema de fuerzas representativas de las superficies parciales, el primer lado del mismo y el eje respecto del cual se calcula el momento de inercia. Dicha área, debe leerse en la denominada *escala de Mohr,* que surge de reemplazar la escala de momentos estáticos de la expresión [4.132] por sus escalas constituyentes, teniéndose en consecuencia:

$$\text{Escala de Mohr} = 2\,\text{Esc.F} \times \overline{\text{Esc.L}}^2 \times h \qquad [4.133]$$

donde h es la distancia polar del único polígono de fuerzas utilizado. Finalmente, llamando Ω al área de la superficie encerrada entre el funicular, su primer lado y el eje z, el momento de inercia buscado será

$$J_z = \Omega(\text{cm}^2) \left[2 . \alpha . \beta^2 . h \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}^2} \right] . \qquad [4.134]$$

El método de Mohr, lo mismo que el de Culmann, en la forma que se ha aplicado, conduce a resultados aproximados, por cuanto se desprecian en el mismo los momentos de inercia de cada una de las fajas respecto

de sus propios ejes baricéntricos. El error cometido está dado por el área de la superficie comprendida entre el polígono funicular y la curva inscripta en el mismo y tangente a éste en los puntos en que las rectas que dividen la superficie, cortan los sucesivos lados del funicular. En efecto, a medida que aumentamos el número de fajas en que se divide la figura, se incrementa el número de lados del polígono funicular. En el límite, para infinitas fajas de espesor infinitésimo, el polígono funicular, como veremos en capítulos posteriores, se transforma en una curva denominada curva funicular, inscripta en el primero. El área encerrada entre la curva funicular, el eje con respecto al cual se calcula el momento de inercia y la primera tangente, que en este caso corresponde al primer lado del polígono funicular, leída en su correspondiente escala, nos da el momento de inercia buscado, esta vez en forma exacta. Como en la práctica la curva se sustituye por el polígono funicular, la diferencia de áreas nos da el error cometido, que será tanto menor cuanto mayor sea el número de fajas en que se divida la figura.

d) Solución graficonumérica de Baumann.

Sea la figura de contorno irregular de la figura 4.33 *a* de la que se pide calcular el momento de inercia respecto de un cierto eje de su plano. Hagamos coincidir con dicho eje el eje z de un par ortogonal, y dividamos la figura en fajas de ancho Δz, paralelas al eje y. Por ser Δz reducido, las fajas, sin mayor error, pueden asimilarse a rectángulos elementales de base Δz y la altura $(y_{1i} - y_{2i})$, donde y_{1i} é y_{2i} corresponden a las ordenadas extremas del rectángulo elemental. Como vere-

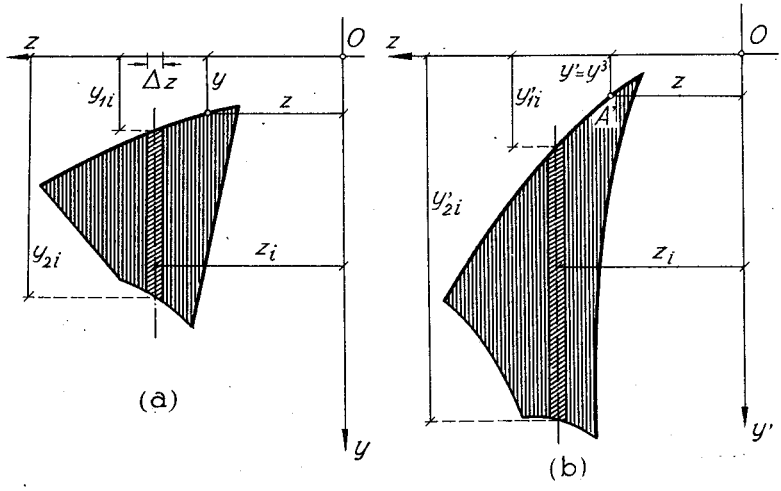


Fig. 4.33.

mos en detalle al considerar el momento de inercia de un rectángulo respecto de un eje no baricéntrico, el momento de inercia del rectángulo elemental, respecto del eje z está dado por la expresión:

$$\Delta J_z = \frac{\Delta z}{3} \cdot (y_{2i}^3 - y_{1i}^3) \; . \qquad [4.135]$$

El momento de inercia total de la figura será igual a la suma de los correspondientes a los rectángulos elementales en que se la ha dividido, es decir:

$$J_z = \tfrac{1}{3} \sum_1^n \Delta z \cdot (y_{2i}^3 - y_{1i}^3) \; . \qquad [4.136]$$

El procedimiento de Baumann consiste en trazar una figura (fig. 4.33 *b*), en la que las coordenadas de cada punto de su contorno sean $z' = z$ de la figura dada, e $y' = y^3$. En consecuencia, dividiendo la nueva figura en fajas verticales de ancho Δz, resultarán rectángulos elementales de ancho Δz y altura $(y'_{2i} - y'_{1i})$, cuyas superficies tendrán un área

$$\Delta F = \Delta z (y'_{2i} - y'_{1i}) \; ; \qquad [4.137]$$

pero como por construcción $y'_{2i} = y_{2i}^3$ e $y'_{1i} = y_{1i}^3$,

reemplazando en [4.137] resulta:

$$\Delta F_i = \Delta z (y_{2i}^3 - y_{1i}^3) = 3 \, \Delta J_{z_i} \; . \qquad [4.138]$$

En consecuencia, el área de la segunda figura corresponde, en la escala que resulte, al triple del momento de inercia buscado, es decir,

$$J_z = \tfrac{1}{3} \sum_1^n \Delta F_i = \tfrac{1}{3} F \; . \qquad [4.139]$$

4.2.8. Momentos de inercia de figuras geométricas.

Para la determinación de momentos de inercia de figuras geométricas, son de aplicación los procedimientos gráficos y graficonuméricos analizados en el parágrafo anterior. Sin embargo, tratándose de figuras geométricas simples como el rectángulo, triángulo, sector parabólico, etc.. es preferible emplear la solución analítica, reservando los procedimientos gráficos para el caso de figuras compuestas.

a) Momento de inercia del rectángulo.

Para el rectángulo, interesa principalmente conocer el valor de su momento de inercia respecto de ejes paralelos a cualquiera de las bases, por cuanto, conocidos éstos, es fácil pasar al correspondiente a un eje de dirección cualquiera, mediante las fórmulas de giro de ejes [4.101] o bien dividiéndolo en triángulos parciales. Comenzaremos determinando el momento de inercia de un rectángulo de base b y altura h, respecto de un eje coincidente con una de las bases. Sea para ello el rectángulo de la figura 4.34 y consideremos una faja elemental de ancho b, altura dy y ordenada y, medida desde la base del rectángulo. La superficie elemental tendrá por área

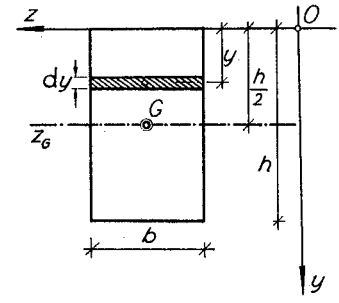


Fig. 4.34.

$$dF = b.dy \qquad [4.140]$$

y el momento de inercia de la misma respecto de z

$$dJ_z = b.y^2.dy \qquad [4.141]$$

Integrando entre 0 y h (límites de variación de y), se tiene:

$$J_z = \int_0^h b.y^2.dy = \tfrac{1}{3}\, b.h^3. \qquad [4.142]$$

Conocido el momento de inercia respecto del eje z coincidente con una de las bases, mediante la aplicación de la fórmula derivada del teorema de Steiner, podemos calcular el correspondiente a un eje baricéntrico paralelo a las bases. En efecto, la distancia del baricentro del rectángulo a las bases es $\frac{1}{2}\, h$. En consecuencia

$$J_{z_G} = J_z - bh.(\tfrac{1}{2}\, h)^2 = \tfrac{1}{3}\, bh^3 - \tfrac{1}{4}\, bh^3 = {}^1/_{12}\, bh^3. \qquad [4.143]$$

El teorema de Steiner nos permite determinar el momento de inercia del rectángulo respecto de un eje cualquiera paralelo a las bases. Para ello bastará sumar al valor dado por la [4.143], el producto del área del rectángulo (bh) por el cuadrado de la distancia d que separa el eje considerado del eje paralelo baricéntrico.

En el caso particular del *cuadrado*, donde $b = h = a =$ lado del cuadrado, la fórmula [4.143], se transforma en

$$J_{z_0} = {}^1/_{12}\, a^4 . \qquad [4.144]$$

Además, para el eje baricéntrico orientado en una dirección cualquiera, el momento de inercia no cambia, siendo igual siempre a $a^4/12$.

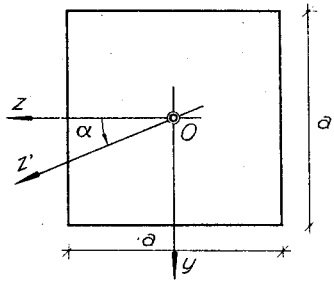


Fig. 4.35.

En efecto, consideremos el cuadrado de la figura 4.35 y los ejes z, y baricéntricos. Para ambos, el momento de inercia valdrá $1/12 . a^4$; es decir, $J_z = J_y$.

Si deseamos conocer el momento de inercia respecto de un eje z' que forma un ángulo cualquiera α con z, aplicamos la segunda de las [4.101]. Pero, teniendo en cuenta que $J_z = J_y$, resulta

$$J_{z'} = J_z(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = J_z ; \qquad [4.145]$$

es decir, que para el cuadrado, el momento de inercia con respecto a cualquier eje baricéntrico es constante e igual a $a^4/12$.

b) Momento de inercia del triángulo.

En el caso del triángulo, interesa fundamentalmente conocer los momentos de inercia respecto de ejes que, siendo paralelos a una de las bases, coincidan con ella, sean baricéntricos o pasen por el vértice opuesto a la base considerada. El momento de inercia respecto de cualquier otro eje paralelo a una de las bases se obtiene una vez conocido el correspondiente a un eje baricéntrico paralelo, por aplicación del teorema de Steiner.

Sea el triángulo de la figura 4.36 y z un eje paralelo a una de las bases que pase por el vértice opuesto. Consideremos una faja elemental de espesor dy, a una distancia y del eje considerado, y sea b_y su ancho variable. El momento de inercia del triángulo respecto de z será:

$$J_z = \int_0^h b_y . y^2 . dy \qquad [4.146]$$

pero, por semejanza de triángulos, $b_y = b/h . y$; luego, reemplazando

$$J_z = \frac{b}{h}\int_0^h y^3\, dy = \frac{b}{h} . \frac{h^4}{4} = {}^1/_4\, b\, h^3 . \qquad [4.147]$$

Aplicando el teorema de Steiner, y teniendo en cuenta que el baricentro del triángulo dista del vértice $\frac{2}{3}.h$, obtenemos el momento de inercia respecto del eje z_G, baricéntrico y paralelo al anterior:

$$j_{z_G} = \frac{1}{4} b.h^3 - \frac{1}{2} b.h.(\frac{2}{3} h)^2 = \frac{b.h^3}{36} . \qquad [4.148]$$

Finalmente, considerando el eje z', coincidente con una base y paralelo a los anteriores, que dista del baricentro $\frac{1}{3}.h$, por aplicación del Teorema de Steiner obtenemos el correspondiente momento de inercia:

$$J_{z'} = \frac{b.h^3}{36} + \frac{1}{2} b.h(\frac{1}{3}.h)^2 = \frac{b.h^3}{12} . \qquad [4.149]$$

En el caso de la figura 4.37 en que el eje con respecto al cual se desea conocer el momento de inercia no es paralelo a ninguna de las bases del triángulo, se procede a dividir la figura en triángulos parciales de bases paralelas al eje dado.

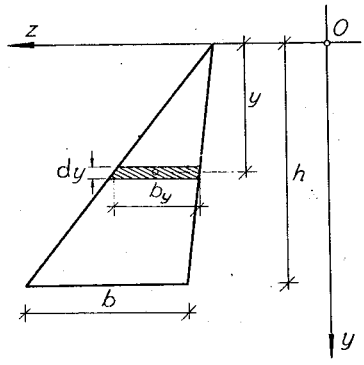


Fig. 4.36.

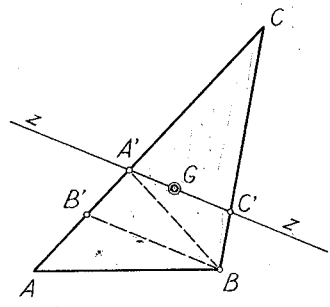


Fig. 4.37.

En el ejemplo de la figura 4.37 resultan los triángulos parciales $A'CC'$; $A'BB'$; $BA'C'$ y $BB'A$. Se determinan luego los momentos de inercia de cada uno de los triángulos respecto del eje z, y la suma de los momentos de inercia parciales nos dará el momento de inercia buscado. Para los triángulos $A'BC'$ y $A'CC'$ se aplica directamente la fórmula [4.149]. En cambio, para el $BA'B'$ corresponde utilizar la [4.147] y en el BAB' la [4.148], aplicando luego en este último la fórmula derivada del teorema de Steiner.

c) Momento de inercia de un trapecio.

La determinación del momento de inercia de un trapecio se obtiene por división de la figura en triángulos parciales, o triángulos y rectángulos según el caso, de bases paralelas al eje dado. Por ser muy simple la solución, no entraremos en el detalle del desarrollo, limitándonos a indicar las expresiones del momento de inercia de un trapecio de bases b' y b'' y altura h, respecto de ejes coincidentes con las bases.

$$\left.\begin{aligned} J_z &= \frac{h^3}{12}(b' + 3b'') \qquad (z = \text{base mayor}) \\ J_z &= \frac{h^3}{12}(3b' + b'') \qquad (z = \text{base menor}) \end{aligned}\right\} \quad [4.150]$$

siendo b' la base mayor y b'' la base menor.

d) Momento de inercia del círculo.

La determinación del momento de inercia del círculo respecto de un eje baricéntrico se simplifica por la circunstancia de admitir un centro de simetría. En efecto, con respecto a cualquier eje que pase por el centro de simetría, el momento de inercia es siempre el mismo. Luego, si para el círculo de radio r de la figura 4.38, trazamos el par de ejes ortogo-

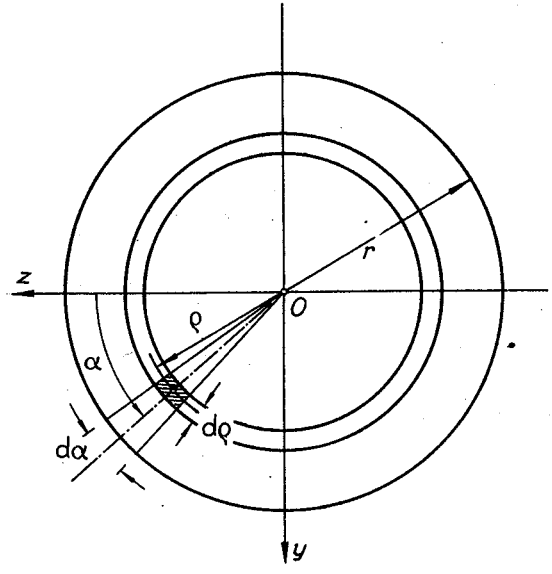


Fig. 4.38.

nales z, y, haciendo coincidir su origen con el centro O del círculo, tendremos $J_z = J_y$.

Recordando que $J_P = J_z + J_y$ resulta finalmente:

$$J_z = J_y = \tfrac{1}{2} J_P \qquad [4.151]$$

Es decir, que el momento de inercia de un círculo respecto de un eje baricéntrico cualquiera es igual a la mitad de su momento de inercia polar respecto del centro.

Para hallar el momento de inercia polar, consideremos un elemento de superficie delimitado por dos círculos concéntricos separados $d\varrho$ y dos radios que formen un ángulo central $d\alpha$. El área del elemento de superficie será, si ϱ es el radio correspondiente al baricentro del elemento:

$$dF = \varrho\, d\alpha . d\varrho . \qquad [4.152]$$

El momento de inercia polar de la superficie elemental, respecto de O será

$$dJ_P = \varrho^3 d\varrho . d\alpha \qquad [4.153]$$

y el de la superficie total del círculo

$$J_P = \int_0^{2\pi} \int_0^r \varrho^3 d\varrho . d\alpha . \qquad [4.154]$$

Integrando se tiene, finalmente,

$$J_P = \frac{\pi r^4}{2} . \qquad [4.155]$$

Recordando la [4.151], y teniendo en cuenta que $r = \tfrac{1}{2} D$, se llega a

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64} \qquad [4.156]$$

como expresión del momento de inercia de un círculo respecto de un eje cualquiera que pase por su baricentro.

e) Momento de inercia del segmento parabólico.

Sea el segmento parabólico de la figura 4.39, cuya parábola límite responde a la ecuación $y^2 = 2pz$.

Consideremos un rectángulo elemental, normal al eje z, de altura $2y$ y base dz. Su momento de inercia respecto del eje z será:

$$dJ_z = \frac{1}{12}(2y)^3\,dz \qquad [4.157]$$

y el momento de inercia total

$$J_z = \tfrac{2}{3}\int_0^f y^3\,dz\,. \qquad [4.158]$$

Pero como $y^2 = 2pz$, resulta en consecuencia

$$J_z = \tfrac{2}{3}(2p)^{3/2}\int_0^f z^{3/2}\,dz\,. \qquad [4.159]$$

Integrando y teniendo en cuenta que $y^3 = (2pz)^{3/2}$,

$$J_z = \frac{4}{15}fy^3\,. \qquad [4.160]$$

Pero como para $z = f$ resulta $y = \tfrac{1}{2}b$, reemplazando se tiene finalmente

$$J_z = \frac{1}{30}f.b^3\,. \qquad [4.161]$$

Con respecto al eje y, el momento de inercia del rectángulo elemental será

$$dJ_y = 2y.z^2.dz\,. \qquad [4.162]$$

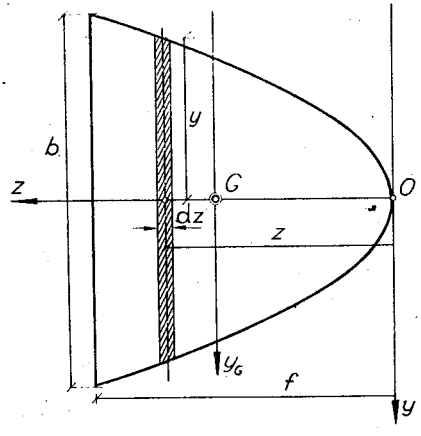


Fig. 4.39.

Y para la superficie total

$$J_y = \int_0^f 2y.z^2\,dz\,. \qquad [4.163]$$

Recordando que $y^2 = 2pz$,

$$J_y = 2\sqrt{2p}\int_0^f z^{5/2}\,dz = \left[4/7\sqrt{2p}.z^{7/2}\right]_0^f\,. \qquad [4.164]$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\tfrac{1}{4}b^2 = 2pf$, resulta

$$J_y = 2/7\,bf^3 \qquad [4.165]$$

como expresión del momento de inercia de un segmento parabólico respecto de un eje tangente en su vértice.

Con respecto al eje y_G, baricéntrico y normal al z, el momento de inercia se obtiene, por aplicación de la fórmula derivada del teorema de Steiner:

$$J_{y_G} = 2/7\, bf^3 - 2/3\, bf(3/5\, f)^2 = \frac{8}{175}\, bf^3 . \qquad [4.166]$$

4.2.9. Radios de giro.

Conocida la expresión del momento de inercia de una figura respecto de un eje, la obtención del correspondiente radio de giro es inmediata por la aplicación de la fórmula [4.71]. Determinaremos a continuación los radios respecto de ejes baricéntricos paralelos a las bases de las figuras analizadas en el parágrafo anterior.

a) Rectángulo.

Siendo para el rectángulo, y con respecto a un eje paralelo a la base, $J = bh^3/12$, y su área $F = bh$, resulta

$$i_G^2 = \frac{bh^3}{12\, bh} = \frac{h^2}{12} . \qquad [4.167]$$

La [4.167] nos dice que para el rectángulo, y con respecto a un eje baricéntrico paralelo a una base, el radio de giro es medio proporcional entre la mitad y un sexto de la altura. Esta propiedad permite la determinación gráfica del radio de giro baricéntrico en forma simple. Bastará para ello, figura 4.40, trazar la semicircunferencia de diámetro

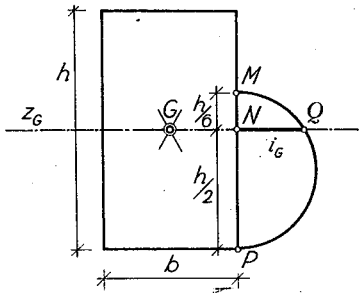


Fig. 4.40.

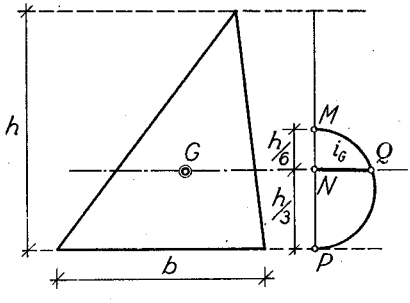


Fig. 4.41.

$MP = (h/2) + (h/6)$; la que cortará en Q al eje z_G. El segmento NQ, en la escala del dibujo, corresponde al radio de giro buscado.

b) Triángulo.

Para un eje baricéntrico paralelo a una base, el momento de inercia del triángulo vale $J_{z_G} = bh^3/36$. Como su área es $F = \frac{1}{2} bh$, se tiene

$$i_G^2 = \frac{2bh^3}{36bh} = \frac{h^2}{18} , \qquad [4.168]$$

es decir, que i_G es media proporcional entre un tercio y un sexto de la altura del triángulo.

Para determinar i_G gráficamente, se lleva sobre una normal a la base y a partir de la misma un segmento $MP = (h/3) + (h/6)$. Luego (fig. 4.41) se traza una semicircunferencia de diámetro MP, que cortará el eje z_G en un punto Q. El segmento NQ, leído en la escala del dibujo, nos da el valor de i_G.

c) Círculo.

Para un eje baricéntrico cualquiera, el momento de inercia de la superficie del círculo es

$$J_{z_G} = \frac{\pi D^4}{64} . \qquad [4.169]$$

Siendo su área $F = \frac{1}{4} \pi D^2$, resulta:

$$i_G^2 = \frac{4D^4}{64D^2} = \frac{D^2}{16} ; \qquad [4.170]$$

es decir

$$i_G = \frac{1}{4} D . \qquad [4.171]$$

d) Sector parabólico.

Con la notación y ejes de la figura 4.39, y recordando que para el sector parabólico $F = 2/3\, b.f$ se tiene:

$$i_{z_G}^2 = \frac{3.f.b^3}{2.30.f.b} = \frac{b^2}{20} \therefore i_{z_G} = 0{,}224\, b$$

$$i_{y_G}^2 = \frac{3.8.b.f^3}{2.175.f.b.} = \frac{24.f^2}{350} \therefore i_{y_G} = 0{,}263\, f \qquad [4.172]$$

4.2.10. Determinación del momento centrífugo del triángulo respecto de un par de ejes ortogonales.

Interesa conocer la determinación del momento centrífugo de un triángulo respecto de un par de ejes ortogonales cualesquiera, por cuanto la determinación del momento centrífugo de un polígono se reduce en última instancia, por descomposición en triángulos, a la determinación del de la figura 4.42.

Consideremos el caso más general, es decir, un triángulo cualquiera y un par de ejes ortogonales de origen arbitrario. La forma más simple para determinar el momento centrífugo en forma exacta es mediante la expresión [4.103], en la que intervienen tres momentos de inercia: dos respecto de los ejes dados, y un tercero respecto de un eje a 45° con los anteriores, y cuya determinación no ofrece dificultad.

El planteo analítico del problema, es decir, la resolución de la integral

$$J_{zy} = \int z\,y\,\mathrm{d}F \qquad [4.173]$$

es, en general, complejo, conduciendo a una integral de superficie cuyos límites de integración son las funciones que definen las rectas que constituyen los lados del triángulo. Sin embargo, existe un caso en que la integración es sencilla, y del que nos ocuparemos a continuación.

Supongamos el triángulo rectángulo de la figura 4.43, y el par de ejes coordenados z, y, de origen coincidente con el ángulo recto, y con respecto a los cuales se pide hallar el momento centrífugo. Consideremos

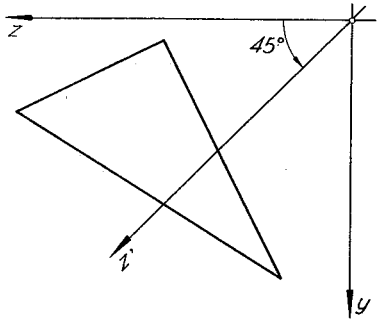


Fig. 4.42.

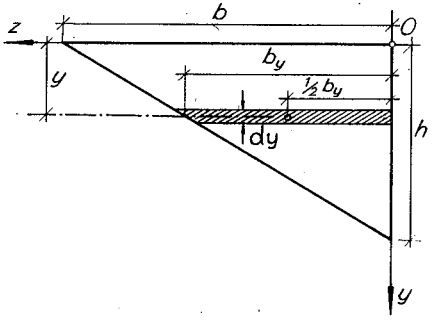


Fig. 4.43.

un rectángulo de espesor dy, de base b_y, paralelo al eje z. Siendo el área del mismo $dF = b_y dy$, el momento centrífugo elemental será:

$$dJ_{zy} = y.b_y.\tfrac{1}{2}b_y.dy \qquad [4.174]$$

pero, por semejanza de triángulos $b_y = b/h(h-y)$. Luego, reemplazando en [4.174] e integrando entre 0 y h, se tiene:

$$J_{zy} = \int_0^h \tfrac{1}{2}(b/h)^2.(h-y)^2.y.dy \qquad [4.175]$$

$$J_{zy} = \frac{b^2h^2}{24} . \qquad [4.176]$$

Conocido J_{zy}, la obtención del momento centrífugo con respecto a un par de ejes baricéntricos paralelos a los catetos, es inmediata. En efecto, de acuerdo con la fórmula [4.78] tenemos, siendo $z_G = b/3$ e $y_G = h/3$:

$$J_{z_G y_G} = \frac{b^2h^2}{24} + \tfrac{1}{2}b.h.\frac{b}{3}.\frac{h}{3} = -\frac{b^2\,h^2}{72} . \qquad [4.177]$$

4.2.11. Determinación del momento centrífugo de una superficie de contorno irregular.

La determinación del momento centrífugo de una superficie de contorno irregular puede efectuarse numérica o gráficamente.

El procedimiento numérico es similar al empleado en 4.2.7 para la determinación del momento de inercia de una figura de este tipo respecto de un eje cualquiera. Consideremos la superficie de la figura 4.44 y los ejes z,y, con respecto a los cuales se pide hallar el momento centrífugo. Se divide para ello la figura en fajas paralelas a la dirección de uno de los ejes, el z por ejemplo. Luego se determinan los baricentros y se calculan las áreas F_i de dichas fajas. Conocidas las distancias z_i é y_i de cada baricentro a los ejes, se establecen los productos $F_i.z_i.y_i$, cuya suma algebraica nos da el momento centrífugo buscado; es decir,

$$J_{zy} = \sum_1^n F_i.z_i.y_i . \qquad [4.178]$$

En esta expresión las coordenadas de cada baricentro se introducen con el signo que les corresponda. Por otra parte, el resultado a que se

y1
y2
y3
y4
y5
F1
F2
F3
F4
F5
h1
O1
A1
A2
A3
A4
A5
A6
O2
h2
Esc. F = α cm²/cm
Esc. L = β cm/cm
Esc. Jzy = h.α.β² cm⁴/cm
δ
A'6
A'5
A'4
A'3
A'2
A'1
y
z1
z2
z3
z4
z5
G1
G2
G3
G4
G5
F'1 = F1.yA1
F'2 = F2.yA2
F'3 = F3.yA3
F'4 = F4.yA4
F'5 = F5.yA5
z

llega es sólo aproximado, por cuanto, análogamente a lo que ocurre en el caso de los momentos de inercia, su aplicación prescinde de considerar los momentos centrífugos de cada faja respecto de sus propios ejes baricéntricos paralelos a los dados. El error cometido será tanto menor cuanto mayor sea el número de fajas en que se haya dividido la figura.

La solución gráfica corresponde a la extensión del método gráfico de Culmann, aplicado en 4.2.7 para la determinación de momentos de inercia, al caso de los momentos centrífugos. Una vez dividida la figura en fajas paralelas a uno de los ejes (figura 4.44), se suponen aplicadas en los respectivos baricentros fuerzas ideales F_i, de intensidad igual al área de cada faja, y dirigidas paralelamente a uno de los ejes, el z por ejemplo.

Trazado un polígono funicular de estas fuerzas ideales, con polo O_1 y distancia polar h_1, prolongando dos lados consecutivos hasta cortar el eje z, sus intersecciones con el mismo definen segmentos, A_1A_2, por ejemplo, que, en la escala correspondiente, representan los momentos estáticos de las superficies F_i respecto del eje z, es decir $F_i y_i$.

Si aplicamos en los baricentros parciales nuevas fuerzas ideales $F'_i = F_i y_i$, actuando ahora en la dirección del eje y, y trazamos un segundo polígono funicular de polo O_2 y distancia polar h_2, prolongando dos lados consecutivos del mismo hasta cortar el eje y, el segmento así determinado sobre este último corresponderá al momento estático de la fuerza ideal F'_i es decir, $F'_i z_i$. Pero, $F'_i = F_i y_i$, de donde

$$F'_i z_i = F_i y_i z_i \ . \qquad [4.179]$$

La suma de los segmentos así determinados corresponderá al momento centrífugo buscado, es decir:

$$J_{zy} = \sum_1^n F_i y_i z_i \ .$$

Este segmento suma se obtiene por la intersección del primero y último lados del segundo funicular con el eje y; es decir, $A'_1A'_6$, en la figura 4.44, cuya longitud será δ (cm).

La escala en que debemos leer dicho segmento será la misma que en el caso de la determinación de los momentos de inercia, es decir:

$$\text{Escala } J_{zy} = \text{Esc.Fuerzas} \times \text{Esc.}\overline{\text{Long.}}^{\,2} \times h_1 \times h_2 :$$

En consecuencia, de acuerdo con la figura 4.44 resulta

$$J_{zy} = \delta(\text{cm}).\alpha.\beta^2.h_1.h_2 \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} . \qquad [4.180]$$

4.2.12. Determinación gráfica exacta del momento de inercia de una figura geométrica compuesta.

Los métodos de Culmann y Mohr, aplicados a la determinación de momentos de inercia de figuras geométricas, conducen a resultados exactos si se introduce el concepto de radio de giro, como veremos a continuación. Sea la superficie de la figura 4.45, formada por dos rectángulos dispuestos en forma de L. Se pide determinar su momento de inercia respecto del eje $z-z$, paralelo a uno de los lados de la figura. Determinamos primeramente los baricentros de los rectángulos parciales, y luego calculamos sus respectivas áreas, que llamaremos F_1 y F_2. Si aplicamos el método de Culmann en la forma descripta en 4.2.7 *b*, el resultado no será exacto, por cuanto se estarán despreciando los momentos de inercia de los rectángulos parciales respecto de sus propios ejes baricéntricos. Otro tanto ocurrirá, de aplicar el método de Mohr.

Recordando la expresión [4.73], vemos que ésta nos dice que el momento de inercia de una superficie respecto de un eje puede interpretarse como el producto del área de la misma por el cuadrado de una cierta distancia denominada radio de giro, o sea, que se supone la superficie concentrada en un punto, que dista del eje una distancia igual al radio de giro. En el caso de nuestro problema, si conociéramos los radios de giro de cada rectángulo parcial respecto del eje $z-z$, podríamos suponer aplicadas las dos fuerzas ideales F_1 y F_2 a distancias de $z-z$ iguales a sus correspondientes radios de giro. En esta forma, la aplicación de los procedimientos de Culmann o de Mohr, nos conducirá a resultados exactos, por cuanto ambos permiten calcular gráficamente la expresión $\sum_1^n F_i\, y_i^2$ que, en este caso, se transforma en $\sum_1^n F_i\, i_i^2$ que, de acuerdo con la [4.73], corresponde a la expresión exacta del valor del momento de inercia.

Para determinar el radio de giro de los rectángulos parciales respecto del eje $z-z$ necesitamos conocer los correspondientes a sus propios ejes baricéntricos, por cuanto, conocidos éstos, los correspondientes a $z-z$, se obtienen como hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos sean los radios de giro baricéntricos y las distancias que separan ambos ejes, conforme con los establecidos en [4.81].

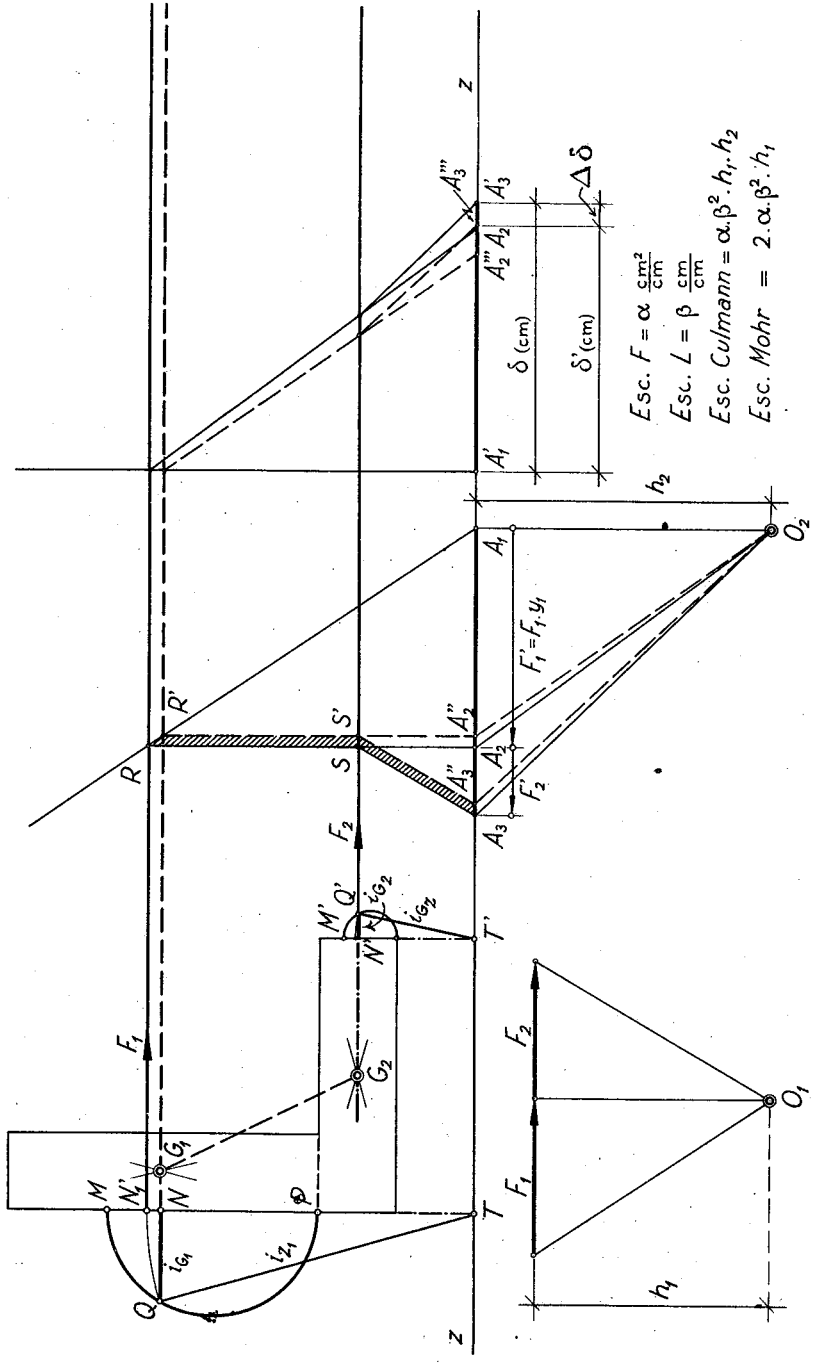

Esc. F = α cm²/cm
Esc. L = β cm/cm
Esc. Culmann = α.β².h₁.h₂
Esc. Mohr = 2.α.β².h₁
δ (cm)
δ'(cm)
Δδ
h₂
h₁
F₁
F₂
F'₁=F₁.y₁
F'₂
G₁
G₂
O₁
O₂
z
R
R'
S
S'
T
T'
M
N
P
Q
M'
N'
Q'
A₁
A₂
A₃
A'₁
A'₂
A'₃
A''₂
A''₃
A'''₃

Fig. 4.45.

Como se viera en 4.2.9, la determinación gráfica del radio de giro de un rectángulo es simple, y se reduce a la construcción de una media proporcional, por lo que no entraremos en mayores detalles.

Determinados en la figura 4.45 los radios de giro baricéntricos i_{G_1} é i_{G_2}, y construidos los triángulos rectángulos NQT y $N'Q'T'$, sus hipotenusas QT y $Q'T'$ corresponden a los radios de giro buscados. Haciendo centro en T y T' y rebatiendo sobre las verticales MT y $M'T'$, obtenemos los puntos N_1 y N_1' ubicados a distancias de z-z precisamente iguales a los respectivos radios de giro, en los que supondremos ahora actuando las fuerzas ideales F_1 y F_2.

Puede observarse en la figura 4.45 que, para el rectángulo inferior, el punto N_1' coincide prácticamente con el N', es decir que en este caso, en que la altura del rectángulo es reducida con respecto a la distancia de su baricentro al eje considerado, es posible sin mayor error, considerar la fuerza ideal aplicada en el baricentro de la figura.

Completada la construcción de Culmann, el momento de inercia buscado será igual a la longitud del segmento $A_1' A_3'$ del segundo polígono funicular, leído en la correspondiente escala, es decir

$$J_z = \delta(\text{cm}) . \alpha . \beta^2 . h_1 . h_2 \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} . \qquad [4.181]$$

La aplicación del método de Mohr, también contemplada en la figura 4.45, nos lleva a leer en la escala de Mohr el área Ω encerrada entre el primer polígono funicular, su primer lado y el eje z-z considerado; es decir,

$$J_z = 2\,\Omega(\text{cm}) . \alpha . \beta^2 . h_1 \frac{\text{cm}^4}{\text{cm}} . \qquad [4.182]$$

El error a que conducen los métodos de Culmann y Mohr, cuando las fuerzas ideales representativas de las áreas parciales en que se divide la figura se suponen aplicadas en los respectivos baricentros, surge claramente de la figura 4.45. En efecto, en la misma, aparte de la construcción exacta que acabamos de desarrollar, hemos efectuado, superpuesta, la correspondiente a considerar las fuerzas F_1 y F_2 aplicadas en los baricentros de cada rectángulo. Para el procedimiento de Culmann, se obtiene en el segundo polígono funicular, como intersección de sus lados extremos con el eje z-z, $A_1' A_3'''$, cuya longitud δ' (cm) es menor que δ (cm). La diferencia entre ambos, segmento $\Delta\delta$ (cm), leído en la escala correspondiente, nos da el error cometido.

En el método de Mohr, el área a considerar será $R' A_1 A_3'' S'$, y el error cometido estará representado por el área correspondiente a la diferencia de superficies, es decir $RR' S' A_3'' A_3 SR$, leída en la escala de Mohr.

4.2.13. Interpretación gráfica de las fórmulas para giro de ejes. Circunferencia de Mohr.

Existen construcciones gráficas que permiten determinar los momentos de inercia y centrífugos de una superficie correspondientes a cualquier eje o pares de ejes que pasen por un punto dado del plano. Dichas construcciones permiten determinar las direcciones de los ejes principales de inercia y además, para un eje cualquiera, la dirección conjugada del mismo. *Otto Mohr* * desarrolla seis construcciones gráficas, entre ellas la conocida de la Elipse de Inercia, debida a Cauchy y Poinsot. Nos limitaremos a encarar sólo una de ellas, la más práctica y simple, y que es debida a *Mohr*, aunque algunos autores la designen erróneamente como *Círculo de Land*, y otros *Círculo de Mohr-Land*.

Sea, figura 4.46, una superficie F cualquiera, un punto O de su plano, y un par de ejes z, y, arbitrarios, orientados en la forma que muestra la figura y cuyo origen coincida con O.

Si dF es un elemento de superficie su momento centrífugo respecto de z, y será

$$dJ_{zy} = zy\,dF \,. \qquad [4.183]$$

Llamando ϱ la distancia de dF a O, y α y β los ángulos que forman el radio vector ϱ con los ejes y y z respectivamente, resulta

$$\left.\begin{aligned} z &= \varrho.\operatorname{sen}\alpha \\ y &= \varrho.\operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} \qquad [4.184]$$

y reemplazando en [4.183]

$$dJ_{zy} = \varrho^2.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta\,dF = dJ_{p_o}.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \,. \qquad [4.185]$$

Tracemos ahora una circunferencia *cualquiera*, de centro C, diámetro $2R$ y que pase por O. Dicha circunferencia cortará los ejes z, y en los puntos B y D, respectivamente. Prolongando el radio vector hasta cortar en E la circunferencia, y uniendo E con D, el ángulo EDB será igual a β, por ser inscripto en la circunferencia y abarcar el arco BED, abarcado también por el ángulo BOE igual a β. Proyectando E sobre la cuerda BD, se tiene

$$EA = ED.\operatorname{sen}\beta \,. \qquad [4.186]$$

* O. MOHR. "Abhandlungen aus dem Gebiete des Technischen Mechanik". 1928 W. Ernst & Sohn.

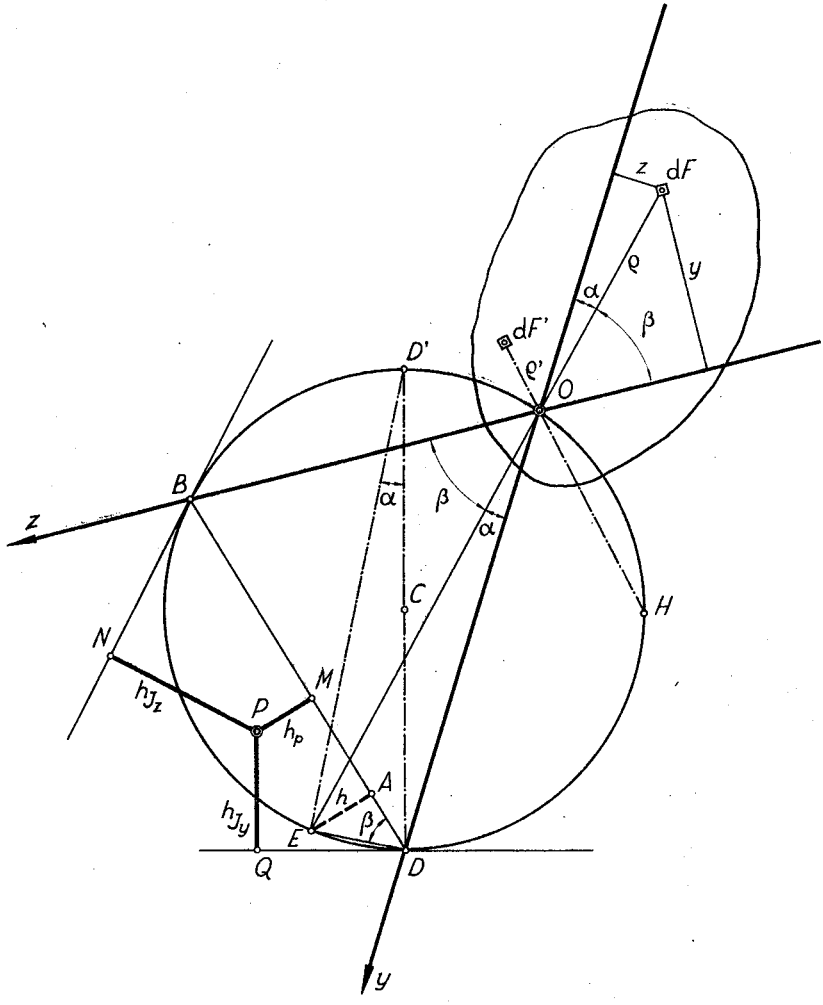


Fig. 4.46.

Trazando ahora el diámetro DD' y uniendo D' con E, el ángulo $ED'D$ será igual al α, por estar ambos inscriptos en la misma circunferencia y abarcar el mismo arco ED. En consecuencia, resulta

$$ED = 2R.\operatorname{sen}\alpha \ . \qquad [4.187]$$

Reemplazando la [4.187] en la [4.186] y llamando h la distancia EA, se llega a

$$EA = h = 2R.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \ . \qquad [4.188]$$

Despejando $\operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta$ de [4.188] y reemplazando en [4.185] resulta

$$\mathrm{d}J_{zy} = \frac{\varrho^2 \,\mathrm{d}F}{2R} . h \,. \qquad [4.189]$$

Integrando para toda la superficie, obtenemos como expresión de su momento centrífugo respecto de z, y

$$J_{zy} = \int_F \frac{h\,\varrho^2 \,\mathrm{d}F}{2R} \,. \qquad [4.190]$$

Imaginemos ahora aplicada en E una masa ideal $\varrho^2 \,\mathrm{d}F/2R$. El producto $h.\varrho^2 \,\mathrm{d}F/2R$ puede interpretarse como el momento estático de dicha masa ideal respecto de la cuerda BD. A otro elemento de superficie $\mathrm{d}F'$ le corresponderá una masa ideal $\varrho'^2 \,\mathrm{d}F'/2R$ aplicada en H; es decir, que la circunferencia trazada será el lugar geométrico de un conjunto de puntos materiales de masa igual $\varrho^2 \,\mathrm{d}F_i/2R$, conjunto que admitirá un baricentro P, ubicado a una distancia $PM = h_P$ de la cuerda BD, tal que cumpla la condición

$$\int_F \frac{\varrho^2 \,\mathrm{d}F}{2R} . h = h_P \int_F \frac{\varrho^2 \,\mathrm{d}F}{2R} \,. \qquad [4.191]$$

Reemplazando esta expresión en [4.190] resulta

$$J_{zy} = h_P \int_F \frac{\varrho^2 \,\mathrm{d}F}{2R} = h_P . \frac{J_P}{2R} \,; \qquad [4.192]$$

es decir, que el momento centrífugo de la superficie respecto del par de ejes dados es igual a la distancia del punto P a la cuerda determinada por la intersección de los ejes con la circunferencia, siempre que dicha distancia se lea en una escala igual a $J_P/2R$, siendo J_P el momento de inercia polar de la figura con respecto al origen O de los ejes, y $2R$ el diámetro de la circunferencia.

Esta circunferencia se denomina *"Circunferencia de Mohr"* y el punto P, *polo* de la circunferencia o *punto principal de inercia.*

De las consideraciones efectuadas para la determinación de P, surge que la posición del mismo depende de la circunferencia que se trace, pero no del par de ejes considerados. En consecuencia, una misma circunferencia nos permitirá determinar el momento centrífugo respecto de

cualquier par de ejes del mismo origen que los utilizados para el trazado, momento centrífugo que estará dado por la distancia del polo P a la cuerda correspondiente al par de ejes considerado.

Supongamos ahora que en la figura 4.46 mantenemos invariable la posición del eje z, y hacemos girar el y en torno a O. El punto D se desplazará sobre la circunferencia y, cuando y se superponga con z, D coincidirá con B, y la cuerda BD se transformará en la tangente en B a la circunferencia. Pero, cuando y y z coinciden el momento centrífugo se transforma en el momento de inercia. Por otra parte, la distancia h_P del polo a la cuerda se transforma ahora en la distancia h_{J_z} del mismo a la tangente en B a la circunferencia. En consecuencia:

$$J_z = h_{J_z} \cdot \frac{J_P}{2R} \cdot \qquad [4.193]$$

Por consideraciones análogas, llegamos a que:

$$J_y = h_{J_y} \cdot \frac{J_P}{2R} \cdot \qquad [4.194]$$

Consideremos ahora la circunferencia de Mohr de la figura 4.47 *.

El momento centrífugo respecto del par de ejes z, y, está dado por la longitud del segmento PM, leído en la escala correspondiente. Si el par de ejes es tal que la cuerda definida por los mismos pasa por el polo, evidentemente la distancia PM se anula y, en consecuencia, el momento centrífugo con respecto a dichos ejes es también nulo. Tal el caso de los ejes z-z'. Ahora bien, sabemos que si para un par de ejes el momento centrífugo es nulo, los ejes son conjugados de inercia. Luego, para determinar la dirección conjugada de inercia de un eje cualquiera, bastará determinar el punto en que el eje dado corte la circunferencia (A). Uniendo dicho punto con el polo y prolongando la recta AP así determinada hasta cortar

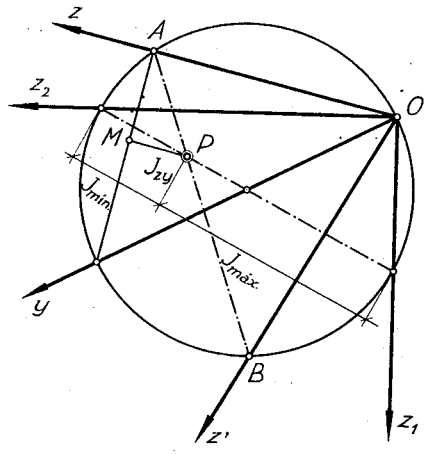


Fig. 4.47.

* Tanto en esta figura como en las subsiguientes, hemos prescindido de representar la superficie correspondiente, por resultar innecesario para los fines perseguidos.

nuevamente la circunferencia en un punto B, la recta OB define la dirección conjugada de inercia del eje z. Para una figura determinada y un punto dado O existen, como se sabe, infinitos pares de ejes conjugados de inercia. Entre ellos, un par será ortogonal, constituyendo los ejes principales de inercia. Para determinarlos, bastará trazar el diámetro que contenga P, y unir con O los puntos en que el mismo corta la circunferencia. Dichas direcciones serán las de los ejes principales de inercia, con respecto a los cuales los momentos de inercia alcanzan valores máximo y mínimo.

Analicemos ahora el caso de la figura 4.48. Construida la circunferencia de Mohr para un par de ejes cualesquiera z, y', determinaremos el eje y, normal a z. Si ahora, manteniendo la ortogonalidad de los ejes, los giramos alrededor de O hasta que el eje z coincida con un diámetro (fig. 4.48b), el eje y resultará tangente en O a la circunferencia. Por otra parte, el punto P permanecerá invariable, y los mo-

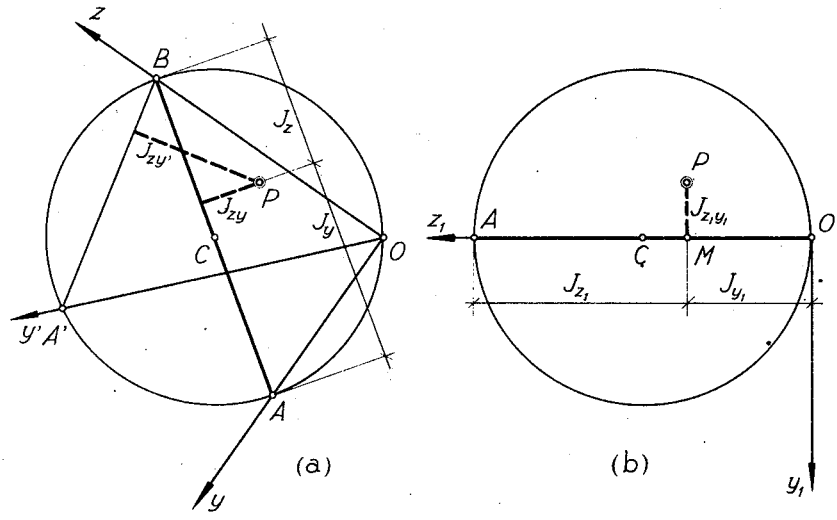


Fig. 4.48.

mentos de inercia respecto de los ejes z é y estarán dados respectivamente por los segmentos AM y MO. Además, el punto principal de inercia P se encuentra ubicado sobre la normal a z trazada por M, y a una distancia igual, en escala, a $J_{z//}$. En este caso, sobre el diámetro de la circunferencia, y a patir de O, aparece, en primer término, el momento de inercia respecto de y, y a continuación el relativo a z. Si hubiésemos girado los ejes hasta hacer coincidir el eje y con el diámetro

de la circunferencia, la situación se hubiese invertido, apareciendo en primer término a partir de O, el momento de inercia respecto de z.

Como consecuencia, surge la siguiente regla práctica para el trazado de la circunferencia de Mohr, cuando se conocen los momentos de inercia y centrífugo respecto de dos ejes ortogonales: A partir del punto sobre el que se desea trazar la circunferencia, se lleva sobre uno cualquiera de los ejes el momento de inercia correspondiente al otro y, a continuación, el restante, en una cierta escala. Con diámetro igual a la suma de ambos momentos de inercia, es decir, el momento de inercia polar, y con centro sobre el eje considerado, se traza una circunferencia, que será la circunferencia de Mohr buscada. El polo de la misma se encontrará sobre la vertical del punto que separa los segmentos representativos de ambos momentos de inercia y a una distancia del eje igual, en escala, al momento centrífugo. La ubicación del polo en el cuadrante que corresponda se efectuará conforme con el signo del momento centrífugo, en

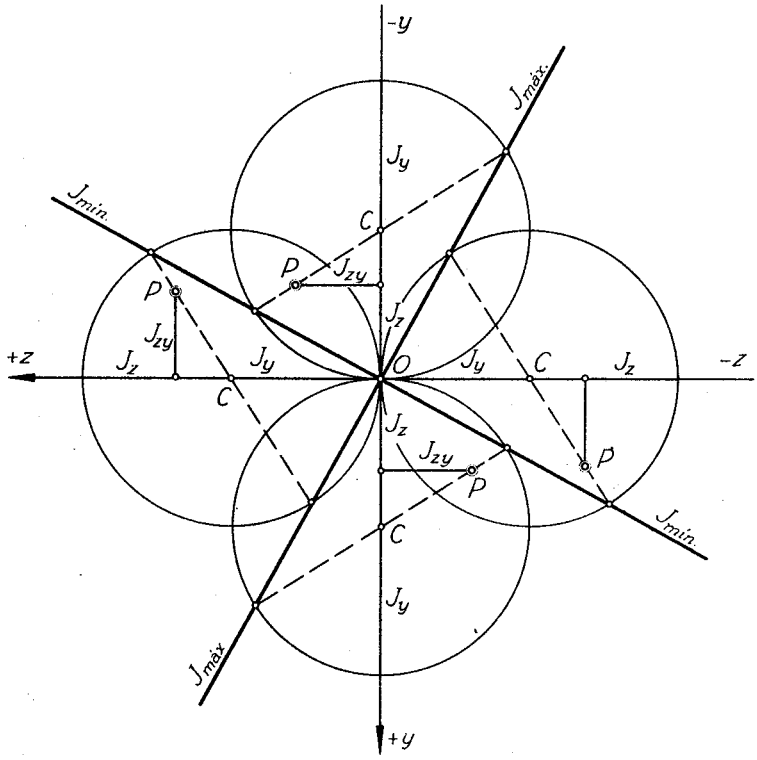


Fig. 4.49.

forma tal que el signo del producto de las coordenadas del polo corresponda al signo del momento centrífugo.

La circunferencia de Mohr puede construirse sobre cualquiera de los semiejes, positivos o negativos. En la figura 4.49 se ha procedido a la construcción de la circunferencia para los cuatro semiejes, determinándose en las mismas las direcciones principales de inercia, para una superficie cuyos momentos de segundo orden con respecto al par de ejes z,y, respondan a las siguientes características: $J_z < J_y$ y $J_{zy} < 0$. En los cuatro casos el polo se ha ubicado en forma tal que el signo del producto de sus coordenadas corresponda al signo de J_{zy}; es decir, negativo.

Interesa conocer la forma de determinar el signo del momento centrífugo respecto de un par de ejes, en la circunferencia de Mohr.

Consideremos para ello la circunferencia de Mohr de la figura 4.50, construida sobre el eje z del par de ejes coordenados z,y. Sea $z'y'$

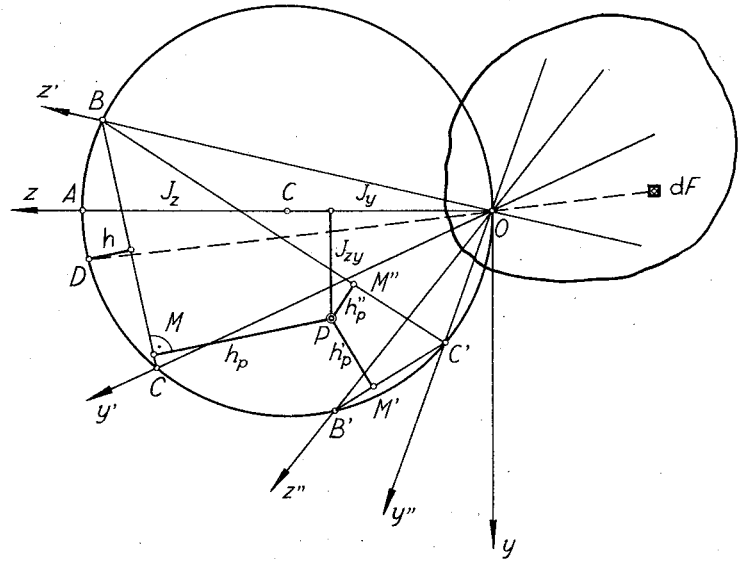


Fig. 4.50.

un par de ejes cualquiera concurrentes en O, con respecto a los cuales queremos conocer el momento centrífugo. Trazada la cuerda BC, determinada por las intersecciones de los ejes $z'y'$ con la circunferencia de Mohr, la distancia $PM = h_P$ del polo P a la misma, nos da el valor absoluto del momento centrífugo buscado, restando sólo determinar su signo. Para ello, consideremos el elemento de superficie dF que, por

estar ubicado entre dos semiejes de igual signo, tendrá con respecto a $z'y'$ un momento centrífugo elemental positivo; es decir,

$$\mathrm{d}J_{z'y'} > 0 \,. \qquad [4.195]$$

Ahora bien, de acuerdo con la [4.189]

$$\mathrm{d}J_{z'y'} = \frac{\varrho^2 \,\mathrm{d}F}{2R}.h \qquad [4.196]$$

que se interpreta como el momento estático de la masa ideal $\varrho^2 \mathrm{d}F/2R$ aplicada en D (figura 4.50) con respecto a la cuerda BC. Siendo la masa ideal eminentemente positiva, en la [4.196] los signos de $\mathrm{d}J_{zy}$ y h se corresponderán. Por otra parte, vimos que las distancias del polo, baricentro del sistema de masas ideales, a las cuerdas determinadas por pares de ejes leídas en la escala $J_P/2R$, corresponden directamente a momentos centrífugos. Luego, h, en la escala $\mathrm{d}J_P/2R$, será directamente el momento centrífugo elemental, es decir, $\mathrm{d}J_{zy}$. Por ser este último valor positivo, también lo será h. Como P, polo de la circunferencia, resulta ubicado del lado opuesto a D con respecto a la cuerda CD, h_p tendrá signo contrario al de h; es decir, será negativo, resultando en consecuencia

$$J_{z'y'} < 0 \,. \qquad [4.197]$$

En este caso, los dos semiejes que determinan la cuerda BC son positivos. Si uno de ellos hubiese sido negativo, habría inversión de signos. En efecto, el momento centrífugo elemental $\mathrm{d}J_{z'y'}$, hubiera resultado negativo y, en consecuencia, también lo sería la distancia h. En cambio h_p, por encontrarse ubicada del lado opuesto de la cuerda, sería positivo, y con él el momento centrífugo $J_{z'y'}$.

En el caso analizado, en que $J_{z'y'}$ es negativo, aparte de que los dos semiejes que determinan la cuerda son del mismo signo, resultan el polo P y el origen O ubicados del *mismo* lado de la cuerda. Lo mismo ocurre para el par de ejes z'', y'', donde, con respecto a la cuerda $B'C'$ determinada por los mismos, el polo P y el origen O resultan ubicados de un mismo lado. Para este par de ejes, el momento centrífugo también es negativo. En cambio, para el par de ejes $z'y''$, la situación es distinta, por cuanto la cuerda BC' determinada por los mismos, *separa* el polo P del origen O. En tal caso el momento centrífugo será positivo. Como regla general para la determinación del signo de los momentos centrífugos tendremos: para semiejes del mismo signo cuando polo y origen resultan separados por la cuerda correspondiente, el momento centrífugo será positivo, y si quedan ubicados de un mismo lado, negativo.

Para el trazado de la circunferencia de Mohr, se requiere conocer tres momentos de segundo orden: dos momentos de inercia y un momento centrífugo respecto de un par de ejes o bien tres momentos de inercia respecto de tres ejes cualesquiera. Analizaremos a continuación los distintos casos posibles.

a) Se conocen los momentos de inercia respecto de dos ejes ortogonales y el momento centrífugo respecto del mismo par de ejes.

Es el caso más simple. Supongamos, figura 4.51, el par de ejes z, y de origen O, y admitamos conocer J_z, J_y y J_{zy}, siendo por ejemplo $J_z > J_y$; $J_{zy} < 0$. Tracemos por O una circunferencia cualquiera de diámetro $2R$, y por los puntos en que la misma corta los ejes z é y,

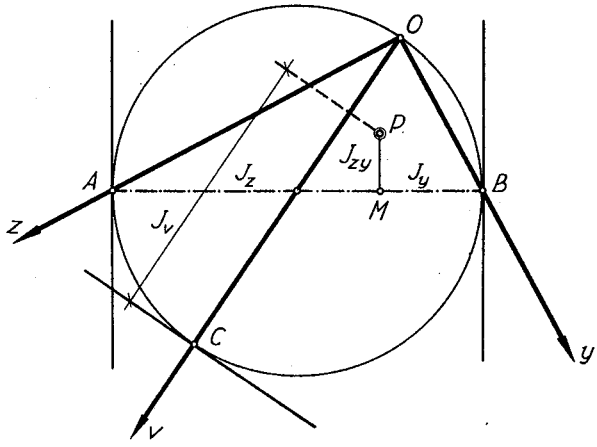


Fig. 4.51.

las tangentes a la misma. Además, unamos A con B. Por tratarse de un par de ejes ortogonales, resulta $J_p = J_y + J_z$, de donde la escala de la circunferencia resulta ser $J_z + J_y/2R$. Para definir totalmente la circunferencia de Mohr es necesario ubicar su polo P. Sabemos que éste se debe encontrar a distancia de las tangentes en A y B a la circunferencia, iguales, en la escala resultante, a J_z y J_y respectivamente. Además, la distancia de P a la cuerda AB, en la escala resultante, debe ser igual a J_{zy}.

En consecuencia, llevando sobre el diámetro y a partir de A un segmento AM tal que en la escala de la circunferencia represente J_z, el segmento MB resulta igual, en escala, a J_y. Levantando por M una normal a AB sobre la misma y a una distancia PM que en la escala corresponda a J_{zy}, se encontrará ubicado el polo P. Falta aún definir

a qué lado de AB debe llevarse MP. Para ello recordemos la regla general enunciada anteriormente. El círculo ha sido trazado para dos semiejes positivos (semiejes que establecen el signo de J_{zy}). En consecuencia, siendo $J_{zy} < 0$ por hipótesis, polo y origen deben encontrarse de un mismo lado de la cuerda, por lo que MP deberá llevarse hacia arriba.

b) Se conocen tres momentos de inercia, dos respecto de un par de ejes ortogonales, y el tercero respecto de otro eje cualquiera, del mismo origen.

Supongamos, figura 4.51, que se conocen los momentos de inercia respecto de los ejes z, y, y v; es decir, J_z, J_y y J_v. Siendo z é y ortogonales, la determinación de la escala se efectúa en la misma forma que en el caso *a*). Conocida la escala de la circunferencia de Mohr, ubicamos sobre el diámetro AB el punto M, como antes. El polo P debe encontrarse sobre la normal a AB trazada por M. Si trazamos ahora una recta paralela a la tangente en C a la circunferencia, y a una distancia de ésta tal que en la escala correspondiente represente el tercer momento de inercia conocido J_v, la intersección de dicha paralela con la normal trazada por M, define el polo P buscado, lo que es evidente.

c) Se conocen los momentos de inercia respecto de tres ejes no ortogonales.

Sean los ejes z, y, v de la figura 4.52, concurrentes en O, con respecto a los cuales se conocen los momentos de inercia J_z, J_y y J_v. Trazada la circunferencia de diámetro $2R$, que pasa por O, ésta cortará los ejes dados en los puntos A, B y C.

No siendo ningún eje ortogonal a alguno de los restantes, no nos es posible determinar directamente la escala, por cuanto desconocemos J_p. En consecuencia, nos encontramos ante un problema con dos incógnitas: la escala de la circunferencia de Mohr, y su polo P.

El problema se resuelve ubicando primeramente el polo. Conocida la posición de P, la escala se deduce de inmediato.

Para ubicar el polo, adoptemos una escala cualquiera de momentos de inercia K. Tracemos por los puntos A, B y C, en que los tres ejes cortan la circunferencia, las correspondientes tangentes a la misma, y luego tres rectas paralelas a éstas, ubicadas a distancias tales que en la escala K adoptada, correspondan a los tres momentos de inercia conocidos.

Determinemos los puntos M y N, de intersección de las tangentes, y M' y N', intersección de las paralelas. Uniendo M con M' y

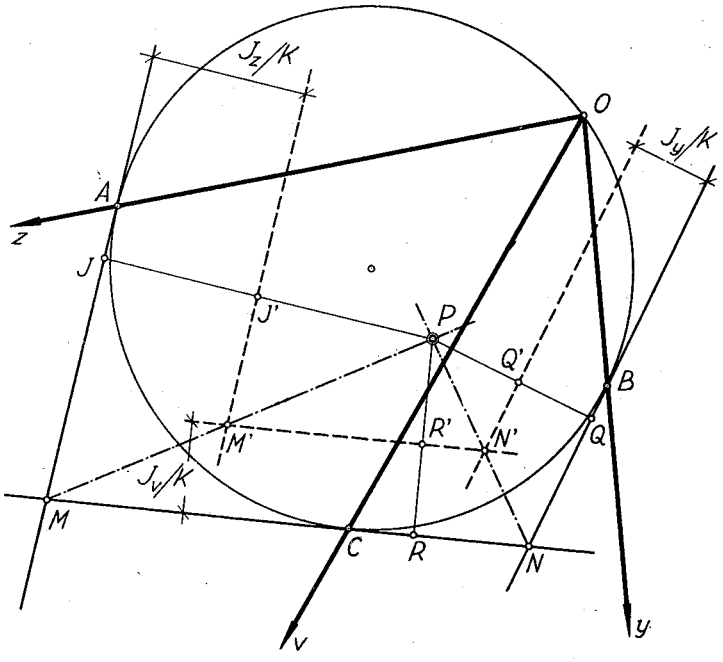


Fig. 4.52.

N con N', la intersección de las rectas así determinadas define el punto P, polo de la circunferencia de Mohr. Para justificar lo anterior, tracemos por P rectas normales a las tres tangentes; dichas normales determinarán sobre las tres tangentes los puntos J, R y Q y sobre las paralelas a las mismas, los puntos J' R' y Q'. Ahora bien, por construcción tenemos

$$\left.\begin{aligned} JJ'.K &= J_z \\ RR'.K &= J_v \\ QQ'.K &= J_y \end{aligned}\right\}. \qquad [4.198]$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos, se llega a

$$\frac{JJ'}{JP} = \frac{RR'}{RP} = \frac{QQ'}{QP}. \qquad [4.199]$$

Despejando JJ', RR' y QQ' de las [4.198] y reemplazando sus valores en la [4.199] resulta

$$\frac{J_z}{JP} = \frac{J_v}{RP} = \frac{J_y}{QP} = K_1 \qquad [4.200]$$

Luego P resulta ser el polo buscado y la escala de la circunferencia de Mohr es, en consecuencia, $K_1(\text{cm}^4/\text{cm})$.

d) Se conocen los momentos de inercia respecto de dos ejes no ortogonales, y el correspondiente momento centrífugo.

En este caso, los elementos conocidos son J_z, J_y y J_{zy}, pero, al no ser ortogonales los ejes, no es posible determinar a priori la escala de la circunferencia de Mohr, por no conocerse J_P.

El problema se resuelve en forma semejante al caso anterior. Trazada una circunferencia cualquiera (figura 4.53), y las tangentes a la misma en los puntos en que corta los ejes, se elige una escala de momentos de segundo orden, arbitraria, K. Ubicada la cuerda AB, se trazan paralelas a esta última y a las dos tangentes, a distancias tales que en la escala adoptada correspondan a los valores de J_{zy} y de ambos momentos de inercia respectivamente. Se determinan luego los puntos de intersección A' y B' de las paralelas, que unidos con los puntos A y B respectivamente, determinan dos rectas que se cortan en un punto P que será el polo de la circunferencia de Mohr.

En efecto, trazando por el punto P, así determinado, rectas normales a las tangentes en A y B y a la cuerda AB, las mismas deter-

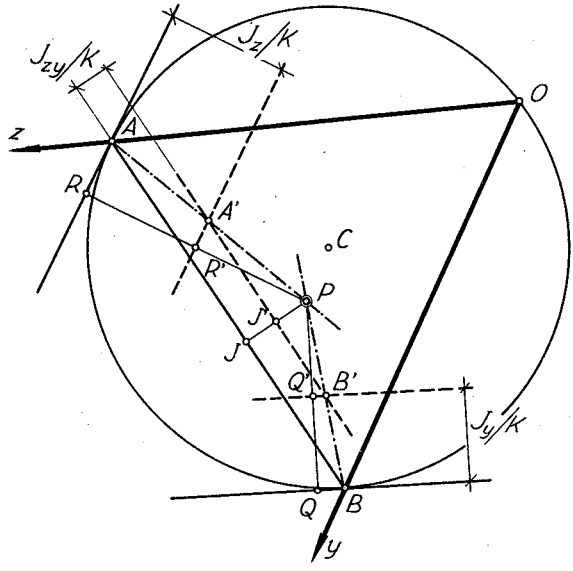


Fig. 4.53.

minan sobre éstas y sus paralelas los puntos R, R'; JJ'; Q y Q'. Por construcción tenemos

$$\left.\begin{aligned} J_z &= K.RR' \\ J_y &= K.QQ' \\ J_{zy} &= K.JJ' \end{aligned}\right\}. \qquad [4.201]$$

Además, por semejanzas de triángulos, se llega a

$$\frac{RR'}{RP} = \frac{QQ'}{QP} = \frac{JJ'}{JP}. \qquad [4.202]$$

Despejando RR', QQ' y JJ' de las [4.201], reemplazando sus valores en [4.202] y simplificando se llega finalmente a

$$\frac{J_z}{RP} = \frac{J_y}{QP} = \frac{J_{zy}}{JP} = K_1. \qquad [4.203]$$

El punto P así determinado cumple con la condición de que sus distancias a las dos tangentes y a la cuerda AB, en la escala K_1 corresponden a J_z, J_y y J_{zy}, respectivamente. En consecuencia, será el polo buscado. La escala de la circunferencia de Mohr resulta ser

$$K_1 \left(\frac{\text{cm}^4}{\text{cm}}\right).$$

5. Fuerzas distribuidas.

5.1. Generalidades.

Al estudiar el equilibrio del sólido libre sujeto a la acción de fuerzas, hemos supuesto que éstas actuaban concentradas en puntos materiales. Ello en la naturaleza no se cumple. Todas las acciones, tanto exteriores como mutuas entre sólidos, se ejercen a través de superficies. Tomemos como ejemplo el caso clásico de una esfera apoyada sobre un plano. Teóricamente el contacto entre ambos se establece a través de un punto, el de tangencia. La esfera transmite al plano sobre el que se apoya una fuerza igual a su peso con lo que, teóricamente, resultaría, para el plano de apoyo, una fuerza concentrada. Pero, en realidad, la esfera, cualquiera sea el material que la constituye, no es absolutamente rígida. Se deforma bajo la acción de su peso propio y, al deformarse, el contacto se establece a través de un círculo, tanto mayor cuanto mayor sea la deformación sufrida por la esfera. En consecuencia, el peso de aquélla se transmitirá al plano de apoyo no ya por un punto sino sobre una superficie, distribuido en la misma según una ley determinada que no es del caso detallar por escapar a los alcances de la presente obra.

En el caso indicado, por la pequeñez de la superficie de contacto, a los efectos prácticos, puede admitirse, sin mayor error, que el peso de la esfera actúa como una carga concentrada.

La acción del viento sobre una estructura, la presión del agua en un depósito, constituyen cargas distribuidas sobre superficies.

5.2. Fuerza distribuida normalmente a una superficie. Concepto de intensidad de carga.

Consideremos un plano π, figura 5.1, sobre el que actúa una carga distribuida normal al mismo.

Cuando las fuerzas distribuidas actúan en forma continua sobre la superficie, podemos imaginarlas como un conjunto de infinitas fuerzas

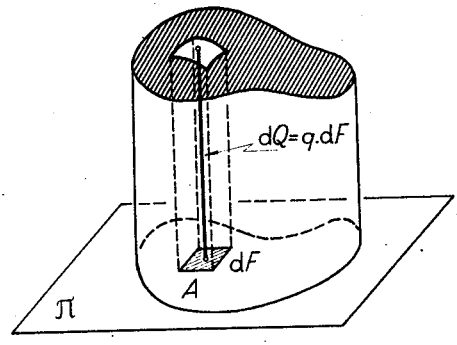


Fig. 5.1.

concentradas de intensidad infinitamente pequeña y paralelas entre sí.

Sea A un punto de la superficie, y ΔF un entorno muy pequeño del mismo. Si ΔQ es la resultante de las fuerzas infinitésimas que actúan en el entorno considerado, se define como *intensidad media* de carga en el mismo, al cociente $\Delta Q / \Delta F$.

Si hacemos F cada vez más pequeño, tenderá a confundirse con A y, en el límite, cuando $\Delta F \to O$, resultará

$$\lim \left(\frac{\Delta Q}{\Delta F} \right)_{\Delta F = O} = \frac{dQ}{dF} = q \,, \qquad [5.1]$$

que se denomina intensidad de la fuerza distribuida o *intensidad de carga* en el punto A.

Por ser el resultado del cociente entre una fuerza (kg ó t) y una superficie (cm^2 ó m^2), la unidad que corresponde a la intensidad de carga es kg/cm^2, kg/m^2, t/m^2 ó t/cm^2, indistintamente según el caso.

El concepto de intensidad de carga en un punto es el siguiente: si para un punto A, la intensidad de carga es de $q(kg/m^2)$, ello significa que, si en un entorno de A cuya superficie fuera de 1 m^2, la intensidad de carga se mantiene constante e igual a q, la carga total actuante sobre dicho m^2 sería de q kg.

Si en una escala cualquiera $(\alpha\, kg/m^2)/cm$, llevamos en cada punto de la superficie cargada una ordenada representativa de la correspondiente intensidad de carga q, variable de punto a punto, el lugar geométrico de los extremos de dichas ordenadas será una superficie que se denomina *superficie de carga*, y el volumen comprendido entre la superficie de carga, el plano sobre la que actúa y las ordenadas del contorno cargado, recibe el nombre de *sólido de carga*.

Cuando la intensidad de carga se mantiene uniforme sobre toda la superficie en la que actúa, la carga se denomina *uniforme, uniformemente distribuida* o también carga *constante*. Un ejemplo de carga uniforme lo constituye la presión del agua sobre el fondo de un depósito: en cada punto actuará una carga cuya intensidad será igual a la carga hidrostática; es decir, a la altura del agua, que es constante.

A la intensidad de carga se la suele denominar también *carga específica*.

Los casos más comunes de cargas distribuidas superficialmente son los que corresponden a cargas uniformemente distribuidas y aquéllas cuya variación en una dirección responde a una ley lineal. Al primer caso, aparte del ejemplo citado, corresponde en general el peso propio de las estructuras y el peso de las cargas útiles.

Como ejemplo del segundo tipo de carga tenemos la presión ejercida por un líquido sobre las paredes de los depósitos. En este caso, en cada punto la presión ejercida será igual a la carga hidrostática, la que varía linealmente con la profundidad, siendo máxima en el fondo y nula en la superficie.

5.3. Fuerzas paralelas distribuidas a lo largo de una línea.

Supongamos, figura 5.2, una superficie $OABC$, sobre la que actúa una carga distribuida de intensidad constante en la dirección y y variable según una ley arbitraria $q(x)$ en la dirección x. Admitamos, además, que la superficie cargada admite un eje de simetría MN, y que el ancho

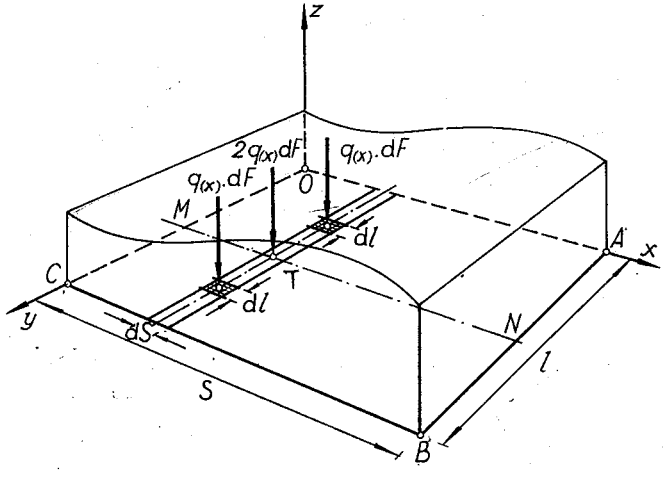


Fig. 5.2.

de la misma sea l. Consideremos una faja de ancho ds, normal al eje de simetría y ubicada a una abscisa x cualquiera. A lo largo de dicha faja la intensidad de carga $q(x) = q(s)$ se mantendrá constante.

Ubiquemos sobre la faja considerada, dos elementos de superficie $dF = ds \cdot dl$, simétricos respecto del eje MN. La fuerza elemental actuante sobre cada elemento de superficie tendrá una intensidad igual a

$q(x)\,dF = q(s).ds.dl$. Por razones de simetría, la resultante de las dos fuerzas elementales actuará sobre el eje MN y su intensidad será $2.q(x).dF$. El razonamiento anterior puede repetirse para cada par de elementos de superficie situados sobre la faja considerada y dispuestos simétricamente respecto de MN. La resultante total de las fuerzas elementales que actúan sobre la faja se encontrará aplicada en el punto T y su intensidad será

$$dP = \int_0^l q(s)ds.dl = q(s)l.ds \qquad [5.2]$$

de donde

$$\frac{dP}{ds} = q(s).l = p(s)\,. \qquad [5.3]$$

En esta expresión, $p(s)$ se define como la *intensidad de carga* en el punto T de una carga distribuida a lo largo de la línea MN.

Para una carga distribuida a lo largo de una línea, el concepto de intensidad de carga en un punto es similar al correspondiente a una carga distribuida sobre una superficie. En efecto, siendo $p(s)$ el resultado del cociente de una fuerza dP (kg) y una longitud d (m), la unidad en que se mide resulta kg/m; t/m; kg/cm ó t/cm indistintamente, interpretándose en la forma siguiente: si la intensidad de carga correspondiente a un punto se mantuviera constante sobre la longitud de un metro, sobre dicha longitud actuaría una carga cuya resultante tendría una intensidad de p kg.

Cuando la intensidad de carga se mantiene constante a lo largo de la línea, la carga se denomina *uniforme*, *uniformemente distribuida* o también carga *constante*. Es el tipo de carga que se presenta más a menudo, y como ejemplo de la misma tenemos el peso propio de una viga.

Otro tipo de carga que se suele presentar es aquél cuya variación responde a una ley lineal.

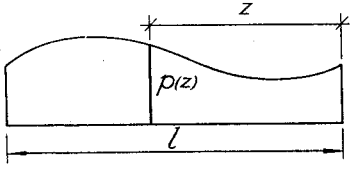


Fig. 5.3.

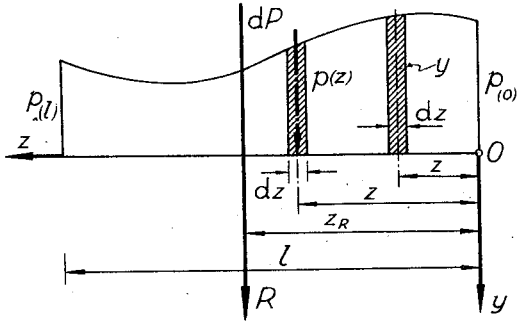


Fig. 5.4.

Si, adoptada una escala cualquiera (kg/m)/cm, llevamos en coincidencia de cada punto (figura 5.3) una ordenada que represente en dicha escala la correspondiente intensidad de carga, los extremos de las mismas configurarán una línea denominada *línea de carga*. La superficie comprendida entre la línea de carga, la línea cargada y las ordenadas extremas, se denomina *diagrama de carga*.

5.4. Resultante de una fuerza distribuida sobre una línea.

Una fuerza distribuida sobre una línea constituye un sistema de infinitas fuerzas paralelas de intensidad infinitésima. En consecuencia, su resultante será una fuerza paralela a la dirección del sistema, que debe satisfacer las condiciones de equivalencia de dos sistemas de fuerzas paralelas. Como se ha visto, la resultante de un sistema de fuerzas paralelas queda definida por una condición de proyección sobre un eje y una condición de momentos respecto de un punto cualquiera del plano.

Supongamos, figura 5.4, una carga distribuida sobre una longitud l, cuya intensidad variable sea $p(z)$. Para un punto ubicado a una abscisa z, la fuerza elemental será $dP = p(z)dz$, y la resultante R del sistema de infinitas fuerzas elementales será tal que responda a las siguientes ecuaciones de condición

$$\begin{aligned} R &= \int_0^l p(z)\,dz \\ R.z_R &= \int_0^l p(z)z\,dz\ . \end{aligned} \qquad [5.4]$$

La segunda de las [5.4] define la abscisa de un punto de la recta de acción de R

$$z_R = \frac{\int_0^l p(z)z\,dz}{\int_0^l p(z)\,dz}\ . \qquad [5.5]$$

Consideremos nuevamente el diagrama de la figura 5.4, con prescindencia de lo que representan sus ordenadas, es decir, supongamos la figura del diagrama, donde a cada abscisa z corresponde una ordenada y. Dicha figura admite un baricentro, y su superficie tiene por medida una cierta área. Considerando una faja elemental de ancho dz y altura

y, el área de la misma será $dF = y\,dz$, y el área de la superficie del diagrama resulta

$$F = \int_0^l y\,dz \,. \qquad [5.6]$$

Por otra parte, sabemos que el baricentro de la superficie de la figura representativa del diagrama de cargas, será un punto material G en el que se supone concentrada la superficie total y cuyo momento estático respecto del eje y cumpla la condición

$$F.z_G = \int_0^l y.z.dz \qquad [5.7]$$

de donde

$$z_G = \frac{\int_G^l y.z.dz}{\int_0^l y.dz} \qquad [5.8]$$

Si K es la escala del diagrama de cargas de la definición del mismo se tiene

$$y.K = p(z) \qquad [5.9]$$

y reemplazando la [5.9] en [5.4] y [5.5] resulta

$$\left.\begin{aligned} R &= K \int_0^l y\,dz \\ z_R &= \frac{\int_0^l yz\,dz}{\int_0^l y\,dz} \,. \end{aligned}\right\} \qquad [5.10]$$

Finalmente, comparando las [5.9] con las [5.6] y [5.8] se tiene:

$$\left.\begin{aligned} R &= K.F \\ z_R &= z_G \end{aligned}\right\} \,. \qquad [5.11]$$

Es decir, que la intensidad de la resultante de una fuerza distribuida sobre una línea es proporcional al área del diagrama de carga, y su recta de acción pasa por el baricentro del mismo.

5.5. Curva funicular. Trazado gráfico por puntos y tangentes.

Sea la curva plana AB de la figura 5.5, sobre la que actúa una fuerza distribuida normal que responde a una ley cualquiera. Esta fuerza distribuida puede suponerse constituida por una sucesión de fuerzas infi-

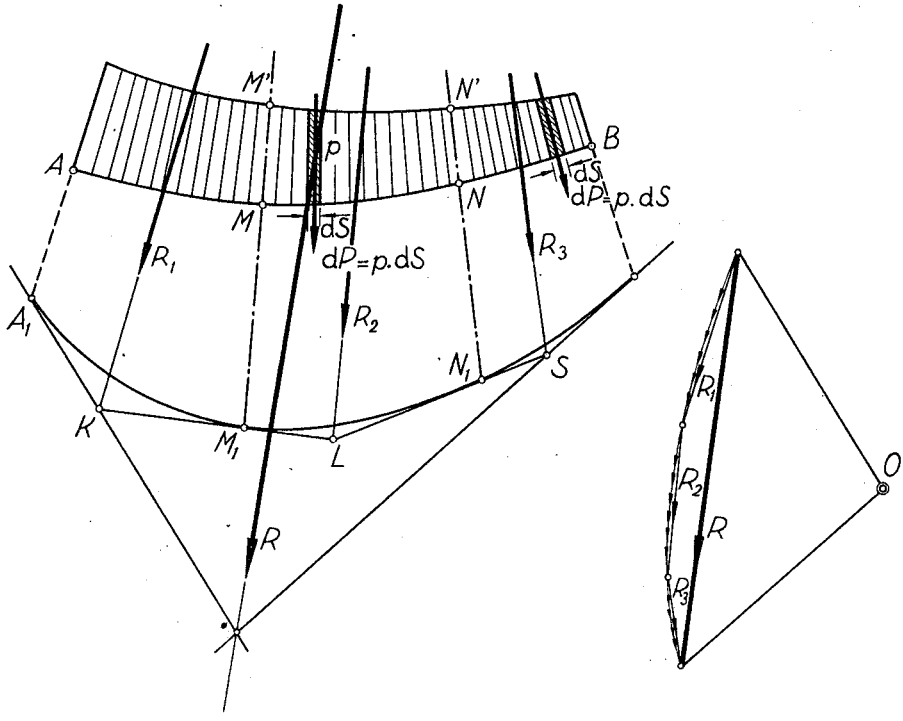


Fig. 5.5.

nitamente pequeñas. Si construimos un polígono de fuerzas, éste consistirá también en una sucesión de fuerzas infinitamente pequeñas, transformándose en una curva de fuerzas. Trazado el correspondiente polígono funicular, por ser infinito el número de sus lados, degenerará en una curva denominada *curva funicular.*

El primero y último lados de dicho polígono funicular de infinito número de lados coincidirán con las tangentes extremas a la curva funicular, y su intersección definirá un punto de la recta de acción de la resultante de la fuerza distribuida, cuyo vector representativo estará dado por la cuerda determinada por el origen y el extremo de la curva de fuer-

zas. Resulta imposible el trazado de la curva funicular partiendo de fuerzas elementales. Para resolver el problema recordemos que, al estudiar el polígono funicular de un sistema plano de fuerzas, vimos que dos lados cualesquiera del mismo constituyen los lados extremos del polígono funicular de las fuerzas comprendidas entre los mismos.

Por otra parte, en 5.1.4 llegamos a la conclusión de que la resultante de una fuerza distribuida pasaba por el baricentro del diagrama representativo de esta última, y que su intensidad era proporcional al área de su superficie.

Análogamente, si dividimos el diagrama de carga mediante rectas MM', NN' normales a la línea cargada y prolongamos las mismas hasta cortar en M_1 y N_1 la curva funicular, las tangentes a la misma en dichos puntos constituirán los lados extremos del funicular de las cargas distribuidas entre las líneas en que se ha dividido la carga, y que se denominan *líneas divisorias de carga*, o simplemente *divisorias de carga*. La intersección de dichas tangentes extremas nos darán puntos de las rectas de acción de las correspondientes resultantes parciales que, a su vez, pasarán por los baricentros de los diagramas parciales en que ha resultado dividido el diagrama total de carga.

Trazando por el polo de la curva de fuerzas paralelas a dos tangentes parciales extremas, la intersección de dichas paralelas con la curva de fuerzas determinará el origen y extremo del vector representativo de la correspondiente resultante parcial.

Del análisis de la figura, y como consecuencia de lo expuesto, resulta que si se supone la fuerza distribuida dividida en cargas parciales mediante divisorias de carga, el funicular de las resultantes parciales resultará circunscripto a la curva funicular, correspondiendo los puntos de tangencia a los puntos en que las divisorias de carga cortan los lados del polígono funicular.

En resumen, para trazar la curva funicular de una fuerza distribuida sobre una línea, el procedimiento a seguir es el siguiente:

1º Se divide la fuerza distribuida mediante divisorias de carga normales a la línea cargada, en cargas parciales.

2º Se hallan las intensidades de las cargas parciales y los baricentros de los diagramas parciales.

3º Se traza un polígono funicular de las resultantes parciales, cuyas rectas de acción pasan por los baricentros de los diagramas parciales.

4º Se determinan los puntos en que las divisorias de carga cortan los lados del funicular. Dichos puntos serán los de tangencia de la curva funicular.

5º Conocidos las tangentes y los correspondientes puntos de tangencia, se completa gráficamente el trazado de la curva funicular.

Si conocidos dos lados consecutivos del funicular de las cargas parciales, resultase necesario conocer una tangente intermedia y su correspondiente punto de tangencia a efectos de facilitar el trazado de la curva funicular, se procede de la forma siguiente: Se considera la recta de acción de la resultante parcial como nueva divisoria de carga (figura 5.6). Halladas las resultantes de las cargas distribuidas parciales así determinadas, prolongadas sus rectas de acción hasta cortar las dos tangentes extremas, los puntos de intersección definen una recta que será tangente extrema a la curva funicular de cada una de las nuevas cargas parciales, y cuyo punto de tangencia lo determina la intersección de esta tangente intermedia con la divisoria de cargas.

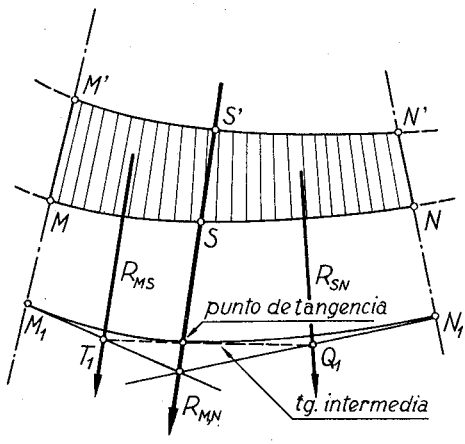


Fig. 5.6.

En esta forma, para trazar la curva funicular de una fuerza distribuida basta solamente dividir la misma en unas pocas fuerzas parciales. Trazado el correspondiente polígono funicular en la forma descrita, es posible hallar el número de tangentes intermedias y sus correspondientes puntos de tangencia necesarios para el fácil trazado de la curva buscada.

5.6. Determinación analítica de la curva funicular.

Cuando se conoce la función que representa la ley de variación de la intensidad de una fuerza distribuida sobre una línea, así como también la curva a que corresponde esta última, es posible establecer la ecuación de la curva funicular.

Consideremos la fuerza distribuida sobre una recta de la figura 5.7 y sea $p = p(z)$ la función de carga. Hagamos coincidir el origen O de un par de ejes coordenados con el extremo B de la línea cargada y el semieje positivo z con esta última. Supongamos por un momento conocida la curva funicular $A_1 B_1$ correspondiente a la fuerza distribuida y sea $A_2 B_1$ su tangente extrema en B_1.

La curva funicular trazada responde a una cierta función cuya expresión trataremos de determinar, suponiendo la misma referida precisa-

mente a dicha tangente extrema. Es decir, que la ordenada de un punto cualquiera S de abscisa z de la curva funicular será:

$$y_o = f(z) \ . \qquad [5.12]$$

Considerando una variable auxiliar ξ, la fuerza elemental actuante a una distancia ξ de B será

$$dP = p(\xi)\, d\xi \ , \qquad [5.13]$$

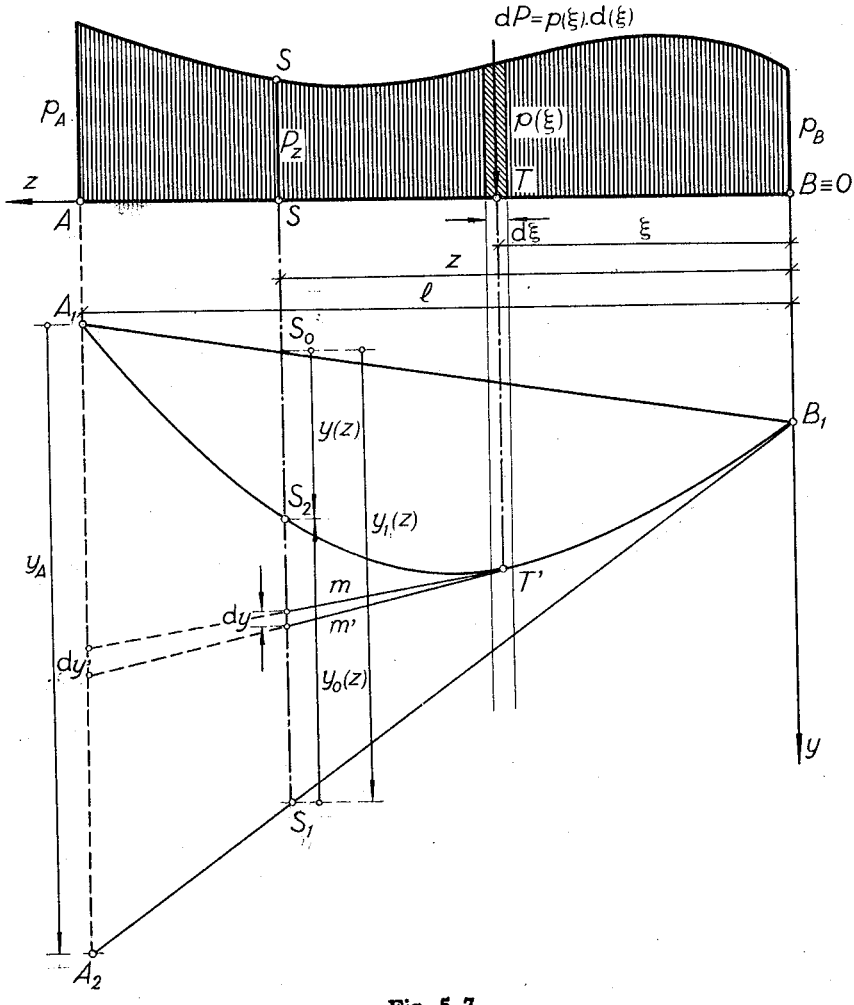


Fig. 5.7.

donde $p(\xi)$ es la misma función de carga $p(z)$ que da la variación de la intensidad de la fuerza distribuida.

El polígono funicular de dicha fuerza elemental estará constituido por las dos tangentes consecutivas m, m' en el punto T' en que la recta de acción de dP corta la curva funicular. Dichas tangentes, prolongadas, determinan sobre la vertical de la sección $S-S$ ubicada en la abscisa z, y para la cual queremos determinar en la ordenada y_o, un segmento dy.

De acuerdo con lo visto al estudiar, en el capítulo 2, el polígono funicular, el segmento dy, en una cierta escala, representa el momento de dP respecto de un punto cualquiera ubicado sobre la vertical de $S-S$, es decir, que podemos escribir:

$$dy = p(\xi)(z - \xi)\, d\xi \,. \qquad [5.14]$$

En consecuencia, el segmento $S_1 S_2 = y_o(z)$ se obtendrá integrando la [5.14] entre O y z, es decir:

$$y_o(z) = \int_0^z p(\xi)(z - \xi)\, d\xi \,. \qquad [5.15]$$

Conocida la función de carga $p(\xi)$ para cada caso particular, la [5.15], una vez integrada, conduce a una función de z que será la ecuación de la curva funicular correspondiente, referida a la tangente extrema en B_1. En ciertos casos interesa conocer la ecuación de la curva funicular no ya referida a la tangente extrema, sino a la recta $A_1 B_1$, determinada por la intersección de la curva funicular con las verticales de los extremos de la línea cargada. Para ello, bastará efectuar un simple cambio de eje.

Refiriéndonos siempre a la figura 5.7, tendremos:

$$y(z) = y_1(z) - y_o(z) \,. \qquad [5.16]$$

Llamando l la longitud cargada e y_A el segmento $A_1 A_2$ determinado sobre la vertical de A por la curva funicular y la tangente en B_1 a la misma, resulta:

$$y_1(z) = y_A \frac{z}{l} \,. \qquad [5.17]$$

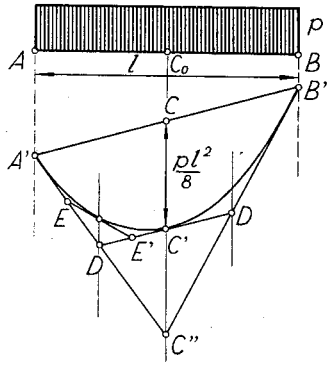


Fig. 5.8.

Pero $y_A = \int_{A_1}^{A_2} dy'$, y además

$$dy' = p(\xi)(l - \xi)\, d\xi \qquad [5.18]$$

de donde

$$y_A = \int_0^l p(\xi)(l - \xi)\, d\xi \qquad [5.19]$$

En consecuencia, por la [5.17] resulta:

$$y_1(z) = \frac{z}{l} \int_0^l p(\xi)(l - \xi)\, d\xi \qquad [5.20]$$

Finalmente, reemplazando en [5.16] y teniendo en cuenta la [5.15] se llega a la ecuación de la función representativa de la curva funicular referida a la recta $A_1 B'$:

$$y(z) = \frac{z}{l} \int_0^l p(\xi)\,(l - \xi)\, d\xi - \int_0^z p(\xi)(z - \xi)\, d\xi\,. \qquad [5.21]$$

Veamos a qué ecuaciones conduce la expresión [5.21] para los casos más comunes de cargas distribuidas: carga uniformemente repartida y carga de variación lineal.

a) Carga uniformemente repartida (fig. 5.8).

Si la carga es uniforme

$$p(z) = p(\xi) = p = \text{Cte.} \qquad [5.22]$$

Luego la [5.15] se transforma en

$$y_0(z) = p \int_0^z (z - \xi)\, d\xi = \tfrac{1}{2}\, z^2 p\,. \qquad [5.23]$$

y la [5.20] conduce a

$$y_1(z) = \frac{z}{l} p \int_0^l (l - \xi)\, d\xi = \tfrac{1}{2}\, l^2 . p \frac{z}{l} = \frac{1}{2}\, z p l. \qquad [5.24]$$

En consecuencia, reemplazando valores en la [5.21] llegamos a

$$y(z) = \left(\frac{z}{l}\,½\,l^2 - ½\,z^2\right)p = ½\,p(zl - z^2) \qquad [5.25]$$

ecuación de una parábola de segundo grado.

La ordenada máxima de esta parábola corresponde a la abscisa para la cual se anula la primera derivada de la función:

$$\frac{dy(z)}{dz} = ½\,p\,(l - 2z) = 0 \qquad [5.26]$$

de donde

$$z = ½\,l\,. \qquad [5.27]$$

En consecuencia:

$$y_{máx} = ½\,p(½\,l^2 - ¼\,l^2) = \frac{pl^2}{8}. \qquad [5.28]$$

Por una propiedad conocida de la parábola de 2º grado, las tangentes extremas a un arco de la misma se cortan sobre la vertical del punto medio de la cuerda correspondiente, y definen sobre dicha vertical un segmento cuya longitud, medida desde la cuerda, es igual al doble de la flecha de la parábola, es decir, de la ordenada cuyo valor es $pl^2/8$. Ello conduce al siguiente procedimiento para el trazado de la curva funicular de una carga uniforme, sin necesidad de recurrir a la construcción de un polígono funicular.

Trazada la cuerda $A'B'$ (se ha elegido una cuerda inclinada, pudiendo ser de dirección cualquiera sin que por ello se modifique el procedimiento) que será nuestro eje de referencia, se calcula la ordenada máxima de la parábola, $pl^2/8$. Este valor, en la escala adoptada, se lleva a partir del punto medio de $A'B'$, en la dirección en que actúan las cargas. Se obtiene así el punto C', vértice de la parábola. Duplicando el segmento CC', obtenemos el punto C'', donde se cortarán las tangentes extremas, $C''A'$ y $C''B'$. Por otra parte, correspondiendo C' a la ordenada máxima, la tangente en dicho punto a la curva funicular debe ser paralela al eje de referencia. Luego, trazando por C' una paralela a $A'B'$, obtenemos la tangente en C' a la curva funicular. Si quisiéramos hallar mayor número de tangentes, aplicaríamos el procedimiento descrito en 5.5, considerando como divisorias de carga a las verticales trazadas por los puntos D, de intersección de la tangente intermedia con las tangentes extremas.

Cuando la carga es uniformemente distribuida, el procedimiento se simplifica. En efecto, la vertical trazada por D debe pasar por el baricentro del diagrama parcial de carga. Como éste, siempre es de ordenada constante, y por ello está representado por un rectángulo; el baricentro queda ubicado sobre la vertical del punto medio de la base, AC_o en este caso. En consecuencia, el punto D resulta ubicado en el centro del segmento $A'C''$. El razonamiento se repite para los puntos E y E', los que se encontrarán en los puntos medios de los segmentos $A'D$ y DC' respectivamente.

Por consiguiente, no será necesario, en el caso de la carga uniforme, determinar los baricentros de los diagramas parciales, sino que será suficiente ir tomando los puntos medios de los segmentos de tangentes, y unirlos entre sí, lo que nos dará una tangente intermedia. El correspondiente punto de tangencia se encontrará en la intersección de la tangente, así determinada, con la vertical trazada por la intersección de las tangentes extremas consideradas.

Finalmente, para el trazado de la curva funicular correspondiente a una carga uniformemente distribuida, por tratarse de una parábola de segundo grado, le serán aplicables todas las construcciones gráficas desarrolladas para la construcción de este tipo de curva, en cuyo detalle no entraremos por ser suficientemente conocidas.

b) Carga variable linealmente (figura 5.9).

Supongamos la carga distribuida cuya intensidad varíe linealmente, figura 5.9, siendo nula para el extremo derecho de la longitud cargada y alcanzando su valor máximo p en el extremo opuesto. Haciendo coincidir el origen de un sistema de ejes coordenados con el extremo de ordenada nula, el valor de la ordenada genérica del diagrama de carga será:

$$p(z) = \frac{z}{l} p \,. \qquad [5.29]$$

En consecuencia, introduciendo dicho valor en la [5.15] y [5.20] se llega, luego de integrar, a las expresiones

$$y_o(z) = \frac{pz^3}{6l}$$

$$y_1(z) = \frac{pzl^2}{6l}, \qquad [5.30]$$

que, reemplazadas en la [5.21], nos dan la ecuación de la curva funicular buscada:

$$y(z) = y_1(z) - y_0(z) = \frac{p}{6l}(zl^2 - z^3). \qquad [5.31]$$

La ecuación [5.31] corresponde a una parábola cúbica.

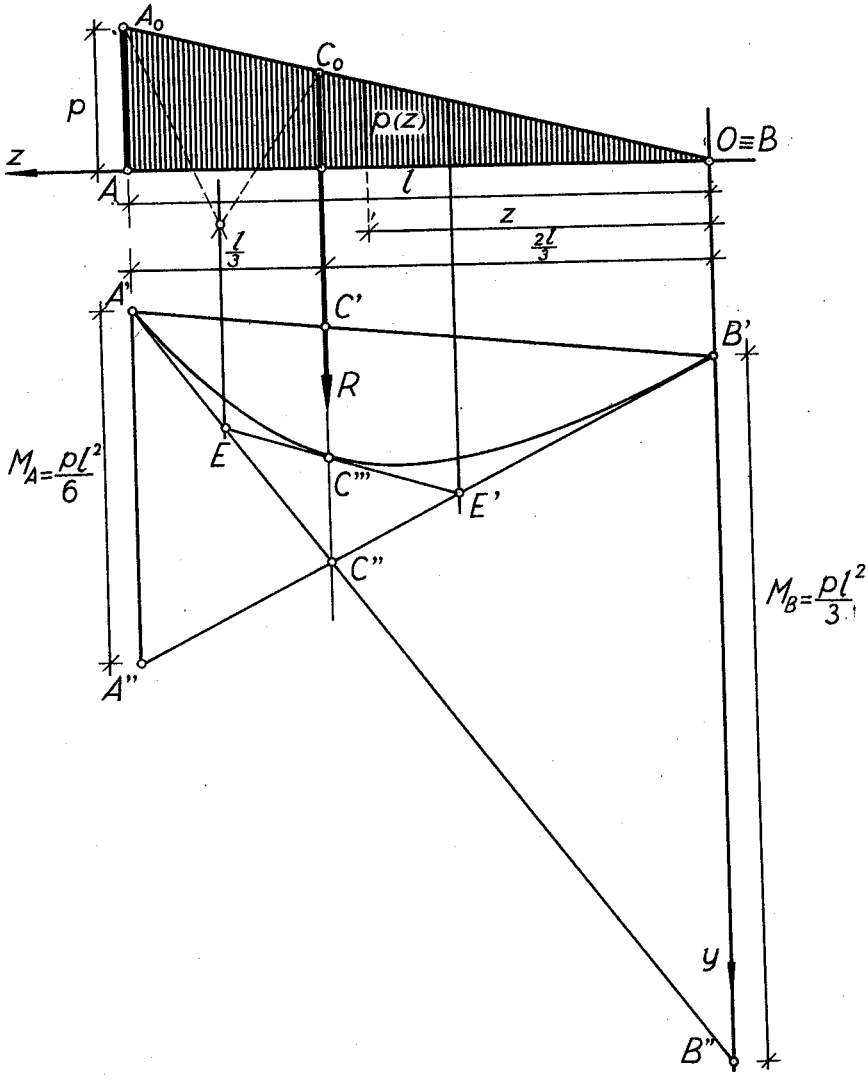


Fig. 5.9.

En la figura 5.9 se ha indicado la construcción gráfica de esta parábola, por tangentes. Sabemos que las tangentes extremas a la curva funicular se cortan sobre la vertical que pasa por el baricentro del diagrama de cargas. Además, dichas tangentes extremas definen, sobre las verticales de los extremos de la línea cargada, segmentos de recta que, en una cierta escala, representan los momentos estáticos de la resultante de la carga distribuida con respecto a los extremos de la misma.

Para el caso de un diagrama triangular de cargas, la resultante de la fuerza distribuida será

$$R = \tfrac{1}{2} p l^2 \qquad [5.32]$$

y su recta de acción quedará ubicada a una distancia del extremo A de la carga igual a $l/3$, por cuanto el baricentro de un triángulo queda ubicado a un tercio de la altura, medido a partir de la base.

Los momentos estáticos de la resultante respecto de los puntos A y B valen

$$M_A = \tfrac{1}{6} p l^2$$
$$M_B = \tfrac{1}{3} p l^2 \qquad [5.33]$$

En consecuencia, llevando en una escala cualquiera, a partir de A' y B', segmentos $A'A''$ y $B'B''$, respectivamente iguales a M_A y M_B, y uniendo A'' con B' y B'' con A', las rectas así determinadas constituirán las tangentes extremas a la curva funicular, las que se cortarán en un punto C'', por donde pasará la recta de acción de la resultante R de la fuerza distribuida.

Una vez halladas las tangentes extremas, si se desea conocer mayor número de tangentes, basta considerar la recta de acción de R como divisoria de cargas, hallar los baricentros de las dos cargas distribuidas parciales en que ha resultado dividido el diagrama, y continuar el trazado en la forma conocida.

Cuando no interesa conocer la escala de la curva funicular, no es necesario determinar previamente los momentos M_A y M_B. La circunstancia de que las tangentes extremas se corten sobre la recta de acción de R y ésta pase por el baricentro del diagrama de carga, facilita el trazado de la curva funicular. Bastará para ello trazar dos rectas cualesquiera que se corten sobre la vertical del baricentro del diagrama. Estas rectas serán tangentes a la curva funicular en los puntos de intersección de las mismas con las verticales de los extremos de la línea cargada (puntos A' y B'). Luego se completa la construcción en la forma conocida. Este procedimiento no es exclusivo para la carga triangular, sino que se extiende a cualquier tipo de carga. Además, si a posteriori se deseara conocer la escala en que corresponde medir las ordenadas de la curva funicular

con respecto al eje de referencia $A'B'$, bastará para ello tener en cuenta que el segmento $A'A'' = \mathrm{m(cm)}$ representa el momento estático de R respecto de A, es decir, $\frac{1}{6}\,pl^2$. En consecuencia, la escala resulta ser

$$\text{Escala } y = \frac{\frac{1}{6}\,.\,pl^2}{\mathrm{m(cm)}} \qquad [5.34]$$

c) Carga trapecial (figura 5.10).

Constituye también una carga cuya intensidad varía linealmente. En este caso, ambas ordenadas extremas del diagrama de carga tienen un valor determinado, siendo la expresión de la función de carga la siguiente:

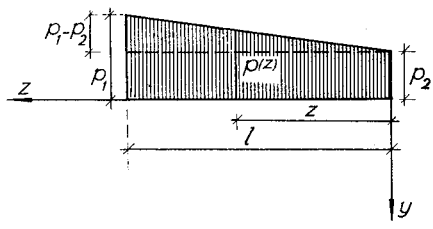


Fig. 5.10.

$$\mathrm{p}(z) = p_2 + (p_1 - p_2)\,\frac{z}{l}\,. \qquad [5.35]$$

La ecuación de la curva funicular es, en este caso, también de tercer grado, es decir, una parábola cúbica, y las construcciones gráficas derivadas de ello son las mismas que las descritas para el caso de la carga triangular, por lo que no entraremos en mayores detalles.

5.7. Ecuación diferencial de la curva funicular de una carga distribuida, paralela.

Sea (figura 5.11 a) $A'B'$ la curva funicular de una carga distribuida normal a la línea AB, y cuya intensidad varíe según una función $\mathrm{p}(z)$, y M un punto cualquiera de la misma, de coordenadas z, y. Consideremos en M dos tangentes sucesivas, que serán lados del funicular de la fuerza infinitésima $\mathrm{d}P = \mathrm{p}(z)\mathrm{d}z$ cuya recta de acción pasa por M. Imaginemos ahora dos entornos de longitud $\mathrm{d}z$, a la derecha e izquierda de M, magnificados en la figura 5.11 *b*, donde MM_0 y MM_1 corresponden a las dos tangentes sucesivas mencionadas. Construido el polígono de fuerzas de la carga distribuida, que en este caso degenera en una recta, si por su polo O trazamos paralelas a las tangentes MM_0 y MM_1, estas determinarán sobre el vector representativo de R un vector infinitésimo, representativo de $\mathrm{d}P$. De la comparación de los dos trián-

gulos rayados, semejantes, tenemos, teniendo en cuenta que dP y $d(dy)$ tienen sentidos contrarios

$$\frac{d(dy)}{dz} = -\frac{dP}{h} . \qquad [5.36]$$

Pero, $d(dy) = d^2y$ y además, $dP = p(z)dz$. En consecuencia, reemplazando en [5.36] resulta:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{p(z)}{h} , \qquad [5.37]$$

expresión que corresponde a la *ecuación diferencial* de la curva funicular de una carga distribuida, paralela.

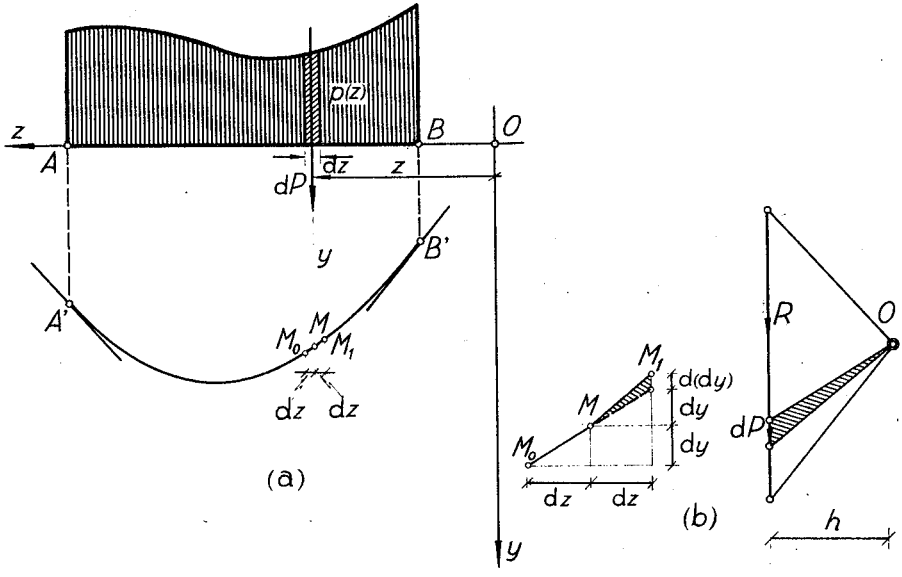


Fig. 5.11.

Para integrar la ecuación diferencial es necesario conocer, en cada caso, la función $p(z)$ que define la ley de variación de la fuerza distribuida. Cuando se trata de una carga uniformemente distribuida, $p(z) = p = C^{te}$, se tiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= -\frac{p}{h}\int dz = -\left(\frac{pz}{h} + C_1\right) \\ y &= -\left(\frac{p}{h}\int z\,dz + C_1\int dz\right) = -\left(\frac{pz^2}{2h} + C_1 z + C_2\right) \end{aligned}\right\} \qquad [5.38]$$

expresión de una parábola de segundo grado, donde C_1 y C_2 son constantes de integración que se determinan en base a las condiciones iniciales del problema, como veremos a continuación.

Supongamos que se pida la curva funicular referida a la recta $A'B'$ y, además, que los extremos de la misma se encuentren a un mismo nivel y que el origen de coordenadas coincida con B'. En tal caso, llamando l la longitud de la línea cargada, se tiene, como condiciones iniciales: para $z = 0$ y $z = l$ $\therefore$ $y = 0$.

Haciendo $z = 0$ en la segunda de las [5.38] se tiene:

$$C_2 = 0 \qquad [5.39]$$

y para $z = 1$, en que también $y = 0$:

$$\frac{p l^2}{2h} + C_1 l = 0 \qquad [5.40]$$

de donde

$$C_1 = -\frac{p l}{2h} . \qquad [5.41]$$

Reemplazando en [5.38] y teniendo en cuenta la [5.39], resulta finalmente

$$y = -\left(\frac{p z^2}{2h} - \frac{p l z}{2h}\right) = \frac{p}{2h}(l z - z^2) \qquad [5.42]$$

expresión semejante a la [5.25], salvo la constante de proporcionalidad h, que corresponde a la distancia polar del polígono de fuerzas, y que corresponde a la escala en que deben interpretarse las ordenadas y, de la curva funicular. En efecto, si en el polígono de fuerzas variamos h, distancia polar, cambian las tangentes extremas a la curva funicular y, como consecuencia, para un mismo eje de referencia, la curva corresponderá a una parábola de distinto parámetro.

Si el diagrama de cargas respondiera a una variación lineal, la integración de la [5.37] conduciría a una ecuación de tercer grado, representativa de una parábola cúbica.

5.8. Tensión de la curva funicular.

Sea la curva funicular de la figura 5.12 correspondiente a una carga distribuida según una ley arbitraria. Considerando un elemento dP de la misma y su recta de acción, ésta corta la curva en un punto M. Las dos

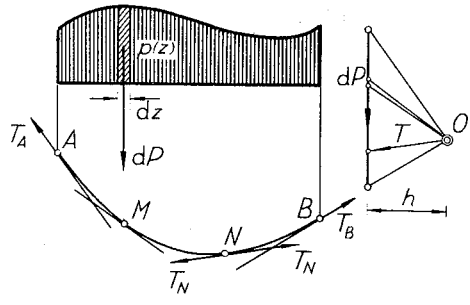


Fig. 5.12.

tangentes sucesivas en M constituyen, como sabemos, los lados del funicular de dP. Al desarrollar en el capítulo 2 la teoría del polígono funicular, vimos que dos lados consecutivos del mismo constituyen las rectas de acción de dos fuerzas que equilibran la fuerza que, perteneciente al sistema dado, pasa por la intersección de dichos lados. Por extensión al caso de la curva funicular, tenemos que las dos tangentes consecutivas serán las rectas de acción de dos fuerzas que equilibran a dP, cuyas intensidades y sentidos serán las de sus vectores representativos en el polígono de fuerzas, obtenidos trazando por el polo O paralelas a las direcciones de las tangentes sucesivas. Como en el límite las direcciones de ambas tangentes coinciden en una, que será la tangente a la curva funicular en el punto considerado, la paralela a la misma trazada por O nos define en el polígono de fuerzas, y para cada punto, una fuerza T, denominada *tensión de la curva* funicular. Esta tensión T, variable de punto a punto, alcanza su valor máximo para una o ambas tangentes extremas. El valor máximo corresponderá a ambas tangentes extremas en el caso en que los rayos polares extremos estén simétricamente dispuestos con respecto al vector representativo de la resultante R. En caso contrario, el valor máximo de T corresponderá a una u otra de las tangentes, según sea la ubicación del polo.

Es dable observar en la figura que la proyección horizontal del vector representativo de la tensión T, cualquiera sea el punto considerado, es constante e igual en intensidad a la distancia polar, de donde se deduce que la proyección horizontal de la tensión de la curva funicular es constante.

6. Equilibrio de cuerpos vinculados.

6.1. Los sistemas planos vinculados.

6.1.1. Generalidades.

Se define como *sistema de puntos materiales* un conjunto de puntos materiales vinculados entre sí por la condición de rigidez. Los mismos pueden encontrarse situados en un plano o bien configurar un cuerpo sólido en el espacio; en el primer caso constituyen un *sistema plano de puntos materiales* o más simplemente un *sistema material plano*, y en el segundo, un *sistema material espacial*.

En los capítulos 2 y 3 analizamos el equilibrio del cuerpo sólido libre, sujeto a la acción de fuerzas. Ahora bien, en la naturaleza no es concebible un cuerpo rígido en estado de reposo sin que se halle vinculado a tierra, sea directamente o bien por intermedio de otro cuerpo rígido. Tales cuerpos se denominan vinculados, y de su equilibrio nos ocuparemos en el presente capítulo, comenzando por los sistemas materiales planos.

6.1.2. Chapas; concepto.

La mayor parte de los elementos estructurales utilizados en construcciones son de una configuración tal que admiten un plano de simetría. Su sustentación también simétrica, y las fuerzas exteriores que los solicitan, se encuentran, en general, dispuestas simétricamente respecto de dicho plano. En consecuencia, cada sistema de dos fuerzas ubicadas simétricamente respecto del plano de simetría, admitirá una resultante que actúa en el mismo, por lo que la totalidad de las fuerzas actuantes puede reemplazarse por un sistema equivalente que actúa en el plano de simetría del cuerpo. De ahí que, a los efectos prácticos, podamos reemplazar el cuerpo rígido por un conjunto de puntos materiales planos, coincidente con el plano de simetría y cargado con el sistema de fuerzas mencionado. Este sistema plano de puntos materiales recibe el nombre de *chapa* y, en

lo que sigue, nos ocuparemos del estudio del equilibrio de chapas o sistemas de chapas, vinculadas entre sí y cargadas en su plano.

Definiremos como *vínculo* toda condición geométrica que limite la posibilidad de movimiento de un cuerpo.

En el caso de la figura 6.1, el punto A está unido mediante una barra rígida al punto B el que, a su vez, se encuentra vinculado con tierra mediante una articulación. Como la distancia AB es invariable,

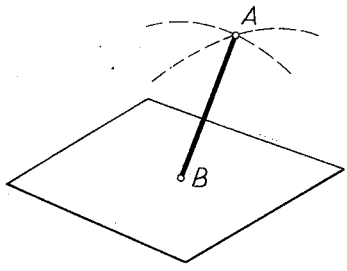


Fig. 6.1.

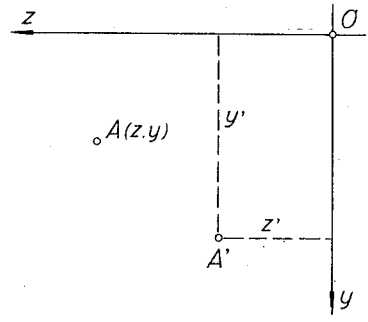


Fig. 6.2.

el punto A está obligado a moverse sobre una superficie esférica de radio AB, siendo ésta su única posibilidad de movimiento. En consecuencia, la barra AB, que en lo sucesivo denominaremos *biela*, constituye un vínculo para el punto A.

6.1.3. Grados de libertad.

Se define como grados de libertad de un sistema de puntos materiales el número de coordenadas libres que posee.

Para aclarar conceptos consideremos, figura 6.2, el sistema más simple que se puede concebir; es decir, un punto material A. Supongamos que el punto material se desplaza en un plano y pasa a ocupar una nueva posición A'. Para dejar perfectamente determinada la posición final del punto, bastará conocer las coordenadas z', y' de esta última con respecto a un par de ejes. Es decir, que el número de coordenadas libres que posee es *dos;* luego, un punto material en el plano tiene dos coordenadas libres y, en consecuencia, posee *dos grados de libertad.*

Consideremos ahora una chapa que sufre un desplazamiento cualquiera en su plano, figura 6.3.

Una vez cumplida la traslación de la chapa, los puntos A y B de la misma pasarán a ocupar las posiciones A' y B'. Conocida la posición

final de dos de los puntos de la chapa, queda perfectamente definida la nueva posición de ésta. En efecto, cualquier otro punto que consideremos, el C, por ejemplo, al estar ligado a los anteriores por el vínculo de la rigidez, sus distancias mutuas se mantienen a través de las transformaciones planas, con lo que quedará perfectamente definida su posición una vez conocida la de los puntos A y B.

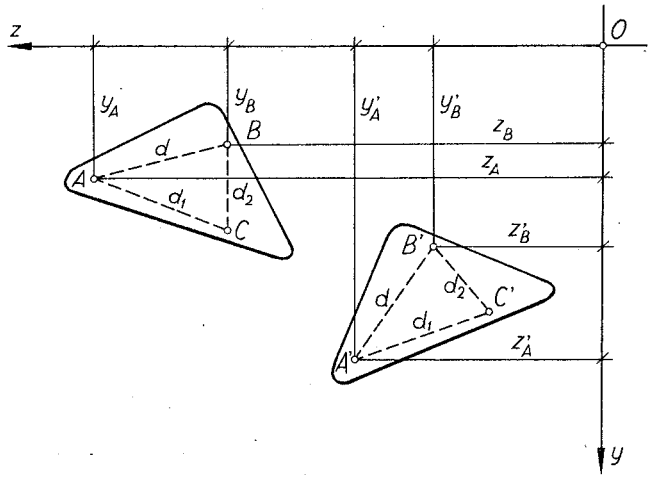


Fig. 6.3.

La posición final de cada uno de los dos puntos considerados queda definida por dos coordenadas. No obstante, la posición final de la chapa exige el conocimiento de sólo tres de ellas. En efecto, fijada la posición final del punto A' por sus coordenadas z'_A, y'_A, el hecho de que ambos puntos se encuentren sujetos a la condición de rigidez, implica la invariabilidad de la distancia d entre ambos; hace que sólo sea necesario fijar una de las dos coordenadas del punto B', ya que la otra resulta determinada por la expresión de la condición de rigidez

$$d^2 = (z_{B'} - z_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2 \quad . \qquad [6.1]$$

Luego, para determinar la posición final de una chapa que se desplaza en su plano, sólo es necesario fijarle tres coordenadas. En consecuencia una chapa en el plano posee *tres grados* de libertad, por tener tres coordenadas libres.

Fijando una coordenada de un plano cualquiera de una chapa, por ejemplo el z_A en la figura 6.4 *a*, ésta, al desplazarse, está obligada a

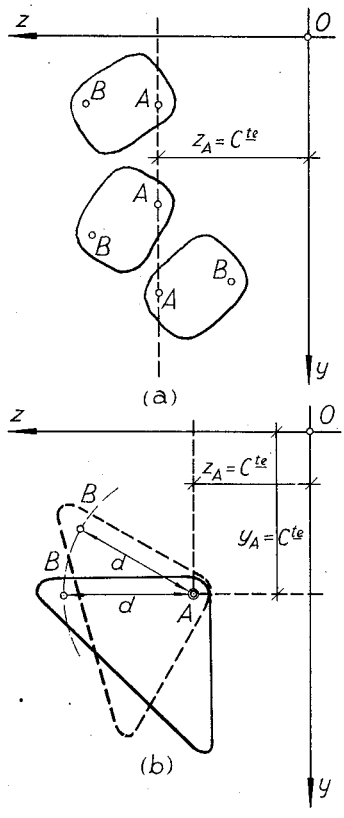


Fig. 6.4.

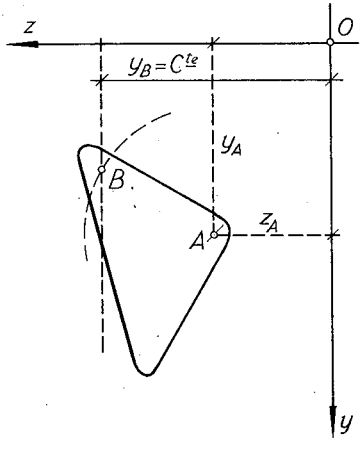


Fig. 6.5.

hacerlo manteniendo el punto A sobre la recta de ecuación $z_A = C^{te.}$ Hemos restringido así un grado de libertad, por cuanto la chapa no puede ocupar cualquier posición en el plano, ya que sólo le está permitido desplazarse paralelamente al eje y y alrededor de A. En otras palabras, hemos impuesto a la chapa *una condición de vínculo*. Si ahora fijamos el punto A, es decir, imponemos que deba cumplirse

$$z_A = C^{te.} \; ; \qquad y_A = C^{te.} \qquad [6.2]$$

a la chapa sólo le resta como posibilidad de movimiento una rotación en torno del punto A. En efecto, cualquier otro punto que consideremos, el B por ejemplo, al estar ligado al A por el vínculo de la rigidez no puede alterar su distancia d al mismo y, por tanto, se desplazará sobre un arco de circunferencia de centro en A. Como todos los puntos de la chapa deben describir circunferencias de centro A, el único movimiento posible de la chapa será una rotación en torno de dicho punto.

Resultan así restringidos para la chapa dos grados de libertad, habiéndosele impuesto a la misma *dos condiciones de vínculo*.

Una chapa a la cual se le han fijado las coordenadas de un punto y que, en consecuencia, posee solamente un grado de libertad, se dice que se encuentra *articulada*, constituyendo el punto fijo una *articulación a tierra* alrededor de la cual puede girar.

Consideremos finalmente la chapa de la figura 6.5, a la que hemos fijado el punto A. De acuerdo con lo expuesto, podrá girar en torno del mismo, y otro punto cualquiera de la chapa, el B por ejemplo, estará obligado a desplazarse sobre un arco de circunferencia de centro A.

Si a este segundo punto le imponemos además la condición de que se desplace sobre la recta de ecuación $y_B = C^{te.}$; es decir, le fijamos su coordenada y_B , el punto resultará inmóvil, al no poder desplazarse simultáneamente sobre el arco de circunferencia de centro A y la recta de ecuación $y_B = C^{te.}$. La chapa resulta así con dos puntos fijos y, en consecuencia, fija ella misma, por cuanto cualquier otro punto que consideremos, el C , por ejemplo, al estar ligado a los anteriores por el vínculo de la rigidez, resulta fijo. Hemos restringido de esta manera a la chapa sus tres grados de libertad e *impuesto tres condiciones* de vínculo.

Llegamos así a la conclusión de que, para fijar una chapa a tierra, es necesario imponerle tantas condiciones de vínculo como grados de libertad posea.

6.1.4. Desplazamientos de una chapa.

Los desplazamientos que puede experimentar una chapa en su plano son *rotaciones o traslaciones.*

Se dice que una chapa experimenta una *rotación* cuando todos sus puntos se desplazan sobre arcos de circunferencia de centro común, denominado *centro* o *polo de rotación.* En cambio, la chapa sufrirá una *traslación* si el desplazamiento es de naturaleza tal que *todos* sus puntos se desplazan en una misma dirección; es decir, experimentan *corrimientos* paralelos.

Consideremos la chapa de la figura 6.6(*a*) y dos posiciones cualesquiera de la misma. Sean A, B y A' , B' las posiciones respectivas de dos puntos de la chapa. Si por los puntos medios S y T de los segmentos AA' y BB' trazamos las normales, las mismas se cortarán en un punto O . En los triángulos AOA' y BOB' , isósceles por construcción, se tiene

$$OA = OA' ; \quad OB = OB' . \quad [6.3]$$

Consideremos ahora los triángulos AOB y $A'OB'$. Para los

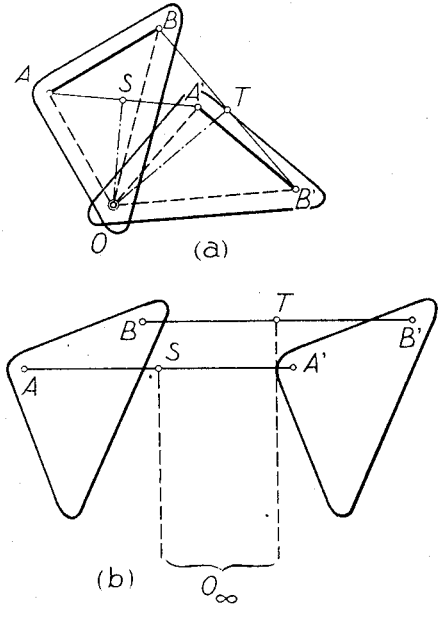


Fig. 6.6.

mismos se cumplen las [6.3] y, además, por la condición de rigidez, resulta $AB = A'B'$. En consecuencia, ambos triángulos serán congruentes y, como de acuerdo con la hipótesis, el segmento AB luego del desplazamiento pasa a ocupar la posición $A'B'$, análogamente, el triángulo AOB ocupará la posición $A'O'B'$, permaneciendo fijo el punto O. Cualquier otro punto de la chapa en su posición primitiva vinculado a los anteriores por la condición de rigidez, pasará a su nueva posición describiendo un arco de circunferencia de centro O. En el caso particular de que los corrimientos de los puntos A y B sean paralelos (figura 6.6 *b*), las normales trazadas por los puntos medios de los segmentos AA' y BB' también resultarán paralelas entre sí, y su punto de intersección O será impropio.

En consecuencia, podemos interpretar una traslación como una rotación en torno de un *polo impropio*, lo que nos conduce a la siguiente generalización:

Todo desplazamiento de una chapa en su plano es una rotación en torno de un polo, propio o impropio.

Sea la chapa de la figura 6.7 que experimenta una rotación de intensidad θ en torno del polo O. Un punto cualquiera A de la misma, como consecuencia de la rotación sufrida por la chapa a la que pertenece, pasará, describiendo un arco de circunferencia, a ocupar una nueva posición A'. El vector $AA' = a$ constituye *el corrimiento* del punto A y lo define, en intensidad, dirección y sentido. Supongamos ahora que la intensidad de la rotación es *infinitésima*. En tal caso, la cuerda AA', el arco AA' y la tangente AA'', se confunden y, siendo esta última normal al radio AO, se tiene que, para rotaciones infinitésimas, los corrimientos que experimentan los puntos de la chapa resultan normales a las rectas determinadas por los puntos y el polo de la rotación.

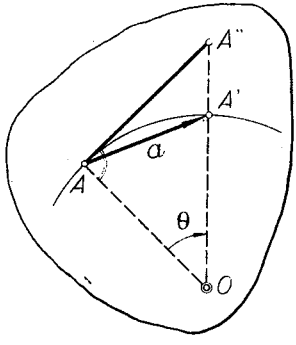


Fig. 6.7.

En consecuencia, si para una chapa que experimenta una rotación infinitésima se conocen los corrimientos infinitésimos de dos de sus puntos, queda con ello perfectamente determinado el polo de la rotación. En efecto, si en la chapa de la figura 6.8 se conocen los corrimientos infinitésimos a_1 y a_2 de los puntos A_1 y A_2, como en cada caso el corrimiento ocurre en la dirección normal a la recta definida por punto y polo, trazando por cada punto la recta normal a la dirección del corrimiento respectivo, como el polo debe encontrarse sobre ambas normales, se hallará en su intersección O

Es decir que, al imponer a una chapa la dirección del desplazamiento de dos puntos cualesquiera de la misma le estamos imponiendo dos condiciones de vínculo, por cuanto se le han restringido dos grados de libertad.

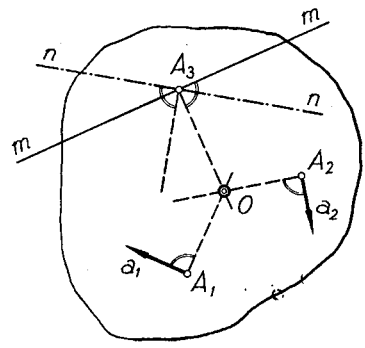


Fig. 6.8.

Si a un tercer punto de la chapa, como ser el A_3 de la figura 6.8, le imponemos la obligación de que su desplazamiento ocurra en una dirección determinada, pueden presentarse dos posibilidades:

a) La normal a la dirección del desplazamiento trazada por A_3, no concurre a O.

b) La normal a la dirección del desplazamiento, trazada por A_3 pasa por el punto fijo O.

En el primer caso (dirección *n-n* para el desplazamiento), por pertenecer A_3 a la chapa y tener ésta un punto fijo a tierra en O, estará obligado a desplazarse según la dirección normal a A_3O. Pero, al mismo tiempo, por la condición impuesta a A_3, éste debe desplazarse según otra dirección (la *n-n*). Como ambas no coinciden, el punto quedará inmóvil. En consecuencia, queda descartada la posibilidad de movimiento de cualquier otro punto de la chapa, por estar vinculado con los anteriores por la condición de rigidez. De ahí que, al obligar al punto A_3 a desplazarse según la dirección *n-n*, la chapa resulte inmóvil; es decir, se le han restringido sus tres grados de libertad, imponiéndosele, en consecuencia, tres condiciones de vínculo.

Si, en cambio la dirección del movimiento impuesta al punto A_3 fuera la *m-m*, nos encontraríamos en el caso b), por cuanto su normal trazada por A_3 concurre a O. En este caso la chapa no queda fija, por cuanto la dirección *m-m* coincide con la dirección del desplazamiento que puede experimentar A_3 como consecuencia de una rotación infinitésima de la chapa en torno del punto fijo O. Si bien se le han impuesto tres condiciones de vínculo, no se han restringido los tres grados de libertad que poseía la chapa. Se dice entonces que existe un *vínculo aparente*, definiendo como tal a *toda condición de vínculo impuesta a un punto de una chapa* que no altere *las posibilidades de desplazamiento del mismo.*

6.1.5. Vínculos.

Hemos definido en 6.1.2 como vínculo toda condición geométrica que limite la movilidad de un cuerpo. Veamos ahora cómo ello se materializa en la práctica.

Ante todo distinguiremos dos clases de vínculos: absolutos y relativos. Se denominan vínculos absolutos aquellos que limitan la movilidad de un cuerpo *respecto de la tierra*, y vínculos relativos los que implican una limitación de movimientos con respecto a *otro cuerpo*. Ambas clases de vínculos se denominan también vínculos externos y vínculos internos, respectivamente. Nos ocuparemos en el presente parágrafo del primer tipo de vínculos, dejando la consideración de los vínculos internos para cuando nos ocupemos de las cadenas cinemáticas constituidas por varias chapas, que serán objeto de un estudio especial.

La vinculación de una chapa a tierra tiene lugar por medio de dispositivos especiales, denominados *dispositivos de apoyo* o simplemente *apoyos*.

Existen tres tipos de apoyos para sistemas planos:

a) Apoyo *simple* o de *primera especie*, denominado comunmente *apoyo móvil*. Restringe un grado de libertad.

b) Apoyo *doble* o de *segunda especie*, que también recibe el nombre de *apoyo fijo* o *articulación*. Restringe dos grados de libertad.

c) Apoyo *triple* o de *tercera especie* o *empotramiento*. Restringe tres grados de libertad.

De acuerdo con el número de grados de libertad que restringe cada tipo de apoyo, para fijar una chapa a tierra será necesario sustentarla en alguna de las formas siguientes:

1º) Con tres apoyos de primera especie.

2º) Mediante un apoyo de primera especie y uno de segunda.

3º) Utilizando un empotramiento.

Los apoyos de primera especie o apoyos móviles están constituidos por una pieza de acero (figura 6.9 *a*) de forma triangular, que se articula por su vértice en un punto de la chapa a la que sustenta, apoyando su base en tierra con interposición de un tren de rodillos de acero. El punto *A* de la chapa, articulado al apoyo móvil, está obligado a desplazarse en la

dirección *n-n*, paralela al plano de rodamiento, pero está impedido de hacerlo en la dirección normal. Designaremos en lo que sigue como *dirección* del apoyo móvil a la de su plano de rodamiento. El apoyo móvil restringe un grado de libertad por cuanto obliga al punto A, y con él al conjunto de puntos materiales que configuran la chapa, a desplazarse en la dirección de su plano de rodamiento. A la chapa le restan así dos grados de libertad, que se materializan precisamente en este desplazamiento y en la posibilidad de rotación en torno del punto A.

Los vínculos de primera especie pueden estar constituidos también por *bielas*, entendiéndose por tal una barra articulada a tierra por uno de sus extremos (figura 6.9 *b*) y a la chapa por el opuesto. Para desplazamientos infinitésimos, el punto A está obligado a desplazarse en la dirección *n-n*, normal a la dirección AB de la biela; es decir, que se reproduce la situación analizada para el apoyo móvil.

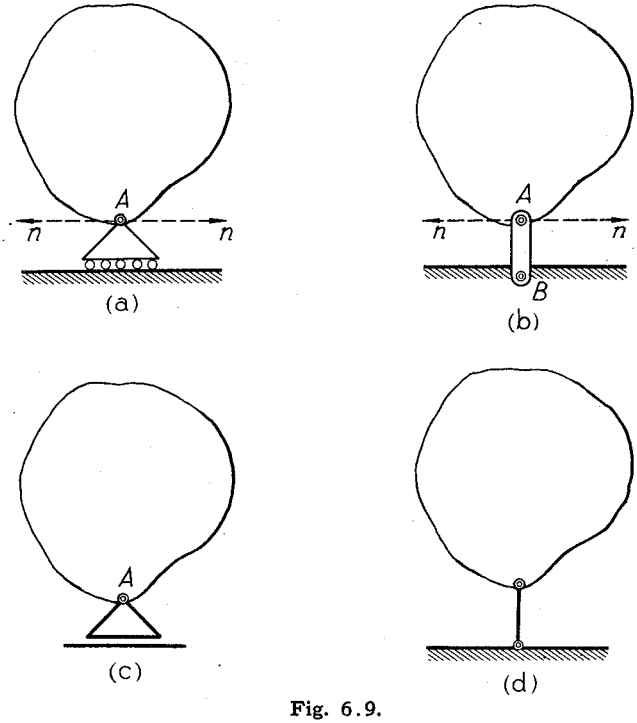


Fig. 6.9.

A los efectos prácticos, y por facilidad de dibujo, los apoyos móviles y las bielas se representan en las formas indicadas en la figura 6.9 *c* y *d*, respectivamente.

Los apoyos de segunda especie o articulaciones, o apoyos fijos, son

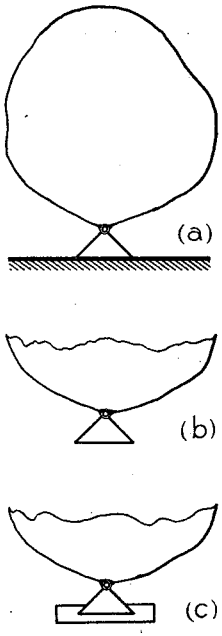


Fig. 6.10.

similares a los móviles, con la única diferencia de que la base del cuerpo de apoyo se encuentra rígidamente vinculada con la tierra (figura 6.10). En esta forma el punto donde se halla aplicado el apoyo, se encuentra fijo, resultando, en consecuencia, restringidos dos grados de libertad a la chapa, restándole uno solo, materializado por una rotación en torno al punto en el que se articula. A los efectos prácticos de dibujo se lo representa indistintamente en la forma indicada en la figura 6.10 *b* ó c. Finalmente, el apoyo de tercera especie fija un punto y una dirección, con lo que evidentemente la chapa queda fijada a tierra. Tal el caso de la figura 6.11 *a* donde, para la sección extrema de la chapa representada, se ha fijado el punto *A* de la misma y la dirección n-n. Es decir, que otro punto *B* de la sección, al encontrarse fijo *A*, debe necesariamente desplazarse en la dirección normal a *AB* pero, a su vez, se le ha impuesto la condición de desplazarse en dirección *n-n*, no coincidente con la anterior. En consecuencia, se halla impedido de moverse. Al tener la chapa dos puntos fijos, como los restantes se hallan vinculados con éstos por la condición de rigidez, la chapa resulta inmóvil. En la práctica se lo representa en las formas indicadas en figura 6.11 *b*, c y *d*.

El apoyo de segunda especie puede lograrse también disponiendo dos bielas concurrentes a un punto, como muestra la figura 6.12. En este caso, la existencia de la biela *AB* obliga al punto *A* a desplazarse en la dirección *n-n*, normal a *AB*, mientras que la presencia de la segunda biela *AC* exige que su desplazamiento ocurra en la dirección m-m, normal a *AC*. Al no coincidir ambas direcciones, el desplazamiento

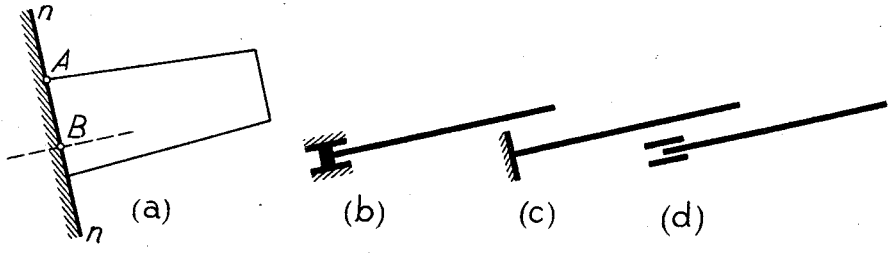


Fig. 6.11.

del punto A resulta imposible, quedando éste en consecuencia, fijado a tierra.

El empotramiento de una sección de una chapa puede materializarse también en la forma que muestra la figura 6.13 *a* y *b*, es decir, sea mediante un apoyo fijo y otro móvil, aplicados en dos puntos de la sección, o bien mediante tres bielas, dos concurrentes a un punto y la tercera articulada a un segundo punto.

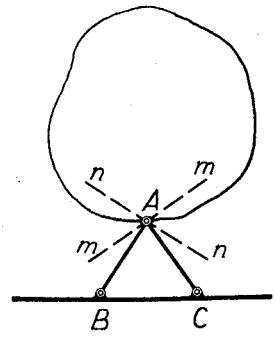


Fig. 6.12.

Analizadas las distintas posibilidades de sustentación de una chapa, veamos en qué casos se presentan vínculos aparentes. Supongamos primeramente una chapa sustentada mediante un apoyo fijo, y otro móvil (figura 6.14).

De existir únicamente el apoyo fijo en A, el punto B estaría obligado a desplazarse según la dirección *n-n*, normal a AB. Si ahora apli-

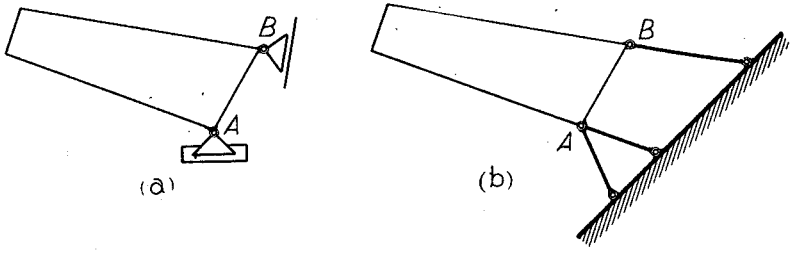


Fig. 6.13.

camos en B un apoyo móvil cuya dirección coincida con *n-n*, no estamos imponiendo a la chapa ninguna nueva condición, por cuanto el apoyo móvil permite al punto B desplazarse precisamente en la dirección impuesta por la existencia del vínculo en A.

La chapa no se encuentra fija y estamos, pues, ante un caso de vínculo aparente. Es decir que, cuando en una chapa sustentada en la forma antedicha la normal a la dirección de un apoyo móvil pasa por un apoyo fijo, existe vínculo aparente.

Cuando la sustentación de la chapa se verifica mediante tres apoyos móviles, existirá vínculo aparente si las normales a las direcciones de los mismos concurren a un punto. En efecto, sea el caso de la

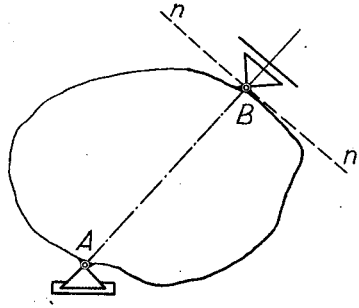


Fig. 6.14.

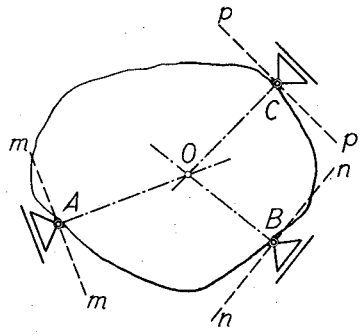


Fig. 6.15.

chapa de la figura 6.15, sustentada mediante tres apoyos de primera especie aplicados en los puntos A, B y C dispuestos en forma tal que las normales a los mismos concurran a un punto O. Supongamos por un momento que no exista el apoyo C y que la chapa se encuentre sustentada únicamente por los apoyos móviles A y B. La existencia del apoyo móvil en A obliga a este punto a desplazarse en la dirección *m-m* o, lo que es lo mismo, el desplazamiento de A es consecuencia de una rotación infinitésima de la chapa en torno de un polo ubicado en un cierto punto de la normal a *m-m* trazada por A. Otro tanto ocurre con el punto B, obligado a desplazarse según *n-n*, lo que equivale a suponer una rotación en torno de un polo ubicado sobre la normal a aquella dirección. La simultaneidad de ambos desplazamientos supone la existencia de un polo común de rotación, el que, necesariamente, debe encontrarse sobre la intersección de las normales a las direcciones de los dos apoyos móviles, es decir, el punto O. Lo anterior nos permite concluir que dos apoyos móviles equivalen, desde el punto de vista de la sustentación de una chapa, a un apoyo fijo o articulación ubicado en el punto de intersección de las normales a sus correspondientes direcciones. En este caso el apoyo fijo o articulación se denomina *ficticio*.

Sentada la existencia, en el caso considerado, de un apoyo fijo ficticio en O, la chapa podrá experimentar rotaciones infinitésimas en torno al mismo, y el punto C se desplazará en la dirección *p-p*, normal a CO. Luego, si colocamos en C un apoyo móvil cuyo plano de rodamiento coincida con la dirección *p-p*, este último vínculo resulta ser aparente por cuanto permite al punto en que está aplicado desplazarse en una dirección ya impuesta por las condiciones de vínculo existentes en la chapa.

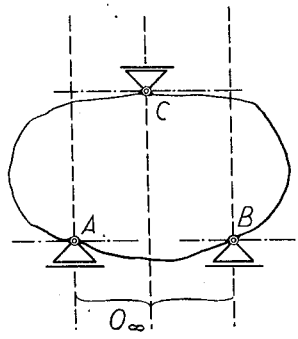


Fig. 6.16.

En el caso de la figura 6.16, donde la chapa se encuentra sustentada mediante tres apoyos móviles de una misma dirección, también existe vínculo aparente, por cuanto las normales a la dirección de los apoyos concurren a un punto impropio. En este caso el desplazamiento posible de la chapa es una traslación.

Cuando una chapa se encuentra sustentada a tierra mediante un número de condiciones de vínculo igual al de sus grados de libertad, se dice que se encuentra *isostáticamente* sustentada, o también, que el sistema es *isostático*. Cuando el número de condiciones de vínculo es mayor que el de los grados de libertad, el sistema es *hiperestático*, o bien se encuentra hiperestáticamente sustentado. Las condiciones de vínculo en exceso sobre la cantidad necesaria y suficiente reciben el nombre de *vínculos superabundantes* o *superfluos*. Tratándose de sistemas planos constituidos por una única chapa, o bien de cadenas cinemáticas de más de una chapa, el número de condiciones de vínculo que posean en exceso sobre las necesarias, determinan el *grado de hiperestaticidad* del sistema. Así por ejemplo, la chapa de la figura 6.17 constituye un sistema hiperestático de segundo grado, por cuanto al mismo se le han impuesto cinco condiciones de vínculo, en tanto sólo son necesarias y suficientes tres, existiendo dos condiciones superabundantes.

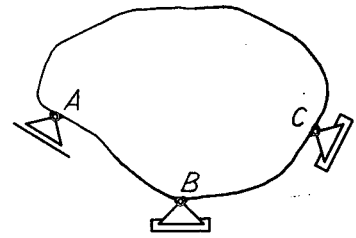


Fig. 6.17.

Finalmente, si el número de condiciones de vínculo de un sistema es inferior a tres, se dice que se encuentra *hipostáticamente* sustentado.

6.1.6. El equilibrio de la chapa vinculada. Reacciones de vínculo.

Consideremos la chapa de la figura 6.18 a la que hemos suprimido dos grados de libertad mediante la imposición de dos condiciones de vínculo materializadas por un apoyo fijo aplicado en A. Supongamos que sobre la misma actúa un sistema de fuerzas P_i, cuya resultante sea R. Por efecto del sistema aplicado o de su equivalente R, la chapa tenderá a girar en torno a la articulación a tierra y no se encontrará más en equilibrio. La única posibilidad de que una chapa con un grado de libertad, sujeta a la acción de un sistema de fuerzas, se encuentre en equilibrio, es que la resultante R del mismo pase por el polo de rotación de la chapa. Cual-

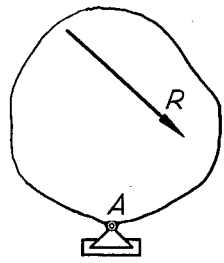


Fig. 6.18.

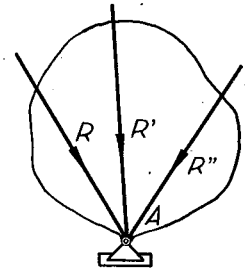


Fig. 6.19.

quiera sea la dirección, intensidad y sentido de la resultante del sistema de fuerzas aplicado, para que exista equilibrio sólo es necesario que su recta de acción pase por el punto fijo de la chapa. Tal el caso de la figura 6.19. Es decir que, para asegurar el equilibrio de la chapa, sólo es necesario imponer al sistema de fuerzas el cumplimiento de *una condición*. La expresión analítica de esta condición surge de la siguiente consideración: Si la resultante del sistema *debe* pasar por A (figura 6.19), su momento con respecto a dicho punto debe ser nulo y, por el principio de equivalencia, también será nula la suma de los momentos del sistema de fuerzas respecto de dicho punto. En conscuencia, debe tenerse:

$$\sum_1^n M_i^A = 0 . \qquad [6.4]$$

Refiriendo a un par de ejes coordenados y llamando z_i, y_i las coordenadas de un punto cualquiera de la recta de acción de cada una de las fuerzas que constituyen el sistema, y z_A, y_A las correspondientes al punto de articulación a tierra, la expresión anterior toma la forma:

$$\sum_1^n P_i . \operatorname{sen} \varphi_i (z_A - z_i) - \sum_1^n P_i . \cos \varphi_i (y_A - y_i) = 0 , \qquad [6.5]$$

que establece la condición que debe cumplir un sistema de fuerzas aplicado a una chapa con un grado de libertad, para asegurar el equilibrio de la misma.

Supongamos ahora que a la chapa en las condiciones anteriores le quitamos el apoyo fijo (figura 6.20). Evidentemente con ello rompemos nuevamente el equilibrio, ya que la chapa, por efecto de la resultante R, tenderá a desplazarse en la dirección de ésta. Para restituir el equilibrio, salvo que coloquemos nuevamente el vínculo, sólo nos resta aplicar en A una fuerza opuesta a R, que constituirá con esta última un sistema nulo y, en consecuencia, en equilibrio. Esta fuerza se denomina reacción de *vínculo*, y su existencia deriva del cuarto principio de la Estática. Como la dirección de R puede ser cualquiera, también lo será la de la reacción, es decir que un apoyo fijo es capaz de reaccionar en cualquier dirección.

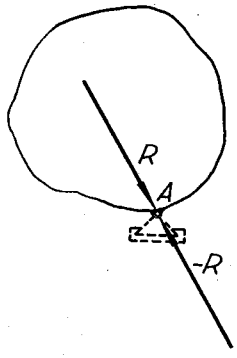


Fig. 6.20.

El vínculo y la reacción a que da origen su existencia no coexisten. Para que la reacción de vínculo se manifieste es necesario quitar este último, acción ésta que se denomina *poner en evidencia la reacción.*

Reemplacemos ahora el apoyo fijo de la figura 6.19, por dos apoyos móviles concurrentes en A, uno horizontal y otro vertical, y supongamos eliminado el primero de ellos (figura 6.21). La chapa resulta con sólo una condición de vínculo, quedándole dos grados de libertad. Descompongamos la resultante R, cuya recta de acción pasa por A, en dos componentes: una horizontal H y otra vertical V. Esta última se absorbida por el apoyo móvil, mientras que la primera tenderá a desplazar la chapa según su dirección, con lo que no se encontrará más en equilibrio. Para que éste sea posible es necesario que la componente horizontal H sea nula o, en otras palabras, que la resultante de las fuerzas exteriores, además de pasar por A, sea normal a la dirección del apoyo móvil. Vemos así que, para que exista equilibrio, en este caso, es necesario imponer al sistema de fuerzas *dos condiciones*: una de concurrencia y otra de perpendicularidad.

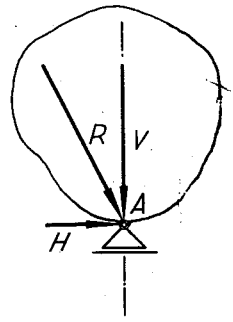


Fig. 6.21.

La condición de concurrencia al punto A puede expresarse mediante la [6.4], mientras que la ortogonalidad con la dirección del apoyo conduce a una condición de proyección nula sobre dicha dirección.

Es decir que el equilibrio de la chapa queda asegurado si se cumplen simultáneamente las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n M_i^A &= 0 \\ \sum_1^n H_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6.6]$$

donde H_i corresponde a la proyección horizontal de una fuerza genérica. Las expresiones [6.6] desarrolladas conducen a:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n P_i \,.\, \operatorname{sen} \varphi_i (z_A - z_i) - \sum_1^n P_i \,.\, \cos \varphi_i (y_A - y_i) = 0 \\ &\sum_1^n P_i \,.\, \cos \varphi_i = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6.7]$$

cuyo cumplimiento simultáneo asegura el equilibrio de la chapa.

Supongamos ahora suprimido el apoyo móvil (figura 6.22). La chapa, sujeta a la acción de un sistema de fuerzas de resultante R, no

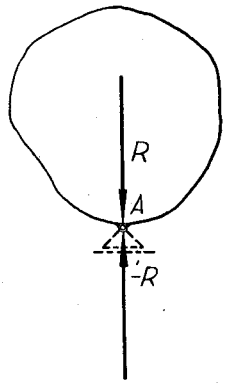


Fig. 6.22.

se encontrará más en equilibrio. Para restituirlo, es necesario aplicar en A una fuerza $-R$, opuesta a la resultante de las fuerzas exteriores. Se logra así un sistema nulo, es decir, en equilibrio. Dicha fuerza $-R$ constituye la reacción de vínculo del apoyo móvil, que resulta ser normal a la dirección del mismo. Como consecuencia se deduce que un apoyo móvil es capaz de reaccionar únicamente en su dirección normal. Si el apoyo de primera especie estuviera constituido por una biela, la reacción tendría la dirección de esta última, lo que es evidente.

Consideremos ahora la chapa de la figura 6.23, cargada con un sistema de fuerzas de resultante R, y a la que hemos impuesto tres condiciones de vínculo materializadas por un apoyo móvil aplicado en A y uno fijo en B. Cualquiera sea la dirección, intensidad y sentido de R, la chapa siempre se encontrará en equilibrio, por cuanto las condiciones de vínculo impuestas aseguran su inmovilidad, al restringir la totalidad de sus grados de libertad. En consecuencia, para asegurar el equilibrio de la chapa, no será necesario imponer al sistema de fuerzas exteriores activas *ninguna condición.*

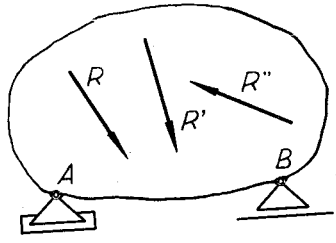


Fig. 6.23.

El análisis de las consideraciones anteriores nos permite llegar a la siguiente conclusión:

En toda chapa sujeta a la acción de un sistema de fuerzas cualquiera, el número de condiciones que es necesario imponer a éste para asegurar el equilibrio de aquélla es igual al número de grados de libertad que posea la chapa.

Si la chapa es libre, es decir, si no se encuentra vinculada a tierra, tiene tres grados de libertad. Si sobre la misma actúa un sistema de fuerzas, el equlibirio exige el cumplimiento de tres condiciones, que son las condiciones generales de equilibrio de un sistema plano de fuerzas, analizadas en el capítulo 2. Si sólo se le ha impuesto una condición de vínculo, con lo que el número de grados de libertad se reduce a dos, el equilibrio exige que el sistema de fuerzas cumpla con dos condiciones. Si posee dos condiciones de vínculo, restándole sólo un grado de libertad, el sistema de fuerzas exteriores debe cumplir una única condición para asegurar el equilibrio de la chapa y, finalmente, si esta última se encuentra isostáticamente sustentada, es decir, si el número de grados de libertad es cero, el sistema de fuerzas puede ser cualquiera, sin que sea necesario que cumpla ninguna condición para que el equilibrio de la chapa

6.1.7. Determinación de las reacciones de vínculo en sistemas de una chapa. Solución gráfica.

Nos ocuparemos en lo que sigue únicamente de sistemas isostáticamente sustentados, es decir, de aquellos sistemas en que el número de condiciones de vínculo sea igual al número de grados de libertad que poseen; es decir, tres para los sistemas constituidos por una sola chapa.

Consideremos primeramente una chapa sustentada mediante un apoyo fijo aplicado en A y otro móvil en B (figura 6.24), no existiendo vínculo aparente, y supongamos que sobre la misma actúe un sistema de fuerzas P_i de resultante R. Si ponemos en evidencia las reacciones de vínculo eliminando los apoyos, nos encontramos que la correspon-

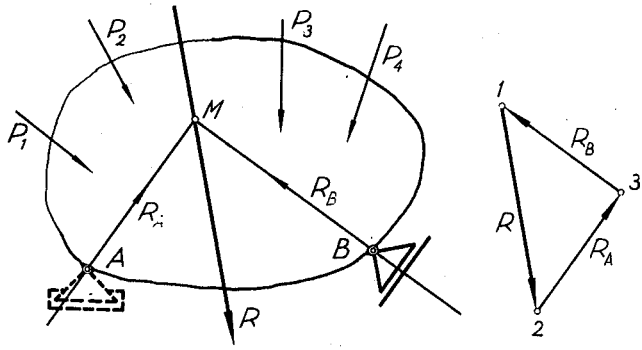


Fig. 6.24.

diente al apoyo móvil debe necesariamente ser de dirección normal al mismo, mientras que la desarrollada por el apoyo fijo, aparte de pasar por éste, puede ser de dirección cualquiera. Por otra parte, llamado R_A y R_B a las dos reacciones de vínculo, tenemos que éstas y R deben constituir un sistema en equilibrio para que resulte asegurado el correspondiente a la chapa. Pero, por lo visto en el capítulo 2, para que tres fuerzas que actúan en un mismo plano puedan equilibrarse entre sí, es necesario que concurran a un punto. Como las rectas de acción de R y de la reacción R_B del apoyo móvil resultan impuestas por las condiciones del problema, el punto de concurrencia obligado es M, intersección de dichas rectas de acción. La recta de acción de R_A, reacción en el apoyo fijo, resulta de unir M con A. Si, en una escala cualquiera, llevamos el vector $2\text{-}1$, representativo de R, y por su origen y extremo

trazamos paralelas a las direcciones AM y BM, la intersección de las mismas define un punto 3, que determina los vectores $1\text{-}3$ y $3\text{-}2$, representativos de las intensidades de las dos reacciones de vínculo buscadas. El sentido de los mismos debe ser tal que forman con el vector representativo de R un polígono cerrado, ya que el sistema debe encontrarse en equilibrio.

Si la sustentación de la chapa la constituyen tres apoyos móviles (figura 6.25), la determinación gráfica de las reacciones de vínculo se efectúa de la manera siguiente: hallada la resultante R de las fuerzas exteriores activas, y puestas en evidencia las reacciones en los tres vínculos, que denominaremos R_A, R_B y R_C, el equilibrio de la chapa exige que el sistema constituido por las fuerzas exteriores activas y reactivas se halle también en equilibrio. El problema se reduce entonces a equilibrar R mediante tres fuerzas cuyas rectas de acción pasen por los puntos de la chapa en que se hallan aplicados los apoyos móviles, y cuyas direcciones sean normales a las de estos últimos. Aplicando el procedimiento de Culmann, hallamos primero el punto M de intersección de dos de las rectas de acción de las reacciones incógnitas, y luego el determinado por la recta de acción de R y la recta de acción de la tercera reacción (punto N). Definida en esta forma la recta de acción de la componente auxiliar, se procede en la forma conocida, cuidando solamente en el polígono de fuerzas de dar a los vectores representativos de las fuerzas los sentidos que conduzcan a un polígono cerrado, por cuanto lo que se busca son equilibrantes y no componentes.

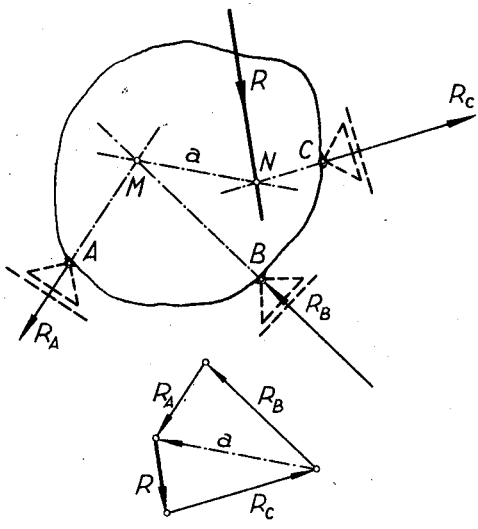


Fig. 6.25.

En este caso, la determinación de las reacciones de vínculo puede efectuarse encarando la solución desde un punto de vista distinto si bien el procedimiento operativo es el mismo, reduciéndose, en última instancia, a la aplicación del procedimiento de Culmann.

Hemos visto que, a los efectos de la sustentación de una chapa, dos apoyos móviles son equivalentes a un apoyo fijo aplicado en el punto de intersección de las normales a las direcciones de los primeros. En consecuencia, los apoyos móviles A y B de la chapa de la figura 6.26

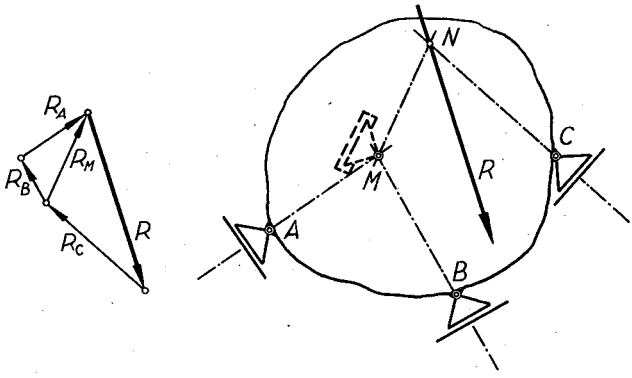


Fig. 6.26.

equivalen a un apoyo fijo ficticio aplicado en M. Determinamos ahora las reacciones de vínculo en M y C en la forma vista anteriormente y luego la reacción M la descomponemos en dos componentes de direcciones AM y BM, que constituyen las reacciones de vínculo en los apoyos A y B.

Supongamos ahora el caso de una chapa vinculada a tierra mediante un empotramiento, es decir, un vínculo de tercera especie.

Sea la chapa de la figura 6.27, empotrada en tierra en su sección S-S, y sobre la que actúa un sistema de fuerzas de resultante R.

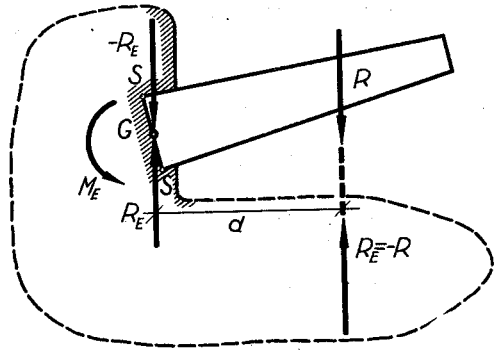


Fig 6.27.

Cualquiera sea R, la chapa se encontrará en equilibrio. Además, por encontrarse rígidamente vinculados a tierra, *todos* los puntos de la sección de empotramiento, chapa y tierra constituyen un conjunto continuo de puntos materiales ligados entre sí por la condición de rigidez. En consecuencia, para que exista equilibrio necesariamente la reacción de vínculo debe ser una fuerza opuesta a la resultante de las fuerzas exteriores activas, cualquiera que ella sea.

En la práctica interesa conocer el valor de la reacción en la sección de empotramiento S-S. Para ello será necesario reducir la fuerza R_E al baricentro G de aquélla, es decir, descomponerla en una fuerza de dirección paralela a R_E, cuya recta de acción pase por G y en el par

de reducción M_E. Ello equivale a determinar las componentes de la reacción cuyas rectas de acción sean la recta impropia del plano y dos rectas ortogonales (paralelas a un par de ejes coordenados) que pasen por el baricentro de la sección de empotramiento. La componente según la recta impropia del plano es un par de fuerzas cuyo momento, en intensidad y sentido, está dado por el momento de R_E respecto del baricentro G de la sección de empotramiento (figura 6.27). Las restantes componentes tienen por resultante una nueva fuerza R_E, esta vez aplicada en G.

6.1.8. Determinación de las reacciones de vínculo en un sistema de una chapa. Solución analítica.

La determinación analítica de las reacciones de vínculo de una chapa isostáticamente sustentada conduce a la aplicación de las condiciones de equilibrio de un sistema plano de fuerzas. En efecto, puestas en evidencia las reacciones, las mismas, juntamente con las fuerzas exteriores activas, constituyen un sistema plano de fuerzas que debe encontrarse en equilibrio. Ahora bien, en el capítulo 2 vimos que las condiciones analíticas necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema de fuerzas no concurrentes en el plano eran tres. En consecuencia, la aplicación de las mismas conducirá a la solución del problema de la determinación de las reacciones de vínculo siempre que el número de incógnitas involucradas sean también tres.

Veamos si ello se cumple efectivamente para las chapas isostáticamente sustentadas.

La reacción de vínculo en un apoyo móvil, según hemos visto, debe pasar por el punto en que se encuentra aplicado el apoyo y, además, su recta de acción debe necesariamente ser normal a la dirección del apoyo. En consecuencia, si suponemos que la reacción, considerada como incógnita, tiene sentido positivo, quedan con ello establecidos dos de los tres parámetros necesarios para definirla: un punto de su recta de acción y el argumento (figura 6.28 *a*). Sólo resta por conocer la intensidad, es decir, que la determinación de la reacción de vínculo en un apoyo móvil involucra la existencia de *una incógnita*.

En cambio, para un apoyo fijo, la reacción puede tener cualquier dirección, ya que sólo se le impone la condición de que su recta de acción pase por el punto donde se encuentra aplicado el apoyo fijo. Se conoce, en consecuencia, solamente un parámetro: un punto de su recta de acción, siendo incógnitas su argumento y su intensidad. Es decir, que la determinación de la reacción de vínculo en un apoyo fijo involucra la existencia de *dos incógnitas*. Éstas pueden ser las indicadas, o bien, lo que

es más corriente, las componentes de la reacción de vínculo según dos direcciones ortogonales, una vertical y otra horizontal, que se acostumbra a indicar con los símbolos V y H, respectivamente, con los subíndices indicativos del apoyo a que correspondan (figura 6.28 *b*).

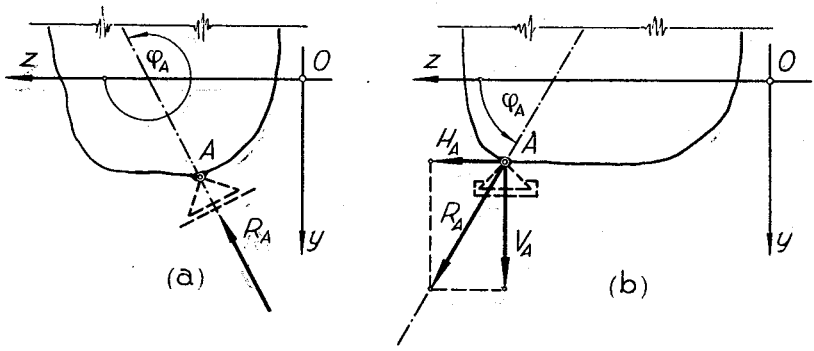


Fig. 6.28.

La reacción de vínculo en un empotramiento implica la existencia de tres incógnitas. En efecto, hemos visto que la misma puede tener cualquier recta de acción, intensidad y sentido. En consecuencia, para definirla, será necesario conocer tres parámetros: un punto de su recta de acción, su argumento y su intensidad. Pueden también elegirse como incógnitas el par de empotramiento y las intensidades de las componentes según dos direcciones ortogonales.

De lo anterior surge que la determinación de las reacciones de vínculo de una chapa isostáticamente sustentada, sujeta a la acción de un sistema cualquiera de fuerzas, constituye siempre un problema de tres incógnitas y que, por lo tanto, podrá ser resuelto mediante la utilización de las condiciones de equilibrio de los sistemas planos de fuerzas no concurrentes.

Se dice que una chapa es *estáticamente determinada* cuando las incógnitas que implica la existencia de los vínculos pueden determinarse mediante las ecuaciones derivadas de la aplicación de las condiciones de equilibrio de los sistemas planos de fuerzas.

Cuando el número de incógnitas supera a tres, se dice que la chapa es *estáticamente indeterminada*, por cuanto, al ser mayor el número de incógnitas que el de ecuaciones que se pueden plantear, la solución del problema es indeterminada. Tal el caso de la chapa de la figura 6.29 fijada a tierra con dos apoyos fijos.

La reacción de un apoyo fijo implica dos incógnitas. En consecuencia, la determinación de las reacciones de vínculo del caso planteado conduce a un problema de cuatro incógnitas, imposible de resolver con

los elementos que disponemos, por cuanto el planteo de las condiciones de equilibrio conduce a sólo tres ecuaciones.

Considerado gráficamente el problema, como es lógico, tampoco tiene solución. En efecto, las reacciones de vínculo en un apoyo fijo, como sabemos, pueden tener cualquier dirección. Si R es la resultante de las

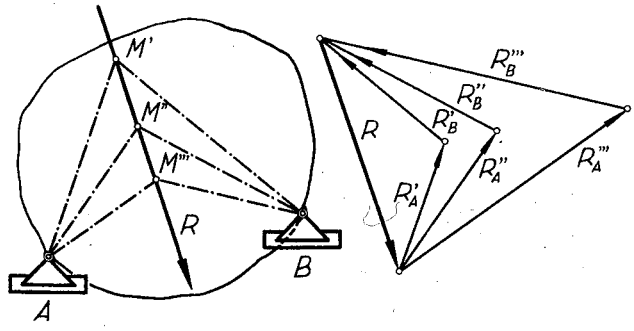


Fig. 6.29.

fuerzas activas exteriores, cualquier par de rectas que pasando por A y B se corten sobre R pueden ser rectas de acción de las reacciones buscadas, cuyas intensidades y sentidos se obtienen en el polígono de fuerzas trazando paralelas a dichas rectas por el origen y extremo del vector representativo de R. Existiendo infinitos pares de rectas que cumplen con dicha condición, el problema tendrá infinitas soluciones, es decir, será indeterminado.

La determinación de las reacciones de vínculo en sistemas estáticamente indeterminados, requiere el conocimiento de la deformación experimentada por la chapa por efecto de las fuerzas que la solicitan, y es objeto del tercer curso de Estabilidad de las Estructuras.

Analizaremos a continuación el planteo de las ecuaciones que resuelven el problema de la determinación de las reacciones de vínculo en una chapa isostáticamente sustentada mediante un apoyo fijo y otro móvil, y sujeta a la acción de un sistema de fuerzas P_i (figura 6.30).

Refiriendo el sistema a un par de ejes coordenados z, y, y puestas en evidencia las reacciones de vínculo, elegimos como incógnitas las componentes H_a y V_a de la reacción en A, y la reacción en B que, a los efectos del planteo de las ecuaciones, supondremos *positivas*. Una vez resueltas las ecuaciones, si los valores resultantes están afectados del signo (—), ello significa que los sentidos reales de las reacciones son contrarios a los supuestos.

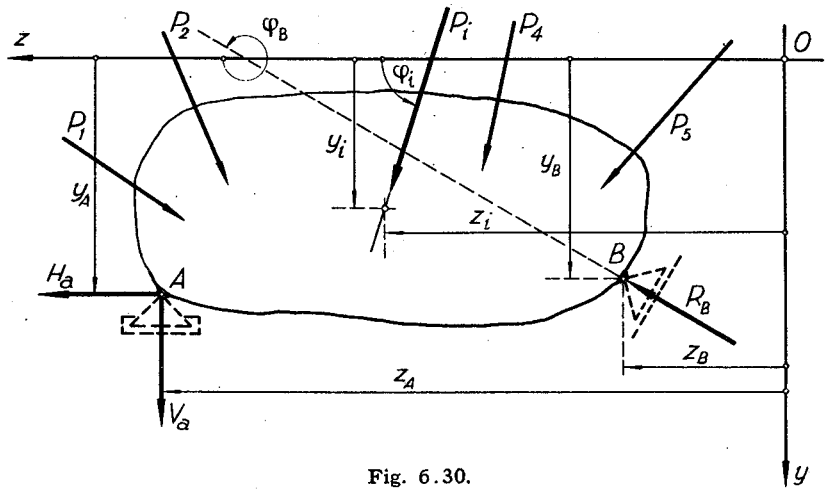


Fig. 6.30.

Al analizar, en el capítulo 2, las condiciones analíticas de equilibrio de los sistemas planos no concurrentes, vimos que las mismas podían ser expresadas en tres formas distintas, utilizando:

a) dos condiciones de nulidad de proyecciones sobre dos ejes, y una condición de nulidad de momentos respecto de un punto cualquiera del plano.

b) dos condiciones de nulidad de momentos respecto de dos puntos cualesquiera del plano y una condición de nulidad de proyecciones respecto de un eje que no sea normal a la dirección definida por los dos puntos.

c) tres condiciones de nulidad de momentos respecto de tres puntos no alineados.

Para el planteo de las ecuaciones que conducen a la determinación de las reacciones de vínculo, podemos utilizar cualquiera de las tres posibilidades. En cada caso, y conforme con la disposición de los apoyos, convendrá utilizar una u otra forma. En general, tratándose de sistemas de una chapa, se utiliza la solución *a*), que es lo que haremos a continuación. Con la notación de la figura 6.30, proyectando el sistema de fuerzas exteriores activas y reactivas primeramente sobre el eje z y luego sobre el y, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} H_a + R_b \cdot \cos\varphi_b + \sum_1^n P_i \cdot \cos\varphi_i &= 0 \\ V_a + R_b \cdot \operatorname{sen}\varphi_b + \sum_1^n P_i \cdot \operatorname{sen}\varphi_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6.8]$$

Con el objeto de simplificar la ecuación de momentos, elegimos como centro de momentos el punto A, por cuanto, con respecto al mismo, se anulan los momentos de H_a y V_a. En consecuencia se tiene:

$$R_b[\operatorname{sen}\varphi_B(z_A - z_B) - \cos\varphi_B(y_A - y_B)] + \\ + \sum_1^n P_i\,[\operatorname{sen}\varphi_i\,(z_A - z_i) - \cos\varphi_i\,(y_A - y_i)] = 0\ . \qquad [6.9]$$

La resolución del sistema constituido por las [6.8] y [6.9] conviene comenzarlo por esta última ecuación, por cuanto se trata de una ecuación independiente con una sola incógnita: R_b. Despejando su valor y reemplazándolo en las [6.8], las mismas se transforman también en ecuaciones independientes, obteniéndose así directamente los valores de H_a y V_a.

Si, en lugar de adoptar como incógnitas las componentes H_a y V_a de la reacción R_a, hubiésemos elegido su argumento y su intensidad, las ecuaciones [6.8] tomarían la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} R_a.\cos\varphi_A + R_b.\cos\varphi_B + \sum_1^n P_i.\cos\varphi_i &= 0 \\ R_a.\operatorname{sen}\varphi_A + R_b.\operatorname{sen}\varphi_B + \sum_1^n P_i.\operatorname{sen}\varphi_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6.10]$$

La ecuación de momentos es idéntica en este caso a la [6.9], ya que en la misma no interviene R_a. Al reemplazar ahora en las [6.10] el valor R_b obtenido de la ecuación de momentos, no se obtienen ya ecuaciones independientes sino un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas que, resueltas, nos dan los valores de la intensidad de R_a y de su argumento.

De utilizarse como incógnitas H_a y V_a, el valor de la reacción se obtiene de la expresión:

$$|R_a| = \sqrt{H_a^2 + V_a^2} \qquad [6.11]$$

y su dirección de:

$$\operatorname{tg}\varphi_A = \frac{V_a}{H_a} \qquad [6.12]$$

quedando así completamente definida R_a.

Consideraremos ahora el caso de una chapa empotrada en la sección S-S (figura 6.31). Adoptaremos como incógnitas las dos componentes de la reacción de empotramiento paralelas a los ejes coordenados cuyas rectas de acción pasan por el baricentro G de la sección de empotra-

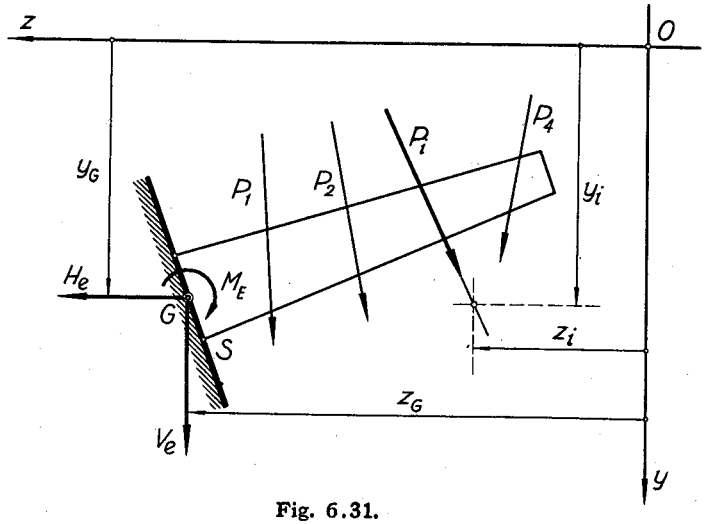


Fig. 6.31.

miento, y la componente según la recta impropia del plano, es decir, el par de empotramiento M_e. Con la notación de la figura, se tiene:

a) Ecuaciones de proyección:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n P_i \cdot \cos\varphi_i + H_e &= 0 \\ \sum_1^n P_i \cdot \operatorname{sen}\varphi_i + V_e &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6.13]$$

por ser nula la proyección del par de empotramiento sobre ambos ejes.

b) Ecuación de momentos:

Eligiendo como centro de momentos el baricentro G de la sección de empotramiento:

$$\sum_1^n P_i[\operatorname{sen}\varphi_i(z_G - z_i) - \cos\varphi_i(y_G - y_i)] + M_e = 0. \qquad [6.14]$$

Las tres ecuaciones obtenidas son independientes, con una incógnita cada una, y nos permiten despejar directamente los valores de H_e, V_e y M_e. La reacción R_e queda definida mediante las expresiones siguientes que nos dan su intensidad y dirección:

$$\left.\begin{aligned} |R_e| &= \sqrt{H_e^2 + V_e^2} \\ \operatorname{tg}\varphi_e &= \frac{V_e}{H_e} \end{aligned}\right\} \qquad [6.15]$$

6.1.9. Cadenas cinemáticas.

Consideremos, figura 6.32 *a*, dos chapas S_1 y S_2. Cada una de ellas posee tres grados de libertad y las dos, en conjunto, seis.

Vinculemos entre sí ambas chapas, mediante una articulación $A_{1,2}$, denominada *articulación relativa* o *articulación intermedia*, indistintamente (figura 6.32 *b*).

Si a la chapa S_1 le imponemos tres condiciones de vínculo, por ejemplo un apoyo fijo en A y otro móvil en B (figura 6.32 c), quedará inmóvil, y el punto $A_{1,2}$ en que se articulan ambas chapas, considerado como perteneciente a la chapa S_1, estará fijo. En consecuencia, la única posibilidad de movimiento de la chapa S_2 será una rotación en torno de $A_{1,2}$. Si queremos fijarla a tierra, bastará con imponerle *una* condición de vínculo, por ejemplo, un apoyo móvil en C. Es decir que, para fijar a tierra el conjunto de las dos chapas articuladas entre sí, sólo ha sido necesario imponerle cuatro condiciones de vínculo, o sea, las mismas poseen *cuatro* grados de libertad, dos menos que consideradas separadamente.

El sistema constituido por dos chapas articuladas recibe el nombre de *cadena cinemática* de dos chapas.

El conjunto de las dos chapas consideradas independientemente poseía seis grados de libertad, y el hecho de articularlas entre sí le ha res-

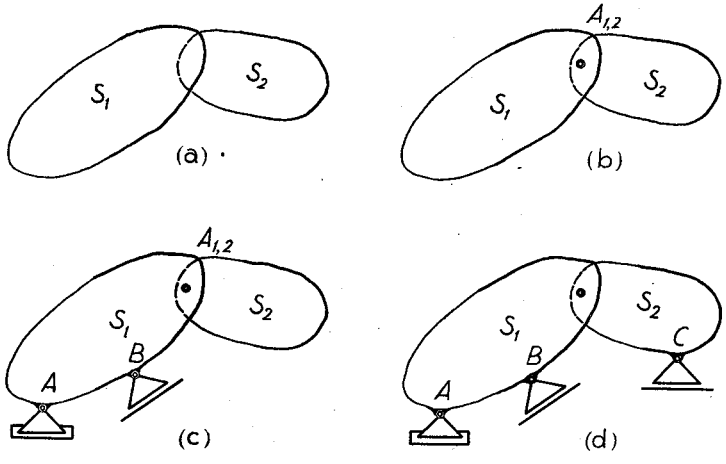


Fig. 6.32.

tringido dos. De ello inferimos que una articulación relativa entre dos chapas restringe dos grados de libertad. Esta articulación constituye un *vínculo interno*, a diferencia de las articulaciones a tierra que son *vínculos externos*. Si recordamos que las articulaciones externas también restrin-

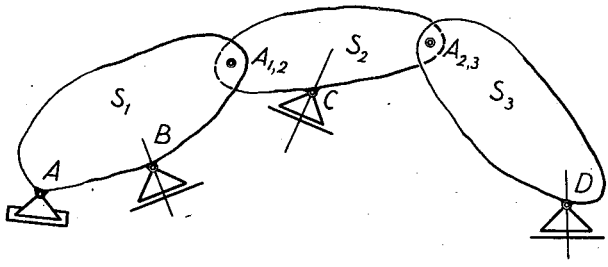


Fig. 6.33.

gen dos grados de libertad, podemos expresar, generalizando, que *cualquier articulación aplicada a una chapa, sea de vínculo externo o interno, restringe dos grados de libertad.*

Sea ahora la cadena cinemática de la figura 6.33 constituida por tres chapas articuladas entre sí. El conjunto de las tres chapas, sin articular, posee $3.3 = 9$ grados de libertad. Una vez articuladas entre sí, para fijar el conjunto de las chapas S_1 y S_2, es necesario, como hemos visto, imponerles cuatro condiciones de vínculo. En esta forma, el punto $A_{2,3}$ en que se articulan entre sí las chapas S_2 y S_3, queda fijo y la única posibilidad de movimiento de S_3 es una rotación en torno de $A_{2,3}$.

En consecuencia, para fijarla a tierra sólo será necesario imponerle una condición de vínculo, un apoyo móvil en D, por ejemplo. Vemos así que el número de grados de libertad se ha reducido, de 9 que poseían las tres chapas independientemente, a 5. Ello, por otra parte, surge de considerar las restricciones que significa la introducción de las articulaciones relativas $A_{1,2}$ y $A_{2,3}$ en el sistema. En efecto, vimos que cada articulación restringe 2 grados de libertad. Al introducir dos articulaciones, el número de grados de libertad del sistema será

$$g = 9 - (2.2) = 5 . \qquad [6.16]$$

Generalizando, para una cadena cinemática de n chapas existen $n - 1$ articulaciones intermedias. Como cada chapa posee tres grados de libertad y cada articulación intermedia restringe dos, el número de grados de libertad de una cadena cinemática de n chapas resulta ser

$$g = 3.n - 2(n - 1) = n + 2 \qquad [6.17]$$

y para fijarla a tierra será necesario imponerle $n + 2$ condiciones de vínculo.

La ubicación de los vínculos en las distintas chapas de una cadena cinemática no puede ser arbitraria. En efecto, consideremos el ejemplo de la figura 6.34. Por tratarse de una cadena de dos chapas, debemos fijarla a tierra mediante cuatro condiciones de vínculo. Si aplicamos, por ejemplo, dos apoyos fijos en la chapa S_1, la cadena no quedará fija, por cuanto, si bien la articulación $A_{1,2}$ será fija, la la chapa S_2 es susceptible de girar en torno de la misma. Por otra parte la chapa S_1, al estar fijada a tierra mediante cuatro condiciones de vínculo, resulta hiperestáticamente sustentada, y las reacciones correspondientes no serán determinables mediante las condiciones de equilibrio de los sistemas planos no concurrentes. En consecuencia, al distribuir entre las distintas chapas los vínculos, debe cuidarse que ninguna resulte con un número de condiciones de vínculo superior a tres, es decir, al número de grados de libertad que posee, considerada independientemente. Por otra parte, no deberán existir vínculos aparentes, problema éste del que nos ocuparemos en detalle al analizar la determinación de las reacciones de vínculo de las cadenas cinemáticas.

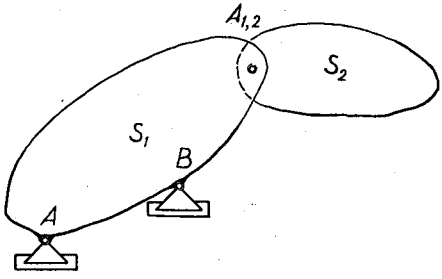


Fig. 6.34.

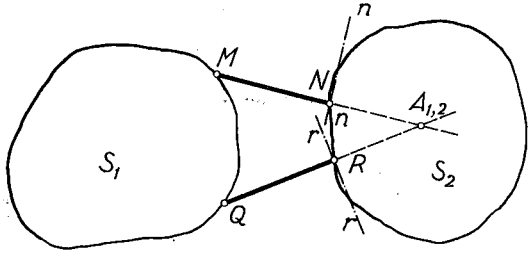


Fig. 6.35.

La articulación relativa entre dos chapas de una cadena cinemática puede también concebirse en la forma que muestra la figura 6.35; es decir, mediante dos bielas. En este caso la articulación relativa será ficticia y se encontrará en el punto de intersección de la prolongación de las bielas. En efecto, supongamos por un momento que la chapa S_1 se encuentre fijada a tierra. La existencia de la biela MN obliga al punto N a desplazarse según n-n, normal a MN y el punto R, por la presencia de la biela QR, deberá forzosamente hacerlo en la dirección r-r. Ahora bien, desde el punto de vista de los grados de libertad que restringen, una biela y un apoyo móvil son equivalentes. Por otra parte, según

vimos en 6.1.5, dos apoyos móviles equivalen a uno fijo ficticio, aplicado en el punto de intersección de sus normales, y análogamente, dos bielas son equivalentes a un apoyo fijo aplicado en el punto de concurrencia de las mismas. En consecuencia, el punto $A_{1,2}$, intersección de las rectas MN y QR, será el polo de rotación de la chapa S_2, es decir una articulación a tierra. Si la chapa S_1 no se encuentra fija, dicha articulación se transforma en *relativa* entre ambas chapas.

Si las dos bielas son paralelas, la articulación relativa ficticia se encontrará ubicada en el punto impropio de la dirección común a aquéllas. En tal caso, el desplazamiento relativo de las chapas será una rotación de polo impropio, es decir, una traslación.

6.1.10. Cadenas cinemáticas de dos chapas. Determinación de las reacciones de vínculo.

Las cadenas cinemáticas constituidas por dos chapas articuladas entre sí poseen, como hemos visto, cuatro grados de libertad, siendo necesario, en consecuencia, para fijarlas en tierra, imponerles cuatro condiciones de vínculo.

Como dichas condiciones de vínculo deben estar distribuidas entre las chapas que constituyen la cadena en forma tal que ninguna de ellas resulte con más de tres condiciones de vínculo, existen sólo dos posibilidades de sustentación:

a) imponiendo tres condiciones a una chapa y una a la restante;

b) mediante dos condiciones de vínculo en cada chapa.

Nos ocuparemos a continuación del análisis de la primera forma de sustentación, dejando para el parágrafo siguiente el estudio de la cadena cinemática de dos chapas con dos condiciones de vínculo en cada una de ellas, sistema que recibe el nombre de arco a tres articulaciones.

Es posible imponer a una chapa tres condiciones de vínculo de tres formas distintas:

1º) Mediante un apoyo fijo y uno móvil, o bien, lo que es equivalente, mediante tres bielas, dos de ellas aplicadas en un punto.

2º) Utilizando tres apoyos móviles, cuyas normales no concurran a un mismo punto, o bien lo que es equivalente, mediante tres bielas no concurrentes.

3º) Empotrando la chapa.

Por ser los casos 1º y 2º equivalentes desde el punto de vista del problema de la determinación de las reacciones de vínculo, nos limitaremos a desarrollar los casos 1º y 3º.

Consideremos la cadena cinemática de la figura 6.36, donde la chapa S_1 se encuentra vinculada con tierra por un apoyo fijo aplicado en A

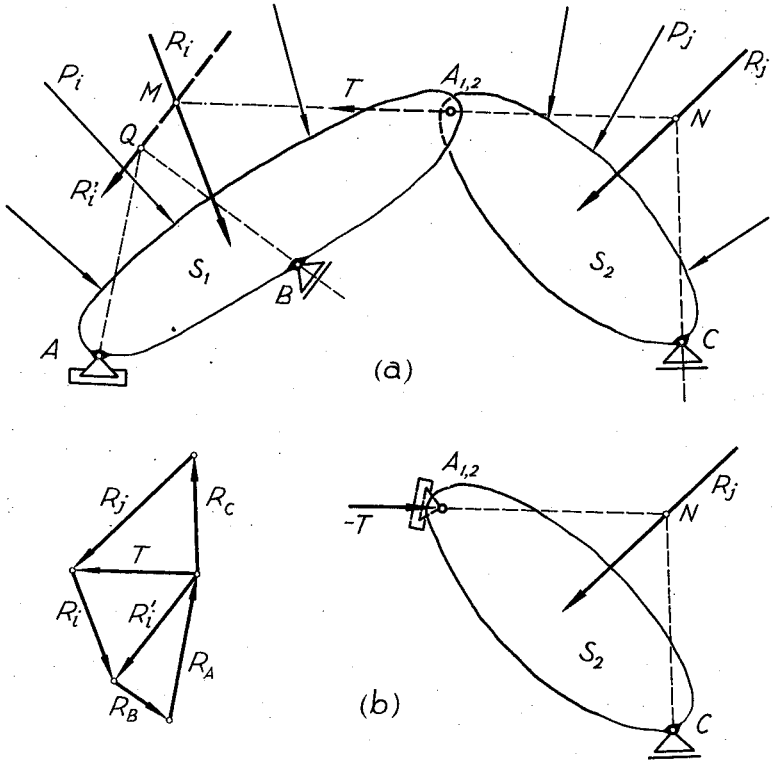


Fig. 6.36.

y uno móvil en B. A su vez, la chapa S_2, articulada a la S_1 en $A_{1,2}$, posee un apoyo móvil en C. La chapa S_1 se encuentra solicitada por un sistema de fuerzas P_i cuya resultante es R_i, y la chapa S_2 por un segundo sistema P_j de resultante R_j. Previamente a la determinación de las reacciones de vínculo es necesario analizar si existe vínculo aparente pues, de ser así, nos encontraríamos ante un problema indeterminado. La chapa S_1 se encuentra isostáticamente sustentada, por cuanto la normal al apoyo móvil aplicado en B no pasa por la articulación fija existente en A. En cuanto a la chapa S_2, también se encuentra isostáticamente sustentada dado que el punto $A_{1,2}$ es fijo por pertenecer

a una chapa fija (la S_1) y, por otra parte, la normal al apoyo móvil aplicado en C no pasa por $A_{1,2}$. En consecuencia, no existe vínculo aparente.

Determinaremos primeramente en forma gráfica las reacciones de vínculo.

El procedimiento general a seguir consiste en suponer sucesivamente cargada una de las chapas y descargada la restante y determinar las reacciones de vínculo parciales correspondientes a cada estado de carga. Por el principio de superposición de efectos, las reacciones definitivas se obtienen como suma geométrica de las reacciones parciales así determinadas. Para aplicar el procedimiento indicado es necesario establecer previamente cuál de las dos chapas se supone cargada en primer término. En efecto, al no existir simetría en las condiciones de sustentación de aquéllas, el proceso de la determinación de las reacciones de vínculo se simplificará o complicará según por qué chapa se comience.

Analizando la cadena cinemática vemos que la chapa S_1, por encontrarse vinculada *directamente* con tierra mediante tres condiciones de vínculo, no requiere de la colaboración de la chapa S_2 a los efectos de su sustentación. En otras palabras, si suprimiéramos del sistema la chapa S_2, las condiciones de la chapa S_1 no resultarían alteradas. En cambio, la chapa S_2 sí requiere la colaboración de S_3, por cuanto dos de las tres condiciones de vínculo necesarias para su sustentación derivan de la existencia de la articulación relativa $A_{1,2}$, que constituye un punto fijo. De ahí que, una vez cargado el sistema, la chapa S_1 no transmita ninguna acción a la S_2, mientras que esta última sí lo hace a la primera.

En consecuencia, por razones de simplificación de procedimientos, conviene suponer descargada primero la chapa S_1.

Hallada la resultante R_j de las fuerzas que solicitan a la chapa S_2, se determina el punto N en que la normal al apoyo móvil C corta la recta de acción de R_j. El punto $A_{1,2}$, a los efectos de la sustentación de la chapa en consideración, se comporta como un apoyo fijo y, en consecuencia, es capaz de reaccionar con una fuerza $-T$, que debe concurrir a N, por cuanto debe constituir con R_C y R_j un sistema de equilibrio (figura 6.36*b*). Descomponiendo el vector representativo de R_j según paralelas a las direcciones CN y $A_{1,2}N$, obtenemos los vectores representativos de R_C y T. La reacción en C así obtenida será definitiva por cuanto, por las razones expresadas antes, las fuerzas que solicitan a la chapa S_1 no influyen sobre el valor de la misma. Cambiando el sentido a T obtenemos una fuerza que corresponde a la acción que transmite la chapa S_2 a la S_1. Componiendo T con R_1, resultante

del sistema aplicado en S_1, obtenemos una nueva resultante R'_i cuya recta de acción pasará por M, punto de intersección de las rectas de acción de las primeras, y cuya intensidad, dirección y sentido derivan del polígono de fuerzas. Una vez obtenida R'_i, el procedimiento para obtener las reacciones R_A y R_B es similar al explicado para la chapa simple con tres condiciones de vínculo, por lo que no entraremos en mayores detalles. El polígono de fuerzas formado por R_j, R_i, R_A, R_B y R_o es, como corresponde a un sistema en equilibrio, cerrado.

Para determinar analíticamente las reacciones de vínculo, una vez referido el sistema a un par de ejes coordenados (figura 6.37), ponemos en evidencia las reacciones adoptando, en lo que respecta a la correspondiente a la articulación fija aplicada en A, sus componentes según los ejes coordenados, H_a y V_a.

Nos encontramos ante un problema cuya resolución significa la determinación de cuatro valores incógnitos: H_a, V_a, R_b y R_c, lo que exige el planteo de cuatro ecuaciones entre las incógnitas mencionadas.

Tratándose de un problema de equilibrio, podemos plantear las ecuaciones que derivan de las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema plano de fuerzas no concurrentes. Disponemos, en consecuencia, de tres ecuaciones a plantear entre las fuerzas exteriores, activas y reactivas, que solicitan el sistema. Pero, por otra parte, al estar en equilibrio el conjunto del sistema, debe también encontrarse en

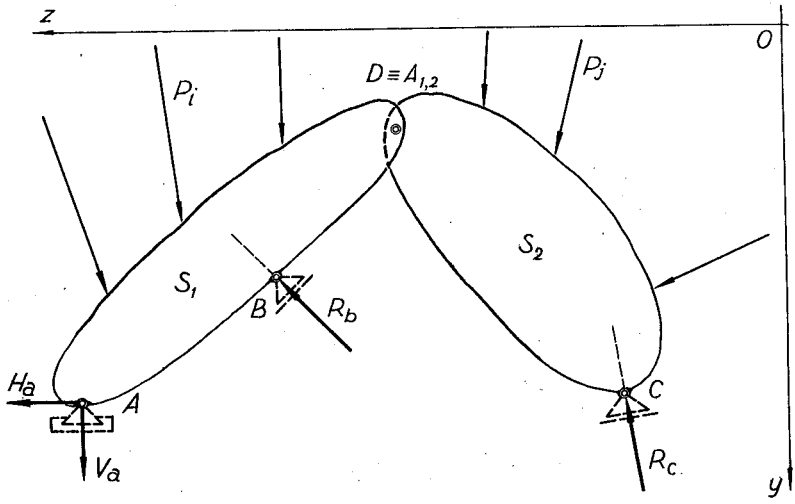


Fig. 6.37.

equilibrio cada una de sus partes. Esta consideración es la que nos conduce a la cuarta ecuación que, conjuntamente con las tres anteriores nos resuelven el problema.

Consideremos las fuerzas exteriores, activas y reactivas, que actúan sobre la chapa S_1 (figura 6.37). Las mismas admiten una resultante. Lo mismo ocurre con las fuerzas aplicadas en la chapa S_2. Ahora bien, como el sistema de las fuerzas exteriores debe estar en equilibrio, también deben encontrarse en equilibrio las mencionadas resultantes parciales. Para que ello sea posible es necesario que tengan igual intensidad, la misma recta de acción y que sus sentidos sean contrarios. Pero, para asegurar el equilibrio de la cadena cinemática, dichas resultantes parciales deben cumplir una condición: que sus rectas de acción pasen por la articulación relativa $A_{1,2}$ entre ambas chapas. Tal el caso de las fuerzas T y $-T$ de la figura 6.38. De no ser así, y si sus rectas de acción correspondieran a las de las fuerzas T_1 y $-T_1$ de la figura 6.38, las mismas tenderían a originar una rotación relativa entre ambas chapas, lo que es imposible por cuanto el sistema debe ser fijo.

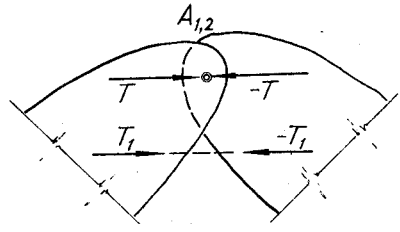


Fig. 6.38.

En consecuencia, la cuarta condición a cumplir por las fuerzas exteriores activas y reactivas es que la resultante de las fuerzas que actúen a la *izquierda* o a la *derecha* de la articulación relativa pase por esta última o, en otros términos, que su momento respecto de la misma sea nulo.

El planteo de las condiciones generales de equilibrio lo haremos utilizando dos ecuaciones de proyección sobre los ejes coordenados y una ecuación de momentos respecto de un punto cualquiera del plano.

Con el objeto de simplificar las ecuaciones elegiremos como centro de momentos para el planteo de la tercera condición el punto A, por cuanto con respecto al mismo se anulan los momentos de H_a y V_a. La cuarta ecuación, como dijéramos, será una ecuación de momentos respecto de $D \equiv A_{1,2}$ de las fuerzas exteriores activas y reactivas aplicadas a la izquierda o derecha de dicho punto, indistintamente. En el caso analizado, tomaremos momentos de las fuerzas aplicadas sobre la chapa S_2, es decir, a la derecha de $A_{1,2}$, pues conducirá a una ecuación con una sola incógnita: R_c. Si tomásemos momentos de las fuerzas aplicadas sobre la chapa S_1, las incógnitas serían tres: H_a, V_a y R_b, y la ecuación resultante no sería independiente.

En consecuencia tendremos:

$$
\left.
\begin{aligned}
&1) \quad H_a + \sum_1^m P_i \cdot \cos\varphi_i + \sum_{m+1}^n P_j \cdot \cos\varphi_j + \\
&+ R_b \cdot \cos\varphi_b + R_c \cdot \cos\varphi_c = 0 \\
&2) \quad V_a + \sum_1^m P_i \cdot \operatorname{sen}\varphi_i + \sum_{m+1}^n P_j \cdot \operatorname{sen}\varphi_j + \\
&+ R_b \cdot \operatorname{sen}\varphi_b + R_c \cdot \operatorname{sen}\varphi_c = 0 \\
&3) \quad \sum_1^m P_i \cdot [\operatorname{sen}\varphi_i(z_A - z_i) - \cos\varphi_i(y_A - y_i)] + \\
&+ \sum_{m+1}^n P_j \cdot [\operatorname{sen}\varphi_j(z_A - z_j) - \cos\varphi_j(y_A - y_j)] + \\
&+ R_b \cdot [\operatorname{sen}\varphi_B(z_A - z_B) - \cos\varphi_B(y_A - y_B)] + \\
&+ R_c \cdot [\operatorname{sen}\varphi_c(z_A - z_C) - \cos\varphi_c(y_A - y_C)] = 0 \\
&4) \quad \sum_{m+1}^n P_j \cdot [\operatorname{sen}\varphi_j(z_D - z_j) - \cos\varphi_j(y_D - y_j)] + \\
&+ R_c \cdot [\operatorname{sen}\varphi_c(z_D - z_C) - \cos\varphi_c(y_D - y_C)] = 0
\end{aligned}
\right\} \quad [6.18]
$$

Como puede observarse, la cuarta ecuación contiene únicamente a R_c como incógnita, lo que permite despejarla de inmediato. Conocido el valor de R_c e introducido en la tercera ecuación, es posible despejar directamente R_b. Finalmente, introduciendo los valores así calculados en las dos primeras ecuaciones, la determinación de H_a y V_a es inmediata.

Analizaremos a continuación el caso 3º, es decir, el correspondiente a una cadena cinemática de dos chapas, una de las cuales se encuentra empotrada en su sección extrema, y la otra vinculada a tierra mediante un apoyo móvil.

Para la solución gráfica del problema se procede en la forma siguiente (figura 6.39 *a*): siendo $A_{1,2}$ un punto fijo de la chapa S_1, se comportará a los efectos de la sustentación de S_2 como una articulación fija a tierra. Si R_j es la resultante de las fuerzas exteriores activas aplicadas en S_2, la reacción en $A_{1,2}$ deberá concurrir al punto N de intersección de las rectas de acción de R_j y R_b. Luego, descomponiendo el vector representativo de R_j en direcciones paralelas a BN y $A_{1,2}N$, obtendremos los vectores representativos de R_b y $-T$. Llamando T *a* la fuerza opuesta a esta última reacción, obtendremos la acción que la chapa S_2 transmite a la S_1 que, compuesta a su vez con R_i resultante de las fuerzas activas aplicadas en la última de las chapas mencionadas,

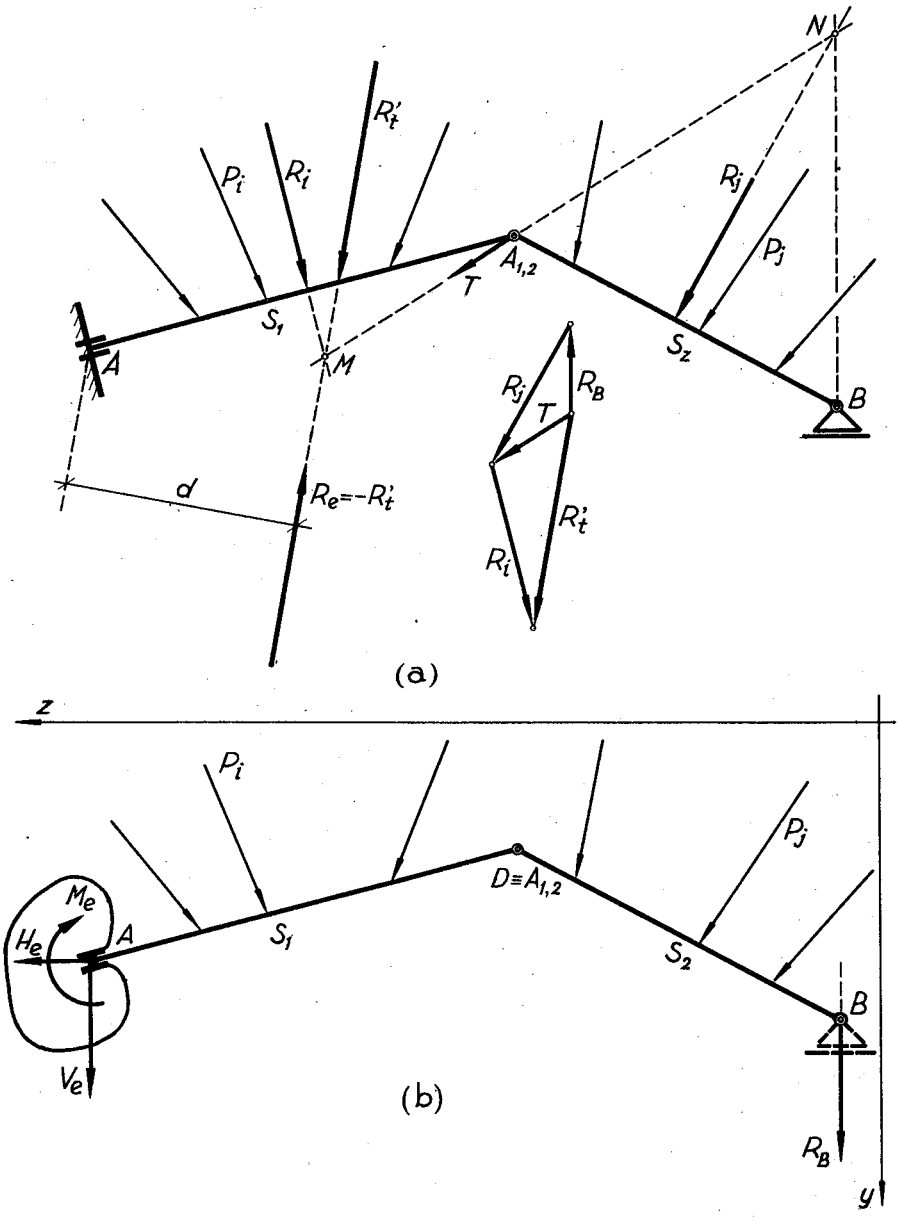

N
R_t'
P_i
R_i
R_j
P_j
$A_{1,2}$
T
S_1
S_2
A
M
B
R_j
R_B
T
d
$R_e=-R_t'$
R_t'
R_i
(a)
z
P_i
P_j
M_e
H_e
A
$D\equiv A_{1,2}$
S_1
S_2
B
V_e
(b)
R_B
y

Fig. 6.89.

nos dará la resultante total R'_t. La recta de acción de esta última resultante pasará por el punto M, y su intensidad, dirección y sentido resultan de componer en el polígono de fuerzas los vectores representativos de T y R_i. Finalmente, la reacción del empotramiento será una fuerza R_e, de igual intensidad y recta de acción que R'_t, pero de sentido contrario. El valor del par de empotramiento estará dado por el momento de R_e respecto de A, es decir, $M_e = R_e . d$. Para determinar analíticamente las reacciones de vínculo en el caso analizado, una vez referido el sistema a un par de ejes coordenados, ponemos en evidencia las reacciones, eligiendo como incógnitas para la reacción de empotramiento, el par de empotramiento y las dos componentes de aquélla, paralelas a los ejes coordenados y pasantes por A (figura 6.39 *b*).

En el caso analizado, la reacción de vínculo en B es vertical, es decir, paralela al eje y, con lo que su proyección sobre el eje z será nula. Las ecuaciones de equilibrio que resuelven el problema son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&1) \quad H_e + \sum_1^m P_i . \cos\varphi_i + \sum_{m+1}^n P_j . \cos\varphi_i = 0 \\
&2) \quad V_e + \sum_1^m P_i . \operatorname{sen}\varphi_i + \sum_{m+1}^n P_j . \operatorname{sen}\varphi_j + R_B = 0 \\
&3) \quad \sum_1^m P_i . [\operatorname{sen}\varphi_i (z_A - z_i) - \cos\varphi_i (y_A - y_i)] + \\
&\quad + \sum_{m+1}^n P_j . [\operatorname{sen}\varphi_j (z_A - z_j) - \cos\varphi_j (y_A - y_j)] + \\
&\quad + R_B (z_A - z_B) + M_e = 0 \\
&4) \quad \sum_{m+1}^n P_j . [\operatorname{sen}\varphi_j (z_D - z_j) - \cos\varphi_j (y_D - y_j)] + \\
&\quad + R_B (z_D - z_B) = 0
\end{aligned}\right\} \quad [6.19]$$

En las mismas se ha elegido, como centro de momentos para el planteo de la ecuación general de momentos, el punto A, por cuanto, con respecto al mismo, se anulan los momentos de H_e y V_e. Por otra parte, en las ecuaciones de proyección sobre los ejes, no aparece el par de empotramiento, por cuanto su proyección es nula.

Para simplificar la resolución del sistema de ecuaciones conviene comenzar por la última ecuación, que nos permite despejar directamente R_b, valor que, introducido en la 3), conduce directamente al valor de M_e. Las dos primeras ecuaciones son independientes en H_e y V_e, por lo que su resolución es inmediata.

6.1.11. Arco a tres articulaciones.

Al enunciar en el parágrafo anterior las distintas formas en que podían distribuirse las condiciones de vínculo en una cadena cinemática constituida por dos chapas articuladas entre sí, mencionamos el caso en que estuvieran aplicadas dos condiciones a cada una de las chapas, constituyendo una estructura denominada *arco a tres articulaciones*. El nombre deriva del hecho que, efectivamente, dicha estructura posee tres articulaciones: dos de ellas absolutas, constituidas por articulaciones fijas en tierra o por dos apoyos móviles en cada chapa —en cuya caso las articulaciones resultan ficticias— y una tercera que vincula ambas chapas entre sí, o *articulación relativa*. En lo que sigue nos limitaremos al análisis del caso en que las articulaciones absolutas estén constituidas por apoyos fijos, por cuanto los correspondientes desarrollos, tanto gráficos como analíticos, son directamente aplicables al caso en que se utilicen como vínculos apoyos móviles o bielas. Consideremos el sistema de la figura 6.40 *a*, sujeto a tierra mediante una articulación fija en A y otra en B.

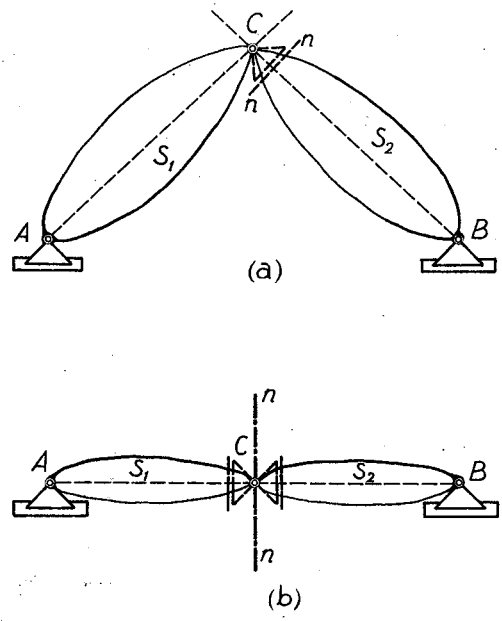


Fig. 6.40.

En primer término analizaremos si el sistema se encuentra isostáticamente sustentado, y qué condiciones se deben cumplir para que no exista vínculo aparente.

Cada una de las chapas del sistema de la figura 6.40 *a* consideradas independientemente, posee dos condiciones de vínculo *directas* a tierra, es decir, una menos de las necesarias para estar fijas. Evidentemente, para cada una de las chapas la condición de vínculo restante debe resultar de su vinculación a la otra chapa. En efecto, consideremos el punto C, articulación relativa, como perteneciente a la chapa S_2. El único grado de libertad que posee esta última chapa se traduce en la posibilidad de

girar en torno del punto B, polo de la rotación. Como consecuencia de la misma, el punto C está obligado a desplazarse en la dirección n-n, normal a BC. Ahora bien, C pertenece también a la chapa S_1 y, por lo dicho, está obligado a desplazarse en una dirección perfectamente establecida. Pero la existencia del apoyo fijo en A, obliga al punto C a desplazarse también según la normal a AC, resultando, en consecuencia, fijo. Es decir, que a los efectos de la sustentación de la chapa S_1, la S_2 se comporta como una biela de dirección BC, o también como un apoyo móvil aplicado en C y de dirección normal a BC. Igual razonamiento podemos hacer para la chapa S_2, para cuya sustentación la existencia de la S_1 equivale a un apoyo móvil aplicado en C, de dirección m-m normal a AC. En última instancia tenemos que en el punto C existen aplicados dos apoyos móviles ficticios, equivalentes a uno fijo, también ficticio, coincidente con C, por lo que este punto resulta fijo.

Al estudiar la chapa simple isostáticamente sustentada mediante un apoyo fijo y otro móvil vimos que, si la normal a este último pasa por la articulación fija, existe vínculo aparente. En consecuencia, en el arco a tres articulaciones, para que exista vínculo aparente, es necesario que el apoyo móvil ficticio a que equivale la existencia de una de las chapas con respecto a la otra pase por la articulación absoluta de esta última. Para que ello sea posible es necesario que las tres articulaciones se encuentren alineadas, como muestra la figura 6.40 *b*. Del análisis de la misma surge que el punto C, común a las dos chapas, es móvil, por cuanto existen aplicados al mismo dos apoyos móviles ficticios, de direcciones coincidentes, permitiendo así desplazamientos de C en la dirección de los mismos.

En consecuencia, se deduce la siguiente condición: *para que en un arco a tres articulaciones no exista vínculo aparente es necesario que las articulaciones no se encuentren alineadas.*

Para la determinación gráfica de las reacciones de vínculo de un arco a tres articulaciones, se procede de la manera siguiente: Supuesta descargada la chapa S_2 del sistema de la figura 6.41, equilibramos la resultante R_i de las fuerzas exteriores activas aplicadas en S_1 con dos fuerzas: una, de dirección CB, es decir, normal al apoyo móvil ficticio aplicado en C a la chapa S_1, y la otra, definida por el punto A y el de intersección M de las rectas de acción de R_i y la reacción en el apoyo móvil ficticio en C. La primera de ellas actúa en el apoyo fijo B y la segunda en el aplicado en A, y corresponden respectivamente a las reacciones de vínculo parciales R'_a y R'_b, originadas exclusivamente por las fuerzas aplicadas en la chapa S_1, encontrándose descargada la S_2.

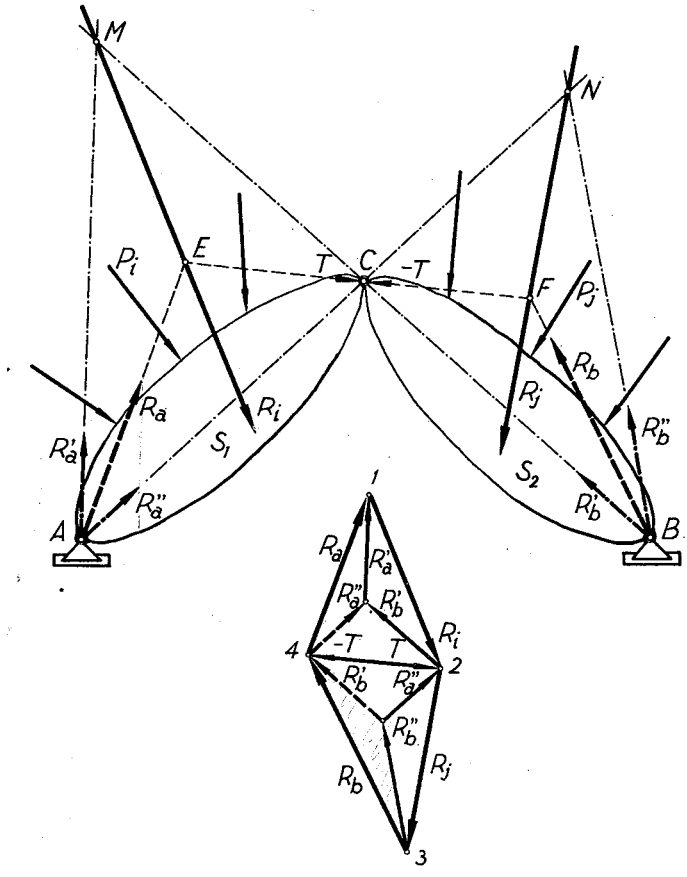


Fig. 6.41.

Determinadas estas primeras reacciones parciales, descargamos la chapa S_1 y suponemos cargada la S_2. Descomponiendo ahora la resultante R_j de las fuerzas exteriores activas aplicadas en S_2 en las direcciones AN y BN obtendremos dos componentes que, cambiadas de signo, corresponden a las reacciones parciales en A y B, R_a'' y R_b'' respectivamente, originadas por el sistema P_j, cuando suponemos cargada la chapa S_2 y descargada la S_1. Trazando ahora en el polígono de fuerzas, por el extremo del vector representativo de R_b' una paralela al vector representativo de R_a'', y por el origen de este último otra paralela al de la primera, obtenemos los vectores representativos de las reacciones parciales correspondientes a cada apoyo, ubicados uno a continuación del otro. De esta manera podemos sumarlos geométricamente, obteniendo así los vectores representativos de las reacciones totales R_a y R_b que nos definen la inten-

sidad, dirección y sentido de las mismas. Trazando por A y B paralelas a dichos vectores obtenemos las rectas de acción de las reacciones buscadas, con lo que queda completamente resuelto el problema de su determinación.

Las intersecciones de las rectas de acción de R_a y R_b con las correspondientes a R_i y R_j determinan respectivamente dos puntos E y F, que deben encontrarse alineados con la articulación relativa C. En efecto, la resultante de R_a y R_i debe pasar por E, y la de R_b y R_j debe hacerlo por F. Por otra parte, el equilibrio del sistema exige que las dos resultantes deben tener la misma recta de acción, igual intensidad y sentidos contrarios y, además, deben pasar por C. En consecuencia, la única posibilidad de que ello se cumpla es que E, C y F se encuentren sobre una misma recta. La intensidad y sentido de la fuerza T, resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de la articulación C, están dados en el polígono de fuerzas por el vector $2\text{-}4$, correspondiendo el vector opuesto $4\text{-}2$, a la resultante $-T$ de las fuerzas que actúan a la derecha de C. Dichas fuerzas corresponden a la reacción *interna* de la articulación relativa C, cuya interpretación es la siguiente: T es la fuerza que es necesario aplicar a la chapa S_2 para mantenerla en equilibrio bajo la acción del sistema P_j si suprimimos la chapa S_1. Análogamente, $-T$ es la fuerza que corresponde aplicar a la chapa S_1 si se suprime la S_2.

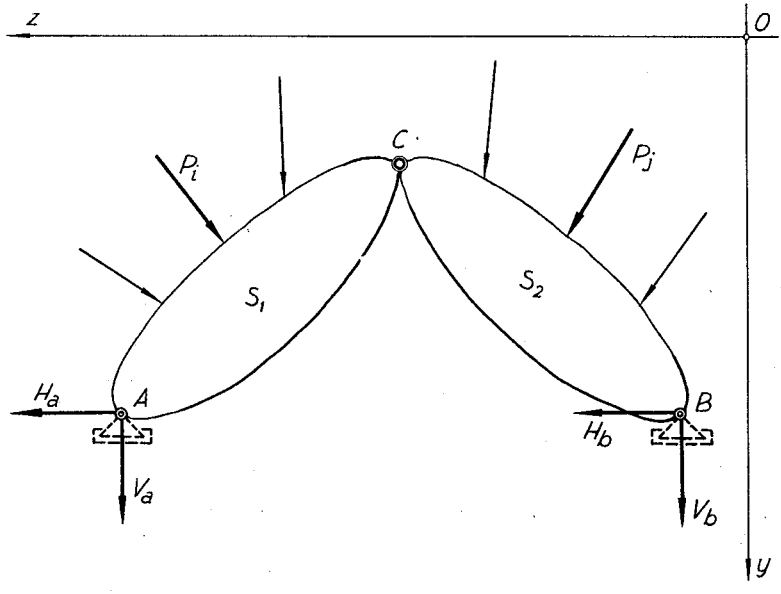


Fig. 6.42.

La determinación analítica de las reacciones de vínculo es simple, y se reduce al planteo de cuatro condiciones de equilibrio, las mismas utilizadas en la resolución de las cadenas cinemáticas estudiadas en el parágrafo anterior.

Consideremos el sistema de la figura 6.42, referido a un par de ejes coordenados. Ponemos en evidencia las reacciones eligiendo como incógnitas las componentes de reacción según las direcciones de los ejes coordenados, y planteamos dos ecuaciones de proyección sobre los mismos, y dos ecuaciones de momentos. Una de estas últimas corresponde a la ecuación general de momentos en que interviene la totalidad de las fuerzas exteriores activas y reactivas, y para la que elegimos como centro de momentos el punto A, por anularse con respecto al mismo los momentos de H_a y V_a. Igualmente podría haberse elegido el punto B. La ecuación restante es la que establece el equilibrio relativo entre ambas chapas, y expresa que la suma de los momentos de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la articulación C debe ser nula con respecto a la misma. En consecuencia, tendremos:

$$\left.\begin{aligned}
&1) \quad H_a + \sum_1^m P_i \cdot \cos\varphi_i + \sum_{m+1}^n P_j \cdot \cos\varphi_j + H_b = 0 \\
&2) \quad V_a + \sum_1^m P_i \cdot \operatorname{sen}\varphi_i + \sum_{m+1}^n P_j \cdot \operatorname{sen}\varphi_j + V_b = 0 \\
&3) \quad \sum_1^m P_i \cdot [\operatorname{sen}\varphi_i(z_A - z_i) - \cos\varphi_i(y_A - y_i)] + \\
&\quad + \sum_{m+1}^n P_j \cdot [\operatorname{sen}\varphi_j(z_A - z_j) - \cos\varphi_j(y_A - y_j)] + \\
&\quad + V_b(z_A - z_B) - H_b(y_A - y_B) = 0 \\
&4) \quad \sum_{m+1}^n P_j \cdot [\operatorname{sen}\varphi_j(z_C - z_j) - \cos\varphi_j(y_C - y_j)] - \\
&\quad - H_b(y_C - y_j) + V_b(z_C - z_j) = 0
\end{aligned}\right\} \quad [6.20]$$

Las ecuaciones 3) y 4) constituyen un sistema particular de dos ecuaciones con dos incógnitas: H_b y V_b. Resueltas las mismas e introducidos los valores obtenidos en las 1) y 2), es posible despejar directamente los valores de H_a y V_a.

Consideraremos a continuación, para el arco a tres articulaciones, el estado particular de cargas constituido por un sistema de fuerzas P_i aplicado en la chapa S_1 (figura 6.43) y otro P_j en la chapa S_2, cuyas respectivas resultantes tengan la misma recta de acción, igual intensidad y sentidos contrarios.

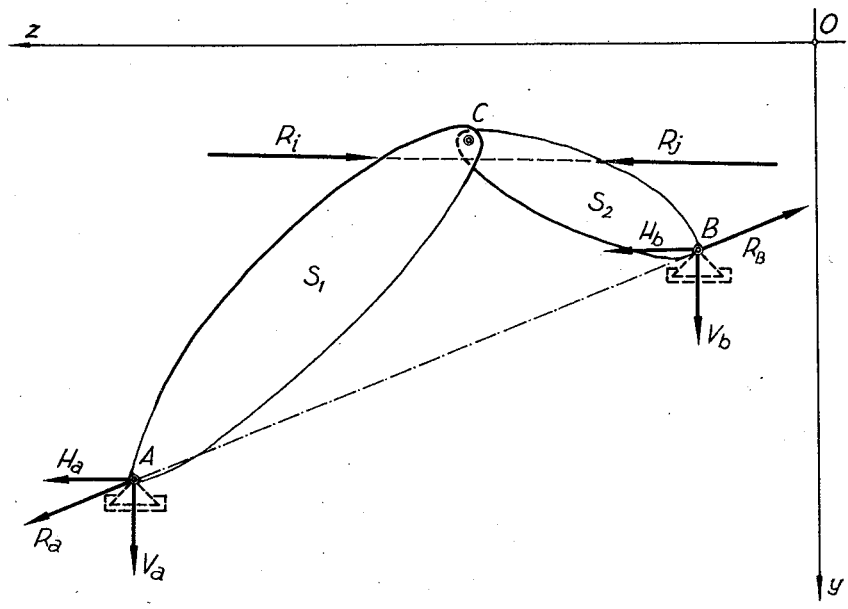


Fig. 6.43.

Al plantear las cuatro ecuaciones de equilibrio, elegimos como centro de momentos para la condición general de momentos al punto B y, además, teniendo presente el Teorema de Varignon, reemplazamos los sistemas P_i y P_j por sus respectivas resultantes R_i y R_j.

Como consecuencia de ello, las ecuaciones se simplifican, por cuanto, al ser iguales las proyecciones de R_i y R_j, sus proyecciones se anulan mutuamente. Además, la suma de los momentos de dichas resultantes, es nula respecto de cualquier punto del plano, por la razón indicada. En consecuencia, la expresión de las ecuaciones de equilibrio será la siguiente:

$$\left.\begin{array}{lll}
1) & & H_a + H_b = 0 \\
2) & & V_a + V_b = 0 \\
3) & \sum M_T^B & V_a.(z_B - z_A) - H_a.(y_B - y_A) = 0 \\
4) & \sum M_i^C & V_a.(z_C - z_A) - H_a.(y_C - y_A) + \\
 & & + R_i[\operatorname{sen}\varphi_i(z_c - z_i) - \cos\varphi_i(y_c - y_i)] = 0
\end{array}\right\} [6.21]$$

Discutiremos a continuación las ecuaciones [6.21] con el objeto de llegar a alguna conclusión respecto de las reacciones de vínculo.

De las 1) y 2) obtenemos respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} H_a &= -H_b \\ V_a &= -V_b \end{aligned}\right\} \qquad [6.22]$$

Si ello ocurre, existen las siguientes posibilidades para las reacciones de vínculo:

a) Que R_a y R_b constituyan un par de fuerzas.

b) Que ambas reacciones tengan la misma recta de acción, igual intensidad y sentido contrario. En este caso la recta de acción resultaría ser la que pasa por A y B.

c) Que las dos reacciones sean nulas.

La tercera ecuación nos dice que el momento de R_a respecto de B es nulo, con lo que queda descartada la posibilidad a), por cuanto el momento de un par es constante con respecto a un punto cualquiera de su plano. Finalmente, la ecuación 4) expresa que el momento de R_a respecto de C debe ser opuesto al de R_i respecto del mismo punto. Como este último momento no es nulo, queda así descartada la posibilidad c). En consecuencia, cuando un arco a tres articulaciones se encuentra cargado en forma tal que las resultantes de las fuerzas que actúan en una y otra chapa tengan la misma recta de acción, igual intensidad y sentidos contrarios, las reacciones de vínculo estarán a su vez constituidas por dos fuerzas de igual intensidad, sentidos contrarios y cuya recta de acción común queda determinada por los puntos en que se encuentran aplicadas las articulaciones fijas. Esta conclusión se extiende también al caso en que los dos sistemas de fuerzas se reduzcan a sendos pares de fuerzas, opuestos.

6.1.12. Cadenas cinemáticas de tres chapas.

Las cadenas cinemáticas de tres chapas requieren, para su sustentación, cinco condiciones de vínculo, distribuidas en forma tal que ninguna de las chapas posea más de tres condiciones absolutas.

De acuerdo con la distribución de los vínculos entre las tres chapas, pueden presentarse los cinco casos siguientes (figura 6.44):

a) Tres condiciones de vínculo en una chapa extrema, una en la central y otra en la restante.

b) Dos condiciones de vínculo en una chapa extrema, dos en la central y una en la restante.

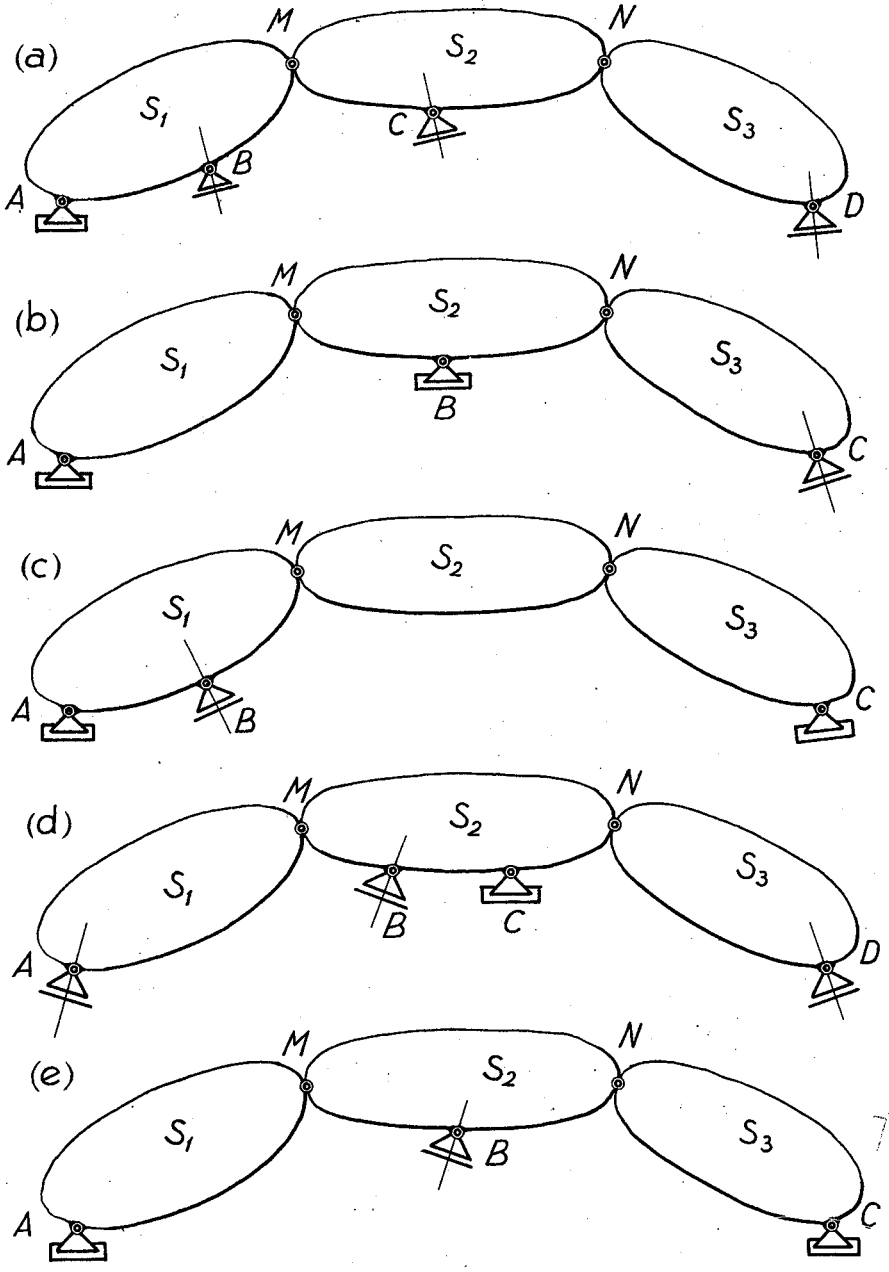

(a)
M
N
S_1
S_2
S_3
A
B
C
D
(b)
M
N
S_1
S_2
S_3
A
B
C
(c)
M
N
S_1
S_2
S_3
A
B
C
(d)
M
N
S_1
S_2
S_3
A
B
C
D
(e)
M
N
S_1
S_2
S_3
A
B
C

Fig. 6.44.

c) Tres condiciones de vínculo en una chapa extrema, ninguna en la central y dos en la restante.

d) Tres condiciones de vínculo en la chapa central y una en cada una de las extremas.

e) Dos condiciones de vínculo en cada chapa extrema y una en la central.

La resolución gráfica del caso a), es similar a la correspondiente al caso a) del parágrafo 6.1.10. En efecto, la chapa S_3 se encuentra fijada en tierra mediante la articulación N y el apoyo móvil D. Halladas las reacciones D y N originadas por el sistema de cargas aplicado en la chapa S_3, la segunda de ellas, cambiada de sentido, corresponderá a la acción ejercida por dicha chapa sobre la S_2. Compuesta con la resultante de las cargas que actúan en ésta, obtenemos una nueva resultante que origina reacciones en C y M. Esta última reacción, cambiada a su vez de signo, representa la acción que, sobre la chapa S_1, ejercen las cargas actuantes sobre S_2 y S_3, acción que, compuesta con las fuerzas aplicadas en S_1, nos permite determinar las reacciones en A y B en la forma conocida.

El caso b) se resuelve determinando primeramente las reacciones en C y N originadas por las cargas aplicadas en S_3. Cambiando el sentido a la última de las reacciones mencionadas, obtenemos la acción que las cargas actuantes en S_3 ejercen sobre la S_2. Finalmente, el conjunto de las chapas S_1 y S_2 se resuelve como un arco a tres articulaciones, en la forma vista en 6.1.11.

El caso c) difiere un tanto de los anteriores. En efecto, el conjunto de las chapas S_2 y S_3, articuladas entre sí en N, posee dos articulaciones fijas a tierra: C, apoyo fijo y M articulación a una chapa fija, la S_1. En consecuencia, configura un arco a tres articulaciones. Resuelto el sistema S_2, S_3, la correspondiente reacción en M, cambiada de signo, corresponderá a la acción transmitida a S_1 por las fuerzas aplicadas en S_2, S_3, y que corresponde considerar como una fuerza exterior a componer con las directamente aplicadas en S_1. Finalmente, las reacciones en A y B de esta última chapa, se determinan en la forma conocida.

En el caso d) se determinan en las chapas extremas, articuladas en M y N y simplemente apoyadas en A y D respectivamente, las correspondientes reacciones de vínculo. Cambiando el sentido de las reacciones en M y N obtenemos las acciones transmitidas a la chapa S_2 por las chapas vecinas que corresponde considerar, como se ha dicho, como fuerzas exteriores aplicadas en S_2. Finalmente, la determinación de las reacciones de vínculo en B y C se efectúa en la forma corriente.

El caso e) es de resolución un tanto más laboriosa por cuanto no existe en la cadena cinemática ninguna chapa que posea tres condiciones de vínculo directas a tierra. Por esta razón, desarrollaremos en forma detallada la determinación de las reacciones de vínculo, mediante un ejemplo. Sea la cadena cinemática isostáticamente sustentada de la figura 6.45, en la que las chapas S_1, S_2 y S_3 se encuentran solicitadas por

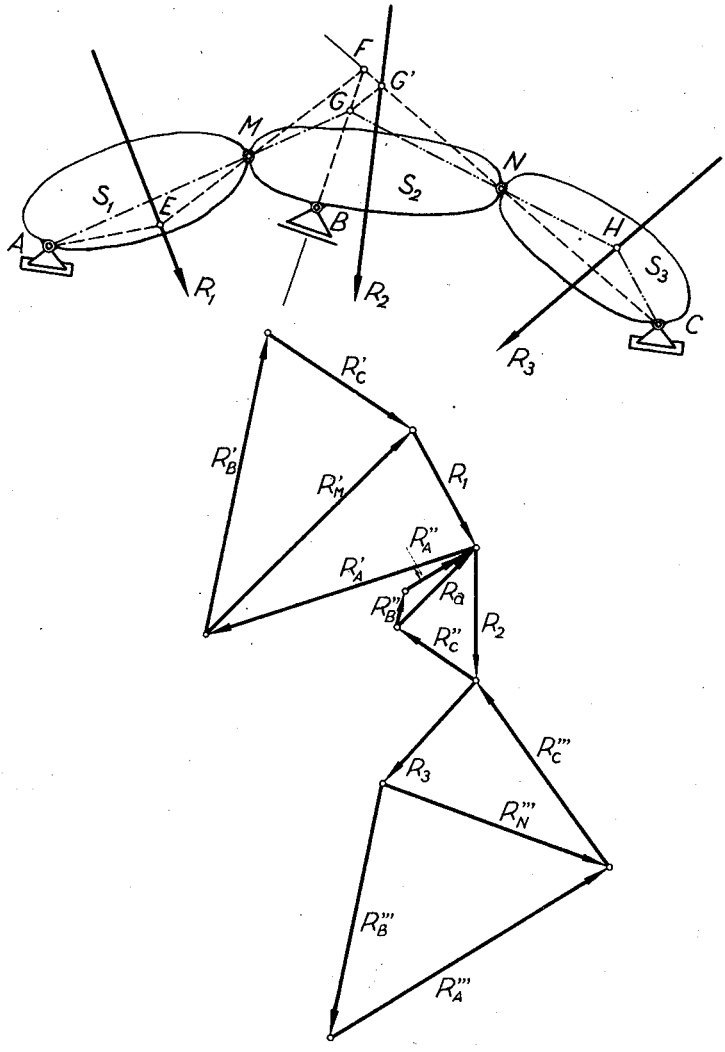


Fig. 6.45.

tres sistemas de fuerzas, cuyas respectivas resultantes llamaremos R_1, R_2, y R_3.

La determinación gráfica de las reacciones de vínculo se efectúa en forma similar a la utilizada para el arco a tres articulaciones: se suponen sucesivamente descargadas dos de las chapas y cargada la restante, determinándose en cada caso reacciones de vínculo parciales que, sumadas, en virtud del principio de superposición de efectos, nos permite obtener las reacciones definitivas.

Comenzando por la chapa S_1, debemos analizar previamente en qué forma se encuentra sustentada. La misma posee un apoyo fijo en A. Por otra parte, la biela NC (chapa S_3) y el apoyo móvil B configuran un apoyo fijo ficticio en F, para la chapa S_2, que con el punto M, articulación relativa entre S_2 y S_1, definen un apoyo móvil ficticio para esta última chapa, aplicado en M. En consecuencia, descomponiendo R_1 en las direcciones AE y EM, y cambiando el sentido a dichas componentes, obtenemos las reacciones en A y M debidas a R_1. La reacción en M concurre en F con la normal al apoyo móvil B y la biela NC, por lo que, descomponiéndola en dichas direcciones, obtenemos las reacciones R'_B y R'_C.

Pasando a considerar la chapa S_2, vemos que se encuentra sustentada por un apoyo móvil B y las dos bielas AM y CN. En consecuencia, descomponiendo la resultante R_2 de las fuerzas exteriores aplicadas a dicha chapa en las direcciones de las bielas mencionadas y de la normal al apoyo móvil B obtenemos, una vez cambiado el sentido de las mismas, las reacciones parciales R''_A, R''_B y R''_C. Para la descomposición anterior se ha utilizado como recta auxiliar de Culmann la GG'.

Finalmente, operando con la chapa S_3, el proceso es similar al utilizado con la chapa S_1. En efecto, la chapa S_2, posee un apoyo móvil en B y la biela AM. Ambas determinan un apoyo fijo ficticio en G, punto que, unido con la articulación relativa N, define la dirección normal a un apoyo móvil ficticio aplicado a la chapa S_3 en N. Descomponiendo R_3 en las direcciones CH y NH, y cambiando el sentido a estas componentes, obtenemos las reacciones en C y N originadas por R_3. Esta última reacción, descompuesta a su vez en las direcciones BG y AG, nos determina las reacciones parciales R'''_A y R'''_B. Finalmente, componiendo en cada apoyo las reacciones de vínculo parciales obtenidas en la forma indicada, obtenemos las reacciones totales de vínculo (en la figura 6.45 hemos prescindido de la composición final indicada). Como control debe tenerse que las reacciones definitivas R_A, R_B y R_C deben formar, con las resultantes parciales R_1, R_2 y R_3, un polígono de fuerzas cerrado.

La determinación analítica de las reacciones de vínculo de la cadena cinemática de tres chapas isostáticamente sustentada significa la resolución de un problema de cinco incógnitas, una por cada reacción o componente de reacción. Para ello es necesario plantear cinco ecuaciones entre las cinco incógnitas mencionadas, lo que siempre es posible. En efecto, el sistema constituido por las fuerzas exteriores, activas y reactivas, debe encontrarse en equilibrio. De ahí que las condiciones necesarias y suficientes para asegurar dicho equilibrio, nos proporcionen tres de las cinco ecuaciones necesarias. Las dos restantes las obtenemos al plantear las condiciones particulares de equilibrio relativo entre las chapas, y se traducen en dos ecuaciones de momentos respecto de las dos articulaciones intermedias, en las que intervienen exclusivamente las fuerzas, activas y reactivas, ubicadas a uno u otro lado de dichas articulaciones. Dichas sumas de momentos deben necesariamente ser nulas pues, de lo contrario, no existiría equilibrio. Llamando en forma simbólica H a las proyecciones horizontales, tanto de las fuerzas activas como de las reacciones incógnitas, y V a las correspondientes verticales, el sistema de ecuaciones a plantear para cualquiera de los casos e) á a), será el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma H &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \\ \Sigma M^{o} &= 0 \\ \Sigma M_i^{m} &= 0 \\ \Sigma M_d^{n} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6.23]$$

donde M^o corresponde a la suma de los momentos de todas las fuerzas exteriores, activas y reactivas, respecto de un punto cualquiera del plano; M_i^m, a la de los momentos de las fuerzas de la izquierda de M respecto de dicho punto, y M_d^n a la de las ubicadas a la derecha de N con respecto al mismo. El orden en que convenga resolver las distintas ecuaciones depende, en cada caso, de la ubicación y distribución de los vínculos entre las distintas chapas, a efectos de simplificar el problema de la determinación de las incógnitas.

6.1.13. Cadenas cinemáticas de más de tres chapas.

La determinación de las reacciones de vínculos en los sistemas constituidos por más de tres chapas, no ofrece mayores dificultades.

En lo que se refiere a la determinación gráfica de las reacciones, el proceso operativo es similar al analizado en los parágrafos anteriores.

En cuanto a la resolución analítica del problema, como hemos visto, consiste en plantear tantas ecuaciones como incógnitas presente el problema. Para una cadena cinemática constituida por n chapas, que requiere para su fijación a tierra la imposición de $n + 2$ condiciones de vínculo, la existencia de estos últimos implica la necesidad de determinar $n + 2$ reacciones incógnitas, lo que requiere el planteo de $n + 2$ ecuaciones entre éstas y las fuerzas exteriores activas. Ello siempre es posible. En efecto, el equilibrio del sistema de fuerzas exteriores activas y reactivas exige a las mismas el cumplimiento de tres condiciones, lo que nos permite el planteo de tres ecuaciones. Siendo n el número de chapas, existirán siempre $n - 1$ articulaciones intermedias. Como el equilibrio relativo entre chapas exige que la suma de los momentos de las fuerzas ubicadas a uno u otro lado de cada articulación sea nula con respecto a la misma, podremos, en consecuencia, plantear $n - 1$ ecuaciones de este tipo, que sumadas a las tres anteriores nos completan el número necesario para que el problema tenga solución.

6.1.14. Cadenas cinemáticas cerradas.

En los parágrafos anteriores nos hemos ocupado del análisis del equilibrio y de la determinación de las reacciones de vínculo originadas por fuerzas aplicadas en cadenas cinemáticas constituidas por una serie de chapas articuladas entre sí, pero en las que las chapas extremas sólo lo estaban a *una* chapa, mientras que las intermedias lo eran a *dos*. Tales cadenas cinemáticas se denominan *abiertas*, en contraposición a las cadenas *cerradas*. Entenderemos por cadenas cinemáticas *cerradas* aquellas cadenas en que sus chapas extremas se articulan entre sí. Resulta así que la totalidad de las chapas que integran la cadena se encuentran articuladas a dos chapas vecinas.

Al estudiar los grados de libertad de una cadena abierta, vimos que su número era de $n + 2$, siendo n la cantidad de chapas. Por otra parte, sabemos que una articulación, fija o relativa, siempre restringe dos grados de libertad. En consecuencia, si articulamos entre sí las chapas extremas de una cadena constituida por n de ellas, obteniendo una cadena cerrada, el número de grados de libertad de esta última será igual al de la abierta que la origina menos la restricción debida a la articulación entre chapas extremas, es decir $n + 2 - 2 = n$. En otras palabras,

el número de grados de libertad de una cadena cinemática cerrada es igual al número de chapas que la integran.

Consecuentemente, para fijar a tierra una cadena cinemática cerrada de n chapas, será necesario imponerle n condiciones de vínculo, distribuidas en forma tal que ninguna chapa resulte vinculada a tierra por más de tres de ellas.

La cadena cerrada más simple es la constituida por sólo tres chapas, figura 6.46, que posee tres grados de libertad, es decir, el mismo número que una chapa aislada en el plano. En consecuencia, una cadena cerrada de tres chapas se comporta, desde el punto de vista cinemático, como una chapa rígida. Para fijar a tierra esta cadena será necesario imponerle tres condiciones de vínculo las que, de acuerdo con la forma en que se encuentren distribuidas, conducen a las siguientes variantes en cuanto a la sustentación; figura 6.46 *a*, *b*, *c*.

La determinación de las reacciones de vínculo en una cadena cerrada de tres chapas, solicitada por un sistema de fuerzas exteriores, no ofrece mayores dificultades, tanto si se la encara por procedimientos gráficos como analíticos. En efecto, siendo tres el número de incógnitas a determinar, el problema encarado en forma analítica se resuelve mediante el planteo de las ecuaciones derivadas de las condiciones generales de equilibrio de los sistemas planos de fuerzas aplicados a cuerpos rígidos, ya que la cadena se comporta como tal. En cuanto a la solución gráfica, es la correspondiente a la chapa simple, sustentada mediante tres condiciones de vínculo, por lo que no entraremos en mayores detalles.

Nos ocuparemos a continuación sólo de la cadena cinemática cerrada de cuatro chapas, por cuanto el estudio de las de mayor número de ellas escapa, por su complejidad, a los alcances del presente curso.

Siendo cuatro el número de grados de libertad de la cadena cerrada de cuatro chapas, será necesario imponerle cuatro condiciones de vínculo para sustentarla isostáticamente. De acuerdo con la naturaleza de los

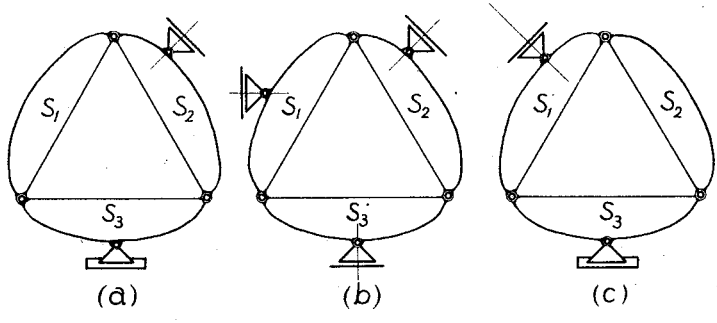


Fig. 6.46.

apoyos que materializan los vínculos y a su distribución entre las distintas chapas, resultan los casos siguientes:

a) Tres condiciones en una chapa y una en una chapa adyacente.

b) Tres condiciones en una chapa y una en otra no adyacente.

c) Dos condiciones en una chapa y dos en otra adyacente.

d) Dos condiciones en una chapa y dos en otra no adyacente.

e) Dos condiciones en una chapa y una en cada una de las chapas adyacentes.

f) Dos condiciones en una chapa, una en una de las adyacentes y otra en la no adyacente.

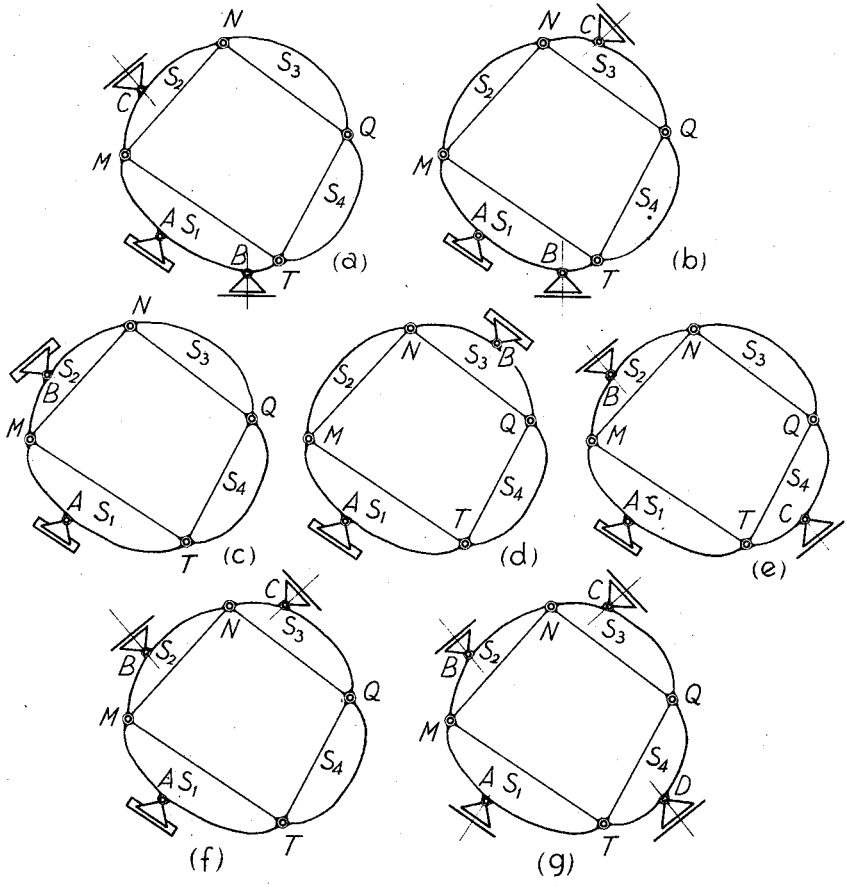


Fig. 6.47.

g) Una condición de vínculo en cada chapa.

La figura 6.47 muestra en forma detallada los distintos casos de sustentación descritos.

De los siete casos indicados, los seis primeros admiten una solución directa, sea gráfica o analítica, mientras que el último sólo es resoluble en forma indirecta, como veremos más adelante al tratarlo en detalle.

Analizaremos a continuación, para cada uno de los casos indicados, la determinación de las reacciones de vínculo originadas por cargas aplicadas en las distintas chapas.

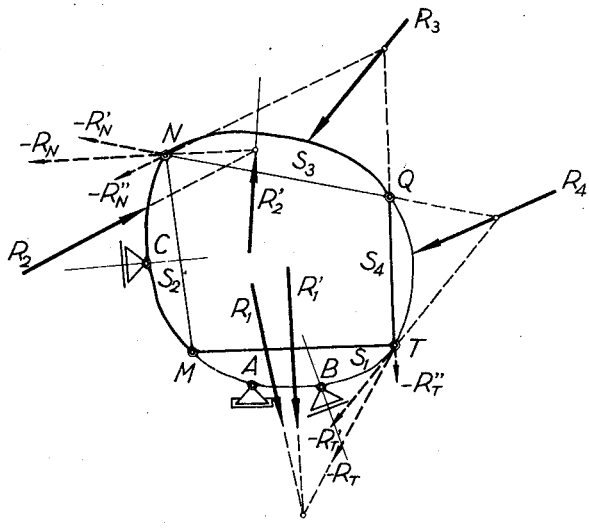


Fig. 6.48.

Caso a). — Supongamos la cadena cinemática cerrada de la figura 6.48, sujeta a la acción de fuerzas cuyas resultantes en cada chapa sean R_1, R_2, R_3 y R_4. Las chapas S_1 y S_2, articuladas entre sí en M y sustentadas mediante cuatro condiciones de vínculo, constituyen un sistema isostáticamente sustentado. En consecuencia, los puntos N y T serán fijos, y el conjunto de las chapas S_3 y S_4 se comportará como un arco a tres articulaciones. Determinadas las reacciones del mismo R_N y R_T, estas fuerzas, cambiadas de sentido, constituyen nuevas cargas exteriores para el sistema $S_1 - S_2$ que, sumadas geométricamente con R_2 y R_1 respectivamente, conducen a las resultantes definitivas R'_1 y R'_2.

La determinación de las reacciones de vínculo R_A, R_B y R_C es inmediata, tanto gráfica como analíticamente, por constituir el mismo caso analizado en la figura 6.36 para la cadena cinemática de dos chapas.

Caso b). — En este caso, el conjunto de las chapas S_2, S_3 y S_4, figura 6.49, se comporta como una cadena cinemática abierta de tres chapas, con dos condiciones de vínculo en cada una de las chapas extremas (puntos M y T, fijos por pertenecer a una chapa fija) y una en la chapa intermedia. La determinación de las reacciones en M, C y T se efectúa en la forma indicada para el caso *e*) del parágrafo 6.1.12.

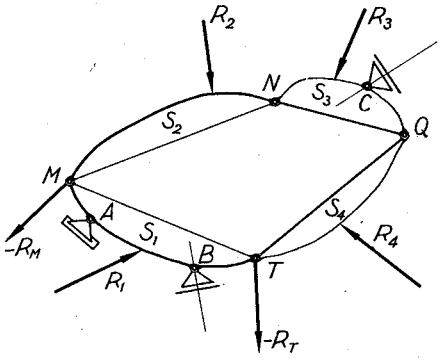


Fig. 6.49.

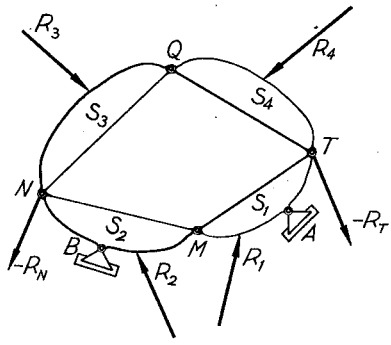


Fig. 6.50.

Caso c). — El conjunto de las chapas S_1 y S_2 constituye un arco a tres articulaciones (figura 6.50). En consecuencia, los puntos N y T serán fijos y el sistema formado por S_3 y S_4 constituirá, a su vez, otro arco a tres articulaciones. Una vez determinadas las reacciones R_N y R_T de este último arco a tres articulaciones, las mismas, cambiadas de signo, se consideran como fuerzas exteriores aplicadas al sistema $S_1 - S_2$, la determinación de cuyas reacciones es inmediata.

Caso d). — Para la determinación de las reacciones de vínculo correspondientes a este caso es necesario considerar dos variantes: 1º) cuando las fuerzas exteriores activas actúan en chapas vinculadas *directamente* a tierra, y 2º) cuando las mismas se encuentran aplicadas en chapas *sin vinculación directa* a tierra.

En el sistema de la figura 6.51 *a*, para la determinación de las reacciones de vínculo, supondremos primeramente descargadas las chapas S_2 y S_4 y cargadas las dos restantes.

Las chapas S_2 y S_4, a los efectos de la sustentación de las otras dos chapas, se comportan como dos bielas de direcciones MN y QT respectivamente las que, a su vez, equivalen a una articulación relativa ficticia $A_{1,3}$, ubicada en la intersección de las mismas. En consecuencia, el conjunto de las chapas S_1 y S_3 se comportará como un arco a tres articulaciones, cuyas reacciones en A y B, determinadas en la forma conocida, constituyen las reacciones parciales debidas exclusivamente a las fuerzas aplicadas en S_1 y S_3. Analizaremos a continuación la forma de determinar las reacciones de vínculo en A y B debidas a las fuerzas actuantes en las dos chapas restantes.

Para ello, se consideran independientemente las acciones sobre cada chapa, sumándose luego las reacciones parciales así obtenidas. En la

figura 6.51 *b*, hemos supuesto cargada la chapa S_2 y descargada la S_4. Describiremos a continuación el proceso operativo, que es similar para la situación inversa, es decir, cuando se encuentra cargada la chapa S_4 y descargada la S_2, por lo que nos limitaremos al primer caso.

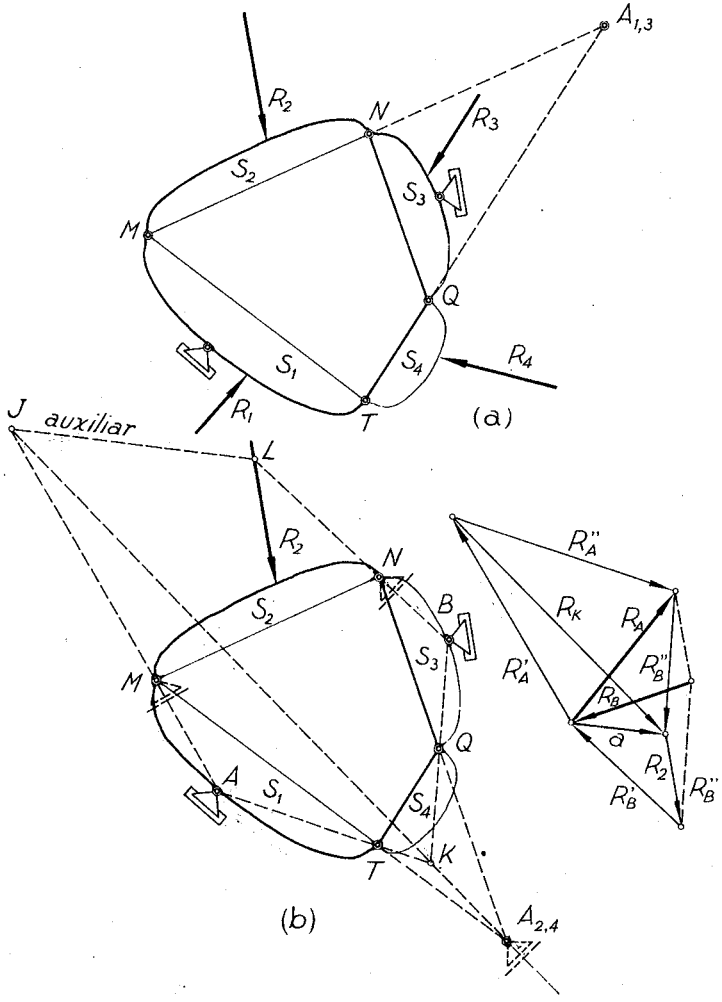


Fig. 6.51.

En primer término, corresponde analizar en qué forma se encuentra sustentada la chapa S_2, es decir, cómo se materializan las tres condiciones de vínculo necesarias para su sustentación.

La chapa S_2 se articula en M y N con las S_1 y S_3, respectivamente. Al estar estas últimas articuladas a tierra en A y B, podemos admitir dos bielas AM y BN o, lo que es equivalente, dos apoyos móviles ficticios aplicados en M y N, de direcciones respectivamente normales a las de las bielas mencionadas.

Por consideraciones análogas llegamos a la conclusión de que la chapa S_4 posee dos apoyos móviles ficticios aplicados en Q y T de direcciones normales a BQ y AT respectivamente, equivalentes a un apoyo fijo, también ficticio, aplicado en K. Por otra parte, las chapas S_2 y S_4 se encuentran articuladas entre sí por la articulación relativa ficticia $A_{2,4}$ que, con K, define para la chapa S_2 un apoyo móvil ficticio normal a $KA_{2,4}$, que constituye la tercera condición de vínculo de dicha chapa.

Hallados así los tres apoyos móviles ficticios que sustentan la chapa S_2, será necesario equilibrar la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas en la misma, R_2, mediante tres fuerzas cuyas rectas de acción sean AM, BN y $KA_{2,4}$. Las dos primeras nos dan reacciones parciales en A y B; finalmente, descomponiendo la tercera en las direcciones AK y BK, obtenemos dos nuevas reacciones parciales que, sumadas geométricamente a las anteriores, nos dan las reacciones buscadas.

Caso e). — La determinación de las reacciones de vínculo en este caso resulta un tanto más laboriosa, siendo necesario cargar sucesivamente cada chapa y determinar, en cada caso, la forma en que la chapa cargada se encuentra sustentada. Una vez conocidos los tres vínculos, reales o ficticios, se procede a hallar las reacciones en los mismos. A continuación, las reacciones en los vínculos ficticios se descomponen en las direcciones que permitieron definirlos y que concurren a los restantes vínculos reales del sistema, obteniéndose así las reacciones en los mismos. En la figura 6.52 *a*, *b* y *c*, se han considerado las tres posibilidades distintas de carga que presenta este caso, indicándose las construcciones que permiten determinar los vínculos de la chapa cargada, en cada caso. No se ha procedido a indicar los sucesivos pasos de descomposición de fuerzas, por su sencillez.

Caso f). — Este caso es similar al anterior, y se resuelve en forma análoga, por lo que no entraremos en mayores detalles al respecto.

Caso g). — Como dijéramos anteriormente, la determinación de las reacciones de vínculo de una cadena cinemática cerrada de cuatro chapas con una condición de vínculo en cada una de ellas y cargada en forma cualquiera, no admite solución directa. Para resolver el problema es nece-

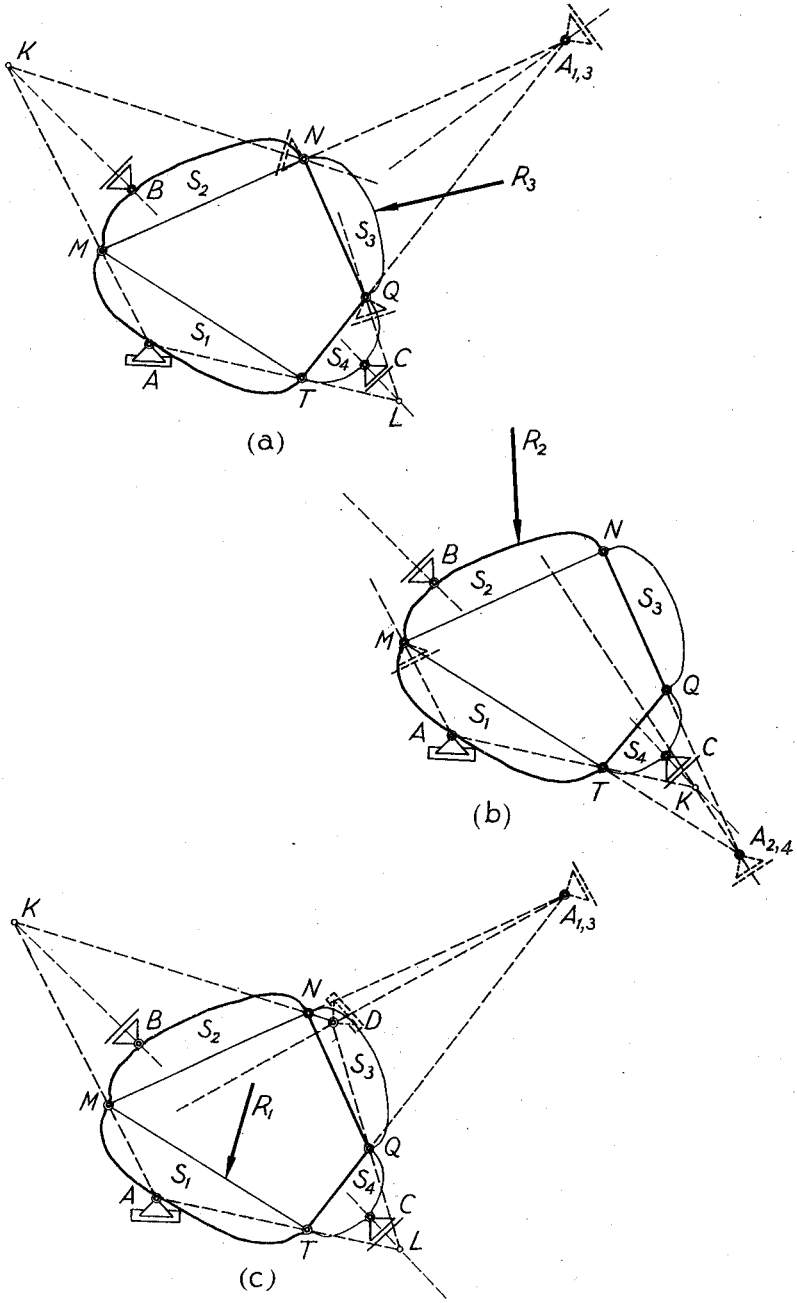

K
A1,3
N
B
S2
R3
M
S3
Q
S1
S4
C
A
T
L
(a)
R2
N
B
S2
S3
M
Q
S1
A
S4
C
T
K
A2,4
(b)
K
A1,3
N
D
B
S2
S3
M
R1
Q
S1
S4
A
C
T
L
(c)

Fig. 6.52.

sario recurrir a la solución indirecta de *Henneberg* *, por cuanto, al no existir ningún punto inmovilizado mediante vínculos directos a tierra, es imposible establecer los vínculos de cada chapa.

La solución indirecta de Henneberg permite encarar en dos formas distintas la solución del problema. La primera de ellas opera manteniendo cerrada la cadena cinemática y en la segunda, se abre la cadena y se agregan las condiciones de vínculo exigidas por los grados de libertad conferidos al sistema al desarticular las chapas.

Consideraremos la primera forma de encarar la solución del problema. Sea la cadena cinemática cerrada de cuatro chapas de la figura 6.53 a, con una condición de vínculo en cada chapa y cargada con fuerzas exteriores cuyas resultantes para cada chapa son $R_1 \ldots R_4$.

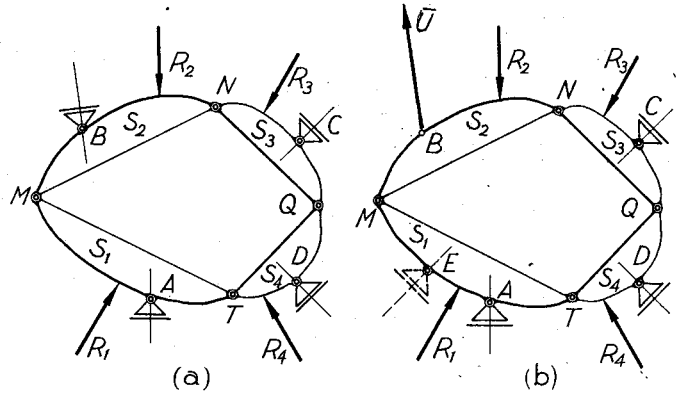


Fig. 6.53.

Suprimamos uno cualquiera de los apoyos móviles, el B por ejemplo. La cadena cinemática adquiere con ello un grado de libertad. Para fijarla nuevamente y restituir el equilibrio debemos imponer otra condición de vínculo, lo que hacemos agregando en otra cualquiera de las chapas, la S_1 por ejemplo, un apoyo móvil en E.

El sistema así sustentado cae dentro de uno de los casos analizados anteriormente, lo que nos permite determinar las reacciones de vínculo correspondientes al nuevo sistema, que denominaremos *sistema substituto*, indicando las magnitudes correspondientes al mismo con el subíndice (o). Tendremos así, para cada apoyo móvil, una reacción debida a las fuerzas exteriores P_i, que denominaremos en forma genérica $R^P_{i(o)}$.

* La solución indirecta de Henneberg ha sido desarrollada originariamente para la resolución de casos particulares de reticulados, planos o espaciales.

En especial, para el apoyo E que hemos agregado, la reacción será $R^P_{E(o)}$. Descarguemos ahora el sistema y hagamos actuar en B y en la dirección de la reacción correspondiente al apoyo *suprimido* una fuerza unitaria y positiva $\overline{U}$. Dicha fuerza originará en los distintos apoyos reacciones $R^{\overline{U}}_{i(o)}$ y, en especial, en el apoyo agregado E, una reacción $R^{\overline{U}}_{E(o)}$. Si hacemos actuar simultáneamente ambos estados de carga, el P_i y el $\overline{U}$, por el principio de superposición de efectos, las reacciones serán iguales a las sumas de las correspondientes a los estados parciales de carga, es decir

$$R_{i(o)} = R^P_{i(o)} + R^{\overline{U}}_{i(o)} \qquad [6.24]$$

y, en especial para el apoyo móvil E,

$$R_{E(o)} = R^P_{E(o)} + R^{\overline{U}}_{E(o)} \qquad [6.25]$$

Si en lugar de la fuerza $\overline{U}$, hacemos actuar en B una fuerza de X (kg), las reacciones debidas a las mismas serán iguales a las originadas por U multiplicadas por X, es decir

$$R_i = R^P_{i(o)} + X.R^{\overline{U}}_{i(o)} \qquad [6.26]$$

y también

$$R_E = R^P_{E(o)} + X.R^{\overline{U}}_{E(o)} . \qquad [6.27]$$

Entre los infinitos valores que puede tomar X habrá uno que anule la ecuación [6.27], es decir, que resulte

$$R_E = 0 . \qquad [6.28]$$

Pero, si se cumple la [6.28], no es necesaria la existencia del apoyo móvil en E para asegurar el equilibrio del sistema, el que se encontrará en las condiciones primitivas, es decir, con tres apoyos móviles en A, C y D y una fuerza X aplicada en B, cuya recta de acción coincide con la de la reacción R_B. Esta fuerza, en consecuencia, será la reacción de vínculo en B, y su valor lo obtenemos despejándolo de la [6.27] igualada a cero:

$$X = -\frac{R^P_{E(o)}}{R^{\overline{U}}_{E(o)}} \qquad [6.29]$$

Finalmente, para obtener el valor definitivo de las reacciones restantes, basta introducir en la [6.26] el valor de X deducido de la [6.29], teniéndose así:

$$R_i = R^P_{i(o)} + \left(-\frac{R^P_{E(o)}}{R^{\overline{U}}_{E(o)}}\right) R^{\overline{U}}_{i(o)} \qquad [6.30]$$

La segunda forma de encarar la solución del problema consiste, como dijéramos, en abrir la cadena. Con ello se confiere a la misma dos grados de libertad, por lo que se hace necesario agregar dos condiciones de vínculo externo para restablecer el equilibrio.

En la cadena cinemática de la figura 6.54, una vez quitada la articulación M, es posible restablecer el equilibrio aplicando a cada una de las chapas desarticuladas las reacciones internas U y $-U$ que se

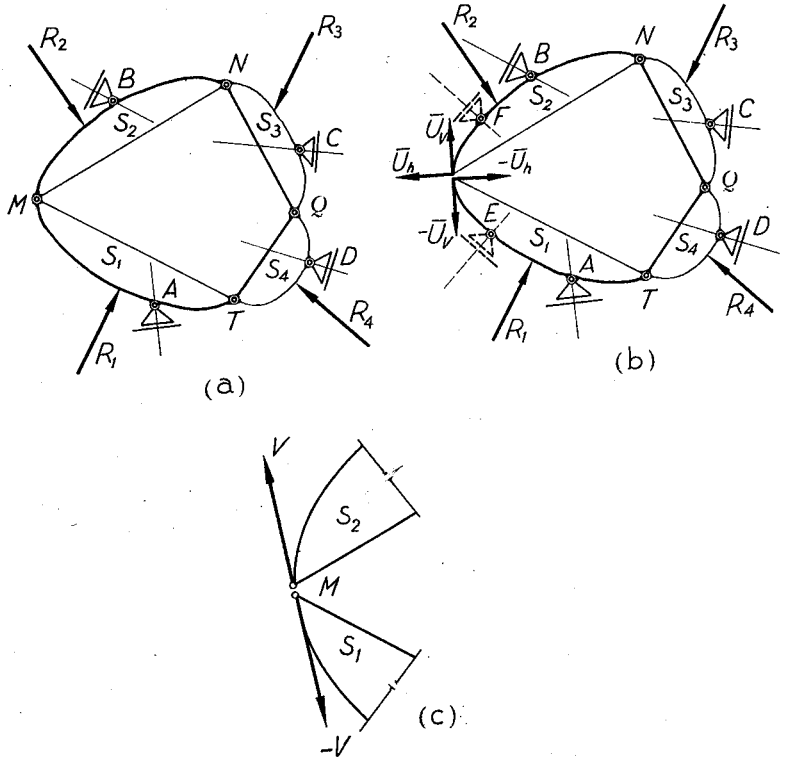


Fig. 6.54.

transmiten a través de la articulación relativa. Conocidas éstas, la determinación de las reacciones en la cadena cinemática abierta, con los vínculos originales, es inmediata.

Para determinar el valor de la reacción interna en la articulación relativa M se procede en la forma siguiente: abierta la cadena y agregados los apoyos móviles E y F, se calculan las reacciones de vínculo debidas a las cargas exteriores activas, obteniendo los valores genéricos $R^P_{i(o)}$ y, en especial para los vínculos agregados, $R^P_{E(o)}$ y $R^P_{F(o)}$.

Luego se supone la reacción interna en M, descompuesta en dos componentes ortogonales, y se aplican sucesivamente en M y en las direcciones de las mismas, dos fuerzas unitarias $\overline{U}_h$ y $\overline{U}_v$, una vez en la chapa S_1 y otra vez en la chapa S_2. Para cada conjunto de dos fuerzas se determinan las reacciones de vínculo correspondientes, cuyas expresiones genéricas son $R^{\overline{U}_h}_{i(o)}$ y $R^{\overline{U}_v}_{i(o)}$ y, en especial para los apoyos E y F: $R^{\overline{U}_h}_{E(o)}$; $R^{\overline{U}_v}_{E(o)}$; $R^{\overline{U}_h}_{F(o)}$ y $R^{\overline{U}_v}_{F(o)}$.

Si en lugar de las fuerzas unitarias $\overline{U}_h$ y $\overline{U}_v$ hacemos actuar fuerzas X(kg) é Y(kg) respectivamente, las reacciones correspondientes resultarán de multiplicar las debidas a $\overline{U}_h$ y $\overline{U}_v$ por aquellos valores.

Cuando actúen simultáneamente los tres estados de carga P_i, X é Y, las reacciones de vínculo se obtendrán como suma de los valores parciales determinados, es decir:

$$R_i = R^P_{i(o)} + X.R^{\overline{U}_h}_{i(o)} + Y.R^{\overline{U}_v}_{i(o)} \qquad [6.31]$$

y, en especial, para las reacciones en E y F

$$\begin{aligned} R_E &= R^P_{E(o)} + X.R^{\overline{U}_h}_{E(o)} + Y.R^{\overline{U}_v}_{E(o)} \\ R_F &= R^P_{F(o)} + X.R^{\overline{U}}_{F(o)} + Y.R^{\overline{U}_v}_{F(o)} \end{aligned} \qquad [6.32]$$

De los infinitos pares de valores de X é Y, habrá uno que anule simultáneamente las dos ecuaciones [6.32]. En tal caso se tendrá:

$$R_E = R_F = 0 \; ; \qquad [6.33]$$

es decir, que el equilibrio se logra para un par de valores de X é Y que hacen innecesaria la existencia de los apoyos móviles E y F. En consecuencia, dichos valores de X é Y corresponden a las componentes de la reacción interna en la articulación relativa M.

Despejados los valores mencionados de las ecuaciones [6.32] igualadas a cero e introducidos en la [6.31], obtenemos directamente los valores de las reacciones de vínculo en los cuatro apoyos móviles que sustentan el sistema.

6.2. Los sistemas espaciales vinculados.

6.2.1. Grados de libertad de un sólido en el espacio.

Consideremos, figura 6.55, un punto material que, referido a una terna de ejes x, y, z pasa de una posición inicial A a otra final B. Esta última posición queda perfectamente establecida cuando se conocen las tres coordenadas x_B, y_B y z_B que definen la posición del punto material. Luego, un punto material en el espacio posee tres coordenadas libres y, en consecuencia, *tres grados de libertad.*

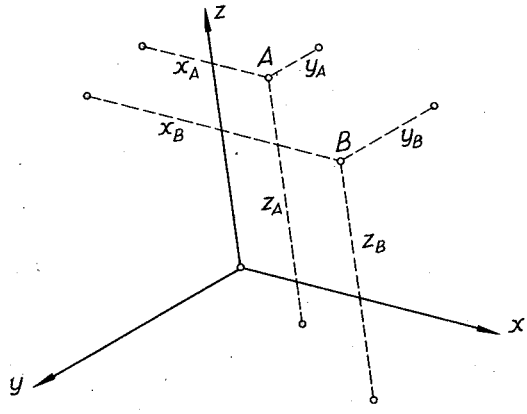


Fig. 6.55.

Supongamos ahora un sólido materializado por el cubo de la figura 6.56, referido a la terna x, y, z, y admitamos que el mismo ha pasado de una cierta posición inicial a la final indicada en la figura. Un punto del sólido, por ejemplo el vértice A, queda determinado cuando se conocen sus tres coordenadas x_A, y_A y z_A. Para otro de los puntos, como ser el B, sólo nos es posible fijar dos de sus coordena-

das, por ejemplo x_B é y_B, por cuanto la distancia a entre A y B debe permanecer invariable por la condición de rigidez que vincula ambos puntos. La tercera coordenada de B está ligada a las anteriores por la relación

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = a^2 \qquad [6.34]$$

Es decir que para fijar la posición en el espacio de dos puntos pertenecientes a un mismo cuerpo rígido, sólo disponemos de *cinco coordenadas libres*, en lugar de las seis que, consideradas independientemente, poseían en conjunto. Es decir que la condición de rigidez restringe un grado de libertad.

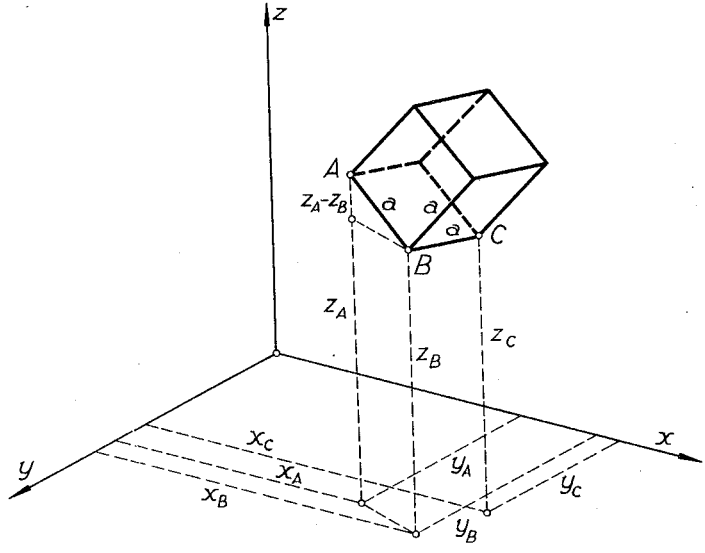


Fig. 6.56.

Sea ahora un tercer punto C. Por pertenecer al mismo cuerpo rígido se encuentra ligado a los puntos A y B por la condición de rigidez, que exige que las distancias AC y BC permanezcan invariables. Es decir que, de las tres coordenadas libres que posee, considerado independientemente, las condiciones de invariabilidad de las distancias mencionadas fijan dos, restándole solamente una libre. En consecuencia, para fijar la posición en el espacio de tres puntos pertenecientes a un mismo cuerpo rígido disponemos de *seis coordenadas* libres. Pero si tres puntos

de un sólido son fijos, éste también lo es. En efecto, cualquier otro punto que consideremos perteneciente al mismo sólido tiene su posición perfectamente definida, por cuanto sus distancias a los tres puntos mencionados son invariables por la condición de rigidez y, en consecuencia, no posee ninguna coordenada libre.

De lo anterior concluimos que un cuerpo rígido en el espacio posee *seis grados* de libertad.

6.2.2. Vinculación de sólidos en el espacio.

Si queremos fijar un cuerpo rígido espacial será necesario restringirle la totalidad de sus grados de libertad, imponiéndole un número igual de condiciones de vínculo.

Al analizar la sustentación de una chapa plana, distinguimos tres clases de vínculos, denominados de primera, segunda o tercera especie, según restrinjan respectivamente uno, dos o tres grados de libertad. En el caso del sólido en el espacio, análogamente, podemos considerar los siguientes vínculos:

a) De primera especie o *apoyo superficial.* Restringe un grado de libertad y puede estar constituido sea por una biela (figura 6.57 *a*) o bien por un dispositivo de apoyo, de forma troncopiramidal, apoyado sobre un plano con interposición de un sistema de esferas, y que en su parte superior se vincula con el cuerpo al cual sustenta mediante una rótula (figura 6.57 *b*). Este tipo de vínculo impone al punto del cuerpo rígido en el que está aplicado, la condición de moverse sobre un *plano,* circuns-

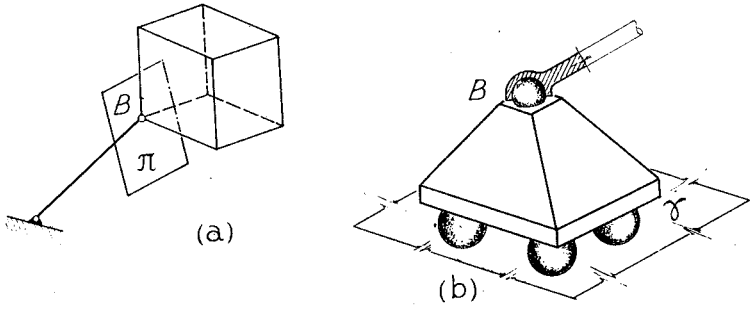


Fig. 6.57.

tancia ésta de donde proviene su denominación. En efecto, si el apoyo de primera especie está constituido por una biela aplicada en B (figura 6.57 *a*) y articulada a tierra en A, para desplazamientos finitos, el punto B está obligado a moverse sobre una esfera de radio AB. Pero, si los desplazamientos son infinitésimos, en el límite, el movimiento de B tendrá lugar sobre un plano tangente a la esfera en dicho punto y normal a AB. Cuando el vínculo lo constituye el dispositivo de apoyo de la figura 6.57 *b*, el punto B tendrá el movimiento de este último, el que, como es fácil de ver, necesariamente debe ser paralelo al plano γ de apoyo. En ambos casos el movimiento del punto en que está aplicado el vínculo tiene lugar sobre un plano. Ambas formas de sustentación restringen un grado de libertad por cuanto impiden el movimiento según AB en el primer caso, y normalmente al plano γ en el segundo.

b) De segunda especie o *apoyo lineal*. Este vínculo restringe dos grados de libertad, y puede materializarse sea mediante dos bielas concurrentes a un punto del cuerpo rígido al que se encuentran aplicadas, figura 6.58 *a*, o bien por el dispositivo de apoyo de la figura 6.58 *b*, similar en un todo al de la figura 6.57 *b*, salvo que en lugar de apoyar sobre un sistema de esferas, lo hace por interposición de una sucesión de rodillos paralelos.

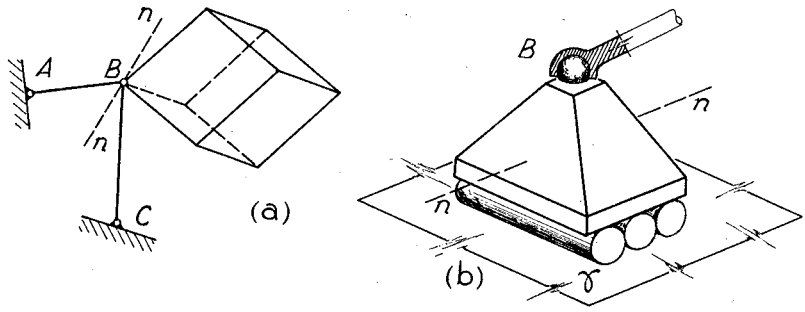


Fig. 6.58.

La denominación de *lineal* proviene del hecho que, en ambos casos, se impone al punto en que se encuentran aplicados la obligación de desplazarse sobre una recta perfectamente definida.

En efecto, si el apoyo de segunda especie está constituido por dos bielas concurrentes, cada una de ellas impone al punto en que se encuentra aplicada la condición de desplazarse sobre un plano normal a su dirección. Luego, la única posibilidad que le queda al punto es la de moverse sobre una recta, intersección de ambos planos. Dicha recta es,

a su vez, normal al plano definido por las bielas. Si, en cambio, el vínculo está constituido por el dispositivo de apoyo de la figura 6.58 *b*, el punto *B* del mismo deberá desplazarse juntamente con el cuerpo del dispositivo, el que, por la existencia del tren de rodillos, debe hacerlo en la dirección *n-n*, coincidente con la de rodamiento de estos últimos.

Ambas formas de sustentación restringen dos grados de libertad, por cuanto impiden los desplazamientos del punto *B*, al que se hallan aplicadas, en dos direcciones. En el caso de las dos bielas concurrentes, el punto *B* no puede moverse en las direcciones *AB* y *BC* y, para la segunda forma de sustentación, el desplazamiento no puede tener lugar ni en la dirección normal al plano de apoyo, ni tampoco según las generatrices de los rodillos.

c) De tercera especie, denominado también *apoyo fijo* o *rótula*. Materializado en cualquiera de las dos formas que muestra la figura 6.59; este tipo de vínculo restringe tres grados de libertad.

En efecto, si el vínculo está constituido por tres bielas concurrentes y *no coplanares* (figura 6.59 *a*), el punto *B*, al cual se encuentran aplicadas, resulta con sus tres grados de libertad restringidos y, en consecuencia, es fijo, restando al cuerpo rígido al cual pertenece solamente tres grados de libertad. Análogamente, en el caso de la figura 6.59 *b*, en que

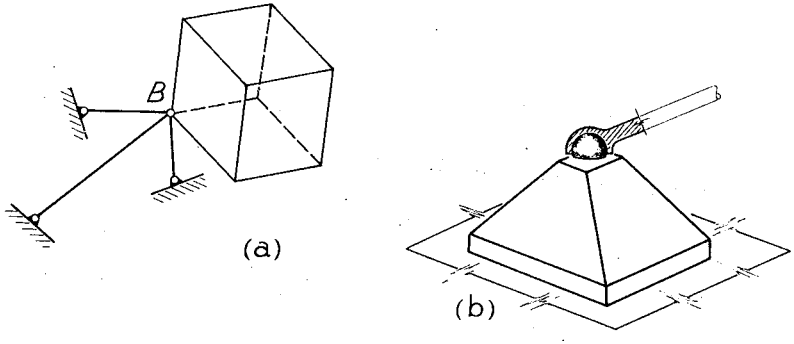


Fig. 6.59.

el vínculo está constituido por un dispositivo de apoyo semejante a los de las figuras 6.57 y 6.58, con la sola diferencia de que la base de su cuerpo está rígidamente ligada a tierra, el punto *B* resulta fijo.

d) De cuarta especie. Esta forma de vinculación, utilizada principalmente en Mecánica Aplicada como elemento de sujección de mecanismos y elementos de máquinas, restringe cuatro grados de libertad. Un

ejemplo de la misma lo constituyen los cojinetes-guía, que permiten giros y desplazamientos en el sentido de las generatrices de los mismos, impidiendo todo otro movimiento.

e) De quinta especie. Restringe cinco grados de libertad y, como los anteriores, son de aplicación en mecanismos y elementos de máquinas; como ejemplo de los mismos citaremos los cojinetes de empuje, que sólo permiten giros.

f) De sexta especie o *empotramientos espaciales*. Restringen seis grados de libertad al impedir todo movimiento al cuerpo rígido al cual se encuentran aplicados.

En lo que sigue, utilizaremos exclusivamente vínculos de primera, segunda y tercera especies, por ser los que se utilizan normalmente en la sustentación de los elementos constructivos de que se ocupa la Estabilidad de las estructuras.

6.2.3. El sólido isostáticamente sustentado.

Hemos visto que un sólido posee seis grados de libertad y que, en consecuencia, para fijarlo en tierra es necesario imponerle seis condiciones de vínculo.

Consideremos el cuerpo rígido de la figura 6.60 y comencemos por fijar a tierra un punto cualquiera del mismo, por ejemplo el A. Para ello bastará aplicar en el mismo tres bielas no coplanares que, en conjunto, constituyen un vínculo de tercera especie, que restringe tres grados de libertad. Si las tres bielas fueran coplanares, el punto podría desplazarse en dirección normal al plano definido por las mismas, existiendo en consecuencia un vínculo aparente.

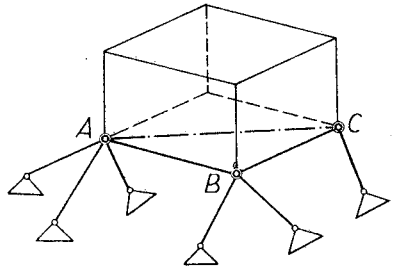


Fig. 6.60.

Fijemos ahora un segundo punto B. Para ello nos bastará imponerle sólo dos condiciones de vínculo externo, por cuanto el tercero, necesario para restringirle sus tres grados de libertad, se encuentra implícito en la condición de rigidez que lo vincula al punto A: la distancia AB debe permanecer invariable. Estas dos condiciones de vínculo externo las materializamos mediante dos bielas aplicadas en B, que no deben ser coplanares con la recta AB pues, de serlo, B podría desplazarse normalmente al plano de las mismas.

Finalmente, fijando un tercer punto C, el sólido queda a su vez fijado a tierra, por cuanto, de ser fijos tres puntos, lo es también cualquier otro punto perteneciente al mismo cuerpo rígido, por estar ligado a los anteriores por la condición de rigidez.

Para fijar este tercer punto bastará imponerle solamente una condición de vínculo externo, materializada en la figura 6.60 por una biela. Las dos restantes condiciones necesarias, surgen de la condición de rigidez, que exige la invariabilidad de las distancias AC y BC. Es evidente que esta última biela no debe ser coplanar con las rectas AC y BC porque, de otro modo, el punto C sería susceptible de experimentar desplazamientos de dirección normal al plano ABC.

La sustentación del sólido que nos ocupa podríamos haberla realizado en forma distinta a la enunciada. En efecto, no es necesario que tres de las seis bielas necesarias concurran a un punto. En el caso de la figura 6.61 *a*, la sustentación se ha logrado mediante seis bielas, aplicadas dos a dos en tres puntos distintos y, para la situación de la figura 6.61 *b*, empleando seis bielas, ubicadas en seis distintos puntos del sólido. Aparte de los indicados, existen todas las variantes posibles intermedias.

En el primer caso de sustentación analizado, se parte de un punto fijado a tierra en forma directa y si, para las restantes bielas, no se cumplen las condiciones de coplanaridad indicadas al tratarlo, no existe

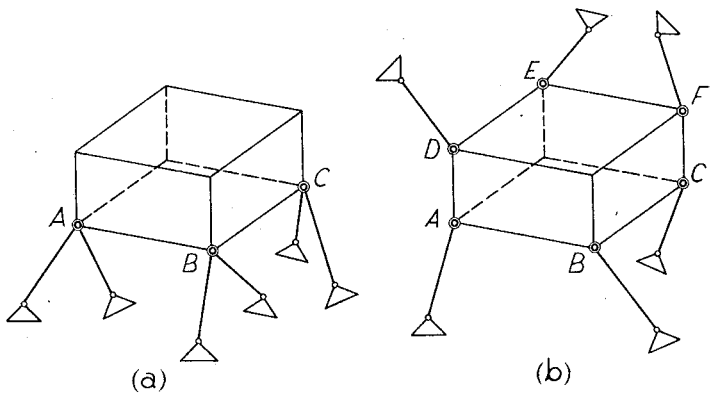


Fig. 6.61.

vínculo aparente y, en consecuencia, el sólido se encuentra isostáticamente sustentado.

En los casos de sustentación en que no existe ningún punto unido a tierra mediante un vínculo de tercera especie, no puede asegurarse a priori

si el sistema se encuentra isostáticamente sustentado o si hay vínculo aparente. Para establecer la existencia o no de esta última posibilidad, nos valdremos del siguiente criterio general:

En un sólido sustentado a tierra mediante seis bielas hay vínculo aparente cuando existe una recta que corta las seis bielas.

La justificación de este criterio general se basa en las condiciones de equilibrio de los sistemas gausos de fuerzas. Si cargamos un sólido con una fuerza P y ponemos en evidencia las reacciones de vínculo X_i correspondientes a las seis bielas, tendremos un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio $P, X_1, X_2 \ldots X_6$ que debe encontrarse en equilibrio. En el capítulo 3 vimos que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema gauso de fuerzas eran seis, y que podían expresarse mediante seis condiciones de nulidad de momentos respecto de seis ejes, de los que tres no debían ser concurrentes. Si existe un eje que corta las rectas de acción de las seis reacciones incógnitas, de hecho los momentos de éstas respecto del eje mencionado resultan nulos. Pero, como la recta de acción de P no corta el eje, su momento respecto del mismo es distinto de cero y, en consecuencia, una de las condiciones de nulidad de momentos no se cumple, por lo que no puede existir equilibrio.

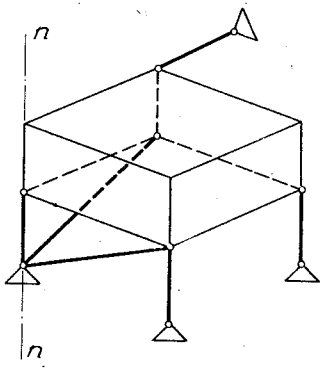


Fig. 6.62.

En el caso de la figura 6.62 el sistema no se encuentra isostáticamente sustentado. En efecto, el eje *n-n*, como es fácil observar, corta las direcciones de las seis bielas, existiendo con ello, y de acuerdo con el criterio general expuesto, vínculo aparente.

A título ilustrativo mencionaremos el caso que muestra la figura 6.63. Se trata de un sólido vinculado a tierra mediante seis bielas, concurrentes tres a tres a los puntos A y B. De acuerdo con lo dicho anteriormente, hay vínculo aparente, por cuanto existe un eje, el AB, que corta las seis bielas. Para una fuerza tal como la P, la determinación de las reacciones de vínculo constituye un problema indeterminado. No obstante ello, existen posiciones determinadas de la fuerza, que transforman el sistema de hipostático en hiperestático, por vínculo externo, o también, que permiten la determinación de las reacciones de vínculo. El primer caso se presenta cuando la recta

de acción de la fuerza exterior activa corta el eje (fuerza P' de la figura 6.63). En tal caso existe equilibrio por cuanto, con respecto al eje AB, se cumple la condición de nulidad de momentos, pero la determinación de las reacciones de vínculo no es posible realizarla utilizando solamente las ecuaciones derivadas de las condiciones de equilibrio de los sistemas gausos de fuerzas, siendo, en consecuencia, el sistema estáticamente indeterminado. En cambio, si la fuerza exterior activa ocupa una posición tal como la P'', resulta evidente que las reacciones en las tres bielas concurrentes en A son nulas, y las correspondientes a las tres bielas restantes, fácilmente determinables, reduciéndose el problema al de la descomposición de una fuerza en tres componentes concurrentes.

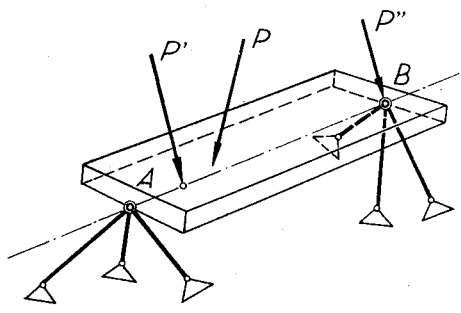


Fig. 6.63.

El caso explicado es un caso muy especial, y las circunstancias apuntadas se presentan cuando el sólido se encuentra solicitado por una única fuerza o por un sistema de fuerzas concurrentes. En el caso más general de un sistema de fuerzas no concurrentes, salvo circunstancias muy particulares, la determinación de las reacciones de vínculo conduce a un problema indeterminado.

Para un sólido sustentado mediante seis bielas, existirá un eje que corte la totalidad de las mismas, en los siguientes casos:

a) *Si cuatro (o más) de las bielas concurren a un punto.* En efecto, siempre será posible trazar por el punto de concurrencia una recta que se apoye sobre las dos restantes.

b) *Si cuatro (o más) de las seis bielas son coplanares.* Las dos bielas restantes cortan, en este caso, el plano que contiene a las otras, en dos puntos que llamaremos M y N. La recta determinada por los mismos es coplanar con las cuatro bielas que yacen en el plano considerado y, en consecuencia, las corta. Y como por otra parte corta las dos no coplanares, corta las seis.

c) *Cuando las seis bielas concurren tres a tres a dos puntos.* La recta definida por los puntos de concurrencia corta las seis bielas.

d) *Si las seis bielas yacen tres a tres en dos planos.* La intersección de los dos planos define una recta que corta las seis bielas, por pertenecer a los dos planos.

6.2.4. Determinación de las reacciones de vínculo en el espacio. Solución analítica.

La determinación de las reacciones de vínculo de un sólido cargado constituye un problema de seis incógnitas, una por cada reacción o componente de reacción.

Un vínculo de primera especie, si está constituido por una biela, puede reaccionar únicamente en la dirección de la misma o en dirección normal al plano de apoyo cuando se utiliza un dispositivo de apoyo a esferas. En cambio, para los de segunda especie, la reacción debe encontrarse contenida en el plano de las dos bielas que lo constituyen o, de utilizarse un dispositivo a rodillos, en el plano paralelo a las generatrices de los mismos. Finalmente, los apoyos de tercera especie o rótulas, reaccionan en cualquier dirección.

Puestas en evidencia las reacciones, el sistema de fuerzas exteriores, activas y reactivas debe encontrarse en equilibrio y para ello, por tratarse de un sistema gauso de fuerzas, deberá cumplir con las condiciones necesarias y suficientes establecidas en el capítulo 3, para esta clase de sistemas de fuerzas.

De las distintas formas en que se pueden expresar las condiciones de equilibrio mencionadas, la más conveniente desde el punto de vista de su aplicación es la que lo hace mediante el planteo de seis ecuaciones de momento respecto de tres ejes entre las seis reacciones incógnitas y las fuerzas exteriores activas.

Esta forma de encarar el problema conduce, en general, a un sistema de seis ecuaciones simultáneas con seis incógnitas. La resolución de un sistema como el indicado resulta un tanto laboriosa, por lo cual convendrá, en todos los casos, encarar la elección de los ejes con respecto a los cuales se toman momentos en forma tal que se anulen algunos de éstos.

El ideal sería poder ubicar ejes que cortaran cada vez cinco de las seis rectas de acción de las incógnitas, de modo tal que, al plantear la correspondiente ecuación de momentos, se anularan todos ellos menos los correspondientes a las fuerzas exteriores activas y a una de las reacciones incógnitas. De ser ello factible, el sistema de seis ecuaciones simultáneas se transformaría en otro de seis ecuaciones independientes, con una incógnita cada una, de resolución inmediata. Ello es posible en ciertos casos, pero no en general.

Cuando no es posible hallar ejes que corten cinco de las seis rectas de acción de las incógnitas, el problema admite una simplificación menor, que consiste en determinar *dos* ejes que corten cuatro de las rectas de acción de las incógnitas. En esta forma se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que nos permite determinar dos de las seis reacciones, las X_1 y X_2, por ejemplo. Eligiendo a continuación otro par de ejes, que corten las rectas de acción de las incógnitas ya determinadas y las X_3 y X_4, podemos hallar, mediante el planteo de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, los valores de X_5 y X_6. Finalmente, un tercer par de ejes que corte las rectas de acción de X_1, X_2, X_5 y X_6, nos permite determinar en forma análoga los valores de X_3 y X_4.

Esta solución siempre es posible por cuanto, dadas seis rectas no coplanares, existen siempre dos ejes que cortan cuatro de ellas. Para demostrar el enunciado anterior partimos del hecho de que tres rectas alabeadas definen un hiperboloide de una napa. Consideremos, figura 6.64, las tres directrices *a*, *b* y *c* y una recta cualquiera *m-m*, que cortará la superficie del hiperboloide en dos puntos *A* y *B*. Pero por cada uno de estos puntos pasa una generatriz del hiperboloide que, por ser tal, se apoyará sobre tres directrices y además cortará la recta *m-m*, es decir que corta cuatro rectas.

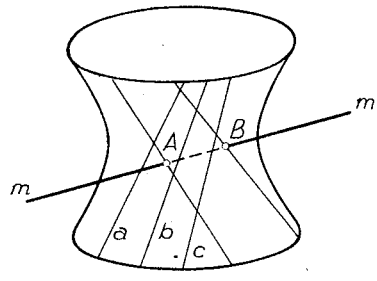


Fig. 6.64.

Con el objeto de aclarar los conceptos expuestos analizaremos los casos de la figura 6.65 *a* y *b*. El primero de ellos se refiere a un sólido cargado con una fuerza *P* y sustentado mediante seis bielas de las cuales las *AF* y *BF* concurren al punto *F*, y las *BG* y *CG* lo hacen a *G*. Las dos condiciones de vínculo restantes están constituidas por las bielas *AD* y *AE*, aplicadas en los puntos *D* y *E* respectivamente.

Para determinar las reacciones de vínculo planteamos seis ecuaciones de momento, respecto de seis ejes, entre la fuerza *P* y las reacciones incógnitas X_i. Con el objeto de simplificar las ecuaciones, tratemos de hallar ejes que corten cinco de las seis direcciones de las incógnitas.

El eje *I-I* cumple con dicha condición, por ser coplanar con las bielas *AD*, *AF*, *BF*, *BG* y *CG*. En consecuencia, tomando momentos respecto del mismo despejamos directamente la intensidad de la reacción correspondiente a la biela *AE*. Análogamente, el eje *II-II* resulta ser coplanar con las bielas *AD*, *AE*, *AF*, *BF* y *CG* (con esta última por ser paralela). De la correspondiente ecuación de momentos obtene-

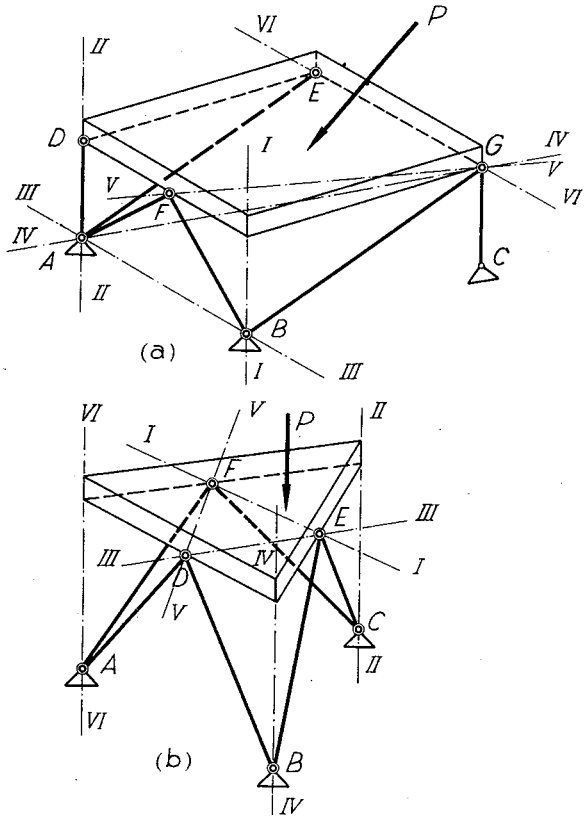


Fig. 6.65.

mos el valor de la reacción en la dirección de la biela BG. Un tercer eje que corta cinco rectas es el *III-III*, que pasa por el punto de concurrencia de AD, AE y AF y también por el de BF y BG. Mediante una ecuación de momentos respecto del mismo, obtenemos la reacción correspondiente a CG. Con respecto al eje *IV-IV*, definido por los puntos A y G, se anulan los momentos de las reacciones según AD, AF, AE, BG y CG, lo que nos permite calcular de inmediato el valor de la reacción según BF.

Para la determinación de las dos reacciones restantes no es necesario encontrar ejes que corten cinco rectas, las que, por otra parte, no son ya de fácil determinación. Eligiendo como eje de momentos el *V-V*, con respecto al mismo se anulan los momentos de las reacciones AF, BF, BG y CG, apareciendo en la ecuación los correspondientes a P, AD y AE. Pero, siendo conocida la intensidad de AE, la ecuación

contiene como incógnita únicamente la reacción AD. Finalmente, tomando momentos respecto de VI-VI, resultan nulos los de BG, CG y AE, e intervienen como elementos conocidos los correspondientes a P, AD y BF, lo que nos permite despejar el valor de AF.

El caso de la figura 6.65 *b* corresponde a una placa triangular, sustentada mediante seis bielas concurrentes dos a dos a los puntos D, E y F, y cargada por la fuerza P. En este caso no existe ningún eje que corte cinco bielas. Debemos, pues, encarar la solución tomando momentos sucesivamente respecto de pares de ejes que corten cuatro bielas. El eje I-I, definido por los puntos E y F corta las bielas AF, CF, BE y CE. Además, el eje II-II, por ser coplanar con las bielas AF y CF por una parte y con las BE y CE por otra, corta las cuatro. En consecuencia, tomando momentos con respecto a dichos ejes obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son las reacciones correspondientes a las bielas AD y BD. Análogamente, los ejes III-III y IV-IV por una parte, y V-V y VI-VI por otra, nos conducen a sistemas de ecuaciones en que las incógnitas son, respectivamente, AF y CF y BE y CE. En esta forma queda completamente resuelto el problema de la determinación de las reacciones de vínculo.

Como cada caso constituye, en general, un problema particular, al plantear las ecuaciones derivadas de las condiciones de equilibrio, deberá analizarse qué forma conviene darle a las mismas, es decir, si todas las condiciones se expresan como condiciones de momentos o si conviene que alguna lo sea en forma de ecuaciones de proyección.

6.2.5. Determinación gráfica de las reacciones de vínculo en el espacio.

La determinación de las reacciones de vínculo de un sólido isostáticamente sustentado tiene solución gráfica directa cuando uno de sus vínculos es de tercera especie, es decir, si el sólido posee un punto fijado directamente a tierra por tres condiciones de vínculo.

Consideremos el sólido de la figura 6.66 con una rótula en A (tres bielas concurrentes), una biela en B y dos bielas concurrentes en C. Supongamos que sobre el mismo actúe un sistema de fuerzas no concurrentes en el espacio. En primer lugar, para poder operar en forma gráfica con el sistema de fuerzas, será necesario reducirlo. Vimos en el capítulo 3 las distintas formas de reducir un sistema gauso de fuerzas. De entre ellas, la más conveniente a nuestros propósitos es la que reduce el sistema a dos únicas fuerzas no coplanares. Supongamos que, operando de esta manera, hemos reducido nuestro sistema a las fuerzas R y R'. Las

reacciones de vínculo definitivas serán la suma de las originadas por cada una de estas fuerzas. En consecuencia, operaremos con una de ellas, la R, prescindiendo de hacerlo con la R', por cuanto el procedimiento es similar.

Una fuerza en el espacio es posible descomponerla en tres componentes concurrentes a un punto de su recta de acción, y que no sean coplanares. Eligiendo sobre la recta de acción de R un punto cualquiera

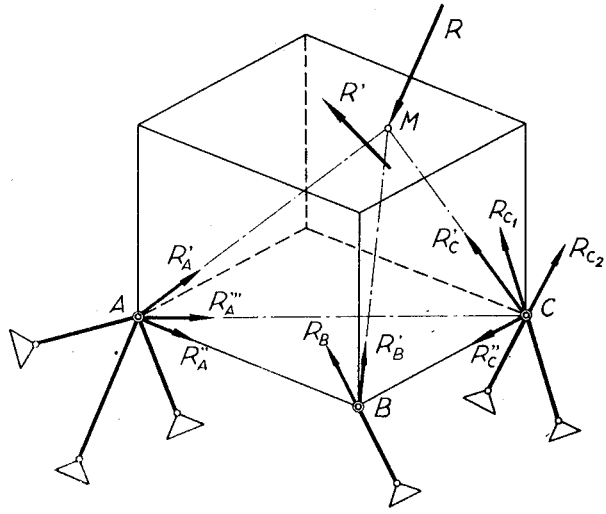


Fig. 6.66.

M, este punto, unido con A, B y C define tres rectas concurrentes en M y, por lo tanto, podemos descomponer R en las tres direcciones indicadas. Cambiando el sentido de estas tres componentes tendremos tres reacciones que denominaremos R'_A, R'_B y R'_C. De estas tres reacciones solamente la primera puede ser absorbida directamente por el vínculo y transmitida a tierra, por cuanto una articulación fija puede reaccionar en cualquier dirección. No ocurre lo mismo con las restantes. La reacción R'_B podría ser absorbida por la biela aplicada en B únicamente si su dirección coincidiera con la de esta última, cosa que en general no ocurre. En consecuencia será necesario descomponerla a su vez en tres componentes, de las cuales una debe ser la de la biela y las restantes las de las bielas ficticias AB y BC, cuya existencia deriva de la condición de rigidez que vincula el punto B con A y C. La componente según AB, R''_A, es absorbida directamente por la articulación A. En cambio, en C, tanto R'_C como R''_C no pueden serlo por las bielas concurrentes en C, salvo que ambas resultasen coplanares con las mis-

mas. En consecuencia, será necesario hallar la resultante de R'_G y R''_G y descomponerla a su vez en las direcciones de las bielas concurrentes en C y la biela ficticia AC.

Finalmente, la resultante de las tres reacciones parciales R'_A , R''_A y R'''_A constituye la reacción total en A que, descompuesta según la dirección de las tres bielas que concurren a dicho punto, nos permite obtener las restantes componentes de reacción.

7. Sistemas de reticulado.

7.1. Los sistemas de reticulado en el plano.

7.1.1. Definiciones.

En lo que sigue denominaremos *barra* a toda chapa cuya dimensión transversal sea pequeña en relación con su longitud, de modo tal que pueda representársela por su eje (figura 7.1).

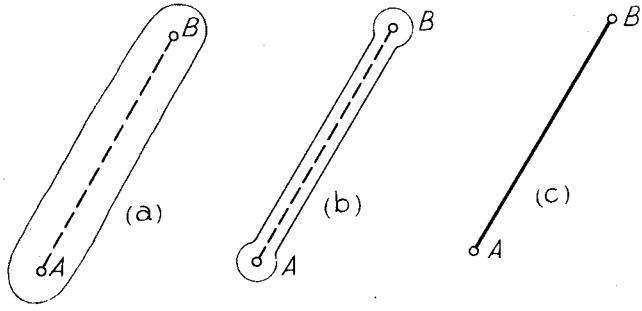


Fig. 7.1.

Si imaginamos una barra libre en el plano, la misma poseerá tres grados de libertad, los mismos de la chapa de la que deriva.

Consideremos ahora dos puntos A y B (figura 7.2 *a*), unidos entre sí mediante la barra AB. Supongamos aplicadas en A y B dos fuerzas opuestas P y $-P$ cuya recta de acción coincida con el eje de la barra. Por tratarse de un sistema nulo aplicado a un mismo cuerpo rígido, el sistema se encontrará en equilibrio. Si ahora suprimimos la barra que vincula los puntos A y B, éstos, al encontrarse sometidos a la acción de las fuerzas P y $-P$, tenderán a desplazarse en la dirección de las mismas, es decir, se habrá roto el equilibrio. Para restituirlo en cada uno de los puntos, será necesario aplicar a los mismos fuerzas $P' = -P$ y $-P' = -(-P) = P$ que, con las anteriores, constituyan a su vez sistemas

nulos aplicados a ambos puntos (figura 7.2 *b*). Estas nuevas fuerzas, que reemplazan en sus efectos a la barra AB, en su conjunto se denominan *esfuerzo interno en la barra* o, más simplemente, *esfuerzo en barra.* Cuando las fuerzas exteriores que solicitan a la barra tienen sentidos divergentes, originan en la misma un esfuerzo interno que se denomina *esfuerzo de tracción* y que se materializa mediante dos fuerzas que se alejan de los extremos de la barra (denominados *nudos*). Tal el caso de

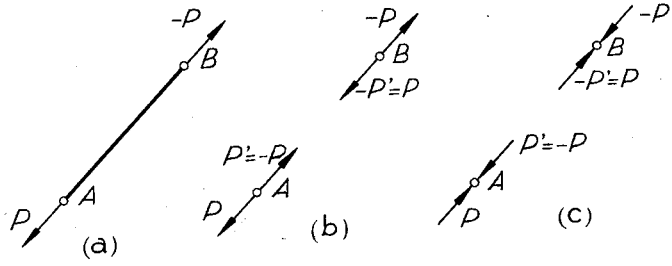


Fig. 7.2.

la figura 7.2 *b*. En cambio, si las fuerzas exteriores aplicadas en la barra tienen sentidos concurrentes, los esfuerzos internos desarrollados en la misma serán de *compresión,* y se materializan mediante dos fuerzas que *concurren* a los nudos (figura 7.2 *c*).

Por convención, designaremos como *positivos* los esfuerzos de tracción y como *negativos* a los de compresión.

7.1.2. Sistemas de reticulado. Su generación.

Supongamos, figura 7.3 *a*, tres barras articuladas entre sí, de modo que constituyan una cadena cinemática abierta, con cinco grados de libertad. Si articulamos entre sí las dos barras extremas restringiremos en el conjunto dos grados de libertad, al que le restarán entonces sólo tres, comportándose como una única chapa rígida.

Hemos llegado así a la conclusión de que un triángulo formado por tres barras rígidas articuladas entre sí por sus extremos se comporta como una única chapa rígida e indeformable.

Si a dos cualesquiera de los vértices del triángulo así obtenido, les articulamos dos nuevas barras, el resultado será una nueva cadena cinemática de tres chapas con cinco grados de libertad. Articulando entre sí los extremos de las dos barras agregadas al triángulo primitivo, restamos

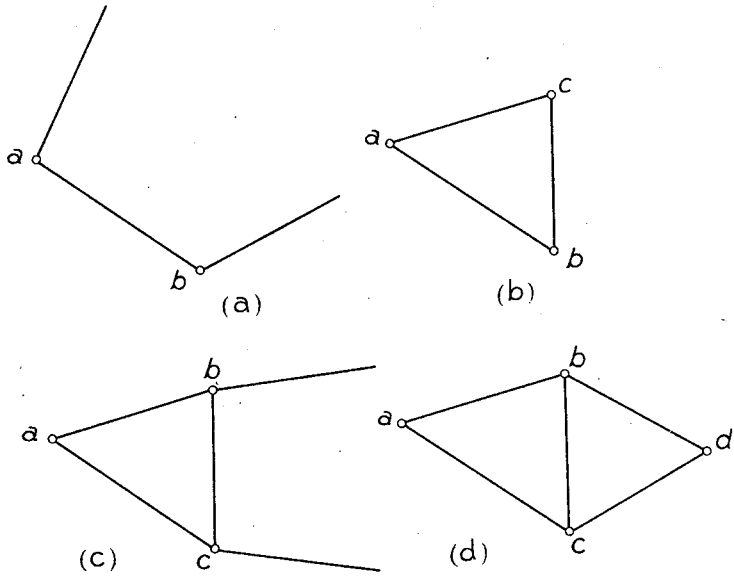


Fig. 7.3.

al conjunto dos grados de libertad, con lo que el sistema resultante poseerá únicamente tres, es decir, se comportará como una chapa rígida. Prosiguiendo en esta forma; es decir, agregando pares de barras articuladas entre sí y a vértices del triangulado, obtendremos lo que se denomina un *sistema de reticulado.* La figura 7.4 muestra dos ejemplos: el caso *a*

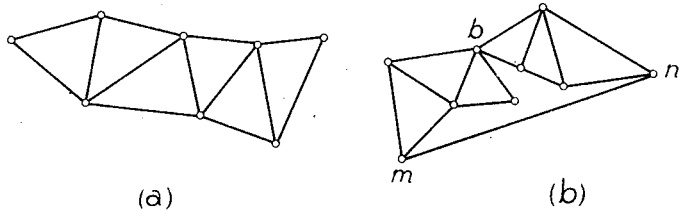


Fig. 7.4.

constituye lo que se conoce como *triangulado simple,* y su generación resulta de agregar un nuevo par de barras a dos nudos o vértices *consecutivos.* En cambio, el caso *b* constituye un reticulado *compuesto,* por cuanto, como es fácil de observar, la barra *m-n* vincula dos triangulados simples, rígidos independientemente y articulados entre sí en el nudo *b*.

7.1.3. Condición de rigidez. Relación entre el número de barras y de vértices.

En el parágrafo anterior vimos que, para generar un reticulado plano, partíamos de un triángulo rígido, constituido por tres barras y tres vértices, al que íbamos agregando pares de barras que, al articularse entre sí, originaban un nuevo vértice. Si llamamos n el número de pares de barras que se agregan al triángulo primitivo, el número total de barras será

$$b = 3 + 2n. \qquad [7.1]$$

Como cada par de barras da origen a un vértice, el número de éstos será:

$$v = 3 + n. \qquad [7.2]$$

Despejando n de la [7.2] y reemplazando en la [7.1] se tiene:

$$b = 3 + 2(v - 3) = 2v - 3. \qquad [7.3]$$

La ecuación [7.3] corresponde a la *condición de rigidez* de un reticulado plano, que establece, para que un reticulado sea estrictamente indeformable, que el número de barras del mismo debe ser igual al doble del número de vértices menos tres.

Esta condición de rigidez es necesaria, pero puede no ser suficiente si la distribución de las barras no es la conveniente.

En el caso de la figura 7.5 *a*, el reticulado cumple la condición [7.3] y, en consecuencia, es rígido e indeformable. Pero si suprimimos la barra

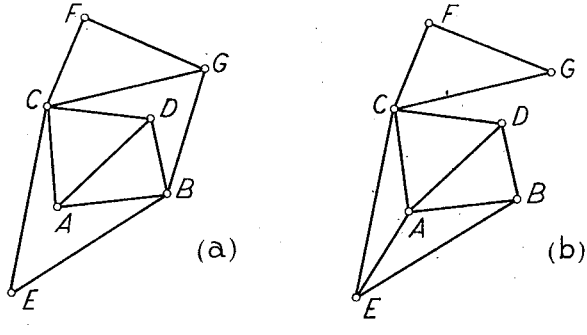


Fig. 7.5.

BG y la reemplazamos por la AE, la condición $b = 2v - 3$ seguirá cumpliéndose, pero el sistema no será más indeformable. En efecto, con la sustitución de barras hemos transformado el sistema en una cadena cinemática de dos chapas articuladas en C con cuatro grados de libertad, uno más de los que corresponden a una chapa rígida. Por otra parte, la chapa A, B, ..., E, no cumple independientemente con la condición [7.3]. En efecto, siendo cinco el número de sus vértices, deberíamos tener

$$b = 2.5 - 3 = 7 \qquad [7.4]$$

y, en realidad, existen 8 barras, es decir, una más que las necesarias, de acuerdo con [7.4]. Es decir que la chapa A, B, ..., E es hiperestática por vínculo interno, al poseer una barra más de las necesarias, o sea, un vínculo interno superfluo.

La expresión [7.3], que establece la condición de rigidez de un reticulado, es completamente general.

En efecto, consideremos (figura 7.6 *a*) un número cualquiera de vértices V_1, V_2, ..., V_8, y vinculémolos mediante barras articuladas

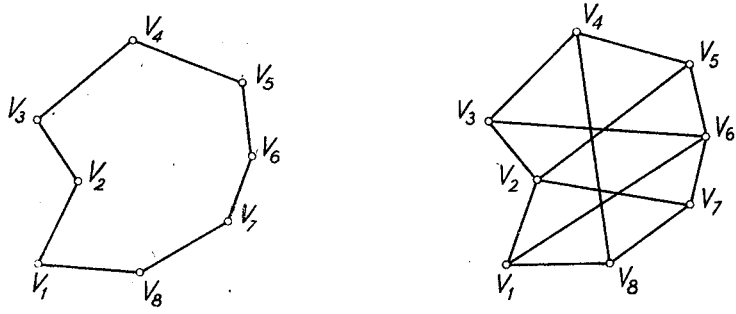


Fig. 7.6.

en los mismos, de modo de constituir una cadena cinemática cerrada. En este caso, el número de vértices será igual al número de barras; es decir,

$$b' = v \,. \qquad [7.5]$$

Por otra parte, la cadena cerrada tendrá un número de grados de libertad igual al número de barras que la constituyen, es decir 8 en el caso analizado.

Si quisiéramos transformar el polígono que constituye la cadena cerrada —polígono que por otra parte también puede ser cruzado— en una chapa rígida e indeformable, debemos agregarle un número de condiciones de vínculo interno igual a la diferencia entre el número de

grados de libertad de la cadena cerrada y el de la chapa rígida; es decir, $8 - 3 = 5$. Dichos vínculos internos estarán constituidos por barras articuladas por sus extremos a los vértices del polígono, teniéndose finalmente el sistema de la figura 7.6 *b*.

Como el número de grados de libertad de la cadena cinemática es igual al número de vértices de la misma, resulta que la cantidad de barras a agregar para transformarla en una chapa rígida será

$$b'' = v - 3 , \qquad [7.6]$$

y, en consecuencia, el número total de barras resulta ser

$$b = b' + b'' = v + v - 3 = 2v - 3 ; \qquad [7.7]$$

es decir, la misma expresión [7.3].

Generalizaremos aún más los conceptos anteriores, considerando un sistema constituido por n reticulados, cada uno de los cuales cumple con la condición de rigidez: $b = 2v - 3$. Si quisiéramos transformar el conjunto de sistemas de reticulado en un único triángulo rígido, deberíamos vincular entre sí las chapas estableciendo articulaciones relativas y agregando barras, de modo de eliminar la posibilidad de desplazamientos relativos entre las distintas chapas a que podemos asimilar los reticulados.

Siendo n el número de reticulados, será necesario introducir $n - 1$ vinculaciones internas. Supondremos en lo que sigue que de estas $n - 1$ vinculaciones, r estará constituida por tres bielas no concurrentes y s por una articulación relativa y una biela, teniéndose

$$n - 1 = r + s . \qquad [7.8]$$

La figura 7.7 *a* y *b* ilustra respectivamente ambas formas de vinculación interna entre los reticulados.

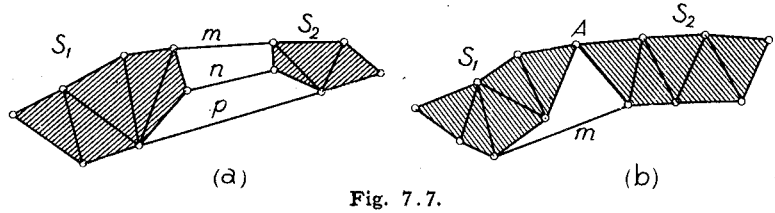


Fig. 7.7.

Siendo b_i el número total de barras de uno de los reticulados, y considerando que las vinculaciones internas constituidas por tres bielas agre-

gan cada una tres barras al sistema y las restantes sólo una, si llamamos b_r a las barras correspondientes al primer tipo de vinculación interna y b_s a las del segundo, tendremos que el reticulado rígido resultante poseerá un número de barras igual a

$$b = \sum_1^n b_i + b_r + b_s = \sum_1^n b_i + 3r + s \,. \qquad [7.9]$$

Reemplazando b_i por su valor dado por la [7.3], y recordando que $\sum_1^n 3 = 3n$, la [7.9] se transforma en

$$b = 2\sum_1^n v_i - 3n + 3r + s \,. \qquad [7.10]$$

Para determinar el número total de vértices del reticulado resultante debemos tener presente que las vinculaciones internas constituidas por tres bielas no agregan ningún nuevo vértice y que las formadas por una articulación relativa y una biela restan un vértice por cuanto dos de los existentes (uno por chapa vinculada) pasan a constituir uno.

En consecuencia, si v_i es el número de vértices de cada reticulado, el número total será

$$v = \sum_1^n v_i - s \,, \qquad [7.11]$$

de donde

$$\sum_1^n v_i = v + s \,. \qquad [7.12]$$

Reemplazando la anterior en la [7.10] y agrupando términos llegamos a

$$b = 2v + 3(r + s - n) \,. \qquad [7.13]$$

Pero, de la [7.8] tenemos que: $r + s - n = -1$, valor que, reemplazado en [7.13], nos conduce nuevamente a

$$b = 2v - 3 \,. \qquad [7.14]$$

Hemos demostrado así que la condición de rigidez de los reticulados es completamente general.

Como dijéramos antes, esta condición es necesaria pero no suficiente, por cuanto, de cumplirse, para que el reticulado sea indeformable, es necesario que no exista vínculo interno aparente ni que existan barras superfluas o que parte del sistema tenga posibilidad de sufrir desplazamientos relativos con respecto a la parte restante.

7.1.4. Distintos tipos de reticulados planos.

Los sistemas de reticulados planos se utilizan para la construcción de techos, tramos de puentes y torres para sostén de tanques o líneas eléctricas aéreas de alta tensión.

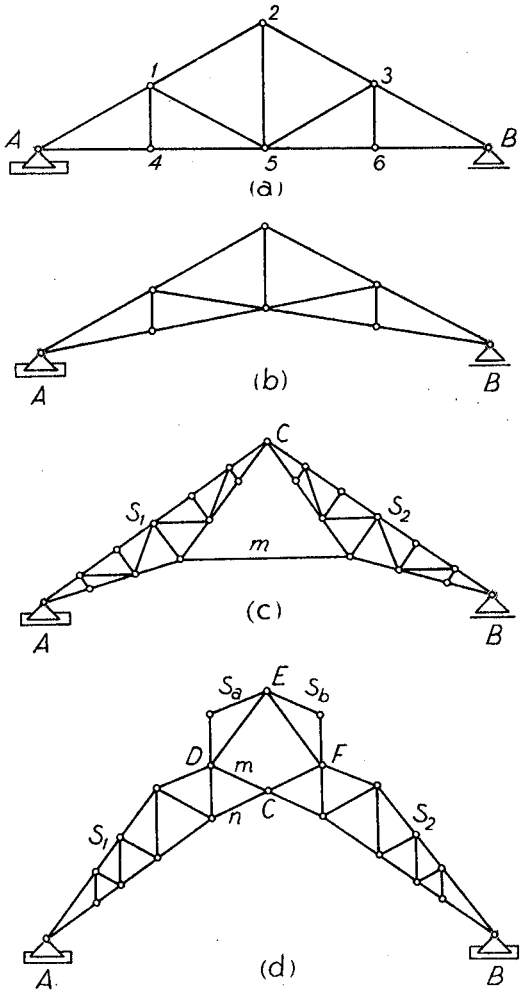


Fig. 7.8.

Como es lógico, es posible concebir las más variadas formas de reticulados. No obstante ello, razones prácticas, que no es del caso analizar por no corresponder a los alcances del presente curso, han reducido los tipos que se utilizan a un número relativamente limitado.

En la figura 7.8 hemos reproducido cuatro tipos de reticulados utilizados en la construcción de techos, principalmente en galpones y naves industriales.

El tipo (*a*) corresponde a la forma más simple, y se construye generalmente de acero o madera. Constituye un sistema rígido que cumple con la condición [7.3], poseyendo, en consecuencia, tres grados de libertad y requiriendo para su fijación a tierra la imposición de tres condiciones de vínculo externo, constituidas en la figura por un apoyo fijo *A* y un apoyo móvil *B*. En el mismo caben distinguir dos tipos de barras: de *cordón* y de *alma*, tales las *1-2* y *1-4* ó *1-5* respectivamente, en la figura 7.8 a. Las barras de alma ver-

ticales (*1-4* ; *3-6*) reciben el nombre de *montantes* y las inclinadas se denominan *diagonales*. La figura 7.8 *b* muestra otro tipo de reticulado, conocido por el nombre de *armadura inglesa*. Estos sistemas de reticulados constituyen en realidad *vigas*, denominadas de *alma calada* o de *reticulado*, por contraposición de las vigas de *alma llena*, que serán objeto de un estudio detallado en el capítulo 8. Se acostumbra denominarlas *cerchas* o, impropiamente, *armaduras para techo*.

El sistema de la figura 7.8 c constituye en realidad un reticulado compuesto, conocido por el nombre de *armadura Polonceau*, y se lo emplea para salvar luces de cierta magnitud. Está formada por las dos chapas reticuladas S_1 y S_2 vinculadas mediante la articulación relativa C y la biela m, de modo de constituir una única chapa rígida vinculada a tierra por medio de un apoyo fijo A y otro móvil B.

Finalmente, la figura 7.8 *d* corresponde a un sistema más complejo, constituido por las chapas de reticulado S_1 y S_2 vinculadas entre sí por las bielas m y n. Configuran en conjunto un arco a tres articulaciones, constituidas por los dos apoyos fijos A y B y la articulación relativa ficticia C, ubicada en la intersección de las bielas mencionadas. Superpuesto a este arco a tres articulaciones existe un segundo, formado por las chapas de reticulado S_a y S_b, con articulaciones en D, E y F, y que constituyen una estructura denominada *linterna*, cuyo objeto es permitir el pasaje de la luz diurna a través de las superficies verticales, generalmente provistas de vidrios dispuestos en forma de permitir simultáneamente el pasaje de aire con fines de ventilación.

Las vigas de reticulado para puentes pueden ser de *cordones paralelos*, semiparabólicas o parabólicas. El primer tipo no requiere mayor aclaración. En cuanto a las vigas semiparabólicas y parabólicas, corresponden a los casos en que los nudos del cordón superior están inscriptos en un

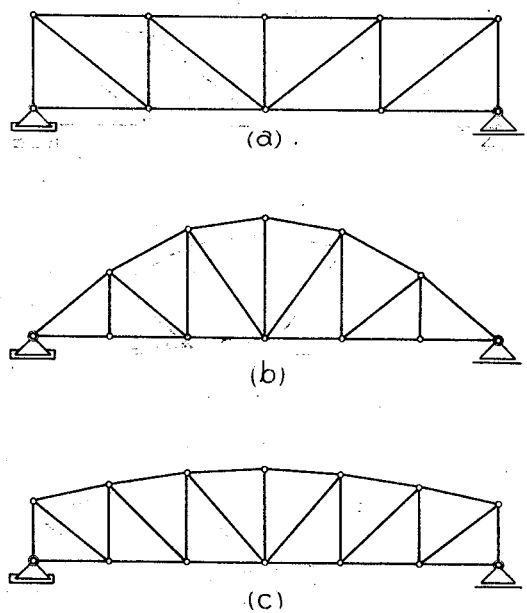


Fig. 7.9.

arco de parábola, recibiendo la primera denominación cuando los arranques de la parábola coinciden con los nudos extremos del cordón inferior, y la segunda si existen montantes extremos verticales, de cuyos extremos superiores arranca la parábola.

En la figura 7.9 *a*, *b*, *c* se muestran, respectivamente, los tres tipos de viga indicados, en los que se ha utilizado el sistema de reticulado denominado *Pratt* o viga *N*. Este tipo de reticulado posee montantes verticales y diagonales descendentes hacia el centro del tramo.

Otro tipo de reticulado es el *Warren*, que puede poseer o no montantes. Este reticulado se caracteriza porque sus diagonales cambian de dirección en mallas sucesivas. En ciertos casos, y con el objeto de disminuir la longitud de las diagonales, se suelen disponer *contradiagonales*. En la figura 7.10 *a, b* y *c* pueden observarse las tres variantes de la viga *Warren*.

La viga *Warren* con contradiagonales, es en realidad un reticulado compuesto. En efecto, el reticulado delimitado por los nudos *A*, *1* y *2*, constituye una chapa rígida, así como también lo es el que limitan los nudos *2*, *3* y *4*. Ambas chapas están vinculadas entre sí en forma rígida por la articulación relativa *2* y la biela *1-3*, ocurriendo lo mismo con los reticulados parciales *4*, *5*, *6*, etc.

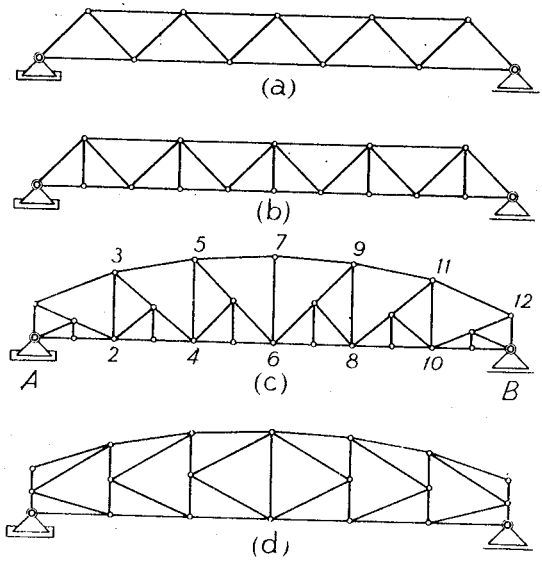


Fig. 7.10.

En las vigas *Warren* con contradiagonales, éstas pueden ser inferiores —caso de la figura 7.10 c— o superiores. En este caso, la contradiagonal partiría de un nudo del cordón superior. Finalmente, mencionaremos un cuarto tipo de reticulado, que es el que muestra la figura 7.10 *d*. Se trata de la denominada *viga K*, cuya rigidez puede establecerse fácilmente comenzando su análisis a partir del montante central.

El estudio de los distintos tipos existentes de reticulados para tramos de puentes, aparte de los mencionados, las razones que abonan las disposiciones de barras de cada uno de ellos, y el análisis de sus ventajas

e inconvenientes, corresponden al curso de Construcciones Metálicas, por lo que no nos extenderemos sobre el particular.

Las estructuras de reticulado tienen por misión transmitir a los apoyos las cargas que las solicitan por intermedio de las barras que las constituyen. En consecuencia, cada una de las barras soportará un determinado esfuerzo —que en ciertas circunstancias podrá ser nulo— de cuya determinación nos ocuparemos en los parágrafos siguientes.

Los esfuerzos exteriores que solicitan a los reticulados están constituidos por

a) peso propio;

b) efecto del viento (en ciertas zonas eventualmente el peso de la nieve;

c) sobrecarga, generalmente móvil.

Tanto el peso propio de la estructura como el efecto del viento constituyen, en realidad, cargas distribuidas sobre toda la estructura o parte de ella. En cambio, la sobrecarga móvil de los tramos de puentes, originada por el tránsito de vehículos o trenes, está compuesta por una serie de cargas concentradas. Para el estudio de los esfuerzos que se desarrollan en las barras de los reticulados, supondremos con suficiente aproximación que las cargas exteriores se transmiten a los nudos, por intermedio de estructuras secundarias auxiliares, en forma de cargas concentradas. Igual hipótesis adoptaremos en lo que respecta al peso propio, lo que conduce a resultados suficientemente exactos, por cuanto los efectos secundarios derivados del hecho de que el peso propio de cada barra actúe distribuido sobre la longitud de la misma en lugar de hallarse concentrado por mitades en sus extremos, conducen a tensiones despreciables, en general, frente a la magnitud de los esfuerzos axiles que solicitan a las barras.

7.1.5. Determinación de esfuerzos en barras. Método de Culmann.

El principal problema que se plantea al proyectar una estructura de reticulado es el de conocer los esfuerzos que, en las distintas barras que la constituyen, originan las fuerzas exteriores.

Si en un sistema de reticulado, en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores aplicadas en los nudos del mismo, suprimimos una barra, el equilibrio se altera. Para restituirlo es necesario aplicar en los dos nudos en que se articulaba la barra suprimida, fuerzas de igual intensidad y sentido contrario, cuya recta de acción coincida con

el eje de la barra. Como dijéramos antes, el conjunto de las dos fuerzas materializa el esfuerzo en la barra.

Entre los distintos procedimientos desarrollados para calcular el valor y signo de los esfuerzos en las barras de los reticulados, existe el denominado método de Culmann, que describiremos a continuación, basado en el procedimiento homónimo para descomponer una fuerza en tres direcciones coplanares no concurrentes. Es un procedimiento gráfico que, por su esencia, impone trabajar simultáneamente con los esfuerzos en tres barras, cuyos ejes no deben ser concurrentes.

Consideremos el sistema de reticulado de la figura 7.11 *a*, sujeto a la acción de las cargas exteriores activas P_1, P_2 y P_3. El mismo se

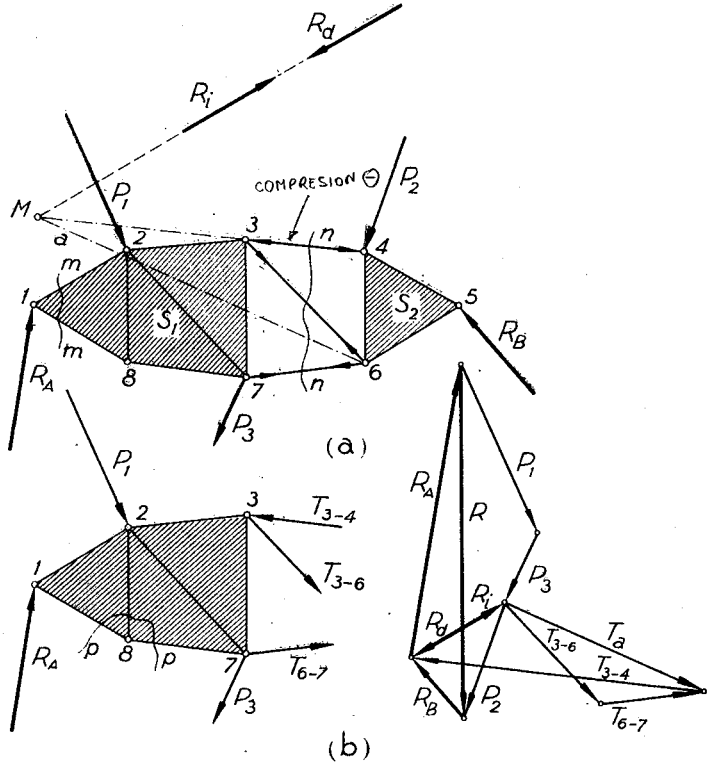


Fig. 7.11.

encuentra en equilibrio por estarlo el conjunto de fuerzas P_1, P_2 y P_3 (activas) y R_A, R_B (reactivas). Supongamos eliminadas las barras *3-4*; *3-6* y *6-7* afectadas por la sección *n-n*, con lo que el sistema resultará dividido en dos chapas independientes, S_1 y S_2, que no se encontrarán

en equilibrio por no estarlo los sistemas de fuerzas que solicitan a cada una de ellas.

Si queremos restablecer el equilibrio de las chapas será necesario aplicar a cada una de ellas fuerzas que compuestas con las actuantes, originen sistemas nulos. Dichas fuerzas tendrán por rectas de acción los ejes de las barras suprimidas y materializarán los esfuerzos internos en las mismas.

En la figura 7.11 *b* hemos considerado la chapa S_1 y agregado a la misma, en los nudos *3* y *7*, las fuerzas T_{3-4} ; T_{3-6} y T_{6-7} , dirigidas según los ejes de las barras *3-4*; *3-6* y *6-7* respectivamente.

Las fuerzas P_1 , P_3 y R_a , que solicitan a la chapa S_1 , admiten una resultante R_i , que denominaremos *resultante izquierda*, por serlo de las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección considerada, es decir, sobre la chapa S_1 . Dicha resultante izquierda debe encontrarse en equilibrio con las fuerzas T_{3-4} ; T_{3-6} y T_{6-7} .

Para hallar la intensidad y sentido de estas últimas fuerzas, bastará descomponer R_i en las direcciones de aquéllas, cambiando luego el sentido de las componentes. En la figura 7.11 *a* se ha utilizado como auxiliar de Culmann la recta *M-6*, definida por el punto *M* de intersección de la recta de acción de R_i con la correspondiente a la fuerza T_{3-4} y el nudo *6* al que concurren las fuerzas T_{3-6} y T_{6-7} .

La resultante R_d , de las fuerzas que actúan sobre la chapa S_2 , la denominaremos *resultante derecha*, por serlo de las fuerzas aplicadas a la derecha de la sección *n-n*. Esta resultante es opuesta a la resultante izquierda, por tratarse de resultantes parciales de un sistema en equilibrio aplicado a un mismo cuerpo rígido. En consecuencia, la descomposición de R_d según las rectas de acción de las tres fuerzas coincidentes con los ejes de las barras afectadas por el corte *n-n*, pero esta vez aplicadas en los nudos correspondientes de la chapa S_2 , conducirá a fuerzas T_{3-4} ; T_{3-6} y T_{6-7} de igual intensidad pero de sentido contrario a las obtenidas al descomponer R_i .

Para cada una de las barras afectadas por el corte *n-n*, el conjunto de las dos fuerzas T_{i-j} materializa el *esfuerzo interno* en la barra. Su intensidad se obtiene de la descomposición efectuada en el polígono de fuerzas y, en cuanto al signo del esfuerzo, surge de la aplicación de la regla establecida en 7.1.1. Así, para la barra de cordón *3-4*, los sentidos de las fuerzas aplicadas a los nudos *3* y *4* son tales que *concurren* a los mismos. En consecuencia, conforme con la regla establecida, el esfuerzo en la barra será de *compresión* (negativo). En cambio, para las barras *3-6* y *6-7*, las fuerzas aplicadas a los nudos que subtienden las barras se alejan de los mismos, por lo que los esfuerzos en las barras serán de *tracción* (positivos).

El procedimiento de Culmann es aplicable en aquellos casos en que el corte que afecta tres barras divide el sistema de reticulado en dos

chapas rígidas vinculadas entre sí por las tres barras mencionadas. Si el número de barras afectadas por el corte es mayor que tres o si, afectando tres barras, las mismas fueran concurrentes (corte $p - p$ de la figura 7.11 *b*), el procedimiento de Culmann no es aplicable. Cuando el corte afecta solamente dos barras (corte $m - m$ de la figura 7.11 *a*) el problema se reduce, como es evidente, a la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes.

7.1.6. Determinación de esfuerzos en barras. Método de Ritter.

El *método de Ritter,* conocido también con el nombre de *método de los momentos,* es simplemente la interpretación gráfico-numérica de la descomposición de una fuerza en tres componentes coplanares y no con-

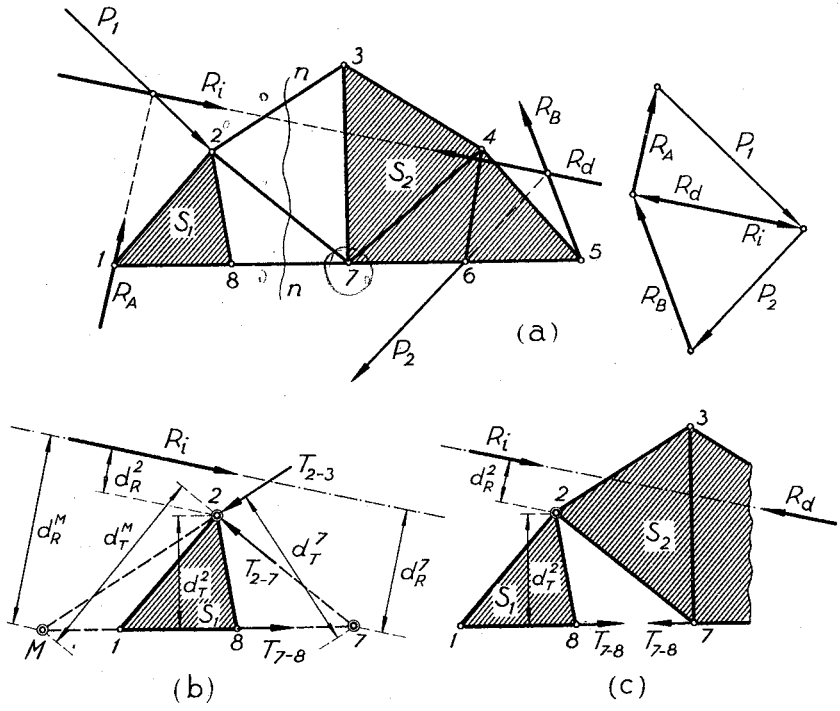


Fig. 7.12.

currentes. Consideremos el reticulado de la figura 7.12 *a*, en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores P_1; P_2 (activas) y R_A y R_B (reactivas). Suprimidas del reticulado las barras *2-3*; *2-7* y *7-8*, el

mismo resulta dividido en las dos chapas S_1 y S_2, sujetas a la acción de las resultantes R_i y R_d respectivamente. La supresión de las barras que constituian el vínculo interno rompe el equilibrio del sistema, por lo que será necesario aplicar, como viéramos antes, fuerzas $T_{2\text{-}3}$; $T_{2\text{-}7}$ y $T_{7\text{-}8}$ a cada chapa en los nudos correspondientes y según los ejes de las barras suprimidas, para restituir el equilibrio.

Para calcular la intensidad de las fuerzas que actúan según las barras suprimidas, y que con las respectivas resultantes R_i ó R_d deben constituir sistemas nulos, establecemos las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de sistemas planos de fuerzas no concurrentes, estudiadas en el capítulo 2. El procedimiento de Ritter consiste en expresar dichas condiciones de equilibrio mediante tres condiciones de nulidad de momentos, eligiendo precisamente como centros de momentos puntos para los que se anulen dos de ellos, resultando, en definitiva, tres ecuaciones independientes con una incógnita cada una.

Eligiendo como centro de momentos el nudo *7*, con respecto al mismo se anularán los momentos de las fuerzas $T_{2\text{-}7}$ y $T_{7\text{-}8}$, teniéndose, con la notación de la figura **7.12** *b*,

$$R_i . d_R^7 + T_{2\text{-}3} . d_T^7 = 0 \ . \qquad [7.15]$$

ecuación que nos permite despejar el valor de la intensidad de la fuerza $T_{2\text{-}3}$:

$$| T_{2\text{-}3} | = \left| \frac{R_i . d_R^7}{d_T^7} \right| , \qquad [7.16]$$

expresión que nos da el valor absoluto de la fuerza $T_{2\text{-}3}$ aplicada en el nudo *2* según la dirección de la barra *2-3*. El sentido de esta fuerza surge de la siguiente consideración: el cumplimiento de la ecuación [7.15] exige que el momento de $T_{2\text{-}3}$ respecto del centro *7* sea opuesto al de R_i respecto del mismo punto. En consecuencia, el sentido de $T_{2\text{-}3}$ debe ser tal que conduzca, en este caso, a un momento negativo respecto del punto *7*, por ser positivo el correspondiente a R_i. Luego, $T_{2\text{-}3}$ debe estar dirigida *hacia* el nudo *2*. Como R_d es opuesta a R_i, efectuando las mismas consideraciones respecto de la chapa S_2 se llega a que en el nudo *3* actuará una fuerza $T_{2\text{-}3}$, de igual intensidad que la aplicada en el nudo *2* y de sentido contrario. Ambas fuerzas configuran el esfuerzo en la barra *2-3* y, de acuerdo con la convención adoptada, por dirigirse *hacia* los nudos respectivos, corresponden a un esfuerzo de compresión (negativo).

Para determinar los esfuerzos en las barras *2-7* y *7-8*, establecemos condiciones de nulidad de momentos respecto de los puntos *M* y *2*,

respectivamente, que conducen a las siguientes ecuaciones:

$$R_i \cdot d_R^M + T_{2-7} \cdot d_T^M = 0 \qquad [7.17]$$

$$R_i \cdot d_R^2 + T_{7-8} \cdot d_T^2 = 0 \qquad [7.18]$$

de las que despejamos los valores de T_{2-7} y T_{7-8}

$$| T_{2-7} | = \left| \frac{R_i \cdot d_R^M}{d_T^M} \right| \qquad [7.19]$$

$$| T_{7-8} | = \left| \frac{R_i \cdot d_R^2}{d_T^2} \right| . \qquad [7.20]$$

Los signos de ambos esfuerzos se obtienen en la forma explicada y, para el caso analizado, resultan ser de *tracción* (positivo) para la barra *7-8* y de *compresión* (negativo) para la *2-7*.

El método de Ritter puede justificarse también en la forma siguiente. Supongamos suprimida la barra *7-8*, por ejemplo. En tal caso, el reticulado se transforma en una cadena cinemática de dos chapas, S_1 y S_2, articuladas en el nudo *2*, que no se encuentran en equilibrio. Para restituirlo aplicamos, según la dirección de la barra suprimida, dos fuerzas de igual intensidad y sentidos contrarios, T_{7-8}, en los nudos *7* y *8*. La chapa S_1 bajo la acción de R_i y T_{7-8} debe encontrarse en equilibrio. Pero, como hemos visto en capítulos anteriores, para que una chapa con una articulación —sea ésta absoluta o relativa— sujeta a la acción de fuerzas exteriores se encuentre en equilibrio, es condición necesaria y suficiente que la resultante de las fuerzas aplicadas pase por la articulación. Y, para que ello se cumpla, es necesario que sea nula la suma de los momentos de las fuerzas que constituyen el sistema respecto de la mencionada articulación. Ello, como es fácil observar, conduce, para el caso de la barra *7-8*, directamente a la ecuación [7.18] y, consecuentemente, a la [7.20].

Cuando dos de las tres barras afectadas por el corte son paralelas, lo que ocurre en el caso de vigas de cordones paralelos, para la determinación del esfuerzo en la barra de alma, sea diagonal o montante, el método de Ritter no es aplicable directamente en la forma descripta. En efecto, en el sistema de la figura 7.13, para determinar el esfuerzo en la barra *3-7* es necesario tomar momentos respecto del punto de intersección de las barras *3-4* y *7-8* que, por ser éstas paralelas, resulta ser el impropio de la dirección de las mismas. Como no es posible tomar momentos respecto de un punto impropio, por cuanto ello conduce a una expresión indeterminada, no es posible aplicar en la forma vista el procedimiento de Ritter.

El inconveniente se salva en la forma siguiente: Determinado previamente el esfuerzo en una cualquiera de las barras de cordón, la *7-8* por ejemplo, si elegimos como centro de momentos el punto *N* en que se cortan las rectas de acción de R_i y la otra barra de cordón, se anula-

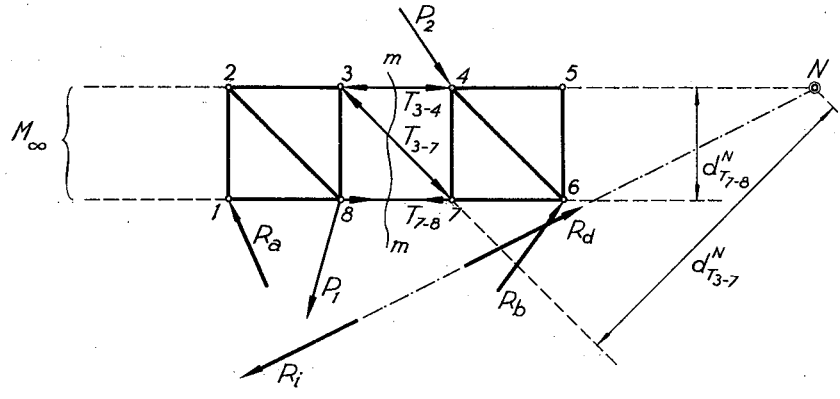


Fig. 7.13.

rán los momentos correspondientes a ambas, resultando una ecuación en que aparecen los momentos de la fuerza T_{7-8}, conocida, y de la T_{8-7}, incógnita. Tendremos así

$$T_{8-7} \cdot d^N_{T_{8-7}} + T_{7-8} \cdot d^N_{T_{7-8}} = 0 \,, \qquad [7.21]$$

de donde

$$| T_{8-7} | = \left| \frac{T_{7-8} \cdot d^N_{7-8}}{d^N_{T_{8-7}}} \right| . \qquad [7.22]$$

La determinación del signo del esfuerzo en la barra se efectúa en la forma explicada.

Existen ciertos sistemas de reticulado, generalmente constituidos por varias chapas, para los cuales determinados cortes abarcan necesariamente cuatro barras. En tales casos ni el método de Culmann ni el de Ritter, en la forma vista, son aplicables. El problema se soluciona mediante una extensión del procedimiento de Ritter denominado *método de los dos momentos,* que explicamos a continuación.

Sea el reticulado de la figura 7.14 constituido por las chapas S_1, S_2, S_3 y S_4 articuladas entre sí y vinculadas mediante las bielas de vínculo interno *A-12* y *B-15*. El conjunto posee cuatro grados de libertad, que le son restringidos por las cuatro condiciones de vínculo externo constituidas por los dos apoyos fijos a tierra en *A* y *B*. Para calcular

los esfuerzos en la barra *A-12* es necesario efectuar el corte *m-m*, pero el mismo afecta simultáneamente la barra *B-15*. En consecuencia, al plantear la condición de nulidad de momentos respecto del nudo *14*, aparecen como incógnitas en la ecuación los esfuerzos en las barras *A-12* y *B-15*. El problema se resuelve efectuando simultáneamente el corte *n-n*.

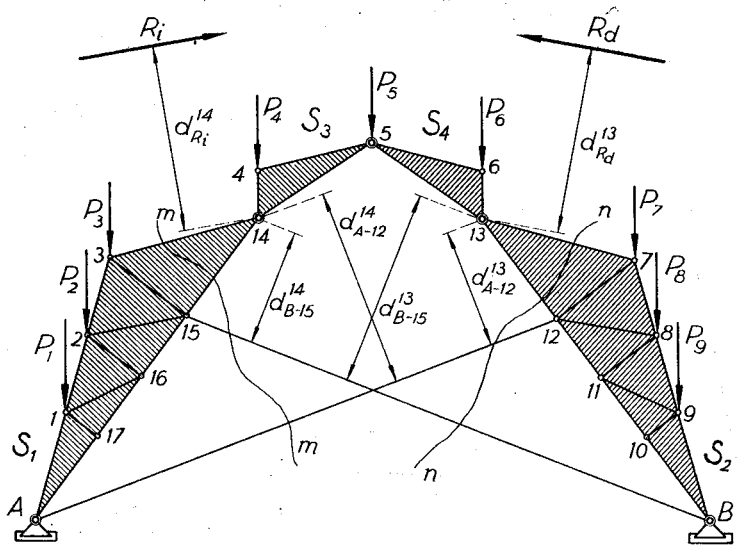


Fig. 7.14.

Este corte afecta, aparte de las barras *7-13* y *12-13*, las barras *A-12* y *B-15*. Planteada con respecto al nudo *13* la condición de nulidad de momentos de las fuerzas que actúan sobre la chapa S_2, en la correspondiente ecuación aparecerán otra vez los esfuerzos correspondientes a las barras *A-12* y *B-15*. Tendremos así un sistema de dos ecuaciones entre las incógnitas T_{A-12} y T_{B-15}, que nos resuelven el problema y cuya expresión es la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} R_i \cdot d^{14}_{R_i} + T_{A-12}\, d^{14}_{A-12} + T_{B-15}\, d^{14}_{B-15} &= 0 \\ R_d \cdot d^{13}_{R_d} + T_{A-12}\, d^{13}_{A-12} + T_{B-15}\, d^{13}_{B-15} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [7.23]$$

donde R_i y R_d corresponden a la resultante de las fuerzas exteriores activas y reactivas que actúan, respectivamente, en las chapas S_1 y S_2.

Cuando el reticulado es simétrico y se encuentra simétricamente cargado, los esfuerzos en ambas barras son iguales, y el sistema [7.23] se reduce a una única ecuación con una incógnita, como es fácil observar.

7.1.7. Utilización del polígono funicular para la aplicación de los métodos de Culmann y Ritter.

Los métodos de Culmann y Ritter para la determinación de los esfuerzos en las barras de un reticulado se reducen, en última instancia, a determinar la posición y magnitud de la resultante izquierda (o derecha) de las fuerzas exteriores activas y reactivas ubicadas a uno u otro lado de la sección que afecta tres barras.

Cuando todas las fuerzas exteriores son paralelas, el problema de la determinación de la resultante de las fuerzas ubicadas a un lado de la sección que se considera, se simplifica enormemente mediante el trazado de un polígono funicular

Sea, por ejemplo, el reticulado de la figura 7.15 cargado en los nudos del cordón superior con fuerzas verticales, y cuyo apoyo móvil B es horizontal. En este caso, como es evidente, ambas reacciones de vínculo serán verticales. Trazando con polo O un polígono funicular de las fuerzas activas exteriores, la intersección de sus lados extremos con las ver-

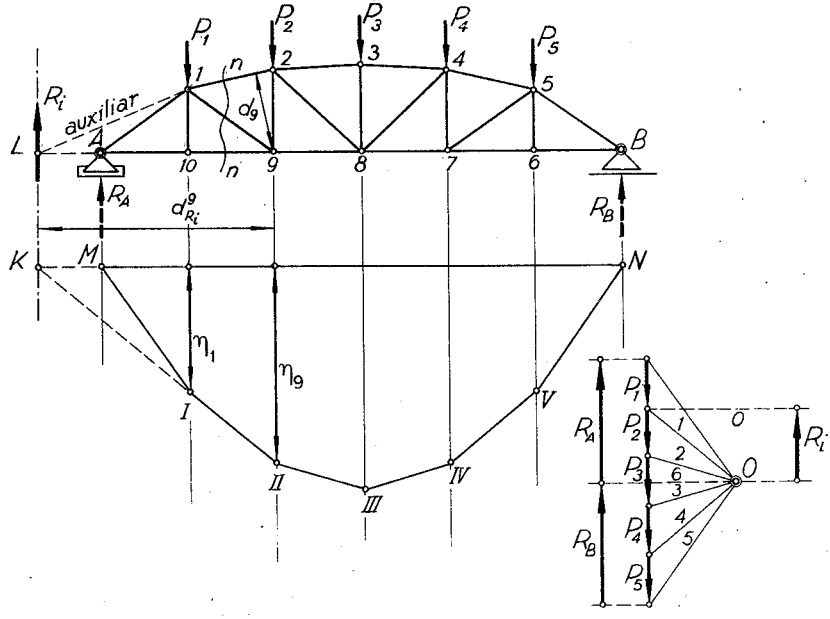


Fig. 7.15.

ticales trazadas por los apoyos determinan los puntos M y N, los que, a su vez, definen una recta denominada *lado de cierre* del polígono funicular. Trazando por el polo O una paralela a dicho lado de cierre, la misma determinará sobre el polígono de fuerzas un punto que define los vectores representativos de dos fuerzas que serán las reacciones de vínculo R_A y R_B. En efecto, el sistema P_1, P_2 ..., P_5, R_A y R_B debe encontrarse en equilibrio, y la condición gráfica para que el mismo se verifique es que el sistema posea polígonos de fuerzas y funicular cerrados.

Si M-I es uno de los lados del funicular de R_A, el otro lado debe cortarse con el anterior precisamente en M. Otro tanto ocurre con el funicular de R_B, cuyo segundo lado debe pasar por N. Ahora bien, si el polígono funicular del sistema debe ser cerrado, necesariamente el primer lado del funicular de R_A y el segundo del correspondiente a R_B, deben coincidir. Por consiguiente, la recta MN corresponde a dichos lados extremos del polígono funicular del sistema en equilibrio. El rayo polar correspondiente será el rayo *6*, obtenido trazando por O una paralela a MN. En consecuencia, en el polígono de fuerzas el vector representativo de R_A quedará definido por el rayo *6* como primer rayo polar y el O como rayo extremo y, a su vez, R_B lo será por los rayos *5* y *6* en ese orden.

Si consideramos el corte n-n que afecta las barras *1-2*; *1-9* y *9-10*, a la izquierda del mismo sólo actúan las fuerzas P_1 y R_A. En consecuencia, la resultante izquierda relativa al corte n-n se obtendrá componiendo las dos fuerzas mencionadas. El polígono funicular de P_1 y R_A está constituido por los lados NM (primer lado); M-I y I-II (lado extremo). La recta de acción de la resultante R_i pasará por el punto de intersección de MN con I-II (punto K en la figura 7.15) y, por tratarse de un sistema de fuerzas paralelas, su recta de acción será de la misma dirección que las fuerzas componentes. Su intensidad y sentido surgen de inmediato del polígono de fuerzas.

Vemos así cómo el polígono funicular, en el caso de un sistema de fuerzas paralelas, nos permite determinar la resultante izquierda (o derecha) en forma expeditiva para cualquier sección.

Si quisiéramos aplicar el método de Culmann para calcular los esfuerzos en las barras afectadas por el corte, bastaría determinar la recta auxiliar en la forma indicada en la figura 7.15 y descomponer R_i en el polígono de fuerzas, en la forma vista en 7.1.5 (la descomposición se ha omitido en la figura).

El polígono funicular permite simplificar la aplicación del método de Ritter. En efecto, al estudiar en el capítulo 2 las propiedades y las aplicaciones del polígono funicular, vimos que éste nos permitía determinar gráficamente el momento de una fuerza respecto de un punto cual-

quiera de su plano, para lo cual bastaba trazar por el centro de momentos una paralela a la dirección de la fuerza e intersecar con la misma los lados extremos del polígono funicular. El segmento así determinado, leído en la escala correspondiente, nos dará el momento buscado.

En el caso de la figura 7.15, si aplicamos el método de Ritter para calcular el esfuerzo en la barra *1-2*, debemos determinar el momento de R_i respecto del nudo *9*. Ahora bien, R_i, cualquiera sea la sección a la que corresponda, siempre será vertical. Para la sección *n-n*, el polígono funicular de R_i lo constituyen los lados *KMN* y *K-I-II*. Trazando por *9* una vertical, la misma determinará, en su intersección con los lados mencionados, la ordenada η_y que, leída en la escala de momentos, nos da el valor del momento de la resultante izquierda con respecto a *9*, es decir, el valor del producto

$$M^9_{R_i} = R_i . d^9_{R_i} \qquad [7.24]$$

Dividiendo el valor obtenido de la [7.24] por la distancia de la barra *1-2* al nudo *9*, obtenemos el valor absoluto del esfuerzo T_{1-2}. En cuanto al signo, su determinación se efectúa en la forma explicada al analizar el método de Ritter.

Para la barra *9-10*, el centro de momentos correspondiente es el nudo *1*, no variando R_i ni su polígono funicular. El segmento intersecado por la vertical trazada por *1* será η_1. Observemos que tanto η_1 como η_y son ordenadas comprendidas *entre el lado de cierre* y el *polígono funicular*. En consecuencia, las ordenadas comprendidas entre el polígono funicular y el lado de cierre dan directamente, en la escala correspondiente, los momentos de la resultante de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la vertical que se considera respecto de un punto cualquiera de dicha vertical. De ahí que, para determinar el momento de la resultante izquierda o derecha de una sección con respecto a un nudo, basta bajar por el mismo una vertical y leer en la escala correspondiente la ordenada comprendida entre el polígono funicular y el lado de cierre. Cuando se trata de determinar el esfuerzo en una barra diagonal, para la cual el centro de momentos cae fuera de la zona comprendida entre apoyos, bastará prolongar el lado extremo del polígono funicular de las fuerzas ubicadas a un lado de la sección y, una vez determinado el centro de momentos, bajar por el mismo una vertical la que, en su intersección con dicho lado y el de cierre, determina el segmento que, en escala, nos mide el valor del momento buscado.

Tal es el caso de la figura 7.16 donde, para la barra *1-9*, el centro de momentos se halla en la intersección de las barras *1-2* y *9-10*; es decir, el punto *S*. Prolongando el lado *I-II* del polígono funicular y

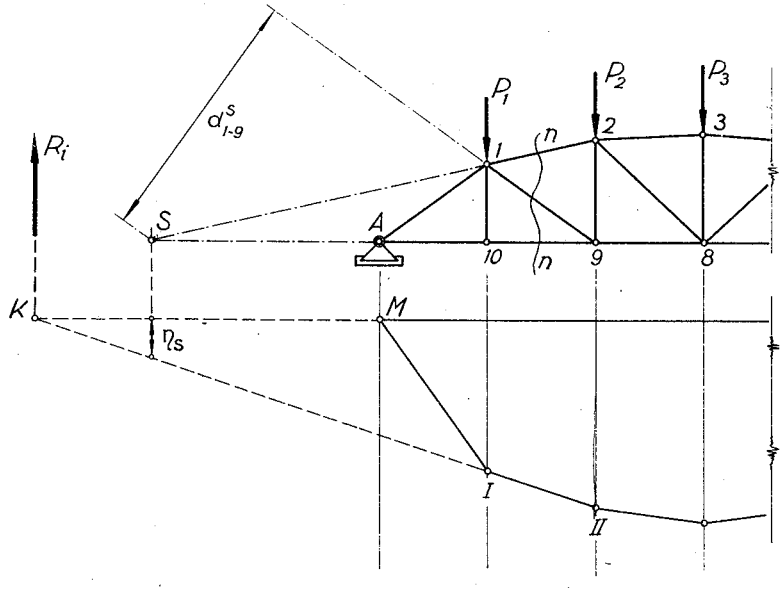


Fig. 7.16.

trazando por S una vertical, la misma nos determina una ordenada η_s que, leída en la escala correspondiente, nos da el valor del momento de la resultante R_i con respecto al punto S. Finalmente, dividiendo este valor por la distancia entre la barra *1-9* y el punto S, obtenemos el del esfuerzo T_{1-9}. El signo correspondiente se determina en la forma conocida.

7.1.8. Determinación analítica de los esfuerzos en barras de reticulados.

Un sistema de reticulado puede ser imaginado como un conjunto discreto de puntos materiales (los nudos) unidos entre sí por el vínculo de la rigidez, materializado en este caso por las barras que los vinculan.

Si el reticulado se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores activas y reactivas que lo solicitan; también lo estará cada uno de los puntos materiales (nudos) que lo constituyen. Si suprimimos las barras y las reemplazamos por los correspondientes esfuerzos internos, en cada nudo del reticulado tendremos un sistema de fuerzas concurrentes que debe encontrarse en equilibrio.

A cada nudo o vértice del reticulado concurren dos, tres o más barras, cada uno de cuyos esfuerzos constituye una incógnita del problema y, para establecer el equilibrio del sistema de fuerzas que concu-

rren al vértice, deberemos establecer las condiciones necesarias y suficientes que debe reunir el mismo, las que, como sabemos, se pueden traducir en dos ecuaciones de nulidad de proyecciones de las fuerzas sobre dos ejes. Es decir que, por cada vértice del reticulado, podremos plantear dos ecuaciones. Si éste posee n vértices, el número total de ecuaciones que es posible plantear se eleva a $2n$.

Siendo n el número de vértices, el reticulado estará constituido por $2n-3$ barras y, en consecuencia, el número de esfuerzos incógnitos será de $2n-3$, uno por barra, a los que habrá que agregar las tres incógnitas correspondientes a las reacciones de vínculo, lo que hace un total de $2n$ incógnitas. Siendo el número de incógnitas igual al de ecuaciones de que se dispone, el problema tiene solución analítica perfectamente definida. Cabe hacer notar que no se trata de un sistema de $2n$ ecuaciones simultáneas entre las $2n$ incógnitas, sino de un sistema encadenado que es posible resolver por pasos sucesivos, comenzando por aquellas que correspondan a nudos en que sólo aparezcan dos esfuerzos incógnitos, situación que, salvo casos especiales, se presenta en los nudos extremos de la mayor parte de los reticulados corrientes.

7.1.9. Determinación de los esfuerzos mediante el diagrama de Maxwell-Cremona.

La determinación de los esfuerzos en las barras que concurren a los nudos puede efectuarse gráficamente. En efecto, sabemos que la condición gráfica para el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes consiste en que el correspondiente polígono de fuerzas resulte cerrado. Para que la solución gráfica sea posible es menester que, de las n fuerzas que concurren al punto considerado, $n-2$ sean conocidas, es decir, que estemos ante un problema de sólo dos incógnitas. Como dijéramos en el parágrafo anterior, en los reticulados de uso corriente existe siempre por lo menos un nudo al que concurren sólo dos barras, nudo que generalmente corresponde al lugar en que el reticulado se encuentra vinculado a tierra. Tal el caso del reticulado de la figura 7.17 *a*: en los nudos *1* y *4* concurren respectivamente las barras *1-2*; *1-6* y *3-4*; *4-5*. Además, en dichos nudos se encuentran los vínculos externos que fija el sistema a tierra.

Determinadas las reacciones de vínculo R_1 y R_4 vemos que, si ponemos en evidencia los esfuerzos en las barras que concuren a los nudos *1* y *4*, será posible descomponer aquéllas en las direcciones correspondientes a estas últimas, para luego, cambiando el sentido de dichas componentes, obtener en intensidad y sentido los esfuerzos internos buscados. En la figura 7.17 *b* hemos procedido a equilibrar R_1 mediante

dos fuerzas aplicadas en *1*, cuyas rectas de acción coinciden con los ejes de las barras *1-2* y *1-6*, obteniendo en el correspondiente polígono de fuerzas la intensidad y el sentido de las fuerzas buscadas. En el reticulado de la figura 7.17 *a* hemos colocado, en las dos barras que concurren a *1*, en correspondencia con sus extremos coincidentes con aquél, flechas indicativas de los sentidos de las fuerzas. Aislando ahora el nudo *6*, tenemos que al mismo concurre una fuerza de la dirección de la barra *1-6* de la misma intensidad que la aplicada en el nudo *1* pero de sentido contrario.

El conjunto de ambas fuerzas constituye, como se ha dicho, el esfuerzo en la barra *1-6*, que será de tracción, por cuanto las dos fuerzas se *alejan* de los nudos a los que se hallan aplicadas. Al nudo *6* concurren, además, dos fuerzas incógnitas, las correspondientes a las barras *2-6* y *5-6*. En la figura 7.17 c hemos construido el correspondiente polígono cerrado de fuerzas que nos permite obtener sus intensidades y sentidos. Pasando ahora al nudo *2*, resultan aplicadas al mismo tres fuerzas conocidas: $T_{1\text{-}2}$, $T_{2\text{-}6}$ y P_1, y dos desconocidas: $T_{2\text{-}3}$ y $T_{2\text{-}5}$. Construido el polígono de las tres primeras (figura 7.17 *d*), equilibramos la resultante de las mismas con las fuerzas $T_{2\text{-}3}$ y $T_{3\text{-}5}$. Procediendo en forma similar, llegamos finalmente al nudo *4*, para el cual la resultante de las fuerzas actuantes según las barras *3-4* y *4-5* debe ser opuesta a la reacción R_4 para que exista equilibrio. El procedimiento explicado resulta laborioso, sobre todo si se trata de reticulados con gran número de nudos, por cuanto es necesario efectuar numerosas construcciones gráficas.

El procedimiento de *Maxwell-Cremona* simplifica el trabajo material de la construcción de los polígonos de fuerzas correspondientes a cada nudo, reuniéndolos en un único diagrama, conocido corrientemente con el nombre de *diagrama de Cremona.*

Para el trazado del diagrama de Cremona se procede en la forma que explicamos a continuación, ilustrado con el ejemplo de la figura 7.18. Una vez determinadas las reacciones de vínculo en la forma conocida, mediante un polígono funicular o bien analíticamente, se adopta un *orden cíclico* (dextrorso en el caso de la figura 7.18), y se traza un polígono de fuerzas llevando los vectores representativos de las mismas en el orden en que aparecen en la estructura al recorrer su contorno en el orden cíclico adoptado. En nuestro caso, el orden en que se han llevado los vectores representativos de las fuerzas es: R_1, P_1, P_2, R_4 y P_3. Luego se considera un nudo al que sólo concurran dos barras. En nuestro caso hemos comenzado por el *1*, al que concurren R_1 (conocida) y los esfuerzos en las barras *1-2* y *1-6*. Procedemos ahora a *descomponer* (y *no a equilibrar*) en el polígono de fuerzas R_1 en dos fuerzas cuyas rectas de acción sean los ejes de las barras *1-2* y *1-6*, en forma

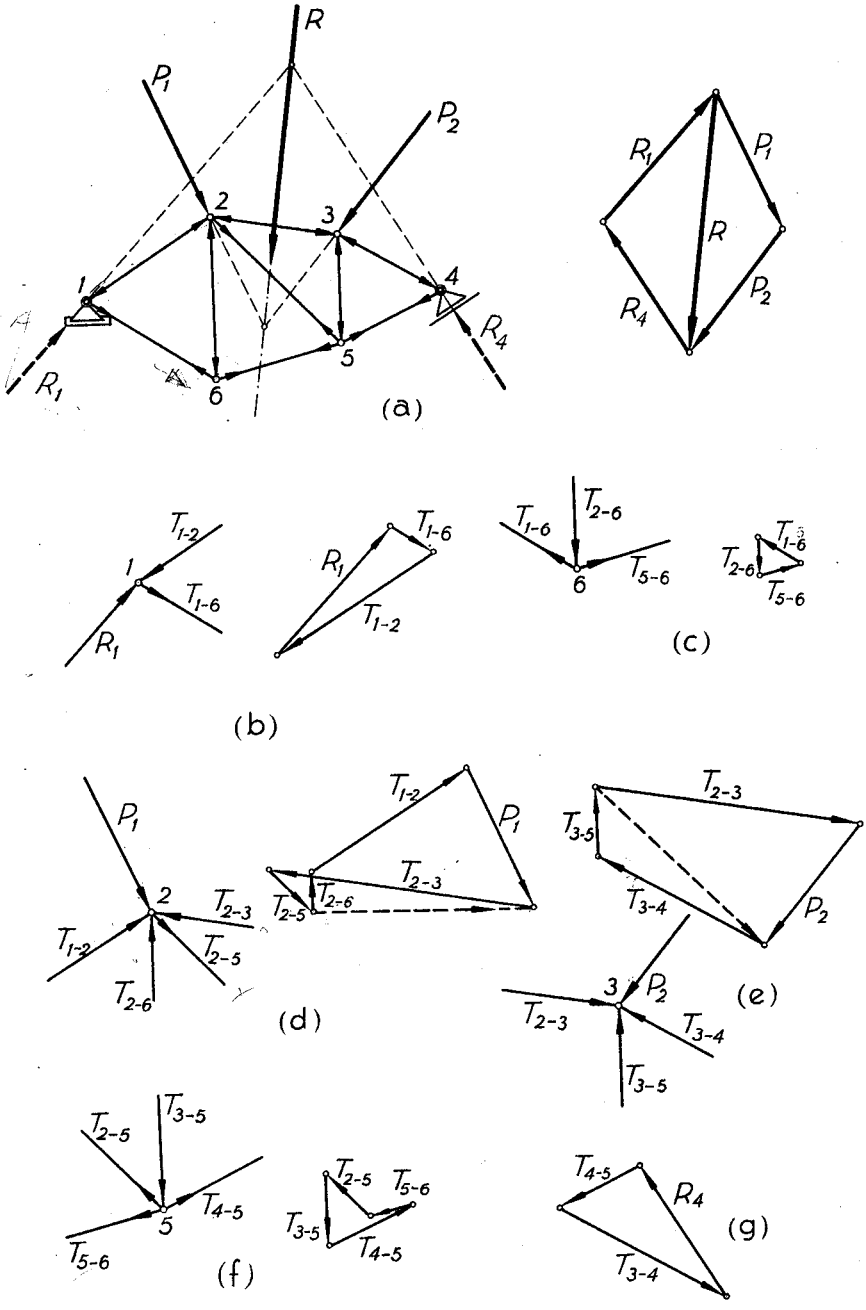

R
P1
P2
1
2
3
4
5
6
R1
R4
(a)
R1
P1
R
R4
P2
T1-2
T1-6
(b)
T1-6
T2-6
T5-6
(c)
P1
T1-2
T2-3
T2-5
T2-6
T1-2
T2-3
T2-5
T2-6
(d)
T2-3
T3-5
T3-4
P2
(e)
T2-5
T3-5
T4-5
T5-6
(f)
T4-5
R4
T3-4
(g)

Fig. 7.17.

tal que en el polígono de fuerzas R_1, T_{1-2} y T_{1-6} aparezcan en el mismo orden que resulta de recorrer el nudo en el *orden cíclico* establecido, es decir, primero R_1 (fuerza conocida), luego T_{1-2} y finalmente T_{1-6}. Una vez efectuada la descomposición, indicamos en las dos barras, en los extremos que corresponden al nudo considerado, los sentidos de los es-

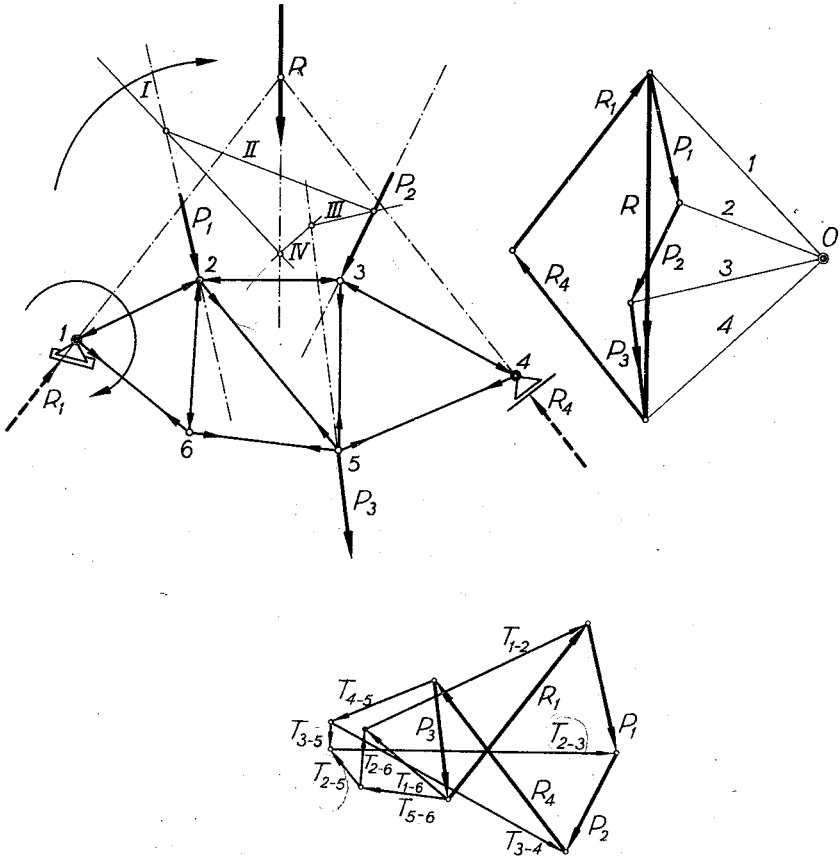


Fig. 7.18.

fuerzos *opuestos* a los hallados, y los de éstos en los extremos contrarios de las barras. En esta forma, es decir, descomponiendo en lugar de equilibrar, tenemos *orientados* directamente los esfuerzos que corresponden a los otros extremos de las barras, de modo que, al proceder a analizar el nudo siguiente, no es necesario cambiar el sentido de ninguna fuerza, apareciendo éstas, en el polígono, ubicadas según el orden cíclico establecido.

El segundo nudo a considerar es el *6*, por cuanto al mismo concurren sólo dos esfuerzos incógnitos y uno conocido, obtenido de la descomposición efectuada en el nudo *1* (esfuerzo T_{1-6}). Una vez determinados los esfuerzos en las barras *5-6* y *2-6*, estamos en condiciones de analizar el nudo *2*, en el que las incógnitas son los esfuerzos T_{2-3} y T_{2-5}. Recorriendo el nudo *2* en el orden cíclico aparece primeramente T_{2-6}, luego T_{1-2} y finalmente P_1. Si observamos el diagrama de Cremona vemos que los vectores representativos de estas tres fuerzas aparecen ubicados uno a continuación del otro, en el mismo orden indicado. En el nudo *2*, de acuerdo con el orden cíclico, luego de P_1 aparece la barra *2-3* y, finalmente, la *2-5*. Luego, en el polígono de fuerzas, corresponderá trazar por el extremo del vector representativo de P_1 una paralela a *2-3*, y por el origen del de T_{2-6} otra a *2-5*, de modo que se cumpla la condición impuesta de observar el orden cíclico.

Continuando en la forma indicada con los nudos restantes del reticulado llegamos finalmente al nudo *4*, donde debe tenerse presente que la resultante de los esfuerzos en las barras *3-4* y *4-5* debe ser opuesta a la reacción R_4, lo que es evidente por razones de equilibrio.

Corresponde hacer notar que al resolver un reticulado mediante el diagrama de Maxwell-Cremona debe cuidarse mucho la exactitud del dibujo y, sobre todo, la precisión con que se trazan en el polígono de fuerzas las paralelas a las barras, por cuanto, de otro modo se van acumulando errores que hacen que, al llegarse al último nudo, el polígono de fuerzas correspondiente no resulte cerrado. Para evitar la acumulación de errores conviene, una vez determinadas las reacciones de vínculo gráficamente, proceder a su verificación analítica.

El trazado del diagrama de Maxwell-Cremona se simplifica si se utiliza la denominada *notación de Bow*.

Al proceder al trazado del diagrama de Maxwell-Cremona en los ejemplos que hemos tratado, numeramos los nudos en forma correlativa y, como es corriente, indicamos cada una de las fuerzas exteriores, tanto activas como reactivas, mediante símbolos, efectuando otro tanto con los esfuerzos en las barras para su identificación. Por otra parte, era preciso, en el polígono de fuerzas, prestar atención a la orientación de las flechas indicativas de los sentidos de los esfuerzos.

La notación de *Bow* prescinde de todo ello, limitándose a designar con una letra las zonas del plano delimitadas por las rectas de acción de las fuerzas exteriores y/o los ejes de las barras. Por lo demás, en el trazado del diagrama de Maxwell-Cremona se procede en forma semejante a la explicada anteriormente, observando las reglas del orden cíclico en lo que se refiere a la ubicación relativa de los vectores representativos de las fuerzas en el polígono y al recorrido de los nudos. En la notación

de *Bow*, una fuerza, sea ésta exterior o corresponda a un esfuerzo en barra, queda individualizada por dos letras, que corresponden a las que individualizan las zonas del plano que divide su recta de acción. En cuanto al sentido, el mismo queda definido por el orden sucesivo en que aparecen las fuerzas al recorrer el nudo en el orden cíclico preestablecido. Consideremos, por ejemplo, la fracción de reticulado de la figura 7.19. En el mismo, la fuerza exterior que actúa en el nudo del cordón superior será *b-c*, si adoptamos un orden cíclico dextrógiro. La reacción de vínculo quedará definida por *a-b*, y los esfuerzos en las barras que concurren al nudo, *b-d* y *d-a*. El primero de ellos, al considerarlo aplicado al nudo opuesto de la barra, cambia de sentido, denominándose en consecuencia *d-b*, lo que surge de inmediato al recorrer este nudo en el orden cíclico establecido, para el cual la barra en cuestión separa las zonas *d* y *b* en este orden, correspondiéndole la designación *d-b*. De lo anterior surge de inmediato que, en el polígono de fuerzas, no es necesario indicar los sentidos de las fuerzas, por cuanto el mismo surge, para cada descomposición, de la secuencia en que aparecen las letras que designan a cada fuerza.

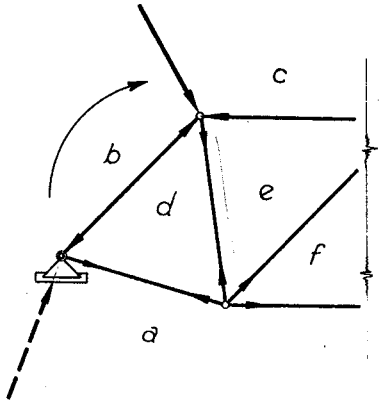
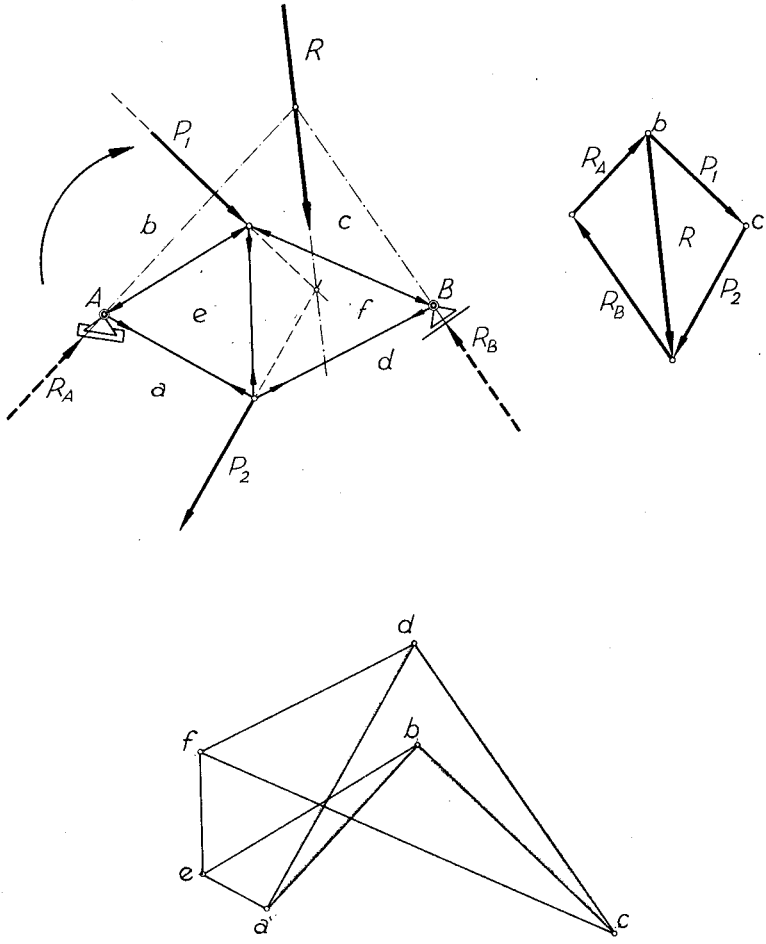


Fig. 7.19.

Para aclarar los conceptos anteriores desarrollaremos el cálculo de la determinación de los esfuerzos en las barras del reticulado de la figura 7.20, empleando la notación de *Bow*. Determinadas las reacciones de vínculo, designamos las zonas del plano delimitadas por las fuerzas exteriores y los esfuerzos en las barras con las letras *a*, *b*, ..., *f*, y adoptamos un orden cíclico dextrógiro. De acuerdo con la notación de *Bow* la reacción en *A* recibe la designación *a-b*, la fuerza P_1, *b-c*; la reacción en *B*, *c-d* y la fuerza P_2, *d-a*.

Construimos a continuación un polígono de fuerzas llevando a éstas en el orden cíclico establecido, y designando el origen y extremo de cada vector representativo de las fuerzas con la letra que corresponda en la secuencia establecida. Así, el origen del vector representativo de la reacción de vínculo en *A* se designa con *a* y su extremo con *b*, por ser éste el orden en que aparecen dichas letras al recorrer el nudo en el orden cíclico.

El trazado del diagrama de Maxwell-Cremona se efectúa, como hemos dicho, partiendo de un nudo al cual concurren sólo dos esfuerzos



La escala del polígono de fuerzas usado para determinar R_A y R_B es doble de la correspondiente al diagrama de Maxwell - Cremona.

Fig. 7.20.

incógnitos. En el caso analizado se ha comenzado por el nudo *A*. Trazando por el origen *a* del vector *a-b* una paralela a la primera barra que aparece inmediatamente a continuación de la fuerza *a-b* al recorrer el nudo en el orden cíclico, y por el extremo *b* otra a la barra restante, la intersección de dichas rectas define un punto que llamaremos *e*. Tendremos así un polígono cerrado *a-b-e-a* entre las fuerzas *a-b*; *b-e* y *e-a*, con los sentidos correspondientes a las secuencias de las letras, es

decir, de *b* á *e* y de *e* á *a*, sentidos que indicamos en las barras del reticulado que concurren al nudo *A*.

Pasando al nudo del cordón inferior, tenemos primeramente la fuerza *d-a* y, a continuación, el esfuerzo en la barra, que tendrá sentido contrario al *e-a*, es decir, que será *a-e*. Si observamos el diagrama vemos que este último esfuerzo aparece en el mismo ubicado a continuación del *d-a*. Inmediatamente después debe aparecer el *e-f*, por lo que, por el extremo *e* del vector *a-e*, trazamos una paralela a la barra *e-f* y por el origen *d* otra paralela a la barra *f-d*. La intersección de ambas nos dará el punto *f*.

Considerando ahora el nudo del cordón superior tendremos primeramente el esfuerzo *f-e*, luego el *e-b* y, a continuación, el *b-c*. Observando el diagrama vemos que en el mismo aparecen los correspondientes vectores representativos en la secuencia indicada. Ahora bien, en el nudo que estamos considerando sólo existe un esfuerzo incógnito en la barra: el *c-f*. En consecuencia, en el diagrama, el segmento *c-f* debe resultar paralelo a la barra *c-f*, por cuanto corresponde al vector representativo del esfuerzo en la misma.

Finalmente, en el nudo *B* debe existir equilibrio entre la reacción *c-d* y los esfuerzos *d-f* y *f-c*, lo que efectivamente ocurre por cuanto en el diagrama los vectores *c-d* ; *d-f* y *f-c* forman un polígono cerrado.

En cuanto a los sentidos de los esfuerzos en cada nudo, quedan definidos en forma indubitable por la secuencia de las letras, de acuerdo con el orden cíclico que corresponda al nudo. Así, por ejemplo, para la barra *c-f*, el sentido para el nudo izquierdo será *c-f*, por ser ésta la secuencia que resulta de recorrer el nudo en el orden cíclico. En cambio, para el extremo *B* de la misma barra, el sentido del esfuerzo será contrario, es decir *f-c*, como corresponde, lo que surge por otra parte de la secuencia que resulta de recorrer el nudo *B* en el orden cíclico establecido.

7.1.10. El método de Henneberg o de falsa posición.

El trazado del diagrama de Maxwell-Cremona no puede realizarse directamente en aquellos sistemas de reticulado que no cumplan con la condición imprescindible de presentar algún nudo al que sólo concurran dos barras. Tal el caso del reticulado de la figura 7.21 *a*, cuya resolución directa mediante el trazado de un diagrama de Maxwell-Cremona es imposible por las razones indicadas. Para resolver el problema es necesario conocer previamente el esfuerzo en la barra *AB*, e introducirlo luego en el sistema como dos fuerzas exteriores, de igual intensidad y sentido con-

trario, aplicadas en los nudos *A* y *B*. Una forma de proceder sería aplicar el método de Ritter al corte que afecta las barras *3-4*; *10-4* y *A-B*. No obstante ello, el método de Henneberg, de falsa posición o de sustitución de barras, resuelve el problema en forma más elegante.

El concepto del método es el mismo explicado anteriormente para la determinación de las reacciones de vínculo en cadenas cerradas de cuatro chapas con una condición de vínculo en cada una de ellas.

Si en el sistema de la figura 7.21 *a* suprimimos la barra *AB* y la reemplazamos por una barra sustituta que vincula los nudos *10* y *11*; por ejemplo, el reticulado será resoluble mediante el trazado de un diagrama de Maxwell-Cremona. Ello nos permitirá conocer los esfuerzos —debidos a las cargas exteriores actuantes— en las distintas barras, no del sistema dado sino de otro que llamaremos *sistema sustituto*, que muestra la figura 7.21 *b*. Llamaremos a estos esfuerzos T^{o}_{i-j} y, en especial, T^{o}_{10-11} al de la barra sustituta. Supongamos ahora descargado el sistema sustituto y apliquemos en *A* y *B* dos fuerzas opuestas de intensidad $U = 1$, actuando según la dirección de la barra suprimida. Las correspondientes reacciones de vínculo serán nulas y los esfuerzos en las distintas barras, calculables por un diagrama de Maxwell-Cremona, las denominaremos T^{u}_{i-j}. En especial, el

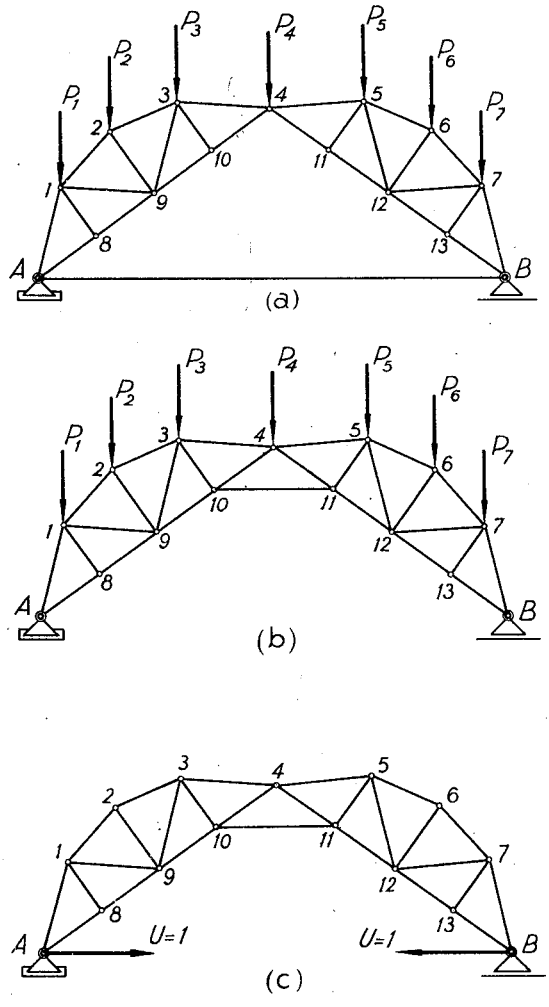


Fig. 7.21.

esfuerzo en la barra sustituta debido a $U = 1$ será T^u_{10-11} . Si en lugar de actuar fuerzas $U = 1$ en los nudos A y B, según la dirección de la barra suprimida, lo hicieran fuerzas de intensidad $X(t)$, los esfuerzos en las barras del sistema sustituto de la figura 7.21 c resultarían multiplicadas por X. De acuerdo con el principio de superposición de efectos; si para el sistema sustituto suponemos actuando simultáneamente el sistema de cargas exteriores y el sistema $U = X$, los esfuerzos resultantes en las barras los obtendremos como suma de los correspondientes a cada estado de carga, es decir:

$$T_{i-j} = T^o_{i-j} + X . T^u_{i-j} , \qquad [7.25]$$

y, en especial, para la barra sustituta:

$$T_{10-11} = T^o_{10-11} + X . T^u_{10-11} . \qquad [7.26]$$

Entre los infinitos valores que puede tomar X, habrá uno que corresponderá al verdadero valor del esfuerzo en la barra A-B del sistema real y para dicho valor del esfuerzo en A-B el esfuerzo en la barra sustituta es nulo, por cuanto dicha barra no existe en el sistema real. En consecuencia, en la [7.26], T_{10-11} será nula cuando el valor de X corresponda a T_{A-B} , lo que nos permite despejar el valor de X:

$$X = T_{A-B} = - \frac{T_{10-11}}{T^u_{10-11}} . \qquad [7.27]$$

Conocido el valor de T_{A-B} , el valor de los esfuerzos en las barras restantes del sistema real se obtienen por simple sustitución de $X = T_{A-B}$ en la [7.25], es decir:

$$T_{i-j} = T^o_{i-j} - \frac{T^o_{10-11}}{T^u_{10-11}} . T^u_{i-j} . \qquad [7.28]$$

El método de Henneberg es aplicable cuando, para proceder a la resolución de un reticulado mediante el trazado de un diagrama de Maxwell-Cremona, sea necesario sustituir dos barras. En tal caso, luego de haber determinado los esfuerzos en las barras del sistema sustituto, se procederá a aplicar, según la dirección de las barras suprimidas, dos sistemas de fuerzas unitarias $\overline{U} = 1$ y $\overline{V} = 1$, calculando los esfuerzos originados por las mismas. El proceso conducirá, en última instancia, a un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas: los esfuerzos en las barras suprimidas.

7.2. Los sistemas de reticulado espaciales.

7.2.1. Generación de los reticulados espaciales.

Sea, figura 7.22, un punto A en el espacio. Por poseer tres grados de libertad, si deseamos fijarlo a tierra, debemos imponerle tres condiciones de vínculo materializadas por tres bielas no coplanares. Para fijar la posición en el espacio de un segundo punto B, podemos aplicarle tres bielas no concurrentes o, como indica la figura, vincularlo al punto A mediante una barra rígida y a tierra por intermedio de dos bielas no coplanares con la barra AB. En forma semejante podemos ir fijando a tierra una sucesión de vértices tales como D y E. El vértice C, en cambio, lo hemos inmovilizado vinculándolo con los vértices fijos B y D mediante dos barras rígidas y aplicando finalmente una biela a tierra, no coplanar con las barras mencionadas. Finalmente, el vértice G lo hemos fijado en los vértices B, C y F, ya fijos, mediante las tres barras rígidas no coplanares DG, BG y FG.

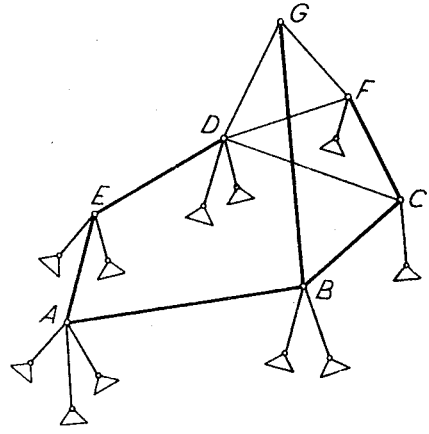


Fig. 7.22.

De las consideraciones anteriores inferimos que, para fijar un vértice en el espacio, se requieren tres bielas, sean éstas de vínculo externo (vértice A), de vínculo interno o barras rígidas (vértice G) o bien una combinación de ambas (vértices B, C, etc.). En consecuencia, si llamamos B al número de barras de vínculo interno, B' al número de bielas de vínculo externo y V al de vértices a fijar, tendremos la siguiente relación:

$$B + B' = 3V \,. \qquad [7.29]$$

Al estudiar los sistemas espaciales vinculados vimos que existían tres tipos de apoyos: de 1ª, 2ª y 3ª especies, denominados también apoyos superficiales, lineales y fijos o rótulas, respectivamente. Los primeros

pueden estar constituidos por una biela fija a tierra; los segundos por dos concurrentes al punto que se desea fijar, y los terceros por tres bielas concurrentes y no coplanares.

Si designamos con A_1, A_2 y A_3 los apoyos de 1ª, 2ª y 3ª especies, respectivamente, el número de bielas de vínculo externo podemos expresarlo mediante

$$B' = A_1 + 2A_2 + 3A_3 , \qquad [7.30]$$

de donde

$$B + A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 3V . \qquad [7.31]$$

De lo anterior surge que, si reemplazamos una barra de vínculo interno por una biela de vínculo externo o viceversa, la condición [7.29] o su equivalente [7.31] continuarán cumpliéndose. Deberá, sin embargo, tenerse presente que, al efectuar la sustitución, la nueva barra que se agregue no signifique un vínculo aparente o superabundante, por cuanto, de ser así, el sistema o parte del mismo resultaría con un grado de libertad.

En el sistema de la figura 7.22 es posible suprimir la barra BC, siempre que coloquemos en C una tercera biela a tierra, no coplanar con las dos ya existentes. En esta forma se asegura la inamovilidad del vértice C. Análogamente podríamos suprimir una de las dos bielas que vinculan a tierra el vértice B, siempre que introdujéramos una barra entre B y E, por ejemplo. De esta manera el vértice B resultaría rígidamente vinculado a los dos puntos fijos A y E existiendo, además, un vínculo de primera especie a tierra. En cambio, si reemplazamos la barra BC por una tercera biela aplicada al vértice B, este último resultaría con un vínculo superabundante y el vértice C, conjuntamente con los F y G, cuya inamovilidad depende de la del primero, con un grado de libertad.

La expresión [7.29] establece la condición de rigidez de un conjunto de vértices vinculados entre sí por barras rígidas y a tierra mediante bielas, conjunto que requiere la existencia de estas últimas para ser indeformable, ya que por sí sólo no lo es. Veremos a continuación qué condición debe satisfacer un conjunto de vértices en el espacio, vinculados mediante barras rígidas, pero libre, para que resulte rígido e indeformable.

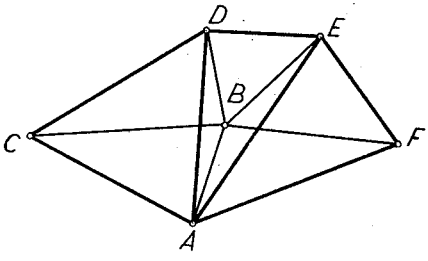


Fig. 7.23.

Consideremos los puntos A, B y C de la figura 7.23 vinculados entre sí por tres barras rígidas. Como sabemos, el conjunto constituye

un triángulo rígido en el espacio. Para fijar —con respecto al triángulo mencionado— un nuevo punto D, es preciso vincularlo a los vértices del triángulo mediante tres barras AD, BD y CD. Cada nuevo vértice que queramos fijar rígidamente en el conjunto anterior, requiere el agregado de tres nuevas barras. En consecuencia, si llamamos b al número de barras y v al de vértices del reticulado espacial generado a partir de un triángulo rígido con tres barras y tres vértices, tendremos:

$$b = 3 + 3(v - 3) = 3v - 6 . \qquad [7.32]$$

Ahora bien, el reticulado así concebido, constituye un conjunto discreto rígido de puntos. En consecuencia, poseerá seis grados de libertad. Para fijarlo será preciso imponerle tantas condiciones de vínculo como grados de libertad posee, es decir, seis. Materializados en forma de seis bielas, tenemos

$$b' = 6 . \qquad [7.33]$$

Sumando miembro a miembro las [7.32] y [7.33] resulta

$$b + b' = 3v - 6 + 6 = 3v \qquad [7.34]$$

expresión idéntica a la [7.29].

En la práctica, la generación de los reticulados espaciales procede a partir de lo que se denomina *anillo de base*, entendiéndose por tal una serie de puntos que constituyen los vértices de un polígono, regular o no. Los vértices mencionados pueden hallarse en un mismo plano o constituir un polígono alabeado. El anillo de base tiene por objeto establecer un conjunto de puntos fijos sobre el qué, apoyarse para generar el reticulado espacial.

7.2.2. Condición de rigidez del anillo de base.

Sea el conjunto de puntos A, B, C, D, E elegidos para constituir un anillo de base (figura 7.24). Una primera forma de originar el anillo consiste en fijar a tierra todos y cada uno de los puntos mencionados mediante tres bielas no coplanares (figura 7.24 *a*).

La condición [7.29] se cumple, por cuanto el número de vértices es cinco, el de barras de vínculo interno es cero y el de bielas, quince. Otra forma de generar el anillo de base sería el indicado en la figura 7.24 *b*, que consiste en fijar a tierra, mediante tres bielas, el punto A, por ejemplo. Luego, proceder del mismo modo con el vértice C. El B se fija mediante dos barras rígidas que lo unen con los vértices A y C —fijos—

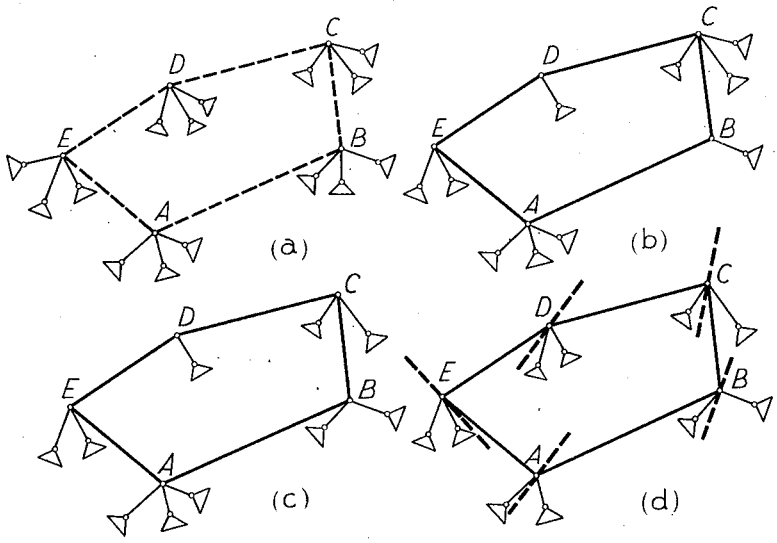


Fig. 7.24.

y una biela a tierra. Para fijar el punto E, se lo vincula al A mediante una barra rígida, y a tierra mediante dos bielas no coplanares con la anterior. Finalmente, el punto D lo fijamos con las barras que lo vinculan con los vértices C y E —fijos— y una biela a tierra. Tenemos así el polígono de barras A, B, C, D, E rígidamente vinculado a tierra, cumpliendo el conjunto, como es fácil comprobar, con la condición [7.29].

Ahora bien, si en el anillo de base —rígido e indeformable— de la figura 7.24 *b* quitamos una biela de las que vinculan a tierra el vértice C y la aplicamos en B, la condición [7.29] continúa satisfaciéndose y, como existe el vértice A fijo en tierra mediante tres condiciones de vínculo, podemos asegurar que el anillo vinculado en la forma que muestra la figura 7.24 *c*, también es rígido e indeformable.

Pero, si al punto A le quitamos ahora una de las bielas que lo vinculan en forma directa a tierra, para aplicarla en el vértice D, si bien la condición [7.29] se satisface por cuanto sólo se ha cambiado la ubicación de una de las bielas de vínculo externo, no es posible asegurar, a priori, que el anillo de base resultante, que muestra la figura 7.24 *d*, sea rígido e indeformable, por cuanto no existe en el mismo *ningún* punto fijo *directamente* a tierra por el número necesario de condiciones de vínculo. Llegamos así a la conclusión de que la condición expresada por la [7.29], en lo que respecta al anillo de base cerrado, es una condición *necesaria* pero no *suficiente*.

En la figura 7.24 *d*, los distintos vértices que configuran el anillo considerando únicamente su vinculación directa a tierra, son susceptibles de experimentar desplazamientos normales al plano definido por las dos bielas aplicadas a cada uno de ellos (líneas de puntos en la figura mencionada). En consecuencia, para que el sistema resulte indeformable, es necesario que cumpla una condición geométrica adicional que relacione la dirección del desplazamiento posible de cada vértice con la dirección de las barras de vínculo interno que concurren al mismo, condición que estableceremos a continuación.

Consideremos el cuadrilátero de barras A, B, C, D de la figura 7.25, y supongamos que se encuentre sustentado mediante dos bielas articuladas a tierra y aplicadas a cada vértice. Admitamos que los apoyos lineales que constituyen los pares de bielas permitan a los vértices desplazarse en las direcciones n_A, n_B, n_C y n_D. Si los vínculos son de naturaleza tal que el cuadrilátero resulta deformable, como las longitudes de las barras permanecen constantes durante la deformación, si el vértice A pasa a ocupar la posición A' corriéndose hacia el interior del cuadrilátero, el B lo hará necesariamente hacia el exterior, disponiéndose en B'. Lo mismo ocurrirá con los vértices C y D y, en definitiva, tendremos que A', B', C', D' será la configuración que adoptará el cuadrilátero una vez deformado.

Supondremos, en lo que sigue, como *positivos* los corrimientos experimentados por los vértices en la dirección de los desplazamientos permitidos, cuando ellos ocurren hacia *afuera* del cuadrilátero, y negativos si tienen lugar en el sentido opuesto. Además, adoptaremos como *sentido*

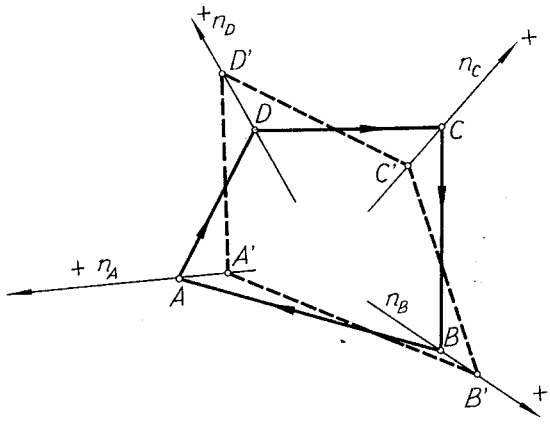


Fig. 7 25.

positivo para las barras el que resulte para las mismas al recorrer el cuadrilátero en el sentido dextrorso. Demostraremos a continuación qué condiciones geométricas deben verificarse entre las direcciones de las barras del cuadrilátero y las de los desplazamientos posibles de sus vértices para que el mismo resulte *deformable*, para así, estableciendo las condiciones opuestas, determinar la condición complementaria de rigidez e indeformabilidad del mismo. Para ello aislemos una de las barras, la AB por ejemplo (figura 7.26) y ubiquemos una terna de ejes coordenados

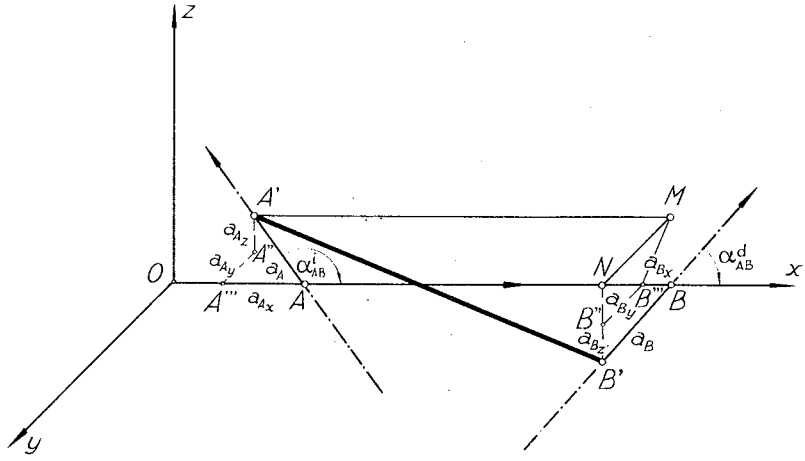


Fig. 7.26.

ortogonales, haciendo coincidir el semieje positivo x con la dirección positiva de la barra AB. Sea $A'B'$ la posición de esta última una vez deformado el cuadrilátero. Llamemos a_A y a_B respectivamente los corrimientos absolutos de los puntos A y B en las direcciones impuestas por las condiciones de vínculo. Conforme con la convención de signos adoptada, el primero de ellos será positivo y el segundo negativo. Descomponiendo, según la dirección de los ejes coordenados, cada corrimiento, tendremos las componentes a_{A_x}, a_{A_y}, a_{A_z} y a_{B_x}, a_{B_y}, a_{B_z}.

Llamando l_{AB} a la longitud de la barra, tendremos que la longitud del segmento $A'''B'''$ —proyección de la longitud de la barra en su posición final sobre el eje x— será:

$$A'''B''' = l_{AB} + |a_{A_x}| - |a_{B_x}| . \qquad [7.35]$$

Llamando respectivamente α^i_{AB} y α^d_{AB} a los ángulos que forma la *dirección positiva* de la barra AB con las *direcciones positivas* de los

desplazamientos de los vértices A y B (ángulos que llamaremos *izquierdo* y *derecho*), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} a_{A_x} &= a_A \cdot \cos \alpha^i_{AB} \\ a_{B_x} &= a_B \cdot \cos \alpha^d_{AB} \end{aligned}\right\} \qquad [7.36]$$

Reemplazando estos valores en la [7.35], y teniendo en cuenta que $a_A > 0$, $a_B < 0$, $\cos \alpha^i_{AB} < 0$ y $\cos \alpha^d_{AB} > 0$ por tratarse de ángulos del segundo y primer cuadrantes respectivamente, resulta:

$$A''' B''' = l_{AB} - a_A \cdot \cos \alpha^i_{AB} + a_B \cdot \cos \alpha^d_{AB}. \qquad [7.37]$$

Trazando por B''' una paralela a $A'A'''$ y por A' otra al eje x, determinamos un punto M, y trazando ahora por este último una paralela al eje y y por B' una al eje z, definimos un segundo punto N. Podemos escribir

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{l}^2_{AB} = \overline{A'M}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NB'}^2. \qquad [7.38]$$

Pero MN es la suma de las componentes según el eje y de los corrimientos de A y B, es decir, teniendo en cuenta los signos: $a_{B_y} - a_{A_y}$. Análogamente tenemos $A'M = A'''B'''$ y $NB' = a_{B_z} - a_{A_z}$. Sustituyendo en [7.38]:

$$\overline{l}^2_{AB} = \overline{A'''B'''}^2 + (a_{B_y} - a_{A_y})^2 + (a_{B_z} - a_{A_z})^2. \qquad [7.39]$$

Los corrimientos a_A y a_B son magnitudes infinitésimas con relación a la longitud de las barras, por lo que también lo serán sus proyecciones sobre los ejes coordenados. En consecuencia, los cuadrados de las diferencias que aparecen en la expresión [7.39] son infinitésimos de orden superior y, por ello, pueden ser despreciados sin mayor error, resultando:

$$l^2_{AB} = \overline{A'''B'''}^2. \qquad [7.40]$$

En consecuencia, la [7.37] puede escribirse como sigue:

$$l_{AB} = l_{AB} - a_A \cdot \cos \alpha^i_{AB} + a_B \cdot \cos \alpha^d_{AB}, \qquad [7.41]$$

lo que nos conduce finalmente a

$$a_A \cdot \cos \alpha^i_{AB} = a_B \cdot \cos \alpha^d_{AB} \qquad [7.42]$$

que nos expresa que si el cuadrilátero es deformable, *las proyecciones de los corrimientos de los extremos de la barra sobre la dirección de la misma, son iguales entre sí.*

Planteando para las barras restantes la misma condición tenemos:

$$\left.\begin{aligned} a_B \cdot \cos \alpha^i_{BC} &= a_C \cdot \cos \alpha^d_{BC} \\ a_C \cdot \cos \alpha^i_{CD} &= a_D \cdot \cos \alpha^d_{CD} \\ a_D \cdot \cos \alpha^i_{DA} &= a_A \cdot \cos \alpha^d_{DA} \end{aligned}\right\} . \qquad [7.43]$$

Si multiplicamos miembro a miembro las igualdades [7.42] y [7.43] llegamos finalmente, luego de simplificar términos iguales, a:

$$\cos \alpha^i_{AB} \cdot \cos \alpha^i_{BC} \cdot \cos \alpha^i_{CD} \cdot \cos \alpha^i_{DA} = \cos \alpha^d_{AB} \cdot \cos \alpha^d_{BC} \cdot \cos \alpha^d_{CD} \cdot \cos \alpha^d_{DA} \quad [7.44]$$

que nos expresa que, cuando el cuadrilátero es deformable, el producto de los cosenos de los ángulos izquierdos debe ser igual al producto de los cosenos de los ángulos derechos.

De lo anterior deducimos que, en general, para que un polígono cerrado de barras cualquiera resulte rígido e indeformable, el producto de los cosenos de los ángulos izquierdos debe ser distinto del producto de los cosenos de los ángulos derechos.

Consideraremos a continuación algunos de los casos más usuales.

Sea el anillo cerrado hexagonal regular de la figura 7.27 *a*, cuyos vértices se encuentran vinculados a tierra mediante sendos apoyos lineales, dispuestos en forma tal que los desplazamientos permitidos sean radiales.

Por tratarse de un polígono regular y de desplazamientos radiales, todos los ángulos izquierdos resultan ser iguales entre sí, ocurriendo otro tanto con los ángulos derechos. Por otra parte, y por las mismas razones,

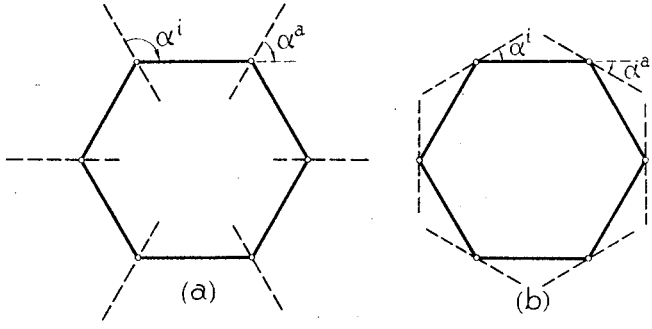


Fig. 7.27.

los ángulos izquierdo y derecho correspondientes a cada barra son suplementarios. En consecuencia, la condición que expresa la rigidez del anillo será, en este caso (y para todo polígono regular con apoyos radiales), llamando genéricamente α^i y α^d a los ángulos izquierdos y derechos,

$$(\cos \alpha^i)^n \neq (-\cos \alpha^d)^n \, . \qquad [7.45]$$

Para que la desigualdad se cumpla es necesario que el polígono posea un número *impar de lados*. En tal caso el anillo será indeformable. Por consiguiente, si el anillo de base se encuentra sustentado por apoyos lineales radiales, para que el mismo sea rígido e indeformable es condición necesaria que el número de sus lados sea impar, por cuanto de ser par no cumpliría con la condición [7.45] y resultaría deformable.

Consideremos ahora el caso en que los apoyos lineales permitan desplazamientos tangenciales, es decir, según la dirección de la tangente, en el punto considerado, a la circunferencia en la que se inscribe el polígono de los vértices. En este caso, figura 7.27 *b*, aparte de la igualdad de los ángulos izquierdos de todas las barras, lo mismo que la de los derechos, se tiene, como es fácil observar en la figura, que para cada barra los ángulos derecho e izquierdo son iguales entre sí. La condición [7.45] se transforma en

$$(\cos \alpha^i)^n \neq (\cos \alpha^d)^n \, , \qquad [7.46]$$

que no se cumple para ningún valor de n, sea par o impar. En consecuencia, si el anillo de base es un polígono regular y los apoyos permiten desplazamientos tangenciales, no será posible sustentarlo rígidamente, cualquiera sea el número de sus lados.

Vemos que para los anillos de base constituidos por polígonos regulares de número par de lados, no es posible fijarlos en forma rígida e indeformable cuando los apoyos lineales son radiales o tangenciales. En tales casos, si la sustentación debe efectuarse exclusivamente mediante apoyos lineales, en beneficio de la rigidez resultante, conviene disponer los mismos de modo tal que la dirección de los

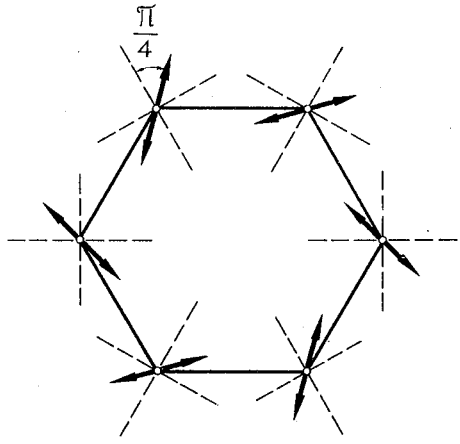


Fig. 7.28

desplazamientos permitidos coincida con las bisectrices de los ángulos (figura 7.28).

7.2.3. Cúpulas de configuración simple. Cúpula Schwedler.

Supongamos querer cubrir una superficie de planta circular mediante una cúpula cuya estructura resistente esté constituida por un reticulado espacial isostático, inscripto en una semiesfera.

En el ejemplo de la figura 7.29 hemos adoptado un anillo de base hexagonal de vértices *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, que procedemos a fijar a tierra mediante tres rótulas ubicadas en los vértices pares y un apoyo de primera especie en cada uno de los tres nudos impares.

Trazamos luego tres planos diagonales verticales, denominados meridianos, que pasen por el centro del hexágono base y que cada uno contenga dos vértices opuestos. Luego, a alturas preestablecidas, trazamos dos planos paralelos a la base, los que en sus intersecciones con los planos meridianos nos determinan la posición de los vértices *7* á *18* de la cúpula. Para fijar el vértice *7* (figura 7.29 *b*) bastará vincularlo mediante barras con los vértices vecinos *1*, *6* y *2*, fijos por pertenecer al anillo base. Procediendo en forma análoga con los vértices impares restantes del segundo paralelo, fijamos los puntos *9* y *11*. El vértice *8* lo fijamos mediante las barras *7-8*; *2-8* y *9-8*. En forma similar establecemos la inamovilidad de los vértices *10* y *12*, con lo que hemos originado un segundo anillo rígido e indeformable constituido por los vértices *7* á *12*. Procediendo en forma semejante para los nudos del paralelo superior, obtenemos la cúpula de configuración espacial más simple. El conjunto es rígido e indeformable por cuanto, como es fácil verificar, cumple con la condición de rigidez establecida por la [7.29]. Observando la figura, vemos que a cada nudo impar concurren dos diagonales *ascendentes*, y a cada nudo par, dos *descendentes*. Si huso por medio invertimos el sentido de las diagonales, obtenemos el reticulado de la figura 7.29 c, que se conoce con el nombre de cúpula de Schwedler.

El nuevo reticulado cumple también con la condición [7.29], por cuanto el mismo difiere del anterior no en el número de barras sino en la ubicación de algunas de ellas. Por otra parte es fácil establecer la rigidez del mismo. En efecto, cada uno de los anillos correspondientes a los distintos paralelos se encuentra idénticamente sustentado con respecto al inmediato anterior, por lo que será suficiente establecer la rigidez de uno cualquiera con respecto al precedente para que resulte asegurada la del conjunto del sistema.

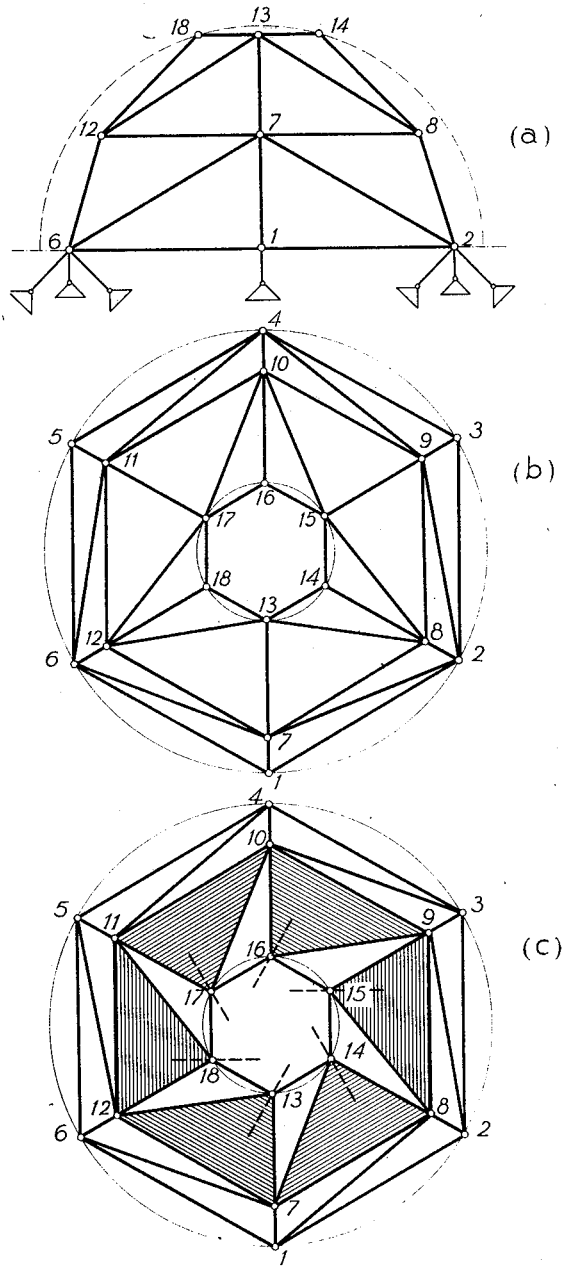

18
13
14
12
7
8
(a)
6
1
2
4
10
5
3
11
9
(b)
16
17
15
18
14
13
12
8
6
2
7
1
4
10
5
3
11
9
(c)
16
17
15
14
18
13
12
8
6
2
7
1

Fig. 7.29.

Supongamos rígido el anillo *7*, *8*, ..., *12*. Las dos barras que vincula el vértice *13* con los *7* y *12* configuran un apoyo lineal que permite desplazarse al vértice *13* según la dirección normal al plano definido por ambas barras. Dicha dirección aparece en la figura 7.29 c dada por su proyección icnográfica. Para los vértices restantes del paralelo superior, la situación es análoga. Como el anillo superior es un polígono regular de número par de lados, para que sea rígido e indeformable es necesario que los apoyos lineales aplicados en los vértices no sean ni radiales ni tangenciales. En el caso analizado, la posibilidad de desplazamiento de los vértices del anillo, como consecuencia de su vinculación con el anillo inmediato inferior, no corresponde a ninguna de las dos posibilidades mencionadas, por lo que podemos asegurar que el anillo es rígido e indeformable. En consecuencia, todos los anillos serán rígidos e indeformables si lo es el anillo de base.

7.2.4. Determinación de los esfuerzos en las barras de los reticulados espaciales. Solución general analítica.

Análogamente a lo admitido para los sistemas de reticulado planos, supondremos que las cargas que solicitan a los reticulados espaciales —sean éstas su peso propio, sobrecargas permanentes o útiles o el efecto del viento— lo hacen en forma de fuerzas concentradas aplicadas en los nudos.

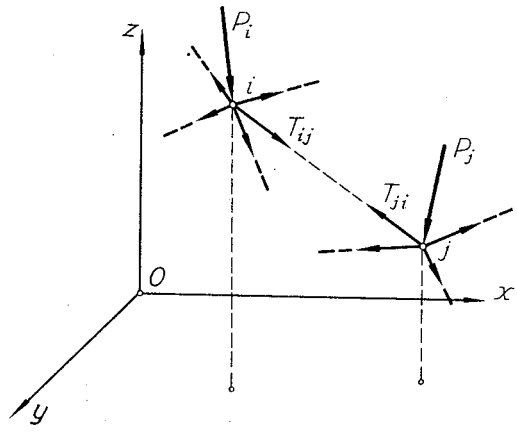


Fig. 7.30.

Supongamos (figura 7.30) los nudos *i* y *j* de un reticulado espacial isostático, vinculados por la barra *i-j*, a cada uno de los cuales concurren *n* barras del reticulado. Los nudos mencionados se encuentran solicitados por las fuerzas exteriores P_i y P_j respectivamente. El equilibrio de un nudo exige que sea nula la resultante de la fuerza exterior y los esfuerzos correspondientes a las distintas barras que concurren al mismo. (La condición de momento nulo queda implícita en la condición de resultante nula por tratarse de un sistema de fuerzas concurrentes). Si llama-

mos P_{ix}, P_{iy} y P_{iz} a las componentes de P_i según las direcciones de los tres ejes coordenados, T_{ij} en forma genérica al esfuerzo en las distintas barras que concurren al nudo i y $\cos\alpha_{ij}$, $\cos\beta_{ij}$ y $\cos\gamma_{ij}$ a los cosenos directores de las direcciones de las mismas, la condición de equilibrio del nudo, expresada analíticamente, será:

$$\left.\begin{aligned} P_{ix} + \sum_{1}^{n} T_{ij}.\cos\alpha_{ij} &= 0 \\ P_{iy} + \sum_{1}^{n} T_{ij}.\cos\beta_{ij} &= 0 \\ P_{iz} + \sum_{1}^{n} T_{ij}.\cos\gamma_{ij} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [7.47]$$

Para determinar el signo de los cosenos directores de los esfuerzos en las barras, supondremos a los mismos como de tracción, es decir, esfuerzos que se alejan de los nudos. En consecuencia, cuando pasamos del nudo i al nudo j, debemos tener presente que $T_{ij} = -T_{ji}$ y que, además, $\cos(\alpha, \beta, \gamma)_{ij} = -\cos(\alpha, \beta, \gamma)_{ji}$.

De acuerdo con la condición [7.29] el número total de incógnitas que corresponde a un reticulado espacial isostático cargado en sus nudos será de $3v$, siendo v el número de nudos. Estas incógnitas corresponden tanto a los esfuerzos en las barras de vínculo interno como a los de las bielas de vínculo externo. Ahora bien, por cada vértice es posible plantear tres ecuaciones, de modo que en total disponemos de $3v$ ecuaciones entre las $3v$ incógnitas, que nos permiten resolver el problema.

Cuando en el reticulado existe por lo menos un nudo al que concurren únicamente tres barras, las ecuaciones derivadas de establecer el equilibrio del mismo resultan independientes de las correspondientes al resto del sistema y, en consecuencia, es posible determinar directamente los valores de los esfuerzos en dichas barras.

Además, si el reticulado ha sido engendrado en forma tal que a los restantes nudos concurran —aparte de la fuerza exterior y el esfuerzo correspondiente a una barra que procede de un nudo resoluble independientemente— sólo tres barras de esfuerzos incógnitos, es posible calcular la totalidad de los esfuerzos en las barras resolviendo sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Si las condiciones indicadas no se cumplen, es decir, no existe ningún nudo al que concurran sólo tres barras, no será aplicable el procedimiento indicado en el párrafo anterior, o sea, no podremos agrupar las $3v$ ecuaciones en v grupos de tres ecuaciones con tres incógnitas cada uno. En tal caso, la resolución analítica es sumamente laboriosa, por cuanto conduce a la resolución de sistemas de $3v$ ecuaciones simultáneas.

7.2.5. Determinación de los esfuerzos en barras de reticulados espaciales. Soluciones gráfica y gráfico-numérica.

En los reticulados espaciales que poseen nudos a los cuales concurren sólo tres barras con esfuerzos incógnitos, la determinación de los mismos puede efectuarse mediante procedimientos gráficos o gráfico-numéricos. El problema, en última instancia, consiste en equilibrar una fuerza (fuerza exterior aplicada al nudo o bien la resultante entre ésta y el esfuerzo conocido correspondiente a una barra) mediante tres fuerzas cuyas rectas de acción coinciden con los ejes de las barras que concurren al nudo. El problema tiene solución si el número de esfuerzos desconocidos es tres. Tanto el procedimiento gráfico o método de Culmann extendido al espacio, como el gráfico-numérico, que consiste en tomar momentos respecto de tres ejes ubicados en forma tal que se anulen los momentos de dos de los esfuerzos incógnitos (procedimiento de Ritter), han sido exhaustivamente tratados en el capítulo 3 relativo a Sistemas Espaciales de Fuerzas, por lo que no volveremos sobre el particular.

7.2.6. Método de Henneberg o de falsa posición.

Cuando en el reticulado espacial no existe ningún nudo al que sólo concurran tres barras, la resolución analítica resulta compleja y laboriosa por el elevado número de ecuaciones simultáneas que es preciso resolver. Por otra parte, no es posible utilizar ni la solución gráfica ni la gráfico-numérica. En estos casos, cualquiera sea el camino que se siga para la resolución del sistema, la aplicación del método de Henneberg facilita sensiblemente la tarea.

Sea el reticulado espacial de la figura 7.31 a todos cuyos nudos concurren cuatro barras de vínculo interno, encontrándose además todos ellos solicitados por fuerzas exteriores cualesquiera. La solución analítica mediante el planteo de ecuaciones independientes para cada nudo no es posible, lo mismo que la utilización de los procedimientos de Culmann y Ritter. Si suprimimos la barra *5-8*, por ejemplo, de modo de dejar en el nudo *8* únicamente tres barras concurrentes, será necesario agregar una nueva barra al sistema para que continúe siendo rígido e indeformable. Al ubicar la barra sustituta, deberá cuidarse que la misma no signifique un vínculo superabundante que, al mismo tiempo, deje parte del sistema con movilidad. Tal sería el caso si colocásemos la barra sustituta

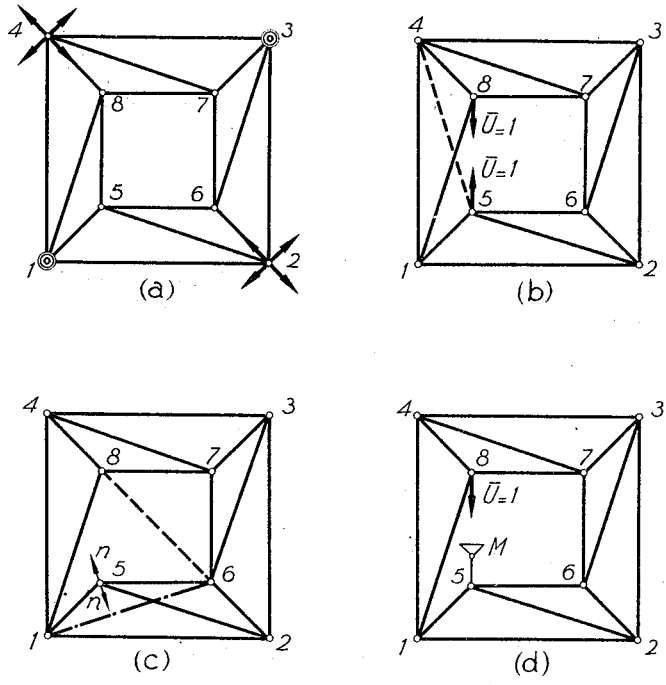


Fig. 7.31.

en la posición *6-8* (figura 7.31 c), por cuanto el nudo *5* podría desplazarse según la dirección *n-n*, normal al plano definido por las barras *1-5* y *6-5*. La ubicación correcta es la que indica la figura 7.31 *b*. En este sistema sustituto estamos en condiciones de calcular los esfuerzos en las distintas barras que lo constituyen, comenzando por el nudo *8*, al que sólo concurren tres barras siendo, en consecuencia, de aplicación tanto el método analítico simplificado como los procedimientos de Culmann y Ritter. Conocidos en el sistema sustituto los esfuerzos debidos a las cargas exteriores, que denominaremos genéricamente T^o_{ij}, aplicamos en los nudos *5* y *8* del sistema descargado, según la dirección de la barra suprimida, dos fuerzas opuestas que materialicen un esfuerzo $U = 1$ de tracción. Como consecuencia, se originarán en las barras del reticulado espacial esfuerzos T^u_{ij}. Si la intensidad del esfuerzo auxiliar aplicado según la barra suprimida fuera $X(t)$ en lugar de ser un esfuerzo unitario, los esfuerzos correspondientes a las distintas barras resultarían multiplicados por X. Superponiendo ambos estados, se tiene:

$$T_{ij} = T^o_{ij} + X.T^u_{ij} \qquad [7.48]$$

y, en especial, para la barra sustituta:

$$T_{4-5} = T^{o}_{4-5} + X . T^{u}_{4-5} \quad . \qquad [7.49]$$

Entre los infinitos valores que puede asumir X, habrá uno que anule la expresión [7.49]. Pero si T_{4-5} es nula, ello significa que el esfuerzo X es el que corresponde a la barra *5-8* en el sistema primitivo por efecto de las cargas exteriores, pudiendo en tal caso suprimirse la barra sustituta sin que el equilibrio del sistema de reticulado resulte afectado. En consecuencia, podemos despejar el valor de X de la [7.49]:

$$X = -\frac{T^{o}_{4-5}}{T^{u}_{4-5}} \quad . \qquad [7.50]$$

Reemplazando el valor de X dado por la anterior en la [7.48], obtenemos la expresión genérica del valor del esfuerzo en todas las barras del reticulado:

$$T_{ij} = T^{o}_{ij} - \frac{T^{o}_{4-5}}{T^{u}_{4-5}} . T^{u}_{ij} \qquad [7.51]$$

quedando con ello resuelto el problema.

En lugar de ubicar una barra sustituta que vincule dos vértices del reticulado, puede fijarse el nudo que resulte móvil, luego de suprimida la barra, mediante una biela a tierra, de la misma dirección que la barra suprimida (figura 7.31 *d*). En tal caso el esfuerzo auxiliar no es más un esfuerzo en barra sino una fuerza exterior. La resolución del sistema procede en forma similar a la indicada.

7.2.7. Determinación de esfuerzos en barras en casos especiales.

En ciertos casos, según sea la configuración del sistema de cargas exteriores o la disposición del reticulado, aunque no exista ningún nudo al cual concurran sólo tres barras, es posible determinar los esfuerzos en las barras en forma simple, sin recurrir al método de Henneberg.

Consideremos la cúpula hexagonal de la figura 7.32, sujeta únicamente a la acción de la carga P aplicada en el nudo 9. A primera vista pareciera que, por concurrir cuatro barras al nudo indicado, no es posible

resolverlo directamente. Pero no es así. Analicemos un momento el nudo *8*. Al mismo concurren tres barras coplanares —*7-8*; *1-8* y *2-8*— y una cuarta, la *8-9*, no contenido en dicho plano. Por otra parte, el nudo se encuentra descargado. El equilibrio del nudo exige que la resultante de tres de los esfuerzos sea opuesta al cuarto. Considerando los esfuerzos correspondientes a las tres barras coplanares, su resultante debe lógicamente encontrarse en el mismo plano y, como la cuarta barra es exterior a éste, la única posibilidad para que el equilibrio se verifique es que la resultante de los tres esfuerzos coplanares sea nula, de donde resulta que el esfuerzo en la barra *8-9* es nulo.

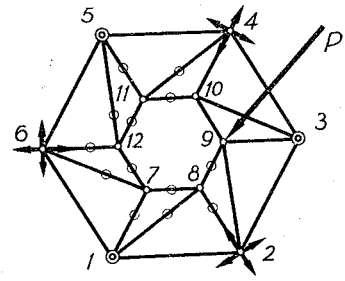


Fig. 7.32.

Razonando de la misma manera para los nudos *7*, *12*, *11* y *10*, llegamos a que los esfuerzos en las barras *7-8*, *7-12*, *12-11* y *11-10* son todos nulos.

Volviendo ahora al nudo *11* nos encontramos que, de las cuatro barras que concurren al mismo, dos tienen esfuerzo nulo (la *10-11* y la *11-12*). En consecuencia, los esfuerzos en las dos barras restantes también deben valer cero. Por análogos razonamientos llegamos a que los esfuerzos en las barras *5-12*; *6-12*; *6-7*; *1-7*; *1-8* y *2-8* son nulos. Sólo resta ahora descomponer la fuerza *P* en las direcciones de las barras *2-9*; *3-9* y *9-10* y luego el esfuerzo según esta dirección en la de las barras *4-10* y *3-10*.

Si, en lugar de estar cargado solamente el nudo *9*, lo fueran todos menos uno, el *7* por ejemplo, el problema lo resolveríamos partiendo de este último nudo, para el que se cumpliría que el esfuerzo en la barra *7-8*, por las razones anteriores, es nulo. En consecuencia, es posible comenzar la determinación de esfuerzos por el nudo *8*, al que ahora concurren sólo tres barras de esfuerzo desconocido y continuar luego el proceso por los nudos *9*, *10*, introduciendo en cada uno de ellos el esfuerzo transmitido por la barra que vincula el nudo inmediato anterior como una fuerza externa, que se compone con la exterior aplicada.

Cuando existe simetría de figura y simetría de cargas, el problema se simplifica aún más pues, en tal caso, basta determinar únicamente los esfuerzos de las barras que concurren a los nudos de un sólo meridiano, por cuanto las de los restantes son iguales por razones de simetría. Esta situación se presenta en el caso de cúpulas que admiten un eje de simetría vertical cuando se trata de determinar los esfuerzos en las barras originados por el peso propio y las cargas permanentes. Por razones de simetría,

las cargas que concurren a los nudos de un mismo paralelo son, en este caso, iguales entre sí y verticales.

Consideremos la cúpula de planta cuadrada inscripta en una semiesfera de la figura 7.33, de la que se nos pide calcular los esfuerzos en las barras debidos al peso de la cubierta. Éste actúa distribuido sobre la superficie de la cúpula y cada nudo de un mismo paralelo estará afectado de igual superficie cargada. En consecuencia, tendremos que $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ y, por las mismas razones, para el paralelo intermedio se verificará que $P_5 = P_6 = P_7 = P_8$.

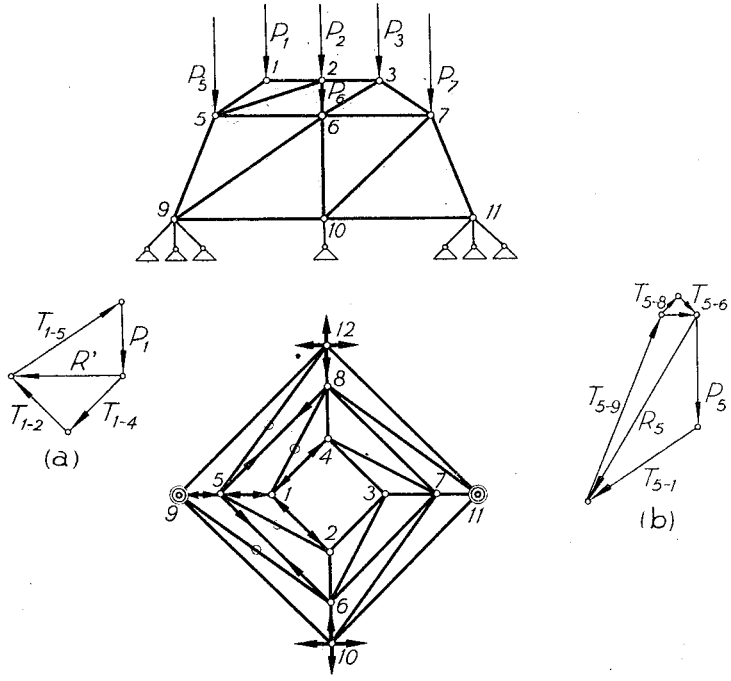


Fig. 7.33.

Por simetría de figura y por encontrarse simétricamente cargados los nudos del paralelo superior, las barras del mismo que concurren a un mismo nudo soportarán esfuerzos iguales. Considerando el nudo *1* tendremos que $T_{14} = T_{12}$. En consecuencia, la resultante de ambos esfuerzos tendrá por recta de acción la bisectriz del ángulo *4-1-2* y resulta ser coplanar con P_1 y la dirección de la barra *1-5*. Como la cuarta barra que concurre al nudo *1* es exterior a dicho plano, el esfuerzo en la misma debe necesariamente ser nulo. En consecuencia, equilibrando P_1 con dos fuerzas dirigidas, una según la bisectriz del ángulo que forman las dos

barras del paralelo que concurren al nudo y otra según el eje de la barra *1-5*, y descomponiendo luego la primera según las direcciones *1-2* y *1-4*, obtenemos los esfuerzos en las barras que concurren a *1*. Los correspondientes polígonos de fuerzas aparecen en la figura 7.33 *a*. Pasando ahora al nudo *5*, componemos el esfuerzo transmitido por la barra *5.1* con la carga exterior P_5, y luego equilibramos la resultante R_5 de las mismas con fuerzas actuando según la dirección de la barra *5-9* y la bisectriz del ángulo *8-5-6*. Finalmente, esta última la descomponemos en las direcciones de las barras *5-6* y *5-8*, con lo que tenemos establecido el equilibrio del nudo, resultando nulo, como es obvio, el esfuerzo según la diagonal *5-12* (figura 7.33 *b*).

En el nudo *10*, una vez conocido el esfuerzo $T_{10-6} = T_{9-5}$, se lo equilibra mediante tres fuerzas cuyas rectas de acción sean los ejes de las barras *10-9* y *10-11* y el de la biela vertical aplicada en *10*, lo que nos permite obtener el valor de los esfuerzos en las mismas.

8. Los sistemas de alma llena.

8.1. Sistemas planos de alma llena.

8.1.1. Definiciones.

En el capítulo 7 nos ocupamos del equilibrio de los sistemas discretos de puntos materiales, vinculados entre sí mediante las condiciones estrictamente necesarias para mantener sus distancias relativas invariables. Tales sistemas, que denominamos sistemas de reticulado, reciben también el nombre de sistemas de alma calada.

Sea, figura 8.1 *a*, *s-s* una línea plana contenida en un plano π y F una figura cualquiera normal a aquélla, que se desplaza en forma tal que su baricentro pertenezca en todo momento a la línea. En su desplazamiento, la figura engendrará un sólido, que podemos imaginar como un conjunto continuo de puntos materiales, cuyas distancias relativas se mantienen invariables por el vínculo de la rigidez. Si la figura es simétrica con respecto al plano π, el sólido engendrado por la figura al desplazarse a lo largo de *s-s*, también será simétrico con respecto a π, Si además las fuerzas aplicadas al sólido se hallan simétricamente dispuestas con respecto al mismo plano, cada par de cargas P_i' y P_i'' admitirá una resultante P_i cuya recta de acción se hallará contenida en el plano de simetría de la figura. Si, finalmente, los vínculos son también simétricos, sus reacciones podrán ser reemplazadas con fuerzas reactivas R_i, actuantes en el plano π. De ahí que, a los efectos del estudio del equilibrio del sólido, podamos reemplazarlo por una chapa —materialización del plano π de simetría— denominada de *alma llena*, sujeta a la acción del sistema P_i, contenido en la misma. El equilibrio de una chapa de esta naturaleza establece el correspondiente al sólido primitivo.

Supongamos que la chapa de la figura 8.1 *a* se encuentra en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas P_i, R_1 y R_2 activas las primeras y reactivas las dos últimas. Imaginemos una sección *n-n* cualquiera, normal a la curva directriz.

Llamemos R_i a la resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de *n-n* (en lo sucesivo, *resultante izquierda*) y $R_d = -R_i$, a la de las

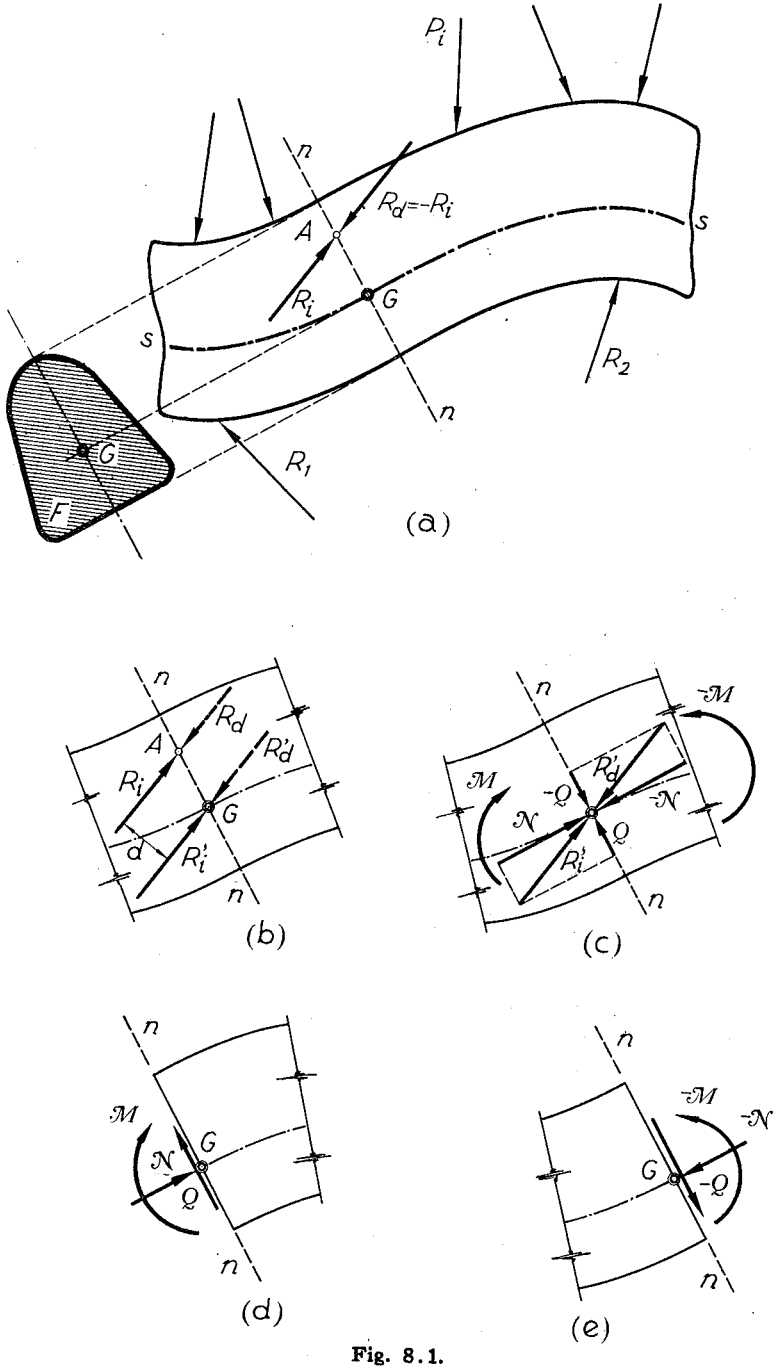

P_i
n
$R_d=-R_i$
A
s
R_i
G
s
R_2
n
G
F
R_1
(a)
n
R_d
A
R'_d
R_i
G
d
R'_i
n
(b)
n
$-\mathcal{M}$
$\mathcal{M}$
R'_d
$-Q$
$-\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$
Q
R'_i
n
(c)
n
$\mathcal{M}$
G
$\mathcal{N}$
Q
n
(d)
n
$-\mathcal{M}$
$-\mathcal{N}$
G
$-Q$
n
(e)

Fig. 8.1.

que actúan a la derecha de la sección considerada (*resultante derecha*). Por razones de equilibrio ambas resultantes son fuerzas opuestas que intersecan la sección *n-n* considerada en un punto A. Reduciendo ambas resultantes al baricentro de la sección mediante la aplicación en el mismo de un nuevo sistema nulo $R_i' = -R_d'$, de rectas de acción paralelas a las del anterior y tal que $|R_i| = |R_i'|$ (fig. 8.1 *b*), obtenemos, tanto para el sistema que actúa a la izquierda de la sección como para el que lo hace a su derecha, dos nuevos sistemas equivalentes, constituidos cada uno por un par y una fuerza aplicada en el baricentro.

Los momentos de los pares valen

$$\left.\begin{aligned} M_i &= R_i . d \\ M_d &= R_d . d \end{aligned}\right\} \qquad [8.1]$$

donde d es la distancia que separa ambas rectas de acción, siendo sus sentidos contrarios. Por otra parte, a las fuerzas R_i' y R_d' aplicadas en el baricentro de la sección podemos descomponerlas en componentes normales a la sección y contenidas en el plano de la misma, indicadas con $\mathcal{N}$ y Q en la figura 8.1 c.

El conjunto de los dos pares $\mathcal{M}$ y $-\mathcal{M}$ constituye lo que en lo sucesivo denominaremos *momento flexor* en la sección y cuya definición es la siguiente:

Se denomina momento flexor $\mathcal{M}$ en una sección, el par de pares que actúan normalmente a uno y otro lados de la misma, cuyos momentos corresponden a los momentos con respecto al baricentro de la sección de las resultantes izquierda y derecha, y cuyo signo viene dado por el momento de la resultante izquierda, o el de la derecha con signo contrario.

Análogamente, definiremos como esfuerzo de corte o tangencial en una sección al conjunto de las dos fuerzas Q, cuyas rectas de acción se encuentran contenidas en el plano de aquélla, y cuyas intensidades corresponden a las proyecciones de las resultantes izquierda o derecha sobre el plano de la sección y cuyo signo lo define la proyección de la resultante izquierda.

Finalmente, las proyecciones de las resultantes izquierda y derecha normales a la sección nos permiten definir como *esfuerzo normal o esfuerzo axil al conjunto de las dos fuerzas aplicadas en el baricentro de la sección considerada, cuyas rectas de acción son normales al plano de la misma y cuyas intensidades corresponden a las proyecciones sobre dicha dirección de la resultante izquierda y derecha.* El signo del esfuerzo normal depende de si la sección resulta solicitada por tracción o compresión. En el primer caso será positivo, y negativo en el segundo. En cuanto a los signos del momento de la resultante izquierda y de su proyección sobre el plano de la sección, corresponden a la convención adoptada en el capítulo 1.

El momento flexor, el esfuerzo de corte y el esfuerzo normal constituyen los tres *esfuerzos característicos*, o simplemente *características*, de la sección considerada, y pueden ser concebidos también como resultado de la descomposición de las resultantes izquierda y derecha en tres componentes cuyas rectas de acción sean la recta impropia del plano (par) y dos rectas propias, una normal a la sección que pase por su baricentro y otra contenida en el plano de la misma.

Volviendo a la figura 8.1, si imaginamos suprimida la parte de la chapa ubicada a la izquierda de la sección *n-n*, la parte derecha no se encontrará más en equilibrio. Para restituirlo será necesario aplicar a la sección una acción equivalente en sus efectos a la parte suprimida, es decir, la resultante izquierda o bien sus tres componentes $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ y Q mencionadas (figura 8.1 *d*). Si, en cambio, se suprime la parte derecha, deberá aplicarse a la sección la resultante derecha o sus componentes (figura 8.1 *e*).

Los tres esfuerzos característicos de una sección podemos obtenerlos también en la forma indicada en la figura 8.2. En lugar de reducir la resultante izquierda (o derecha) al baricentro, la suponemos aplicada en el punto A en que su recta de acción corta la sección, y la descomponemos según las direcciones normal a la sección y contenida en la misma, reduciendo luego la componente normal al baricentro de la sección, lo que nos conduce a un sistema equivalente constituido por el par de momento $M = N' \cdot e$ y a la fuerza axil N aplicada en el baricentro. El momento del par así obtenido es igual al de la resultante izquierda respecto de G, lo que es fácil de comprobar por aplicación del teorema de Varignon.

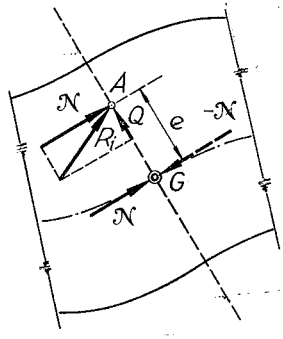


Fig. 8.2.

Esta forma de concebir los esfuerzos característicos de una sección facilita la determinación de los mismos en ciertas estructuras mediante el trazado del denominado *polígono de presiones*, en el caso que la carga esté constituida por fuerzas concentradas, o de la *curva de presiones* cuando la carga es distribuida.

8.1.2. Determinación de los esfuerzos característicos.

Los tres esfuerzos característicos de una sección constituyen las *reacciones internas* de la misma. En efecto, hemos visto en el parágrafo anterior que, efectuada una sección en una chapa de alma llena, en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores, si se suprimía la parte

ubicada a un lado de aquélla, el equilibrio se rompía y que, para restituirlo, era necesario aplicar a la parte remanente los tres esfuerzos característicos de la sección. Esta situación es semejante a la que se presenta cuando en un sólido vinculado sujeto a un estado de cargas determinado, se suprime uno de los vínculos. Para restituir el equilibrio, es necesario aplicar, en lugar del vínculo suprimido, la reacción —en este caso externa— que aquél es capaz de desarrollar.

En una chapa de alma llena, sujeta a la acción de un sistema de fuerzas exteriores en equilibrio, en general, tanto el momento flexor como los esfuerzos de corte y normal varían de sección en sección. Como veremos más adelante, en ciertos sistemas de alma llena y para determinados estados de carga, puede ocurrir que los esfuerzos característicos, o por lo menos uno de ellos, se mantengan constantes en una determinada parte o en todo el mismo.

Interesa conocer, pues, cómo varían de sección en sección los esfuerzos característicos de las mismas.

Consideremos el sistema de alma llena de la figura 8.3 *a*, vinculado a tierra mediante una articulación aplicada en A y un apoyo móvil en B, sujeto a la acción de las fuerzas concentradas $P_1, \ldots, P_4$. Determinadas las reacciones de vínculo, sea gráfica o analíticamente, trazamos un polígono funicular de las cargas ubicando el polo del mismo en el origen del vector representativo de R_A en el polígono de fuerzas. Si hacemos pasar el primer lado del funicular por A, el mismo coincidirá con la recta de acción R_A, por cuanto el primer rayo polar, del que es paralelo, se confunde con el vector representativo de R_A.

El segundo lado del funicular pasará por M, intersección del primero con la recta de acción de P_1 y será paralelo al segundo rayo polar R_1. El último lado del funicular coincidirá con la recta de acción de R_B, por ser paralelo al último rayo polar, que precisamente coincide con el vector representativo de aquella reacción.

El polígono funicular así trazado A, M, N, S, T, B recibe el nombre de *polígono de presiones* y, para una sección cualquiera, tal como la n-n, el lado del funicular mencionado que corta la misma constituye la recta de acción de la resultante izquierda (o derecha) de la sección considerada, estando dadas su intensidad y sentido por el rayo polar correspondiente. En efecto, el primer lado del funicular coincide con la reacción R_A, que es la resultante izquierda para todas las secciones comprendidas entre A y M' —punto este último determinado por la intersección del eje de la chapa con la recta de acción de P_1— por cuanto entre ambos puntos no actúa ninguna otra fuerza. Al pasar a una sección ubicada a la derecha de M' la resultante izquierda la ob-

8.1.3. Diagramas de esfuerzos característicos.

Sea el sistema de alma llena de la figura 8.4, representado por su eje, en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas exteriores activas P_i y reactivas R_A y R_B. Supongamos haber determinado, para distintas secciones s-s del mismo, los valores de $\mathcal{M}$, Q y $\mathcal{N}$. Si, a partir de un eje de referencia cualquiera MN y en una dirección arbitraria —vertical en el caso de la figura—, llevamos, en correspondencia con la vertical de cada sección, segmentos KK' que, en una escala determinada, representen los valores de los correspondientes momentos flexores (figura 8.4 *a*), el lugar geométrico de los puntos así obtenidos, constituyen una figura denominada *diagrama de momentos flexores*. Procediendo en forma similar con los esfuerzos de corte y normales, es posible construir diagramas análogos para ambos esfuerzos característicos (figura 8.4 *b* y c).

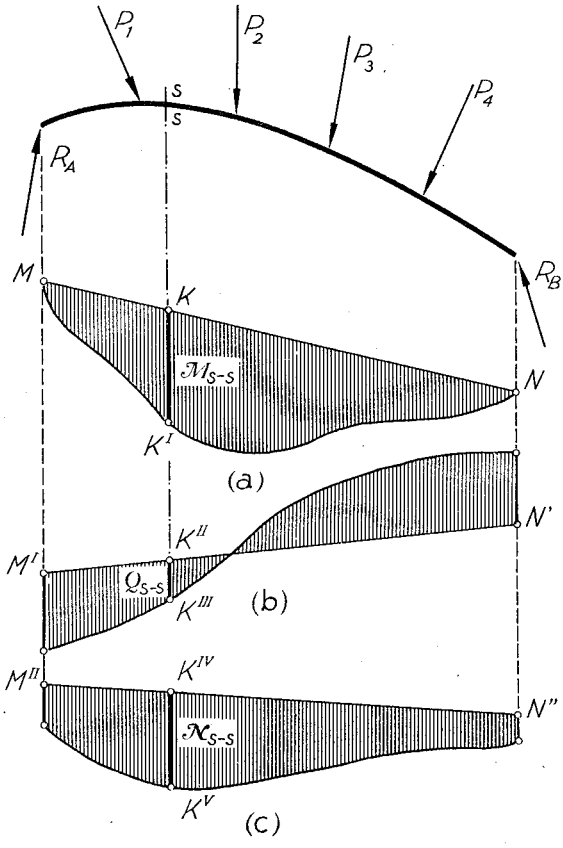


Fig. 8.4.

Los diagramas de momentos flexores, esfuerzos de corte y esfuerzos normales, permiten obtener de inmediato y para cualquier sección el valor del esfuerzo característico correspondiente. Bastará para ello trazar por la sección considerada una recta de la dirección para la cual ha sido trazado el diagrama. El segmento definido por ésta entre el eje de referencia y el diagrama propiamente dicho, leído en la escala correspondiente, da el valor de la característica buscada en

magnitud y signo, por cuanto los diagramas se orientan conforme con las convenciones adoptadas. Permiten, por otra parte, formarse una composición de lugar sobre la forma en que varían de sección a sección los esfuerzos característicos, y en cuáles de ellas alcanzan sus valores máximos, mínimos y nulos.

8.1.4. La viga simple de eje rectilíneo.

Entre los sistemas de mayor utilización en la práctica de las construcciones se encuentra la denominada *viga simple de eje rectilíneo* o, más comunmente, *viga simplemente apoyada.*

Imaginemos un sistema de alma llena, de longitud muy grande con respecto a sus dimensiones transversales, cuyo eje baricéntrico (entendiendo por tal el lugar geométrico de los baricentros de las sucesivas secciones) sea una recta, y que se encuentre sustentado a tierra mediante un apoyo fijo y otro móvil, este último de dirección vertical. El sistema así concebido se denomina *viga simplemente apoyada.* Para la misma, cuando las cargas, concentradas o distribuidas, son verticales, también lo serán las reacciones de vínculo (figura 8.5 *a*). El caso más corriente es aquél para el que el eje de la viga es horizontal (figura 8.5 *b*). En este caso, como veremos de inmediato, para todas las secciones el esfuerzo normal es nulo.

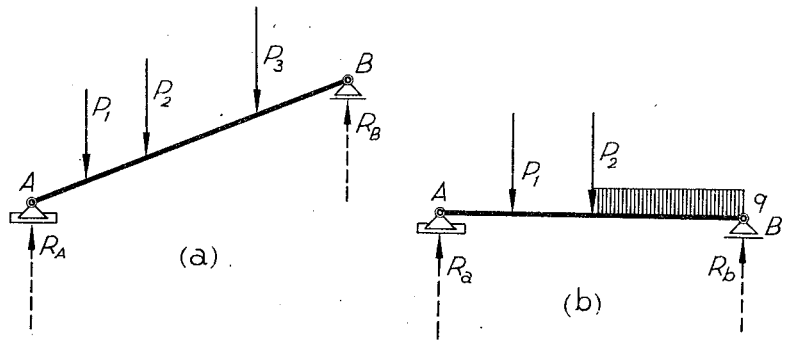


Fig. 8.5.

En efecto, siendo el eje de la viga horizontal, todas sus secciones serán verticales. Por otra parte, hemos definido el esfuerzo normal como el conjunto de dos fuerzas aplicadas al baricentro de la sección y actuantes a uno y otro lado de la misma, cuya intensidad está dada por la proyección normal al plano de la sección de la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda o a la derecha de aquélla. Como en el caso que

nos ocupa, todas las fuerzas —activas y reactivas— son verticales; es decir, paralelas al plano de la sección, la resultante de las mismas también lo será y, en consecuencia, su componente normal a aquélla, es decir, el esfuerzo normal, será nulo.

Para la viga simplemente apoyada, el trazado de los diagramas de características puede realizarse tanto gráfica como gráfico-numéricamente.

Si las cargas aplicadas a la viga son continuas, cabe también la determinación analítica de funciones que nos den las variaciones del valor de las tres características a lo largo del eje de la viga.

Consideraremos primeramente la determinación gráfica de los diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte de una viga simplemente apoyada, de eje horizontal, sujeta a la acción de un sistema de fuerzas concentradas (figura 8.6).

Hemos visto en 7.1.7 que, para un sistema de fuerzas paralelas en equilibrio, las ordenadas del polígono funicular de las mismas, referidas al lado de cierre, nos dan los valores de los momentos de la resultante izquierda con respecto a los puntos ubicados sobre la vertical coincidente con la ordenada. Ahora bien, de la definición de momento flexor en una sección sabemos que precisamente éste resulta, en valor absoluto y signo, igual al momento de la resultante izquierda de la sección considerada con respecto a su baricentro. En consecuencia, el polígono funicular, referido al lado de cierre, nos da, en este caso, directamente el diagrama de momentos flexores de la viga simplemente apoyada.

En la figura 8.6, una vez llevados uno a continuación de otro —por tratarse de fuerzas paralelas— los vectores representativos de las distintas fuerzas en el orden en que aparecen al recorrer la viga de izquierda a derecha, elegimos un polo arbitrario O y trazamos un polígono funicular cuyos lados extremos, al cortarse con las verticales de los apoyos, determinan dos puntos M y N que, unidos mediante una recta, definen el lado de cierre del polígono funicular. Trazando por O una paralela a dicho lado de cierre, la misma determina sobre el polígono de fuerzas un punto K que define los vectores representativos de las reacciones de vínculo R_A y R_B.

Como el polo O fue elegido en forma arbitraria, el lado de cierre resulta inclinado. Interesa generalmente que los diagramas de características estén referidos a ejes horizontales. Para que ello ocurra es necesario que el lado de cierre también lo sea. En consecuencia, si se desea rectificar el diagrama de momentos flexores, bastará trazar por K en el polígono de fuerzas una horizontal (rayo polar paralelo al lado de cierre) y ubicar sobre el mismo el nuevo polo. Si deseamos que el diagrama rectificado resulte en la misma escala que el primitivo, será necesario mantener la misma distancia polar, por lo que el nuevo polo O' se encontrará en la intersección de la horizontal trazada por K y la

vertical bajada por O. Trazando con este polo un nuevo polígono funicular, como es fácil de observar en la figura, los lados extremos del mismo determinan sobre las verticales de los apoyos dos puntos M_1 y N_1 ubicados sobre una recta horizontal.

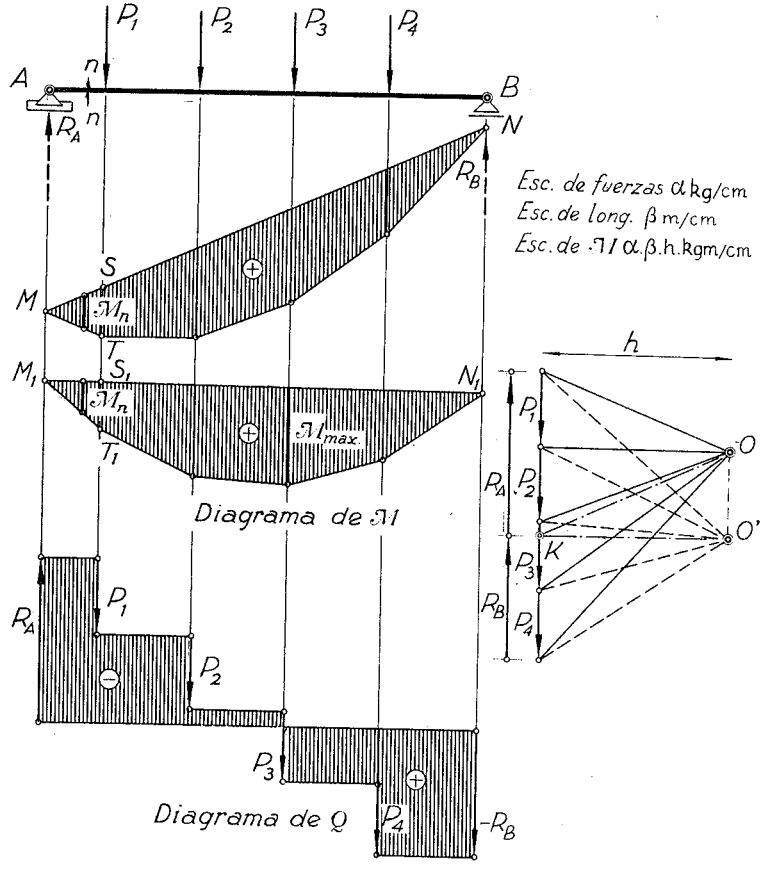


Fig. 8.6.

La rectificación del diagrama de momentos flexores puede realizarse también sin necesidad de recurrir al trazado de un segundo polígono funicular. Basta para ello trazar el eje $M_1 N_1$ horizontal, y llevar normalmente al mismo, sobre las verticales de las fuerzas aplicadas, segmentos $S_1 T_1 = ST$, utilizando para ello regla o compás de punta seca. Uniendo mediante segmentos de recta los puntos sucesivos, obtenemos el diagrama rectificado.

Para determinar el signo del diagrama de momentos flexores se procede como sigue: Consideramos una sección tal como la n-n, el signo

de cuyo momento flexor resulte de un análisis simple. Para la sección n-n, la resultante izquierda se reduce a la reacción R_A y su momento respecto de n-n es, de acuerdo con la convención adoptada, positivo. En consecuencia, la ordenada M_n, que en el diagrama mide el valor de dicho momento flexor, será positiva. Como, en el caso presente, todas las ordenadas del diagrama de momentos flexores quedan ubicadas de un mismo lado del eje de referencia, serán todas positivas, siendo éste, en consecuencia, el signo del diagrama.

En lo que sigue, para la representación de los diagramas de momentos flexores en vigas simplemente apoyadas, convendremos en llevar *hacia abajo* las ordenadas *positivas* y *hacia arriba* las *negativas*.

Al trazar gráficamente el diagrama de momentos flexores, debe prestarse atención a la ubicación del polo con respecto al polígono de fuerzas, con el objeto de que el diagrama resulte orientado de acuerdo con la convención adoptada. Para que ello se cumpla, basta observar la sencilla regla siguiente: para una sección cualquiera, el signo del momento respecto del polo del vector representativo de la correspondiente resultante izquierda debe ser igual al de ésta con respecto al baricentro de la sección. Por ejemplo, en la figura 8.6, para la sección n-n el momento de R_A es positivo. En el polígono de fuerzas, el momento del vector representativo de R_A respecto de O (ó de O') también lo es. En consecuencia, el diagrama resulta orientado de conformidad con la convención adoptada. Es fácil observar que, si el polo O lo hubiéramos elegido a la izquierda de los vectores representativos de las fuerzas, el polígono funicular, y con él el diagrama, hubieran resultado ubicados por encima del eje de referencia, es decir, en sentido contrario al correspondiente a la convención.

El trazado del diagrama de esfuerzos cortantes, una vez determinadas las reacciones de vínculo, es inmediato por cuanto, para cada sección que se considere, el esfuerzo de corte viene dado directamente por la resultante izquierda, en magnitud y signo. El diagrama de esfuerzos de corte será discontinuo y estará constituido por tramos paralelos al eje de referencia, estando ubicadas las discontinuidades en coincidencia con las verticales de las fuerzas aplicadas. En efecto, para cualquier sección comprendida entre la extrema izquierda y la infinitamente próxima a la izquierda del punto de aplicación de P_1 el esfuerzo de corte será constante e igual a R_A. Para la sección infinitamente próxima a la derecha del punto de aplicación de P_1, la resultante izquierda se obtendrá restando P_1 de R_A, y su valor se mantendrá constante hasta la sección infinitamente próxima a la izquierda del punto de aplicación de P_2. Al pasar a la derecha de este último, será necesario restar el valor de P_2. Razonando en forma semejante, llegamos finalmente hasta la sección infi-

nitamente próxima al extremo derecho de la viga (B) y, para esta sección, por razones de equilibrio, es evidente que $R_i = -R_B$.

Gráficamente, el trazado del diagrama de esfuerzos de corte se efectúa de la manera siguiente: ubicado en el polígono de fuerzas el punto K, que define las reacciones de vínculo, se adopta como eje de referencia una horizontal que proyecte al mismo. Trazando ahora una horizontal por el extremo del vector representativo de R_A, la misma constituirá la ordenada del diagrama de esfuerzos de corte para la parte de viga comprendida entre el extremo izquierdo y el punto de aplicación de P_1. Proyectando luego horizontalmente el extremo del vector representativo de P_1, dicha horizontal será el diagrama para la parte comprendida entre P_1 y P_2. Procediendo en forma análoga para las fuerzas restantes, completamos el trazado del diagrama. El signo del esfuerzo de corte en una sección será directamente el de la resultante izquierda correspondiente a la misma. Tenemos así que, para la sección extrema izquierda, el esfuerzo de corte es directamente R_A y, como su vector representativo está dirigido según el semieje negativo de las y, será, en consecuencia, negativo. De modo que a la parte del diagrama ubicado por encima del eje de referencia corresponde signo negativo, y positivo a la parte inferior.

Para el trazado del diagrama de momentos flexores por el procedimiento gráfico-numérico es necesario previamente determinar las reacciones de vínculo, lo que en general se efectúa analíticamente.

Por tratarse del equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas, las condiciones necesarias y suficientes para establecerlo son dos, expresables sea mediante dos condiciones de nulidad de momentos respecto de dos puntos cualesquiera o bien por una condición de nulidad de momentos y una de nulidad de proyección sobre un eje. Esta última forma es la que se acostumbra a emplear, eligiendo como centro de momentos uno de los apoyos y como eje de proyección el coincidente con la dirección de las fuerzas.

Consideremos la viga de la figura 8.7, en la que hacemos coincidir con el extremo B el origen O de un par de ejes coordenados ortogonales, cuyo semieje positivo z coincida con el eje de la viga. Llamando genéricamente z_i la abscisa de los puntos de aplicación de las fuerzas, l la luz de la viga, y suponiendo R_A positiva, tomamos momentos respecto del apoyo B:

$$-R_A . l = \sum_1^4 P_i . z_i \qquad [8.2]$$

de donde

$$R_A = -\frac{\sum_1^4 P_i . z_i}{l} . \qquad [8.3]$$

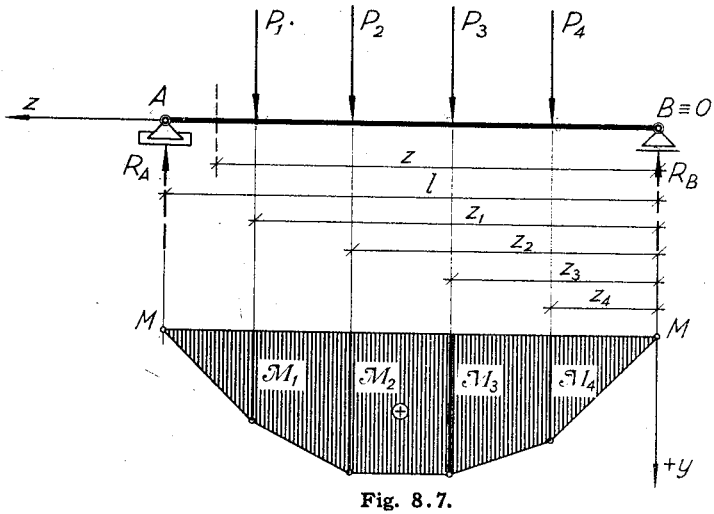


Fig. 8.7.

En esta última expresión el signo (—) indica que el sentido de R_A es contrario al supuesto; es decir, que está dirigida hacia arriba.

Proyectando el sistema sobre el eje y:

$$R_A + R_B + \sum_1^4 P_i = 0 \; ; \qquad [8.4]$$

despejando R_B e introduciendo R_A con su signo:

$$R_B = -\left(\sum_1^4 P_i . - R_A\right). \qquad [8.5]$$

Conocidas las reacciones de vínculo, estamos en condiciones de calcular los valores de los momentos flexores en puntos determinados que, representados gráficamente en una cierta escala a partir de un eje de referencia, nos definen el diagrama buscado. Para hallar dichos valores aplicaremos simplemente la definición de momento flexor. Es evidente que en las secciones A y B los momentos flexores deben ser nulos, por cuanto la resultante izquierda para la primera y la derecha para la segunda son respectivamente R_A y R_B y ambas pasan por los baricentros de las secciones consideradas.

Para las secciones comprendidas entre A y el punto de aplicación de P_1, el momento flexor será igual al momento de R_A con respecto al baricentro de la misma. Llamando z la abscisa de una cualquiera de de ellas, tendremos $\mathcal{M}_z = R_A (l - z)$, es decir una variación *lineal* para

el valor del momento flexor.. El valor máximo ocurrirá para la sección más alejada de A, es decir, en coincidencia con P_1. Será suficiente calcular este valor para poder trazar el diagrama entre A y P_1.

Tenemos así:

$$\mathcal{M}_1 = R_A \cdot (l - z_1) \; . \qquad [8.6]$$

Análogamente, la variación del momento flexor para secciones comprendidas entre dos fuerzas consecutivas también será lineal, por lo que será suficiente calcular solamente los valores de los momentos flexores en las secciones coincidentes con los puntos de aplicación de las sucesivas fuerzas. Las expresiones de los mismos, de acuerdo con la notación de la figura, son:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= R_A \cdot (l - z_2) - P_1(z_1 - z_2) \\ \mathcal{M}_3 &= R_A \cdot (l - z_3) - P_1(z_1 - z_3) - P_2(z_2 - z_3) \\ \mathcal{M}_4 &= R_A \cdot (l - z_4) - P_1(z_1 - z_4) - P_2(z_2 - z_4) - \\ &\qquad - P_3(z_3 - z_4) \; . \end{aligned}\right\} \; . \qquad [8.7]$$

Adoptando un eje de referencia MN, y llevando en una escala conveniente a partir de aquél, segmentos que, en coincidencia con las verticales de las fuerzas, representen los momentos flexores $\mathcal{M}_1$, ..., $\mathcal{M}_4$ y, uniendo luego mediante rectas los extremos de los mismos, se completa el trazado del diagrama buscado.

Consideremos ahora el caso de una viga sometida a la acción de una carga distribuida según una ley cualquiera (figura 8.8). En este caso el polígono funicular de las cargas se transforma en curva funicular que, referida como antes al lado de cierre, nos proporciona el diagrama de momentos flexores buscado. Para trazar la curva funicular es necesario descomponer la carga en cargas parciales, en forma tal que resulte posible determinar el valor de las correspondientes resultantes y sus rectas de acción; es decir, que sea posible ubicar las verticales que pasan por los baricentros de los diagramas parciales. Para que ello sea posible, estos últimos deben responder a formas que puedan asimilarse sin mayor error a figuras geométricas conocidas, tales como trapecios, rectángulos o triángulos.

En la figura 8.8 el diagrama de cargas ha sido dividido mediante las divisorias de carga *1-1*; *2-2*; ...; *5-5*, en seis superficies, de las que la primera puede asimilarse a un rectángulo, y las restantes, a trapecios. Las respectivas áreas nos dan las intensidades de las correspondientes resultantes R_1, ..., R_6, cuyas rectas de acción, verticales, pasan por los baricentros de las respectivas figuras.

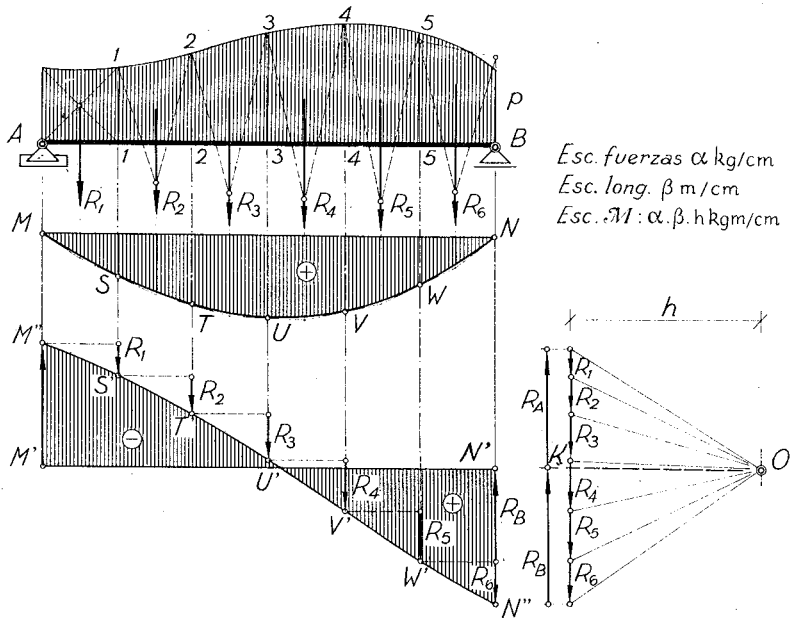


Fig. 8.8.

Trazado el polígono de fuerzas y adoptada una distancia polar h, los lados extremos del correspondiente polígono funicular definen sobre las verticales de los apoyos dos puntos M y N que, unidos, determinan el lado de cierre. La paralela al mismo por O, en su intersección con el polígono de fuerzas, conduce al punto K que define los vectores representativos de las reacciones de vínculo. Ahora bien, el polígono funicular referido al lado del cierre no constituye el diagrama de momentos flexores buscado. En efecto, por tratarse de una carga distribuida, necesitamos completar el trazado para obtener la curva funicular.

Conforme con lo visto en 5.5, la curva funicular se halla inscripta en el polígono funicular de las resultantes parciales, cuyos lados son tangentes a la misma en los puntos en que éstos son cortados por las verticales trazadas en coincidencia con las líneas divisorias de cargas. Obtenemos así los puntos S, T, U, V y W que nos permiten completar el trazado del diagrama de momentos flexores.

En cuanto al trazado del diagrama de esfuerzos de corte, se procede en forma similar a la vista para la viga simplemente apoyada sujeta a la acción de un sistema de cargas concentradas, con la única diferencia que el diagrama obtenido ya no será discontinuo.

En efecto, trazado el eje de referencia $M'N'$, obtenido proyectando horizontalmente el punto K, proyectamos primeramente el extremo del

vector representativo de R_A, lo que nos permite obtener el punto M'', que determina la ordenada del diagrama que mide el valor del esfuerzo de corte en la sección extrema izquierda A. En las secciones que se suceden a la derecha de A, el esfuerzo de corte varía de una a otra, por cuanto la carga actuante es continua, y las correspondientes ordenadas del diagrama irán disminuyendo en valor, por cuanto debemos ir restando cargas que se suceden en forma continua. Al llegar a la sección *1-1*, coincidente con la primera línea divisoria de cargas, la carga a restar a R_A será R_1, obteniéndose el punto S'. Pero entre M'' y S' el diagrama no será constante sino que variará en forma continua. De manera análoga obtenemos los puntos T', $U' \ldots W'$, y N'' que, unidos mediante una curva que contenga a todos ellos, nos da el diagrama de esfuerzos cortantes.

Cuando la carga es uniformemente distribuida; es decir, si

$$p(z) = p = \text{C}^{\text{te.}} \qquad [8.8]$$

la curva funicular correspondiente es una parábola de segundo grado. En este caso, el trazado del diagrama de momentos flexores se simplifica, pues basta proceder al trazado de la curva funicular, por tangentes, por ejemplo, en la forma vista anteriormente, y referirla a la recta determinada por los puntos en que las tangentes extremas a la misma cortan las verticales de los apoyos (puntos M y N de la figura 8.9). La escala en que resulta el diagrama así trazado se obtiene prolongando las tangentes extremas hasta cortar la vertical de uno de los apoyos, el B, por

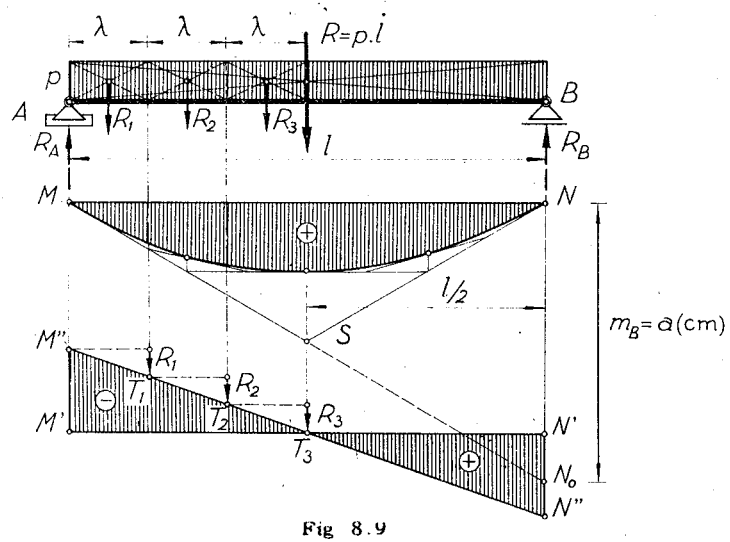


Fig 8.9

ejemplo. El segmento $NN_0 = a(\text{cm})$ representa el momento de la resultante R de la carga distribuida respecto de B. Es decir, que tenemos

$$M_B = R \,.\, \tfrac{1}{2}\, l = \tfrac{1}{2}\, pl^2 = a(\text{cm}) \,.\, \text{Escala de } M\,; \qquad [8.9]$$

de donde:

$$\text{Escala de } M = \frac{\tfrac{1}{2}\, pl^2(\text{kgm})}{a(\text{cm})}\,. \qquad [8.10]$$

En cuanto al diagrama de esfuerzos de corte, resulta ser una recta, por las razones que damos a continuación.

Por simetría de cargas y de figura, las dos reacciones de vínculo son iguales entre sí e iguales a la mitad de la resultante de la carga distribuida, es decir

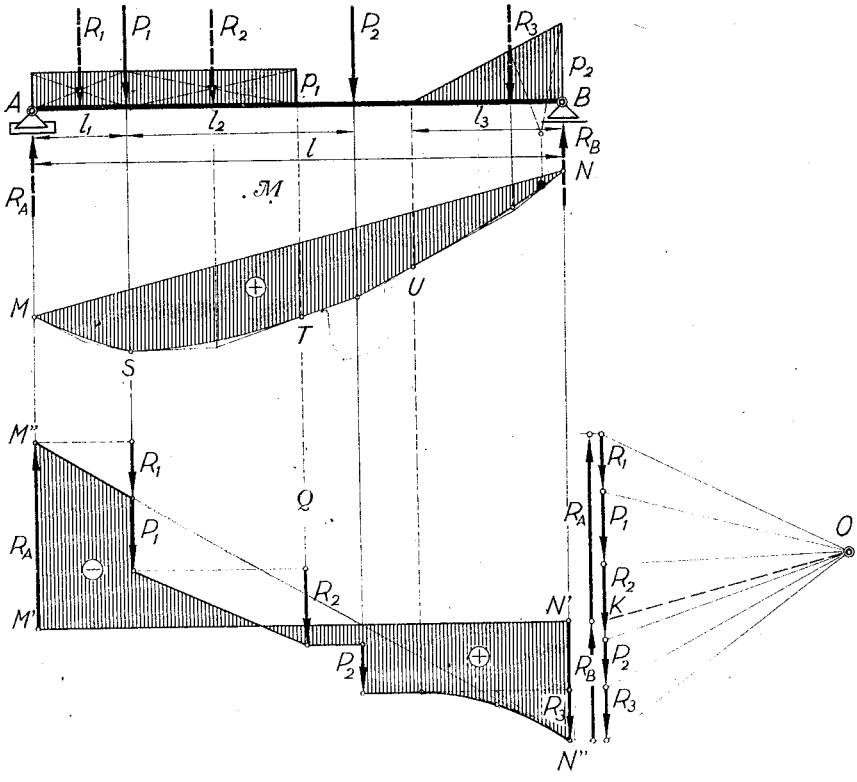
$$R_A = R_B = -\tfrac{1}{2}\, pl\,. \qquad [8.11]$$

Trazado un eje de referencia horizontal $M'N'$ y llevando por sus extremos dos segmentos $M'M''$ y $N'N''$, iguales respectivamente a R_A y $-R_B$, tendremos dos puntos por donde pasará el diagrama de esfuerzos de corte.

Dividiendo la carga distribuida en cargas parciales e *iguales* entre sí R_1, R_2, $\ldots = p\lambda$, siendo λ la separación entre divisorias de carga, llevamos sobre la vertical de la primera de ellas y a partir de la horizontal trazada por M'' un vector representativo de R_1, en la escala en que hemos representado la R_A. El extremo de dicho vector será un punto del diagrama de esfuerzos de corte. Procediendo en forma análoga con las cargas R_1, R_2, etc., obtenemos nuevos puntos del diagrama, puntos que evidentemente se hallan sobre la recta $M''N''$ por cuanto, como es dable observar, los segmentos $M''T_1$, T_1T_2, T_2T_3, etc., tienen todos la misma pendiente.

Si la carga distribuida varía según una ley lineal (carga triangular o trapecial), la curva funicular correspondiente es una parábola cúbica. En consecuencia, para el trazado del diagrama de momentos flexores puede procederse sea descomponiendo la carga en cargas parciales y operando con las correspondientes resultantes como si se tratara de fuerzas concentradas, en la forma vista al considerar el trazado de los diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte correspondientes a una carga que responde a una ley arbitraria, o bien simplemente proceder al trazado de la curva funicular en la forma vista en 5.1.6 (figura 5.10) y referirla luego a la recta definida por las intersecciones de las tangentes extremas con las verticales de los apoyos. En cuanto al diagrama de esfuerzos de corte correspondiente a este caso, sólo diremos que responde a una función de segundo grado (parábola cuadrática), lo que justificaremos en los parágrafos siguientes.

Puede presentarse el caso en que las cargas actuantes estén constituidas por fuerzas concentradas y cargas distribuidas que actúen simultáneamente (figura 8.10). Para el trazado del diagrama de momentos flexores, se hallan las resultantes de las cargas distribuidas y se comienza operando con ellas como si la viga estuviera sujeta a la acción de un



sistema de cargas concentradas. Cuando una fuerza concentrada incide sobre una carga distribuida, tal el caso del ejemplo de la figura 8.10 se considera la recta de acción de la primera como divisoria de cargas, trabajándose con las resultantes parciales correspondientes.

Una vez trazado el polígono funicular y determinada la línea de cierre MN en la forma conocida es necesario corregirlo, por cuanto el diagrama de momentos flexores estará constituido por una sucesión de trozos de curvas funiculares y de lados del polígono funicular, correspondiendo las primeras a las partes de la viga sujetas a la acción de las cargas distribuidas. En el ejemplo de la figura 8.10, el diagrama de

momentos flexores entre M y T estará constituido por dos arcos de parábola con una discontinuidad en S, por cuanto, sobre la vertical de este último actúa la fuerza concentrada P_1. Los lados del funicular que se cortan sobre la vertical de esta fuerza (punto S) serán las tangentes extremas en dicho punto a los dos arcos de parábola mencionados. El primer y cuarto lados del funicular serán tangentes en M y T respectivamente a dichas parábolas.

En cuanto a la parte del diagrama de momentos flexores correspondiente a la zona de la viga sujeta a la acción de la carga triangular de intensidad máxima p_2, estará constituida por una parábola cúbica cuyas tangentes extremas serán los lados quinto y sexto del funicular, con puntos de tangencia en U y N respectivamente. Para el trazado de la parábola cúbica se procede en la forma conocida, explicada al estudiar en el capítulo correspondiente a la construcción gráfica de la curva funicular.

En cuanto al diagrama de esfuerzos de corte, su trazado se efectúa en la forma indicada anteriormente, y resultará discontinuo, con zonas de variación lineal —correspondientes a la carga uniforme— y un arco de parábola de 2° grado para la zona en que actúa la carga triangular. Las discontinuidades corresponden a las verticales de los puntos de aplicación de las fuerzas concentradas.

8.1.5. Relaciones analíticas entre las funciones que definen los diagramas de p, Q y $\mathcal{M}$.

Sea, figura 8.11, MM', una curva continua expresable por una función $p = p(z)$ que define la línea de carga correspondiente a una cierta carga distribuida aplicada a un tramo de eje rectilíneo. Supongamos conocidos los correspondientes diagramas de esfuerzos de corte y momentos flexores, definidos a su vez por dos funciones continuas y derivables $Q(z)$ y $\mathcal{M}(z)$ respectivamente.

Llamemos R_i a la resultante de las fuerzas ubicadas a la *izquierda* de una sección cualquiera S-S, de abscisa z.

Por definición de esfuerzo de corte, para dicha sección tenemos:

$$R_i = Q(z) \; . \qquad [8.12]$$

Consideremos ahora una sección S'-S' distante dz de la anterior. La resultante izquierda correspondiente a la misma, será igual a R_i incrementada de la resultante de la carga distribuida correspondiente al entorno dz, es decir

$$R'_i = R_i + dR_i = R_i + p(z)\,dz \; . \qquad [8.13]$$

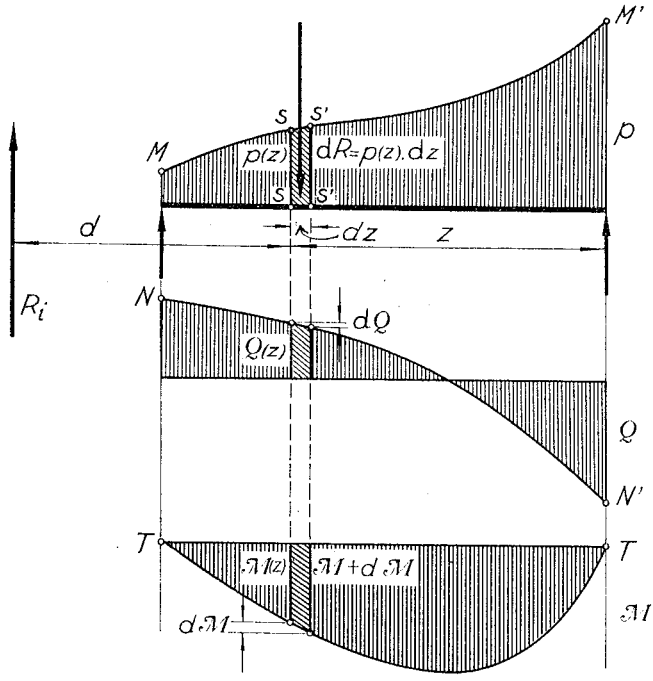


Fig. 8.11.

Pero, diferenciando la [8.12] se tiene

$$dR_i = dQ(z) \qquad [8.14]$$

de donde, reemplazando en la [8.13] y simplificando términos iguales:

$$dQ(z) = p(z).dz \qquad [8.15]$$

y finalmente

$$p(z) = \frac{dQ(z)}{dz} ; \qquad [8.16]$$

es decir, que la función que establece la ley de variación de la carga específica corresponde a la derivada primera de la función que define la ley de variación del esfuerzo de corte.

De acuerdo con la definición de momento flexor en una sección, el correspondiente a la S-S tiene por expresión:

$$\mathcal{M}(z) = R_i.d \ , \qquad [8.17]$$

donde d es la distancia de la sección considerada, a la recta de acción de R_i. Al pasar a la sección S'-S', distante dz de la anterior, el momento flexor para la misma será igual al correspondiente a S-S incrementado de $d\mathcal{M}(z)$ y, de acuerdo con la definición de momento flexor,

$$\mathcal{M}(z) + d\mathcal{M}(z) = R_i' \, d' . \qquad [8.18]$$

Como desconocemos la recta de acción de R_i', resultante izquierda correspondiente a S'-S', expresamos la [8.18] en función de las componentes de R_i', es decir R_i y $p(z).dz$, obteniendo:

$$\mathcal{M}(z) + d\mathcal{M}(z) = R_i(d + dz) + p(z)\frac{dz^2}{2} . \qquad [8.19]$$

Desarrollando el paréntesis, restando la [8.17] y despreciando el término en que aparece dz^2 por tratarse de un infinitésimo de orden superior, resulta:

$$d\mathcal{M}(z) = R_i.dz . \qquad [8.20]$$

Pero $R_i = Q(z)$, de donde, reemplazando en [8.20], tenemos

$$d\mathcal{M}(z) = Q(z).dz \qquad [8.21]$$

y finalmente

$$Q(z) = \frac{d\mathcal{M}(z)}{dz} \qquad [8.22]$$

expresión que nos dice que la función que establece la ley de variación del esfuerzo de corte es la derivada primera de la función que define la ley de variación del momento flexor.

Comparando las [8.16] y [8.22], resulta

$$p(z) = \frac{d^2\mathcal{M}}{dz^2} . \qquad [8.23]$$

Integrando las expresiones [8.16] y [8.22] tenemos

$$Q(z) = \int p(z).dz + C \qquad [8.24]$$

y

$$\mathcal{M}(z) = \int Q(z).dz + C_1 . \qquad [8.25]$$

Las expresiones anteriores nos permiten, conocida la función que define uno de los diagramas, conocer por integración o derivación, según el caso, las correspondientes a cualquiera de los otros.

Sea por ejemplo la viga de la figura 8.12, simplemente apoyada y sujeta a la acción de una carga distribuida según una ley lineal que res-

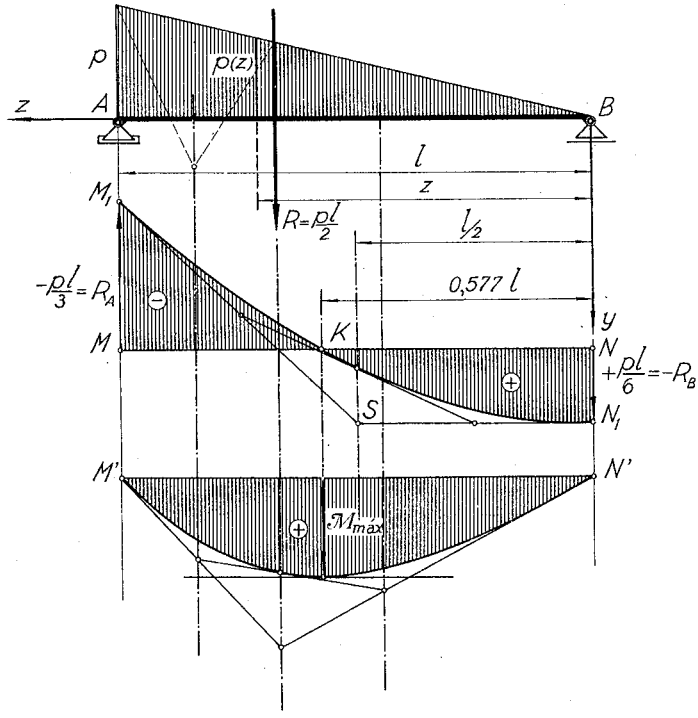


Fig. 8.12.

ponda a un diagrama triangular, cuya ordenada máxima valga p. Llamando z a la abscisa de una sección cualquiera, medida a partir del apoyo B, la ley de variación de la carga específica será:

$$p(z) = p\frac{z}{l}. \qquad [8.26]$$

Reemplazando en la [8.24] resulta:

$$Q(z) = p\int \frac{z}{l}.dz + C, \qquad [8.27]$$

e integrando

$$Q(z) = \tfrac{1}{2}\, p \frac{z^2}{l} + C \,. \qquad [8.28]$$

La constante de integración la determinamos en la forma siguiente: para $z = l$ el esfuerzo de corte es directamente la reacción de vínculo en A, cuyo valor determinamos tomando momentos respecto de B

$$-R_A \cdot l - \tfrac{1}{2}\, pl \,.\, \tfrac{2}{3}\, l = 0 \qquad [8.29]$$

$$R_A = \frac{-pl}{3} \,. \qquad [8.30]$$

Es decir que se cumple

$$Q(z)_{z=1} = -\frac{pl}{3} = -\frac{pl^2}{2l} + C \,. \qquad [8.31]$$

El término $pl^2/2l$ está afectado del signo $(-)$ por tratarse de una fuerza que viene de la *derecha.*

Despejando C:

$$C = \frac{pl}{6} \qquad [8.32]$$

y reemplazando en [8.28], previo cambio de signo al primer término del miembro derecho, llegamos a la expresión analítica del esfuerzo de corte:

$$Q(z) = -\tfrac{1}{2}\, p \,\frac{z^2}{l} + p\ {}^1\!/_6\, l. \qquad [8.33]$$

La expresión analítica de la función que establece la variación del momento flexor la obtenemos integrando la expresión anterior:

$$\mathcal{M}(z) = \int Q(z) = \int -\tfrac{1}{2}\, p \,\frac{z^2}{l}\, dz + \int p\ {}^1\!/_6\, l\, dz + C_1 \qquad [8.34]$$

de donde

$$\mathcal{M}(z) = -\frac{pz^3}{6l} + \frac{plz}{6} + C_1 \,. \qquad [8.35]$$

Para $z = 0$, $\mathcal{M}(z) = 0$, luego

$$C_1 = 0 \qquad [8.36]$$

es decir que

$$\mathcal{M}(z) = \frac{p}{6}\left(lz - \frac{z^3}{l}\right), \qquad [8.37]$$

expresión que corresponde a una parábola cúbica.

Conocida la expresión que define la variación del momento flexor, es fácil determinar su valor máximo y la abscisa de la sección correspondiente. En efecto, el máximo de la expresión [8.37] corresponde a aquel valor de z para el cual su derivada primera se anula. Ahora bien, siendo $Q(z) = \mathrm{d}\mathcal{M}(z)/\mathrm{d}z$, bastará para ello anular la expresión [8.33] y despejar z; obteniendo:

$$z = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577.l \qquad [8.38]$$

valor que, reemplazado en la [8.37], nos conduce al valor del máximo momento flexor.

$$\mathcal{M}_{\text{máx}} = 0{,}0643.pl^2 \,. \qquad [8.39]$$

Las relaciones analíticas que hemos visto nos facilitan, por una parte, el trazado gráfico de los diagramas de características y, por la otra, el control de la corrección de dichos trazados. En efecto, sabemos que el diagrama de esfuerzos de corte correspondiente a la viga simplemente apoyada de la figura 8.12 es una parábola de segundo grado. Las ordenadas extremas de dicho diagrama tendrán por valor las intensidades de las reacciones de vínculo en A y B. Trazado un eje horizontal de referencia MN, llevamos por M y N, en una escala cualquiera de fuerzas, dos segmentos representativos de las intensidades de dichas reacciones. El correspondiente a R_A lo llevamos hacia arriba y el relativo a R_B hacia abajo, conforme con la convención de signos adoptada. Por los extremos de dichos segmentos pasará la curva que define el diagrama de esfuerzos de corte que, como hemos dicho, es una parábola cuadrática, la que quedará completamente determinada una vez conocidas sus tangentes extremas.

La expresión [8.16] nos dice que, para una sección cualquiera, la ordenada de carga correspondiente mide la pendiente —con respecto al eje z— de la tangente geométrica al diagrama de esfuerzos de corte en el punto del mismo ubicado en correspondencia con la sección considerada, pues tal es la interpretación geométrica de la derivada de una función. En consecuencia, la tangente en N_1 al diagrama de esfuerzos de corte debe necesariamente ser horizontal, por cuanto la ordenada del diagrama de cargas sobre la vertical de dicho punto es nula. Conocida esta tangente, obtenemos de inmediato la restante tangente extrema, ya que ambas, por una conocida propiedad de la parábola cuadrática, deben cortarse sobre la vertical del punto medio de la cuerda correspondiente, que a la vez coincide con el centro de la luz de la viga. En consecuencia, uniendo el punto M_1 (figura 8.12) con el punto S en que la tangente en N_1

corta la vertical del centro de la luz, dicha recta será la otra tangente extrema buscada. El trazado de la parábola se completa por puntos y tangentes.

Trazado el diagrama de momentos flexores en cualquiera de las formas explicadas anteriormente debemos tener que, para la sección en que el momento flexor es máximo, la tangente a la curva debe ser paralela al eje de referencia adoptado, horizontal en el caso analizado. En efecto, hemos visto que, en correspondencia con la sección en que el momento flexor es máximo, el esfuerzo de corte es nulo, precisamente porque la expresión analítica de la función que define este último es la derivada primera de la función que establece la variación del momento flexor. Pero por otra parte, dicha derivada nos está midiendo la pendiente de la tangente geométrica a la curva en el punto correspondiente a la sección considerada. Además, como control, debe verificarse que la abscisa para la cual se anula el esfuerzo de corte, debe coincidir con la que corresponde a $\mathcal{M}_{máx}$.

Las expresiones analíticas de las funciones que definen los diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte pueden determinarse, conocida la ley de variación de la carga distribuida, sin necesidad de integrar esta última función, sino simplemente aplicando las correspondientes definiciones, como veremos a continuación.

Consideremos la viga simplemente apoyada de la figura 8.13 sujeta a la acción de una carga uniformemente distribuida de intensidad constante igual a p. Por razones de simetría ambas reacciones de vínculo resultan de igual intensidad, siendo su valor

$$R_A = R_B = -\tfrac{1}{2}\, pl \,. \qquad [8.40]$$

Supongamos una sección cualquiera S-S, ubicada a una abscisa z del apoyo B. Por definición de esfuerzo de corte, para la sección considerada, siendo la carga exterior activa y las reacciones de vínculo paralelas y normales al eje de la viga, el esfuerzo de corte correspondiente será directamente, en intensidad y sentido, la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección, es decir

$$Q(z) = -\tfrac{1}{2}\, pl + p(l - z) = \tfrac{1}{2}\, p(l - 2z) \qquad [8.41]$$

expresión lineal, cuyos valores extremos, para $z = l$ y $z = 0$ son

$$\left.Q(z)\right]_{z=l} = -\tfrac{1}{2}\, pl$$

$$\left.Q(z)\right]_{z=0} = +\tfrac{1}{2}\, pl \qquad [8.42]$$

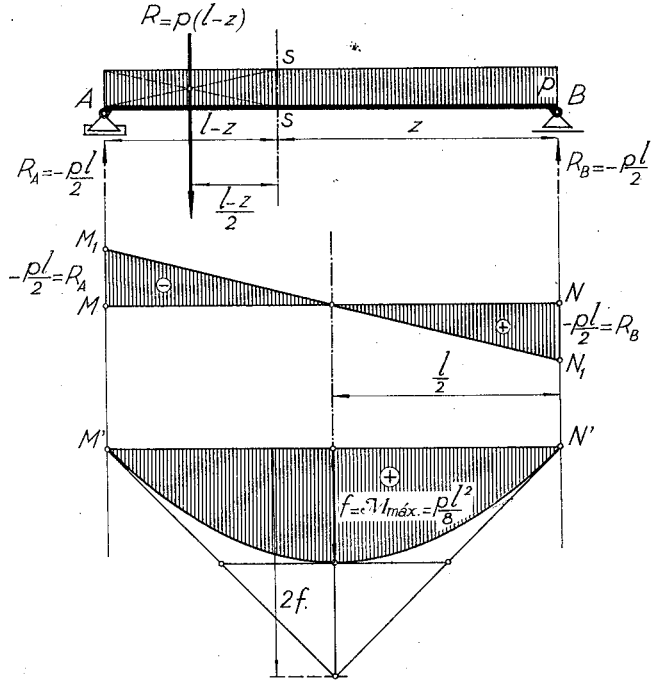


Fig. 8.13.

y que corresponden, como era dado esperar, el primero a la reacción de vínculo en A y el segundo a la reacción en B cambiada de signo. Por otra parte, el diagrama corta el eje de referencia, por razones de simetría, en el centro de la luz, lo que es fácil verificar, anulando la expresión [8.41] y despejando z:

$$\tfrac{1}{2}\,p(l-2\,z) = 0 \quad \therefore \quad z = \tfrac{1}{2}\,l \qquad [8.43]$$

La expresión del momento flexor en la sección S-S la obtenemos tomando momentos con respecto a su baricentro, de las fuerzas situadas a su izquierda, es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(z) &= \tfrac{1}{2}\,pl\ (l-z) - p(l-z)\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,(l-z) \\ \mathcal{M}(z) &= \tfrac{1}{2}\,pz(l-z)\ , \end{aligned} \qquad [8.44]$$

que corresponde a una parábola de segundo grado.

El valor del máximo momento flexor lo obtenemos derivando la segunda de las [8.44] e igualando la derivada a cero, lo que nos permite

obtener el valor de la abscisa z de la sección correspondiente y que reemplazada en la [8.44], nos da el máximo buscado.

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(z)}{\mathrm{d}z} = \tfrac{1}{2}\,p(l-2z) = 0\,, \qquad [8.45]$$

de donde:

$$z = \tfrac{1}{2}\,l\,. \qquad [8.46]$$

Reemplazando en la expresión del momento flexor:

$$\mathcal{M}_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\,p\,.\,\tfrac{1}{2}\,l(l-\tfrac{1}{2}\,l) = \tfrac{1}{8}\,pl^2\,. \qquad [8.47]$$

Sustituyendo $z = \frac{1}{2}\,l$ en la [8.41], obtenemos

$$Q(z)\Big]_{z=\frac{1}{2}\,l} = \tfrac{1}{2}\,p(l-l) = 0 \qquad [8.48]$$

que confirma el resultado dado por la [8.43].

En la construcción del diagrama de esfuerzos de corte, una vez conocida la ordenada del mismo en correspondencia de una determinada sección, si se desea trazar la tangente en dicho punto puede aplicarse la siguiente construcción, que no es otra cosa que la interpretación gráfica de la expresión

$$p(z) = -\,\frac{\mathrm{d}Q(z)}{\mathrm{d}z}\,.$$

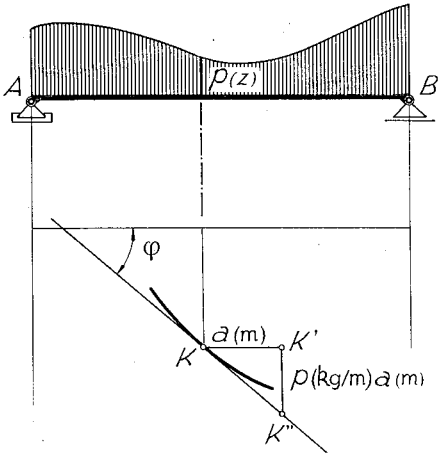


Fig. 8.14.

Sea K un punto del diagrama de esfuerzos de corte de la viga de la figura 8.14. Llevando horizontalmente a partir del mismo en la escala de longitudes un segmento $KK' = a(\mathrm{m})$, y por el extremo del mismo verticalmente hacia abajo, en la escala de fuerzas, otro segmento $K'K'' = p(\mathrm{kg/m})\,.\,a(\mathrm{m}) = p\,.\,a(\mathrm{kg})$, la recta KK'' será la tangente en K al diagrama de esfuerzos de corte. En efecto, con la notación de la figura y, llamando φ el ángulo que forma la tangente geométrica en K con el eje de referencia, tenemos

$$\frac{p.a}{a} = p = \operatorname{tg}\varphi \qquad [8.49]$$

y como $p = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}z$, dicha recta resulta ser efectivamente la tangente buscada.

En lugar de llevar un segmento de longitud a(m) puede llevarse uno de 1 m. En tal caso el segmento vertical trazado por su extremo será igual a p(kg/m) leído en la escala de fuerzas.

La construcción del diagrama de esfuerzos de córte, partiendo del diagrama de momentos flexores, puede efectuarse gráficamente, concibiéndolo como diagrama derivado del último, mediante una simple derivación gráfica de la curva funicular que define el diagrama.

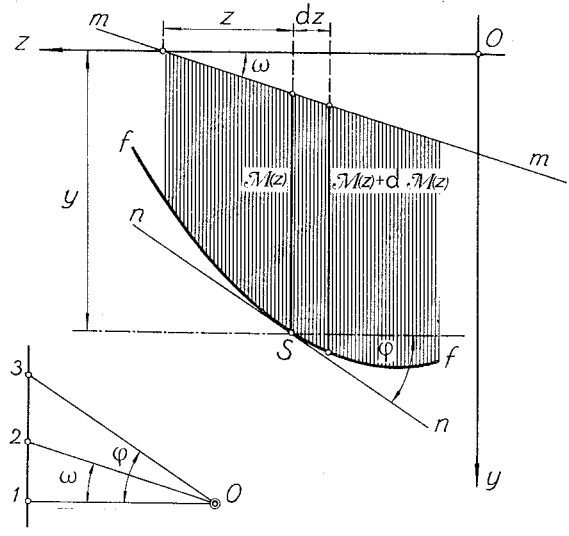


Fig. 8.15.

Sea, figura 8.15, la curva funicular de una determinada carga distribuida que, referida al eje m-m (línea de cierre), constituye un diagrama de momentos flexores. Llamando ω el ángulo que forma la línea de cierre con el eje z, de acuerdo con la notación de la figura, tenemos:

$$\mathcal{M}(z) = y - z.\mathrm{tg}\,\omega\ . \qquad [8.50]$$

Derivando respecto de z:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} - \mathrm{tg}\,\omega\ . \qquad [8.51]$$

Pero, por ser $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{M}(z)}{\mathrm{d}z} = Q(z)$ y $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$, reemplazando resulta:

$$Q(z) = \mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\omega\ . \qquad [8.52]$$

Determinada la tangente n-n en un punto cualquiera S de la curva funicular, por un polo O arbitrario trazamos paralelas al eje z, a la línea de cierre m-m y a la tangente n-n, las que nos definen sobre una recta vertical ubicada a una distancia cualquiera de O, los puntos 1, 2 y 3 respectivamente. De la figura tenemos:

$$3\text{-}1 = (O\text{-}1)\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad [8.53]$$

$$2\text{-}1 = (O\text{-}1)\,\mathrm{tg}\,\omega \qquad [8.54]$$

$$3\text{-}2 = (O\text{-}1)(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\omega)\,. \qquad [8.55]$$

Pero, de acuerdo con la [8.52]

$$3\text{-}2 = (O\text{-}1).Q(z) \qquad [8.56]$$

de donde

$$Q(z) = \frac{3\text{-}2}{O\text{-}1}\,. \qquad [8.57]$$

En la expresión anterior, 3-2 debe ser leído en la escala de momentos flexores y O-1 en la de longitudes, o bien, interpretando el segmento O-1 como una distancia polar, el esfuerzo de corte estará dado directamente por el segmento 3-2 leído en una escala igual al cociente entre la escala de momentos flexores y la longitud representada por la distancia polar. En cuanto al sentido de $Q(z)$ será tal que origine respecto de O, un momento del mismo signo que el momento flexor en la sección considerada.

Si el eje de referencia (línea de cierre) coincide con la dirección de z, es decir, es horizontal, resulta $\mathrm{tg}\,\omega = 0$, confundiéndose el punto 2 con el 1.

8.1.6. La viga con voladizos.

El trazado de los diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte para el caso en que la viga se prolongue más allá de sus apoyos, es decir, si sus extremos se hallan en voladizo, se efectúa gráficamente en forma similar a la vista para la viga simplemente apoyada.

Sea la viga de la figura 8.16, sustentada mediante un apoyo fijo en A y otro móvil en B, con dos voladizos CA y BD, sujeta a la acción

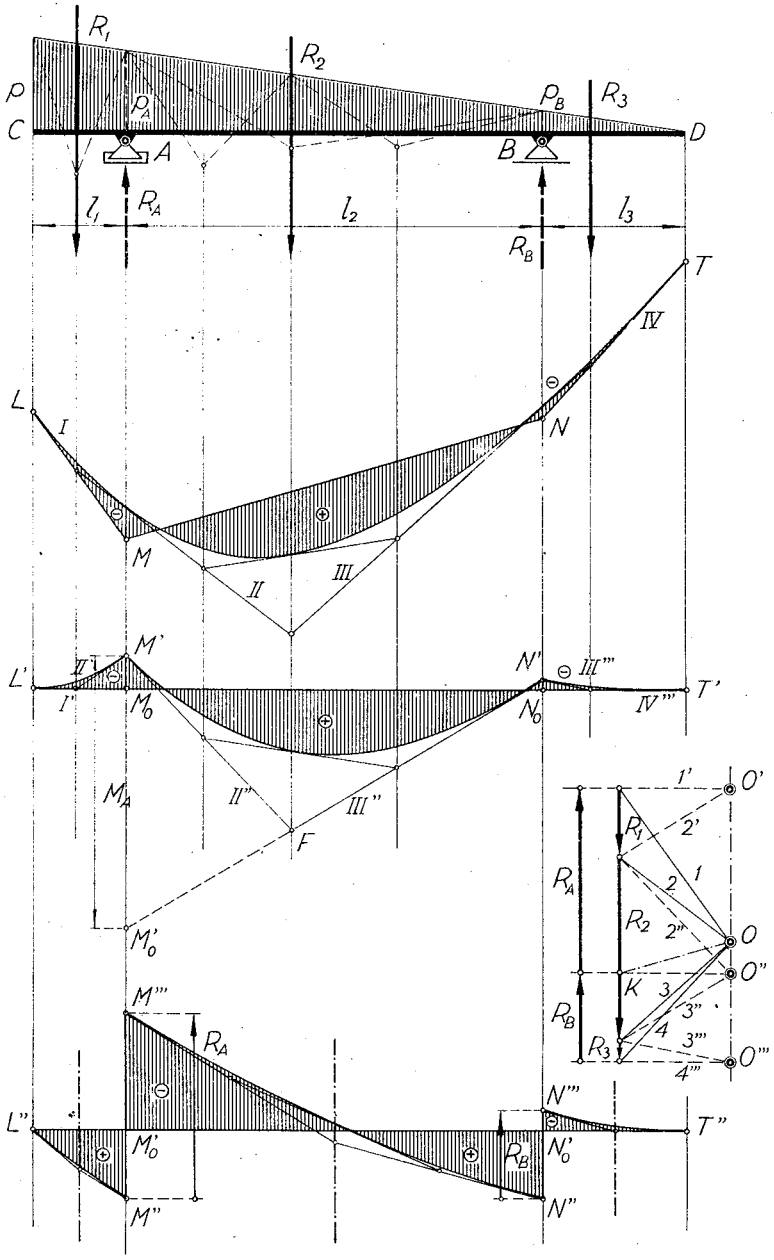

R1
R2
R3
p
C
pA
pB
D
A
B
l1
RA
l2
l3
RB
T
IV
L
I
N
M
II
III
M'
N'
III'''
L'
II'
I'
M0
N0
IV'''
T'
MA
II''
III''
F
M0'
1'
O'
R1
2'
RA
2
1
R2
2''
O
O''
K
3
RB
3''
4
3'''
R3
O'''
4'''
M'''
RA
N'''
L''
M0'
N0'
RB
T''
M''
N''

Fig. 8.16.

de una carga distribuida según una ley lineal, de intensidad nula en el extremo D y máxima (igual a p) en el C.

Dividimos primeramente la carga distribuida en tres cargas parciales, adoptando como divisorias de carga las verticales de los apoyos. Halladas las correspondientes resultantes parciales R_1, R_2 y R_3, trazamos con polo O arbitrario un polígono funicular de las mismas, trazado que completamos construyendo —en la forma conocida— la curva funicular correspondiente que, por tratarse de una carga de variación lineal, será una parábola cúbica.

Consideremos ahora el tramo en voladizo CA. En una sección cualquiera del mismo, el momento flexor estará dado en valor absoluto y signo, por el momento de la resultante de las fuerzas que actúan a su izquierda, momento que, como sabemos, se obtiene gráficamente leyendo en la escala correspondiente el segmento determinado sobre la vertical de la sección por la tangente extrema izquierda y la curva funicular. En consecuencia, la curva funicular comprendida entre las verticales de C y A, referida a la primera tangente extrema, constituye el diagrama de momentos flexores correspondiente al tramo CA. Otro tanto ocurre con el restante tramo en voladizo BD, para el que el diagrama de momentos flexores estará constituido por la curva funicular referida a la última tangente a la misma.

Para obtener el diagrama de momentos flexores correspondiente al tramo entre apoyos, bastará seguir el mismo criterio utilizado en el caso de la viga simplemente apoyada, es decir, prolongar los lados extremos del polígono funicular —tangentes extremas en nuestro caso— hasta cortar las verticales de los apoyos, definiendo de esta manera dos puntos M y N que, unidos mediante una recta, nos determinan el lado de cierre MN, referida al cual, la curva funicular entre A y B nos da el correspondiente diagrama de momentos flexores.

El diagrama así trazado está referido a un eje quebrado $LMNT$. Para rectificarlo, es decir, obtener un diagrama referido a un único eje, que por comodidad elegimos horizontal, procedemos de la manera siguiente: en el voladizo CA, las únicas fuerzas que producen momentos flexores son las resultantes de la carga distribuida sobre la longitud l_1 y, por lo que hemos visto, el diagrama de momentos flexores está dado por la curva funicular referida a la tangente extrema, que es el eje de referencia. Si queremos que dicho eje sea horizontal, deberá serlo también el rayo polar correspondiente. En consecuencia, trazando en el polígono de fuerzas, por el origen del vector representativo de R_1, una horizontal, la misma será el primer rayo polar del polígono funicular que nos conduce a un diagrama de momentos flexores para el voladizo, referido a un eje

horizontal. Elegido el polo O' manteniendo la distancia polar a efectos de no modificar la escala, y uniéndolo con el extremo del vector representativo de R_1, obtenemos el segundo y último rayo polar. Trazado el funicular correspondiente de lados I' y II', los mismos serán las tangentes extremas a la parábola cúbica que define el diagrama de momentos flexores entre C y A. El segmento M_0M', en la escala correspondiente, nos da el valor del momento flexor en la sección en correspondencia con el apoyo A.

Procediendo en forma análoga para el voladizo BD, obtenemos un segundo polo O''', ubicado ahora sobre la horizontal trazada por el *extremo* del vector representativo de R_3, por cuanto el trazado del funicular correspondiente lo efectuamos viniendo de la *derecha*, obtenemos el diagrama de momentos flexores correspondiente al voladizo BD.

Para ubicar el tercer polo O'', correspondiente a la parte del polígono funicular relativo al tramo entre apoyos, recordemos que el lado de cierre del mismo debe ser horizontal en el diagrama rectificado y que, por otra parte, el correspondiente rayo polar, en su intersección con el polígono de fuerzas, define sobre el mismo un punto K que determina los vectores representativos de las reacciones de vínculo. En consecuencia, bastará trazar por K —conocido— una horizontal y ubicar en ésta, a la misma distancia polar que antes, el polo O''. Trazando por M' una paralela al primer rayo polar $2''$, y por su intersección con la recta de acción de R_2 otra al rayo polar $3''$, si la construcción ha sido realizada correctamente, esta segunda paralela deberá necesariamente pasar por el punto N'.

Si, en lugar de utilizar el procedimiento gráfico, se desea emplear el método gráfico-numérico, el trazado del diagrama de momentos flexores se realiza en la forma que se explica a continuación.

Adoptado un eje de referencia horizontal $L'T'$, se calculan analíticamente las reacciones de vínculo en la forma conocida. Luego se determinan los valores de los momentos flexores correspondientes a las secciones en los apoyos. Llamando p_A y p_B a las intensidades de las cargas específicas sobre A y B, respectivamente, tendremos:

$$\mathcal{M}_A = -\frac{2}{6} p l_1^2 \; -\frac{1}{6} p_A l_1^2 = -\frac{1}{6}(2p + p_A) l_1^2 \qquad [8.58]$$

$$\mathcal{M}_B = -\frac{1}{6} p_B l_3^2 \,. \qquad [8.59]$$

Fijada la escala de momentos flexores, llevamos, a partir del eje de referencia, y en coincidencia con las secciones correspondientes, dos segmentos M_0M' y N_0N' que, en la escala adoptada, representen los valores de $\mathcal{M}_A$ y $\mathcal{M}_B$. Sabemos que, por tratarse de una carga de varia-

ción lineal, la curva representativa de la función que define la variación del valor de los momentos flexores será una parábola cúbica, la que, para cada uno de los voladizos, deberá pasar por el extremo del mismo (momento nulo por no existir fuerzas a la izquierda, o derecha) y por el extremo de la ordenada (M' ó N' según el caso).

Por otra parte, para las secciones extremas de los voladizos el esfuerzo de corte es nulo (no existen fuerzas a la izquierda o derecha) y por ser $Q = d\mathcal{M}/dz$, resulta ser nula la pendiente de la tangente en la sección extrema del diagrama de momentos flexores. En consecuencia, la primera tangente al diagrama en el voladizo CD y la última en el BD, coinciden con el eje de referencia.

Conocidas las direcciones de las tangentes extremas, el trazado de los diagramas correspondientes a los dos voladizos es inmediato, pues se reduce al trazado de parábolas cúbicas de las que se conocen dos puntos y las correspondientes tangentes.

Para el tramo entre apoyos conocemos dos puntos por donde debe pasar el diagrama de momentos flexores: M' y N'. Además, sabemos que la curva que define al mismo es una parábola cúbica, que quedaría completamente determinada si conociéramos sus tangentes en los puntos M' y N'. Para hallarlas recordemos que las mismas determinan sobre la vertical de A, un segmento que, leído en la escala de momentos, nos da el valor del momento de R_2 respecto de A. El valor de este momento es

$$\mathcal{M}_A = \frac{l_2^2}{6}(p_A + 2p_B) \qquad [8.60]$$

representando en la figura por el segmento $M'M'_0$, que por ser $\mathcal{M}_A$ positivo, está dirigido hacia abajo. Uniendo ahora M'_0 con N' obtenemos la tangente en este último punto al diagrama de momentos flexores. La tangente en M' se corta con la anterior en el punto F, ubicado sobre la recta de acción de R_2. Conocidas ambas tangentes extremas, el trazado de la parábola cúbica es inmediato.

Si observamos el diagrama de momentos flexores construido por el procedimiento gráfico, con eje de referencia quebrado, vemos que la quebrada $LMNT$ constituye en realidad un *polígono funicular* de las *reacciones de vínculo*, de modo que, generalizando, podemos expresar que, para los sistemas de ejes rectilíneos, el diagrama de momentos flexores resulta de referir el polígono (o curva) funicular de las cargas exteriores activas al polígono funicular de las reacciones.

Para el trazado del diagrama de esfuerzos de corte, una vez ubicado un eje de referencia, horizontal por conveniencia, llevamos sobre la vertical de A, hacia abajo, un segmento M'_0M'' que, en la escala de fuerzas adoptada, corresponda a la intensidad de la resultante parcial R_1. Dicho

segmento representa la ordenada del diagrama de esfuerzos de corte correspondiente a una sección infinitamente próxima a la izquierda de A, por cuanto, para la misma se tiene que $Q_A = R_1$. En C, el esfuerzo de corte es nulo, por cuanto no existen fuerzas a la izquierda de la misma.

Entre C y A la variación del esfuerzo de corte responde a una parábola cuadrática, por ser la función que la define integral primera de la función de carga, y ser ésta lineal. Al pasar a una sección infinitamente próxima a la derecha de A, el esfuerzo de corte se incrementa el valor R_A. En consecuencia, llevando a partir de M'' el segmento $M''M'''$, representativo de la intensidad de R_A, obtenemos el punto M''' por donde pasará el diagrama de esfuerzos de corte correspondiente al tramo AB que, por las mismas razones anteriores, será también un arco de parábola de segundo grado. Pasemos ahora al voladizo BD. Repitiendo el razonamiento efectuado para el voladizo CA, el segmento $N_0'N'''$ corresponderá al esfuerzo de corte en la sección infinitamente próxima a la derecha de B. Su signo es negativo, por cuanto R_3, que define su intensidad, es positiva, pero la misma actúa a la derecha de la sección y, en consecuencia, es necesario cambiar de signo. Llevando a partir de N''' y hacia abajo, por la razón indicada, el segmento $N'''N''$, representativo de la intensidad de R_B, obtenemos el punto N'', por el que también pasará la parábola cuadrática que define el diagrama de esfuerzos de corte para el tramo AB.

Analizaremos a continuación el trazado de los tres arcos de parábola. En primer lugar, tenemos que las tangentes en M'' y M''' deben tener la misma pendiente, por corresponderles la misma ordenada de cargas p_A. Otro tanto ocurre con las tangentes en N'' y N'''. Por otra parte, la tangente al diagrama de esfuerzos de corte en T'' debe ser horizontal por ser nula la ordenada del diagrama de carga para dicha sección. Conocida la tangente en T'' es inmediata la obtención de la correspondiente a N''', por cuanto ambas se deben cortar sobre la vertical del centro de l_3. Determinada la tangente en N''', conocemos la que corresponde a N'', por ser ambas paralelas entre sí. En forma semejante determinamos las restantes tangentes que, una vez conocidas, nos permite completar el diagrama de esfuerzos de corte.

En la determinación analítica de los momentos flexores en la viga con voladizos es necesario calcular independientemente para éstos y para el tramo central entre apoyos las expresiones que los definen, por cuanto, como hemos visto, el diagrama de momentos flexores presenta, en este caso, discontinuidades sobre las verticales de los apoyos. Analizaremos a continuación la deducción de las expresiones correspondientes al tramo entre apoyos, remitiendo al parágrafo siguiente, relativo a la viga empotrada, para la obtención de las relativas a los voladizos, por tratarse del mismo problema.

Una vez determinadas las reacciones de vínculo R_A y R_B en cualquiera de las formas conocidas, suprimamos las partes en voladizo. Es evidente que, para que el tramo central continúe en las mismas condiciones de equilibrio que en el sistema primitivo, debemos aplicar en las secciones extremas de la viga simplemente apòyada la resultante de las acciones que las partes suprimidas le transmitían.

La reducción al punto A de las cargas exteriores activas actuantes sobre el voladizo CA da origen a un esfuerzo de corte Q_A y a un par $\mathcal{M}_A$ cuyas intensidades son, respectivamente:

$$Q_A = \tfrac{1}{2}(p + p_A)\, l_1 \qquad [8.61]$$

$$\mathcal{M}_A = -\frac{l_1^2}{6}(2p + p_A)\ . \qquad [8.62]$$

Operando en forma similar con el voladizo BD obtenemos

$$-Q_B = \tfrac{1}{2}\, p_B\, l_3 \qquad [8.63]$$

$$\mathcal{M}_B = \frac{p_B\, l_3^2}{6}\ . \qquad [8.64]$$

En consecuencia, el tramo central, considerado como viga simplemente apoyada, se encontrará en equilibrio bajo la acción de la carga distribuida de variación lineal y ordenadas extremas p_A y p_B, las reacciones de vínculo R_A y R_B, las fuerzas concentradas aplicadas en A y B de intensidades Q_A y $-Q_B$ respectivamente, y los pares M_A y M_B, (fig. 8.17 *a*).

Consideraremos independiente cada una de estas acciones, determinando las correspondientes expresiones analíticas del momento flexor en una sección genérica las que, sumadas, nos darán la expresión buscada.

Para ello hagamos coincidir el origen de un par de ejes coordenados con el apoyo B, y sea z la abscisa de la sección genérica.

Llamando R_A^o la reacción en A originada exclusivamente por la carga distribuida, que actúa entre A y B, tenemos:

$$R_A^o = -\frac{l_2}{6}(2p_A + p_B)\ . \qquad [8.65]$$

La ordenada del diagrama de carga correspondiente a la abscisa z será:

$$p_z = p_B + (p_A - p_B)\frac{z}{l_2}\ . \qquad [8.66]$$

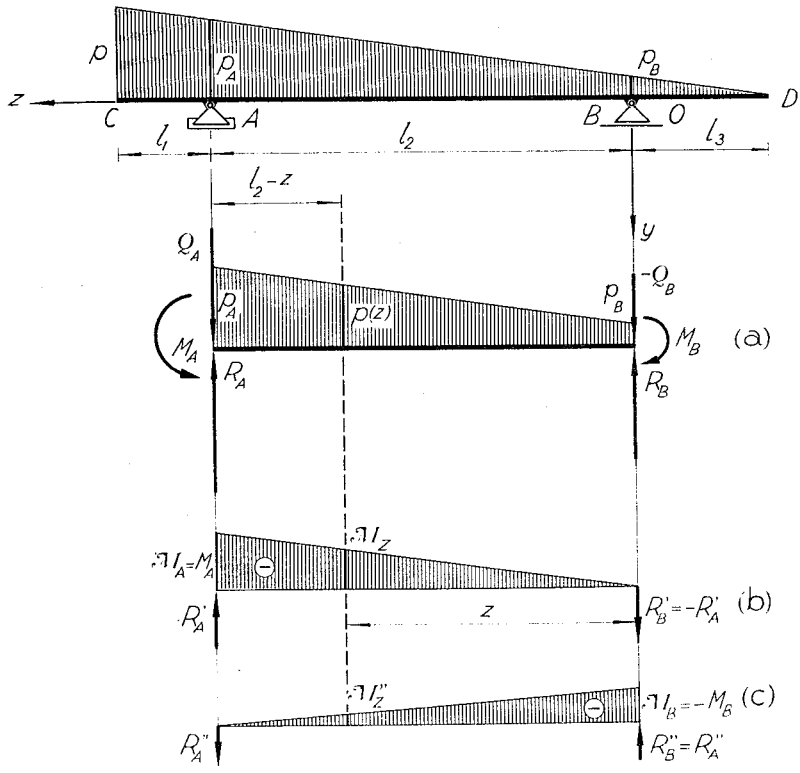


Fig. 8.17.

En consecuencia, por definición de momento flexor, la expresión del mismo debido a la carga distribuida en la sección de abscisa z, será:

$$\mathcal{M}^0_z = \frac{l_2}{6}(2p_A + p_B)(l_2 - z) -$$

$$- \frac{(l_2 - z)^2}{6}\left[2p_A + p_B + (p_A - p_B)\frac{z}{l_2}\right]. \qquad [8.67]$$

Consideremos ahora actuando únicamente el par M_A. Las reacciones de vínculo correspondientes deben evidentemente constituir, a su vez, otro par opuesto al anterior. La intensidad de las fuerzas que constituyen el par de reacción será:

$$|R'_A| = |R'_B| = \frac{|M_A|}{l_2} \qquad [8.68]$$

y sus sentidos, opuestos, tales que el signo del par resulte, en este caso, *positivo,* por ser negativo el par activo.

Para la sección genérica de abscisa z, por comodidad, calcularemos la expresión del momento flexor, considerando las fuerzas de la derecha. En consecuencia:

$$\mathcal{M}'_z = -|R'_B| . z = -\frac{|M_A|}{l_2} . z \ , \qquad [8.69]$$

y reemplazando en la anterior el valor de $\mathcal{M}_A$ dado por la [8.62], obtenemos finalmente:

$$\mathcal{M}'_z = -\frac{l_1^2}{6 l_2} (2p + p_A) z . \qquad [8.70]$$

Operando en forma análoga con el par aplicado en B tenemos:

$$|R''_A| = |R''_B| = \frac{|M_B|}{l_2} \qquad [8.71]$$

con los sentidos indicados en la figura 8.17 c.

En este caso, para establecer la expresión del momento flexor, conviene utilizar las fuerzas de la izquierda de la sección genérica, teniéndose:

$$\mathcal{M}''_z = -|R''_A| . (l_2 - z) = -\frac{|M_B|}{l_2} (l_2 - z) , \qquad [8.72]$$

y reemplazando el valor de M_B dado por la [8.64]:

$$\mathcal{M}''_z = -\frac{p_B l_3^2}{6 l_2} (l_2 - z) . \qquad [8.73]$$

Finalmente, la expresión del momento flexor en la sección genérica, ubicada en una abscisa z medida desde el apoyo B, resulta de sumar las expresiones [8.67], [8.70] y [8.73], obteniéndose, como era dable esperar, la expresión analítica de una parábola cúbica.

8.1.7. La viga empotrada.

Consideremos (figura 8.18) una viga de alma llena vinculada a tierra mediante un vínculo de tercera especie en su extremo derecho, es

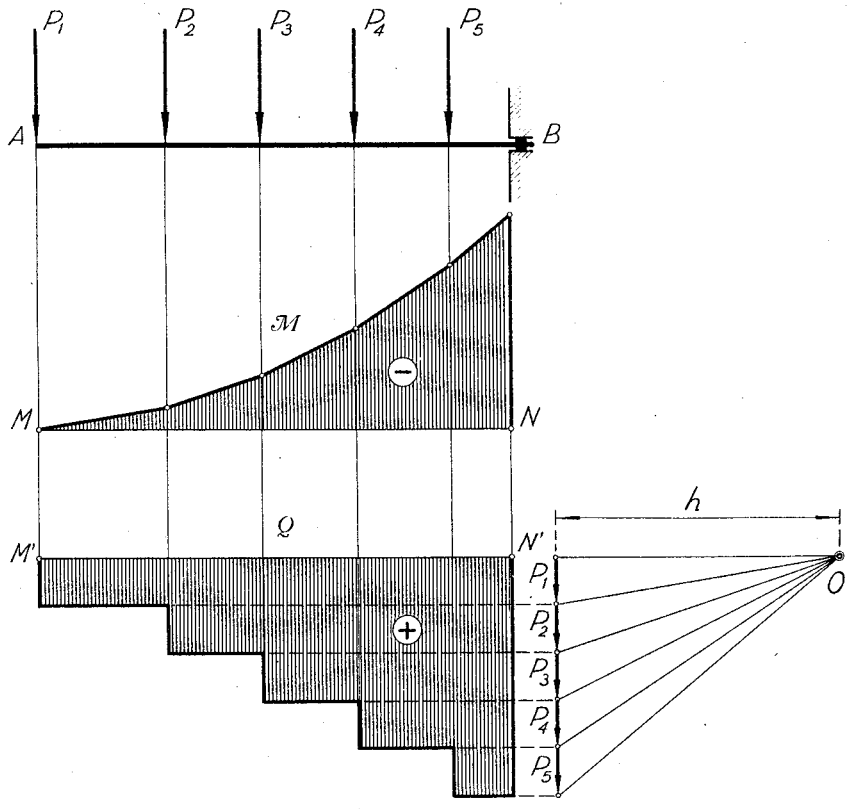


Fig. 8.18.

decir, empotrada en su sección extrema B, y sujeta a la acción de un sistema de fuerzas concentradas P_1, P_2, ..., P_5.

Para determinar gráficamente el diagrama de momentos flexores basta simplemente trazar un polígono funicular del sistema de fuerzas y referirlo al primer lado. Las ordenadas comprendidas entre éste y el polígono funicular, leídas en la escala correspondiente, nos dan los valores de los momentos de las fuerzas ubicadas a la izquierda de la sección considerada con respecto al baricentro de la misma, momentos que corresponden en intensidad y signo a los momentos flexores respectivos.

Si se desea que el diagrama de momentos flexores resulte referido a un eje horizontal, bastará para ello, como se ha efectuado en la figura 8.18, elegir el polo sobre la horizontal trazada por el origen del vector representativo de la primera fuerza, porque de este modo el primer rayo polar resulta horizontal y, en consecuencia, también lo será el primer lado del funicular.

En cuanto al trazado del diagrama de esfuerzos de corte, no ofrece mayor dificultad, bastando para ello sumar, a partir de un eje de referencia, horizontal por conveniencia, los vectores representativos de las intensidades de las sucesivas fuerzas en el orden en que aparecen al recorrer la viga de izquierda a derecha, y en coincidencia con la sección en que se encuentran aplicadas.

Empleando el método gráfico-numérico, el trazado de los diagramas de características se efectúa del modo siguiente (figura 8.19):

Respondiendo el diagrama de cargas a una ley lineal con ordenada nula en el extremo izquierdo A, las relaciones analíticas que vinculan con las funciones que definen a los diagramas p, $\mathcal{M}$ y Q nos permiten llegar a las siguientes conclusiones:

1º La función que rige la variación de los momentos flexores será una parábola cúbica, de ordenada nula en A y máxima en B, siendo el valor del momento flexor en esta última sección igual a $-(pl^2/6)$.

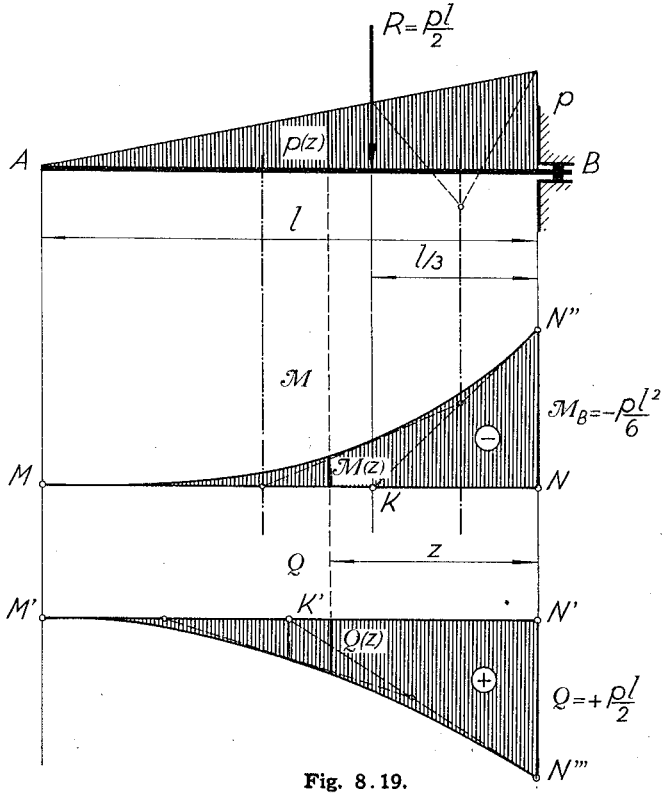


Fig. 8.19.

Por otra parte, siendo el esfuerzo de corte nulo en A —por no existir fuerzas a su izquierda— la tangente extrema izquierda al diagrama de momentos flexores coincidirá con el eje de referencia, siendo horizontal cuando así se lo elige a este último.

2º El diagrama de esfuerzos de corte quedará definido por una función de 2º grado (parábola cuadrática), de ordenada nula en A —por no existir fuerzas a su izquierda— y máxima en B, siendo el valor del esfuerzo de corte en esta última sección igual al de la resultante de la carga distribuida, es decir, $\frac{1}{2}\, pl$ en este caso. Por otra parte, por ser nula la ordenada del diagrama de cargas en la sección extrema izquierda A, la tangente al diagrama de esfuerzos de corte en correspondencia con dicha sección coincidirá con el eje de referencia, siendo horizontal en caso que este último también lo sea.

De acuerdo con lo anterior, elegido un eje de referencia horizontal MN para el diagrama de momentos flexores, llevamos sobre la vertical de B un segmento NN'' hacia arriba —por ser negativo el momento flexor—, que en la escala adoptada represente el valor $pl^2/6$. Ubicada la resultante R de la carga distribuida, unimos el punto K en que su recta de acción corta el eje de referencia con el punto N'', obteniendo la tangente en B al diagrama de momentos flexores (la tangente en A, por lo dicho, coincide con MN). Obtenidas las tangentes extremas, se completa el trazado por el procedimiento conocido.

En cuanto al diagrama de esfuerzos de corte, adoptado un eje de referencia horizontal $M'N'$, llevamos sobre la vertical de B y hacia abajo —por ser los esfuerzos de corte todos positivos en este caso— un segmento $N'N'''$ que, en la escala elegida, corresponda al valor $\frac{1}{2}\, pl$. La curva que define el diagrama de esfuerzos de corte pasará por M' y N'''. La tangente en el primero de los puntos mencionados coincide con el eje $M'N'$ y la correspondiente a N''' se cortará con la anterior sobre la vertical del centro de la luz, por tratarse de una parábola de 2º grado (punto K'). La parábola se completa en la forma conocida.

Determinaremos a continuación las expresiones analíticas de las funciones que definen las variaciones del momento flexor y esfuerzo de corte a lo largo de la viga.

Consideremos para ello una sección genérica ubicada a una abscisa z, medida desde el empotramiento B. La ordenada del diagrama de cargas correspondiente a dicha sección será:

$$p_z = p\,\frac{(l - z)}{l}\,. \qquad [8.74]$$

Por definición de momento flexor, para la sección z tendremos:

$$\mathcal{M}_z = -\frac{p_z(l-z)^2}{6} \qquad [8.75]$$

y reemplazando el valor dado por la [8.74]

$$\mathcal{M}_z = -\frac{p(l-z)^3}{6.l} \qquad [8.76]$$

expresión que alcanza su valor máximo para $z = 0$, teniéndose

$$\mathcal{M}_{máx} = -\frac{pl^2}{6}. \qquad [8.77]$$

En cuanto al esfuerzo de corte, tenemos

$$Q_z = \tfrac{1}{2}\, p_z(l-z) = \tfrac{1}{2}\, p\,\frac{(l-z)^2}{l} \qquad [8.78]$$

cuyo valor máximo ocurre también para $z = 0$:

$$Q_{máx} = \tfrac{1}{2}\, pl \qquad [8.79]$$

8.1.8. La viga Gerber o en Cantilever, rectilíneas.

Supongamos una pieza de eje rectilíneo, vinculada a tierra mediante un apoyo fijo en A y cuatro apoyos móviles en B, C, D y E, estos últimos verticales, figura 8.20. Evidentemente, siendo tres el número de grados de libertad del sistema, y seis el número de condiciones de vínculo externo, aquél resulta ser hiperestático de tercer grado por vínculo externo, ya que existen tres condiciones superabundantes.

Mediante la introducción de articulaciones de vínculo interno en número suficiente, tres en el caso considerado, es posible transformar el sistema en otro isostático. Los sistemas así concebidos, se denominan vigas Gerber o vigas en Cantilever. Según la ubicación relativa de las articulaciones, se pueden presentar las tres variantes b, c y d de la figura 8.20, de las que la más común y conveniente, por razones constructivas, es la c.

La determinación de los diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte se efectúa en la forma que explicamos a continuación.

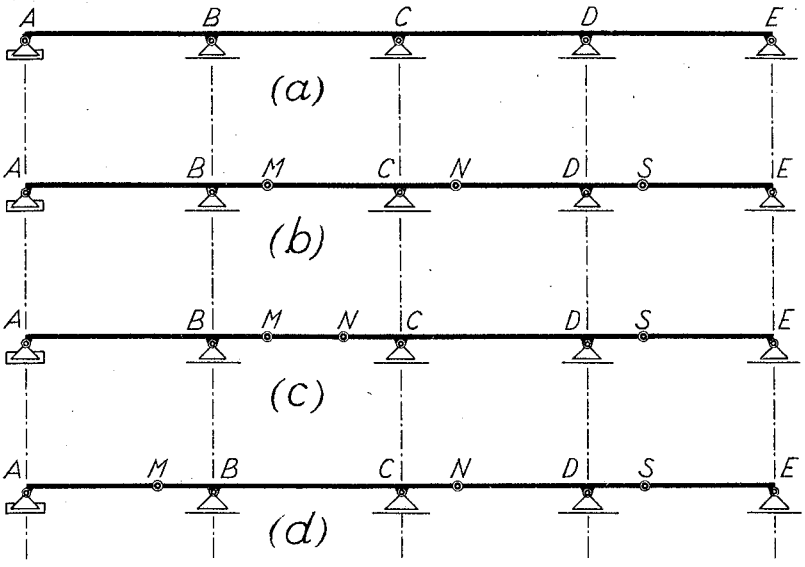


Fig. 8.20.

Sea, figura 8.21, una viga Gerber de tres tramos, sujeta a la acción de un sistema de cargas concentradas, con las articulaciones distribuidas de acuerdo con el esquema de la figura 8.20 *b*.

Con polo O, trazamos un polígono funicular del sistema de fuerzas que actúa en la viga Gerber. El punto N constituye, a los efectos de la sustentación del tramo ND, un apoyo fijo, por cuanto los tramos AM y MN, articulados en M, forman un sistema de dos chapas articuladas con cuatro condiciones de vínculo externo, es decir, un sistema fijo.

De ahí que el tramo ND pueda considerarse como una viga simplemente apoyada, cuyo diagrama de momentos flexores se obtiene refiriendo el polígono funicular de las cargas exteriores que lo solicitan al lado de cierre. Este último queda definido por las intersecciones de los lados extremos del polígono funicular, con las verticales trazadas por los apoyos. En consecuencia, la recta $N'D'$, definida en la forma indicada, constituye el lado de cierre para el tramo ND.

Pasemos a considerar ahora el tramo en voladizo CN. Si eliminamos del sistema el tramo ND, para que las condiciones de equilibrio del resto del sistema no se modifiquen, es necesario aplicar en N, una fuerza vertical opuesta a la reacción de vínculo interno en dicha articulación, que será la acción que transmite la parte ND, cuando se encuentre cargada.

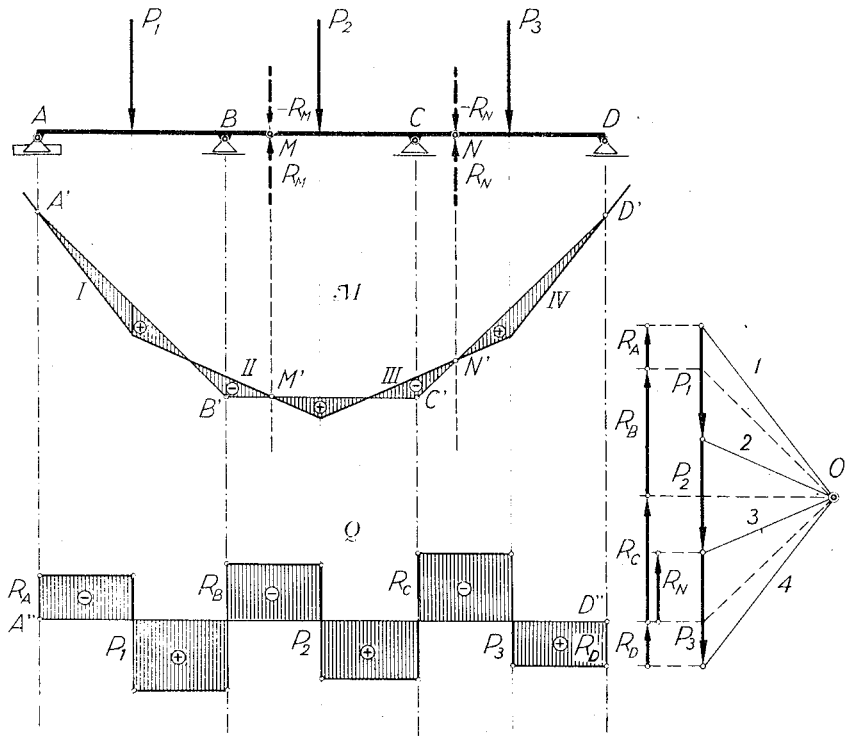


Fig. 8.21.

La intensidad y sentido de dicha reacción R_N, la obtenemos en el polígono de fuerzas, como el vector cuyo origen y extremo quedan definidos por los rayos polares paralelos al lado *III* del funicular y el lado de cierre $N'D'$, que precisamente se cortan sobre la vertical de N, recta de acción de la reacción R_N. Dicho lado *III*, referido a la recta $C'N'$, prolongación de la $N'D'$, constituye el diagrama de momentos flexores para el voladizo CN, por cuanto ambas rectas constituyen el polígono funicular de $-R_N$. Por consideraciones análogas obtenemos el lado de cierre para el tramo BC, uniendo el punto C' con el M', determinado por la intersección del lado *II* del polígono funicular con la vertical trazada por la articulación M, donde necesariamente el momento flexor debe ser nulo. La prolongación de dicho lado hasta encontrar la vertical de B, nos determina el punto B', que unido con A', define el lado de cierre para el tramo AB. En consecuencia, la construcción que acabamos de exponer nos conduce a obtener el diagrama de momentos flexores, referido a un eje quebrado $A'B'C'D'$, siendo positivas las ordenadas que resulten dirigidas hacia abajo de dicho eje

quebrado, y negativas las que lo sean en sentido contrario, es decir, las que queden por encima del eje.

En cuanto al diagrama de esfuerzos de corte, su determinación es inmediata, una vez conocidos los lados de cierre. Bastará para ello trazar por el polo O del polígono de fuerzas, paralelas a los sucesivos lados de cierre quedando definidas las distintas reacciones de vínculo por los vectores comprendidos entre los rayos polares paralelos a los lados que se corten sobre la vertical de la reacción considerada.

Determinadas en esta forma las reacciones de vínculo, bastará trazar un eje de referencia horizontal $A''D''$, y elevar en las distintas secciones, ordenadas que en la escala adoptada representen, en magnitud y sentido, la proyección de la correspondiente resultante izquierda que en el caso considerado, por ser todas las fuerzas actuantes verticales, se obtiene directamente del polígono de fuerzas.

El trazado del diagrama de momentos flexores de la viga Gerber puede realizarse también sobre la base de las consideraciones siguientes:

Supongamos conocidas las reacciones de vínculo de la viga Gerber de la figura 8.21, y pongámolas en evidencia. La estructura se encontrará en equilibrio bajo la acción de las cargas exteriores y las reacciones de vínculo. Trazado un polígono funicular del sistema P_i de fuerzas exteriores, y prolongado el primer lado del mismo, las ordenadas comprendidas entre éste y el polígono funicular nos dan los valores de los *momentos* de la resultante izquierda de la sección considerada, con respecto al baricentro de la misma. Tracemos ahora, con el mismo polo, un polígono funicular de las reacciones de vínculo. Análogamente, las ordenadas comprendidas entre dicho polígono funicular y la prolongación de su primer lado, dan los valores de los *momentos* de las resultantes izquierdas respecto del baricentro de la sección que corresponda. Los dos sistemas de ordenadas resultan en la misma escala, por cuanto la distancia polar es la misma para ambos polígonos funiculares.

Evidentemente, para una sección determinada, el momento flexor será igual al momento de la resultante izquierda del sistema P_i más el momento de la resultante izquierda del sistema R_i (reacciones de vínculo) ambos con respecto al baricentro de la sección. Pero dichos momentos están representados gráficamente por las ordenadas, en correspondencia con la sección, comprendidas entre los polígonos funiculares mencionados y sus lados primeros. En consecuencia, si el polígono funicular de las reacciones de vínculo lo trazamos de modo que su primer lado sea paralelo al primer lado del funicular de las cargas exteriores, y hacemos coincidir ambos lados, las ordenadas comprendidas entre ambos polígonos funiculares resultarán ser la suma algebraica de las ordenadas que nos dan los momentos de las resultantes izquierdas de los sistemas P_i y R_i, es decir, las ordenadas del diagrama de momentos flexores.

En consecuencia, para obtener el diagrama de momentos flexores de una viga Gerber, bastará referir el polígono funicular de las cargas al polígono funicular de las reacciones de vínculo.

Cuando la carga responde a una función continua, el problema se simplifica por cuanto no es necesario el trazado del polígono de fuerzas. En efecto, sea la viga Gerber de la figura 8.22 sujeta a la acción de una carga uniformemente distribuida de intensidad constante p.

La curva funicular correspondiente a dicha carga, será una parábola cuadrática, cuya flecha vale $pl^2/8$, siendo l la suma de las luces de los distintos tramos de la viga Gerber. Construida la parábola por cualquiera de los procedimientos conocidos, debemos ahora trazar el polígono funicular de las reacciones.

De acuerdo con lo expresado antes, el primer lado de este funicular deberá coincidir con el primer lado del funicular de las cargas, es decir, con la primera tangente por tratarse de una curva funicular. Otro tanto ocurre con el último lado, que debe coincidir con la tangente extrema derecha $E'T'$. El penúltimo lado del funicular de las reacciones, se debe cortar con el último sobre la recta de acción de la reacción R_E, o sea, que pasará por el punto E'. Siendo por otra parte S una articulación, en la misma el momento flexor debe ser nulo, por lo que el penúltimo lado del funicular de las reacciones debe cortar la curva funicular sobre la vertical del mismo, para que la ordenada resultante sea también nula. En consecuencia, uniendo E' con S', y prolongando dicha recta hasta cortar en D' la vertical de D, recta de acción de R_D, queda determinado el penúltimo lado del funicular del sistema R_i.

El cuarto lado se debe cortar con el quinto (penúltimo) en D', y además debe cortar en N' la curva funicular, para que la ordenada resultante sea nula, ya que debe serlo el momento flexor en N. En consecuencia, uniendo D' con N', y prolongando la recta hasta cortar en C' la vertical de C, obtenemos el cuarto lado. Procediendo en forma semejante, obtenemos el tercer lado, que en su intersección con la vertical de B nos define el punto B', que unido con A' determina el segundo lado, con lo que queda completado el polígono funicular de las reacciones, por cuanto, como dijéramos antes, su primer lado coincide con la tangente extrema izquierda a la curva funicular. Las ordenadas comprendidas entre esta última y el polígono funicular de las reacciones, nos dan, en la escala correspondiente, los valores de los momentos flexores para las distintas secciones.

Finalmente, es posible también trazar el diagrama de momentos flexores por el procedimiento que ilustra la figura 8.22 *b*. En lugar de construir la curva funicular de toda la carga distribuida, como hiciéramos en

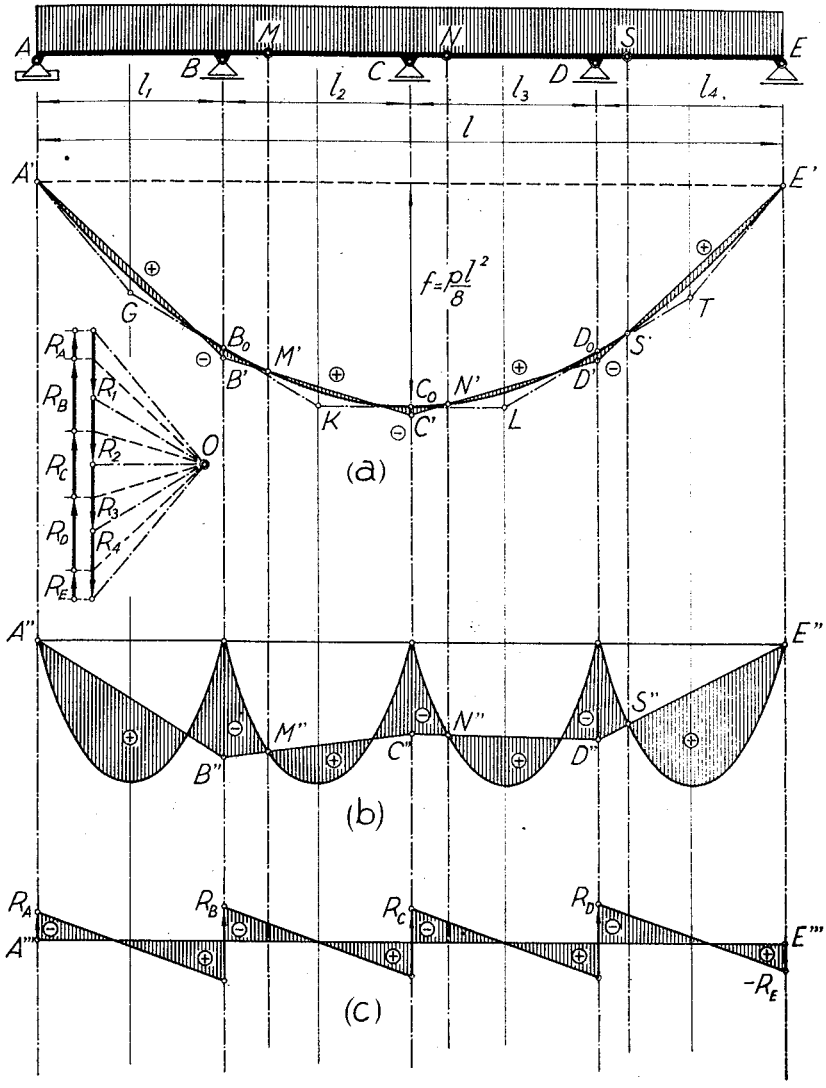


Fig. 8.22.

el procedimiento que acabamos de explicar, adoptamos un eje horizontal $A''E''$ y referimos al mismo la curva funicular correspondiente a *cada tramo*. Las mismas serán parábolas cuadráticas, cuyas respectivas flechas valdrán $pl_i^2/8$, donde l_i es la luz del tramo correspondiente.

Uniendo E'' con S'', intersección de la vertical de S con la curva funicular del tramo DE, y prolongando la recta así obtenida hasta D'',

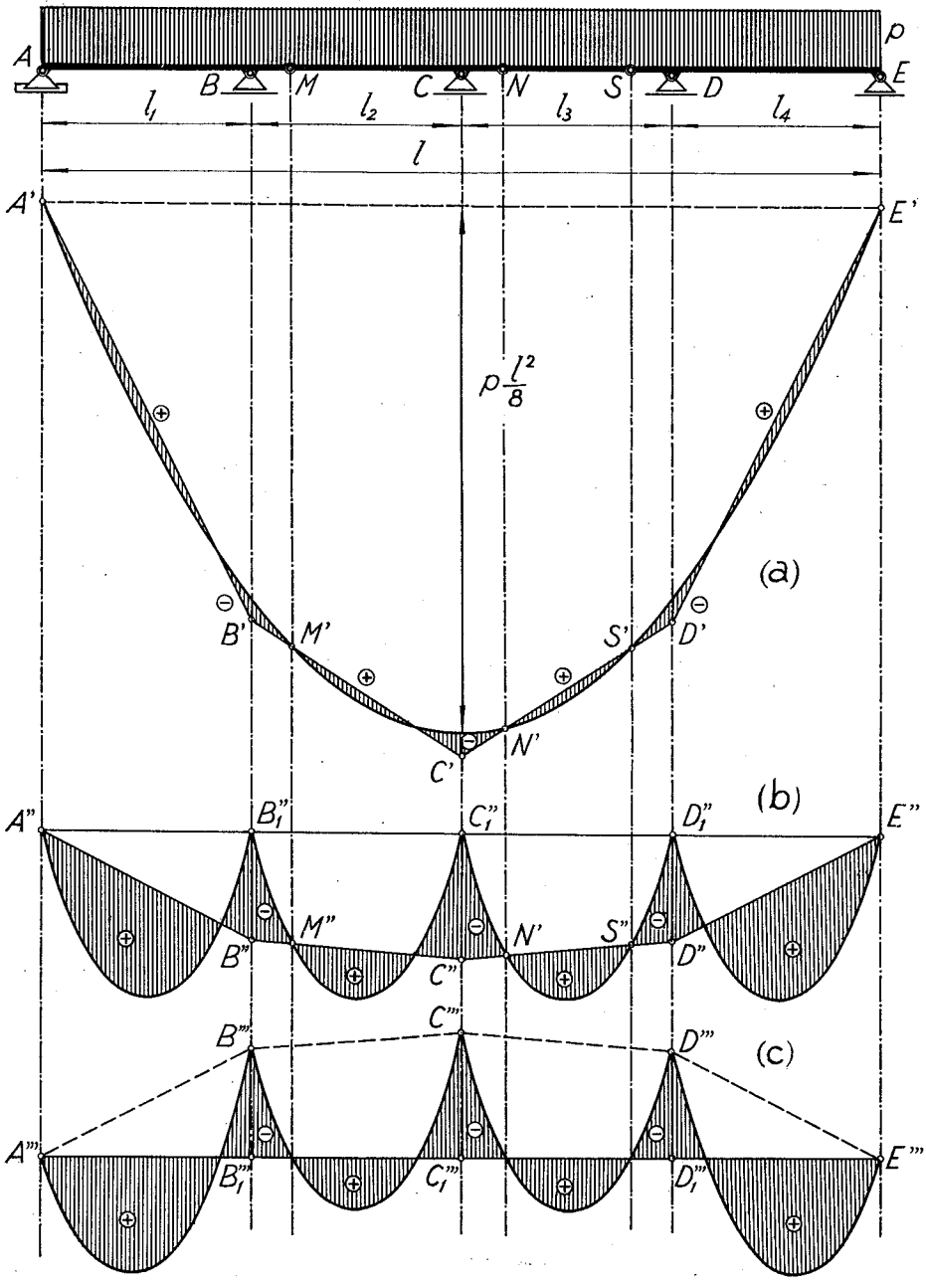

A
B
M
C
N
S
D
E
p
l_1
l_2
l_3
l_4
l
A'
E'
$p\frac{l^2}{8}$
B'
M'
S'
D'
C'
N'
(a)
A"
B_1"
C_1"
D_1"
E"
B"
M"
C"
N'
S"
D"
(b)
B"'
C"'
D"'
A"'
B_1"'
C_1"'
D_1"'
E"'
(c)

Fig. 8.23.

sobre la vertical de D, obtenemos el lado de cierre para el tramo DE. Análogamente, uniendo D'' con N'' y prolongando hasta C'', obtenemos el correspondiente al tramo CD, y en forma similar el del BD. Finalmente, uniendo B'' con A'' queda determinado el lado de cierre del primer tramo.

En cuanto al trazado del diagrama de esfuerzos de corte, una vez determinados los lados de cierre de los distintos tramos (procedimiento de la figura 8.22 *a*) bastará trazar por el polo del polígono de fuerzas, paralelas a los mismos, y proceder en la forma explicada para el caso de la figura 8.21.

En la figura 8.23 se ha desarrollado un ejemplo de viga Gerber para la cual, en un tramo, existen dos articulaciones (N y S). Supuesta la existencia de una carga uniformemente distribuida de intensidad p, hemos trazado el diagrama de momentos flexores según los dos procedimientos que acabamos de explicar (figura 8.23 *a* y *b*). En este caso, el primer lado de cierre que se determina es el correspondiente al tramo CD, donde se hallan ubicadas las dos articulaciones. Siendo necesariamente nulos los momentos flexores en coincidencia con dichas secciones, el lado de cierre quedará definido uniendo los puntos N' y S', en que las verticales trazadas por las articulaciones cortan la curva funicular. La recta, así determinada, prolongada, determina sobre las verticales de los apoyos C y D los puntos C' y D', que unidos con los puntos M' y B', definen los lados de cierre de los tramos inmediatos. El trazado del diagrama se completa para el primer tramo en la forma antes indicada.

Si se deseara rectificar el diagrama de momentos flexores, es decir, referirlo a un único eje horizontal $A'''E'''$ por ejemplo, bastará para ello llevar, a partir de dicho eje, sobre las verticales de los apoyos internos, ordenadas $B_1'''B'''$, $C_1'''C'''$ etc., respectivamente iguales en magnitud y signo a las $B_1''B''$, $C_1''C''$ etc. del diagrama de la figura 8.23 *b*, y colgar de los extremos de dichas ordenadas las parábolas representativas de las curvas funiculares de cada uno de los tramos.

8.1.9. La viga simple sujeta a la acción de pares.

Sea la viga simplemente apoyada de la figura 8.24, de luz l, solicitada por un par de momento M, aplicado en una sección s-s ubicada a una distancia d del apoyo derecho. Se pide trazar los diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte.

Para ello, es necesario determinar previamente las reacciones de vínculo. Éstas, necesariamente, deben constituir un par, opuesto al par

exterior. La intensidad de cada una de las reacciones valdrá

$$|R_A| = |R_B| = \frac{|M|}{l} \qquad [8.80]$$

estando R_A dirigida hacia abajo y R_B hacia arriba.

Consideremos ahora una sección genérica ubicada a una distancia z del apoyo derecho, comprendida entre las secciones extrema izquierda y de aplicación del par. Para dicha sección, la expresión del momento flexor será

$$\mathcal{M}_z = -R_A.(l-z) = -\frac{M(l-z)}{l}. \qquad [8.81]$$

La representación gráfica de esta función es una recta, de ordenada nula para $z = l$ y máxima, de valor $-M$, para $z = 0$. Esta recta queda limitada al tramo de viga A-s.

Para una sección de abscisa z', ubicada a la derecha de la sección s-s, la expresión del momento flexores

$$\mathcal{M}'_z = -R_A(l-z') + M. \qquad [8.82]$$

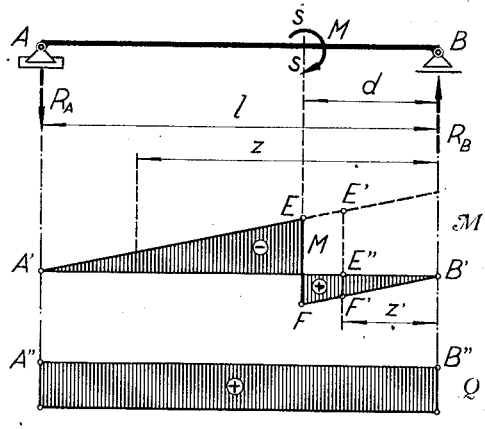


Fig. 8.24.

El primer término del miembro derecho de la expresión anterior, es idéntico al de la [8.81]. Siendo $M = C^{te.}$, el diagrama de momentos flexores entre s y B será, en consecuencia, también una recta, obtenida por un desplazamiento paralelo $EF = E'F' = M$ de la recta que define el diagrama de momentos flexores a la izquierda de s-s. El diagrama de esfuerzos de corte será una recta paralela al eje de referencia $A'B'$, por cuanto, cualquiera sea la sección considerada, la resultante izquierda será siempre la misma, es decir, R_A.

Supongamos ahora el caso de la figura 8.25, en que la viga simplemente apoyada se encuentra sujeta a la acción de dos pares $-\mathcal{M}_1$ y $+\mathcal{M}_2$, de signos contrarios y tales que $|M_2| > |M_1|$, actuando M_1 a una distancia d_1 del apoyo derecho, y M_2 a d_2 del mismo apoyo.

Las reacciones de vínculo, que deben constituir un par, valen

$$|R_A| = |R_B| = \frac{-|M_1| + |M_2|}{l}. \qquad [8.83]$$

Por ser $M_1 < 0$ y $M_2 > 0$ y mayor que el anterior, el par resultante será positivo, y en consecuencia R_A estará dirigida hacia abajo y R_B hacia arriba, pues deben constituir un par negativo.

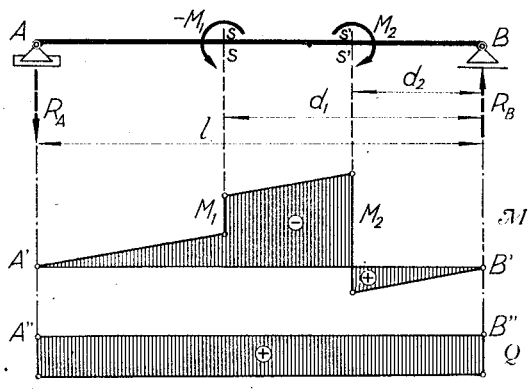


Fig. 8.25.

Para las secciones comprendidas entre A y s, el momento flexor será igual al producto de la intensidad de R_A por la diferencia de abscisas entre A y la sección considerada. Su variación lineal y el diagrama estará representado por una recta de ordenada nula en A. Siendo negativo el momento de R_A respecto de cualquiera de las secciones, las ordenadas del diagrama entre A y s también lo serán. Al pasar ahora a una sección ubicada a la derecha de s-s, el momento de la resultante izquierda se incrementa del valor del par M_1. Siendo éste también negativo, el diagrama de momentos flexores experimentará un desplazamiento paralelo del mismo signo, válido hasta la acción s'-s', en que actúa el segundo par. Como M_2 es de signo contrario al de M_1, al pasar a la derecha de s'-s', el desplazamiento del diagrama será de signo contrario al de las ordenadas, e igual en escala a la intensidad de M_2.

El diagrama de esfuerzos de corte será constante, por cuanto para cualquier sección la resultante de las fuerzas de la izquierda, se reduce a R_A, y estará representado por una recta paralela al eje de referencia $A''B''$.

8.1.10. Transmisión indirecta de cargas.

En cierto tipo de estructuras, las cargas no actúan directamente sobre la parte de las mismas en que se desea conocer el diagrama de momentos flexores. Tal el caso de la figura 8.26, donde la carga distribuida p, aplicada en la estructura de barras articuladas $AMNB$, es transmitida a la estructura portante, constituida la viga simplemente apoyada A_1B_1, por intermedio de las bielas MM' y NN'. Como es fácil observar, el conjunto constituye una estructura isostáticamente sustentada. En efecto, siendo A y M' puntos fijos, también lo será M. Análogamente, N también resulta ser fijo y, en consecuencia, la barra NB sólo requiere un vínculo adicional de primera especie para encontrarse fija.

La viga $A_1 B_1$, está solicitada por dos fuerzas concentradas aplicadas en los puntos M' y N', constituidas por las acciones transmitidas por la estructura $AMNB$.

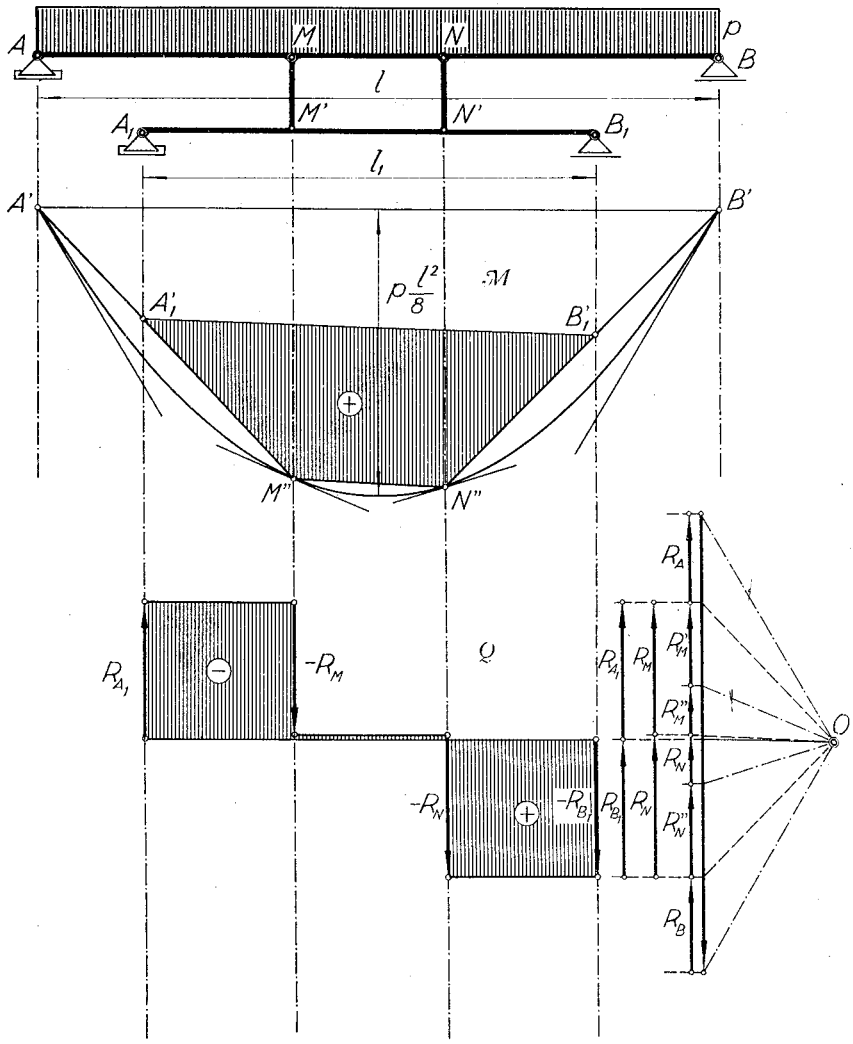


Fig. 8.26.

Una forma de resolver el problema del trazado del diagrama de momentos flexores para el tramo $A_1 B_1$, sería determinar las reacciones en M y N, debidas a la carga p, considerando los tramos AM, MN y NB como vigas simplemente apoyadas. Cambiando de signo a dichas

reacciones, obtenemos las acciones correspondientes sobre A_1B_1, y luego, el trazado del polígono funicular de las mismas, referido a la línea de cierre correspondiente, resuelve el problema.

No obstante, el problema se simplifica, mediante la construcción gráfica que pasamos a describir, y que involucra los sucesivos pasos que hemos mencionado.

Tracemos primeramente la curva funicular de la carga p, referida a la recta $A'B'$. Su flecha valdrá, como sabemos, $pl^2/8$. Determinemos ahora los puntos M'' y N'' en que las verticales de M y N cortan la curva funicular. Trazando las rectas $A'M''$, $M''N''$ y $N''B'$, la poligonal $A'M''N''B'$ será el polígono funicular de las cargas concentradas que inciden sobre la viga A_1B_1.

En efecto, el arco de parábola $A'M''$ es la curva funicular de la carga parcial AM, y la recta $A'M''$ puede considerarse como el correspondiente lado de cierre. Trazado un polígono de fuerzas de la resultante pl y elegido un polo O simétrico, las paralelas a las tangentes en A' y M'' a la curva funicular trazadas por O, definen la intensidad de la resultante de la carga parcial aplicada sobre el tramo AM. Conocida ésta, la paralela por O a $A'M''$ determina en el polígono de fuerzas las reacciones en A y M correspondientes. En forma análoga, las paralelas trazadas por O a las tangentes en M'' y N'', definen la resultante de la carga actuante sobre MN y la paralela al lado de cierre $M''N''$ determina las reacciones correspondientes en M y N. Procediendo en forma semejante obtenemos las reacciones en N y B relativas al tramo NB.

Ahora bien, la acción transmitida a la viga inferior por la biela MM' será opuesta a la suma de las reacciones concurrentes en M, es decir, $R_M = R'_M + R''_M$; y los rayos polares que pasan por el origen y extremo de su vector representativo, son respectivamente paralelos, por construcción, a los lados de cierre $A'M''$ y $M''N''$, los que, en consecuencia serán los lados consecutivos del funicular de dicha fuerza. Otro tanto ocurre con la acción transmitida por la biela NN'. En consecuencia, el polígono de los lados de cierre es el polígono funicular de las acciones transmitidas a través de las bielas, a la viga inferior. Trazando ahora el lado de cierre definitivo $A'_1B'_1$ uniendo los puntos en que las verticales de los apoyos de la estructura inferior cortan los lados extremos del funicular, obtenemos el diagrama de momentos flexores buscado.

La construcción que hemos descrito, permite obtener simultáneamente los diagramas de momentos flexores correspondientes a las barras AM, MN y NB. Están constituidos por los arcos de parábola $A'M''$, $M''N''$ y $N''B'$, referidos respectivamente a las rectas $A'M''$, $M''N''$ y $N''B'$, como es fácil demostrar.

En cuanto al trazado del diagrama de esfuerzos de corte, una vez determinadas las reacciones de vínculo R_{A_1} y R_{B_1}, es inmediato, por lo que no entraremos en mayores detalles al respecto.

8.1.11. Trazado de diagramas de características para cargas mixtas, concentradas y distribuidas.

Suelen presentarse casos en que la solicitación externa de una viga esté constituida por cargas concentradas y distribuidas. El trazado de los diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte, no difiere de lo que hemos visto.

Basta para ello reemplazar las cargas distribuidas por sus correspondientes resultantes, y trazar el polígono funicular del sistema de cargas. Este polígono funicular debe ser corregido en correspondencia con las cargas distribuidas, trazando las curvas funiculares inscriptas en el polígono, que generalmente serán parábolas de segundo o tercer grado. Refiriendo luego el polígono funicular al lado de cierre, se tiene el diagrama de momentos flexores buscado.

Otro tanto ocurre con el diagrama de esfuerzos cortantes, que debe también corregirse para las zonas correspondientes a las cargas distribuidas.

Puede ocurrir que una carga concentrada incida superpuesta con una carga distribuida. En este caso, se elige la recta de acción de dicha fuerza concentrada como línea divisoria de la carga distribuida, operando con dos resultantes parciales.

La curva funicular presentará un punto singular en correspondencia con la recta de acción de la carga concentrada. Las dos tangentes extremas que se cortan sobre dicha recta de acción son, a la vez, los lados del funicular de la carga concentrada.

8.1.12. Pórticos. Definiciones.

Denominaremos *pórtico* en lo que sigue a toda estructura constituida por una sucesión de barras, de eje rectilíneo o curvilíneo, vinculadas entre sí y a tierra, de modo de constituir una estructura isostáticamente sustentada. Cuando los ejes de las barras son curvos, suele denominárselos *arcos*. La figura 8.27 muestra ejemplos distintos de pórticos, constituidos los (*a*) y (*b*) por una única chapa, los (c), (*d*) y (e) por dos chapas, y el (*f*) por tres.

Distinguiremos entre pórticos *simples* y *múltiples*, correspondiendo la primera denominación a aquellos pórticos de una sola luz o tramo, la segunda a los de dos o más (figura 8.27 *f*).

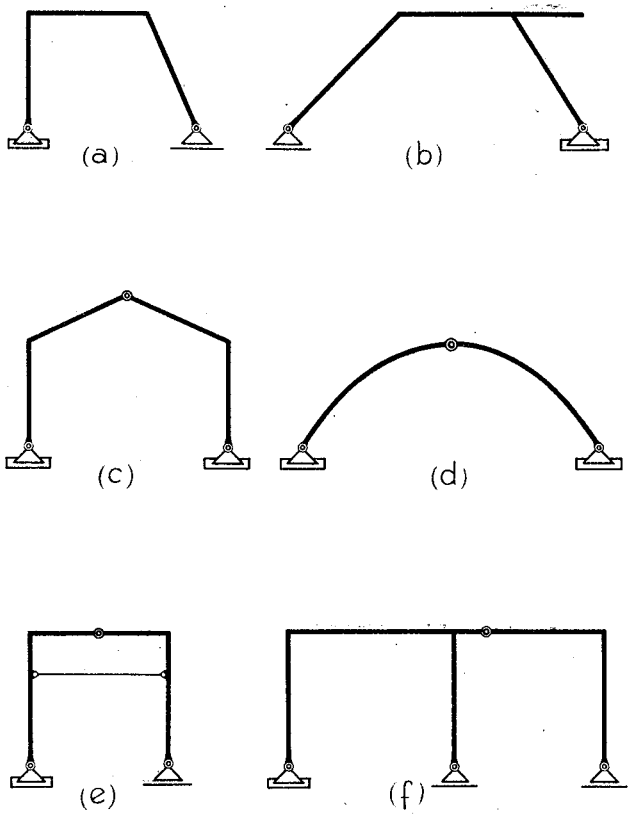


Fig. 8.27.

Los elementos verticales o inclinados de los pórticos se denominan *pilares*, y los horizontales, *viga* o *dintel* del pórtico.

La figura 8.27 e muestra un tipo de pórtico denominado *atirantado*. Está constituido por dos chapas articuladas entre sí y vinculadas por una biela (o tirante), articulada a cada una de las chapas. El conjunto es rígido e indeformable, poseyendo tres grados de libertad, por lo que requiere tres condiciones de vínculo a tierra para su fijación.

Las cargas que solicitan a los pórticos pueden ser concentradas o distribuidas, o una combinación de ambas. En cuanto a su dirección, pueden ser verticales, horizontales o normales a la dirección de las piezas inclinadas. Para estas últimas, las cargas distribuidas pueden estar dadas por metro lineal de proyección (vertical u horizontal), por metro lineal de desarrollo de la pieza o bien normales a la misma. La figura 8.28 aclara los tres casos mencionados.

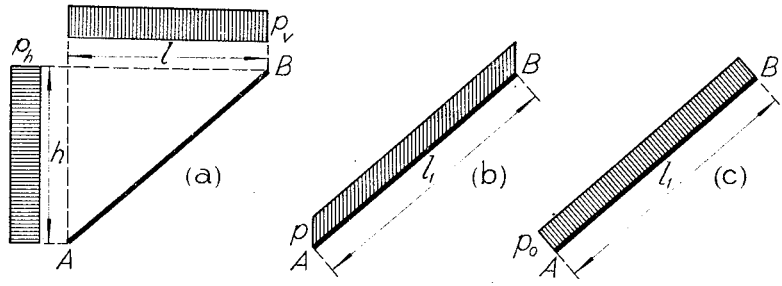


Fig. 8.28.

Al analizar más adelante, en detalle, el trazado de los diagramas de características en pórticos, estudiaremos las relaciones que vinculan entre sí las tres formas de expresar las cargas distribuidas en piezas inclinadas.

Antes de proceder al trazado de los diagramas de características, es necesario establecer las convenciones de signo a seguir.

Estas convenciones son las siguientes:

a) *Momentos flexores.*

Para piezas horizontales o inclinadas, el momento flexor estará dado en magnitud y signo, por el momento de la resultante de las fuerzas de la izquierda de la sección considerada, con respecto al baricentro de la misma, o de la derecha con signo contrario.

Para las piezas verticales, se tomará el momento de la resultante de las fuerzas ubicadas por *debajo* de la sección considerada, o el de la resultante de las que quedan por *encima*, con signo contrario.

b) *Esfuerzos de corte.*

Para piezas horizontales o inclinadas, se considerará en magnitud y signo, la componente paralela al plano de la sección considerada, de la resultante de las fuerzas a la izquierda de la misma. En caso de trabajar con las fuerzas de la derecha, se cambiará el signo.

Para piezas verticales, se considerará la proyección sobre el plano de la sección considerada, de la resultante de las fuerzas ubicadas por *debajo* de aquélla, o la correspondiente a las que actúan por *encima* de la sección, pero con signo cambiado.

c) *Esfuerzos normales.*

Tanto para piezas verticales, horizontales o inclinadas, el esfuerzo normal estará dado en magnitud por la proyección normal al plano de la sección, de la resultante de las fuerzas ubicadas a un lado de la misma.

En este caso, es indistinto que se trabaje con las fuerzas de la izquierda o de la derecha, de abajo o de arriba, por cuanto el signo del esfuerzo normal resulta de si la componente axil de la resultante considerada *comprime* o *tracciona* la sección. En el primer caso el esfuerzo normal será *negativo* y en el segundo, *positivo.*

Finalmente, es necesario establecer una convención para la representación de los distintos diagramas. En lo que respecta a los diagramas de momentos flexores, convendremos en llevar las ordenadas *positivas* en el sentido en que actúan las fuerzas aplicadas en el tramo para el que se traza el diagrama, y las *negativas* en sentido contrario.

Para el diagrama de esfuerzos de corte, llevaremos las ordenadas con el mismo sentido que la componente de la resultante izquierda o de abajo, que da origen al esfuerzo de corte. En cuanto al diagrama de esfuerzos normales, es indistinto el sentido en que se dibujen los diagramas. No obstante convendremos en representar hacia la derecha y hacia abajo, las ordenadas positivas.

Por estar los pórticos constituidos por una sucesión de tramos, los diagramas de características se subdividirán en diagramas parciales, correspondiendo uno a cada tramo. Estos diagramas parciales se acostumbra a referirlos a los *ejes* de las distintas barras que constituyen el pórtico.

Existen tres procedimientos para el trazado de diagramas de características en pórticos:

a) Gráfico.

b) Gráfico-numérico.

c) Numérico o analítico.

A continuación, trataremos los tres métodos, desarrollando ejemplos a los efectos de aclarar conceptos.

8.1.13. Método gráfico para el trazado de diagramas de características en pórticos.

a) *Momentos flexores.*

Hemos visto anteriormente, que las ordenadas comprendidas entre el polígono funicular de un sistema de fuerzas paralelas y su primer lado, en la escala correspondiente, nos dan los valores de los momentos de las fuerzas ubicadas a un lado de la sección que se considere. Como por definición, este último concepto corresponde al del momento flexor, en un pórtico determinado bastará trazar, para cada tramo, el polígono funi-

cular de las fuerzas que actúen sobre el mismo. Éste, referido al primer lado comenzando por la izquierda —o por abajo según el caso— nos dará el diagrama de momentos flexores buscado. Dicho primer lado se hace coincidir con el eje del tramo correspondiente, a efectos de que el diagrama de momentos flexores resulte referido al eje de la pieza.

Consideremos el pórtico de la figura 8.29, sujeto a la acción de dos cargas concentradas P_1 y P_2, aplicadas en los pilares, y una carga uniformemente distribuida de intensidad p, actuando sobre el dintel. El pórtico posee un tramo en voladizo DE.

Determinadas las reacciones de vínculo —gráficamente en el ejemplo considerado—, construimos un polígono de fuerzas, comenzando por R_A y llevando una a continuación de la otra, las fuerzas y reacciones, en el orden en que aparecen recorriendo la estructura en sentido cíclico.

Consideremos primeramente el tramo AC. Sobre el mismo actúan la reacción R_A y la fuerza exterior P_1. El momento de R_A respecto del baricentro de una sección cualquiera será, de acuerdo con el teorema de Varignon, igual a la suma de los momentos de sus componentes normal y paralela al eje de la pieza. De estas últimas, la segunda tiene momento nulo respecto del baricentro de cualquier sección, por pasar su recta de acción por el mismo. En consecuencia, interesa sólo el momento de la componente normal al eje de la pieza. Lo mismo ocurre con las fuerzas exteriores aplicadas. En este caso especial, por ser P_1 normal al eje de la pieza, su componente axil es nula.

Trazado en el polígono de fuerzas un eje m-m, normal al eje de la pieza AC, proyectamos el origen y extremo de los vectores representativos de R_A y P_1, obteniendo los vectores 1-0 y 2-1, que corresponden a las componentes normales al eje de AC de las fuerzas que actúan sobre el mismo. El polígono funicular de estas fuerzas, referido a su primer lado, será el diagrama de momentos flexores para el tramo AC. Como dicho primer lado debe coincidir con el eje del tramo, el rayo polar correspondiente, que debe pasar por el origen del vector 1-0 debe ser paralelo a AC. Trazando, en consecuencia, por 0 una paralela a AC obtenemos el primer rayo polar, sobre el que debe encontrarse el polo O_1.

La distancia polar h, la fijamos de modo que el diagrama de momentos flexores resulte en una escala conveniente. Falta sólo ubicar la posición del polo. Para hacerlo, razonamos como sigue:

En una sección infinitamente próxima a la derecha de A, el momento flexor tendrá el signo del momento de R_A respecto del baricentro de la misma, es decir, positivo en este caso. Como hemos convenido en representar las ordenadas positivas en el sentido en que actúan las fuerzas exteriores, corresponde que dicha ordenada esté dirigida hacia *adentro*

del pórtico, y como resulta medida entre el segundo y el primer lados del funicular, se tiene que este segundo lado debe estar dirigido hacia el interior del pórtico, siendo su pendiente con respecto a la horizontal trazada por A, menor que la del primer lado. En consecuencia, el polo O_1 deberá encontrarse ubicado hacia *afuera*, a efectos de que la pendiente del rayo polar O_1-*1* resulte menor que la del O_1-O. Ubicado en esta forma el polo O_1 trazamos el polígono funicular haciendo coincidir su primer lado con el eje del tramo AC. El segundo lado pasará por A, punto en que el primer lado corta la recta de acción de la componente tangencial Q_A de R_A. El segundo lado corta la recta de acción de P_1 en M, punto por donde pasa el tercero y último lado que, prolongado hasta la normal a AC trazada por C, define la ordenada CC', que representa en la escala correspondiente, el momento flexor en la sección extrema derecha de la pieza AC.

Pasemos a analizar ahora el dintel del pórtico. La concurrencia en D de tres piezas: CD, BD y DE, hace necesario considerar independientemente dos partes del dintel, el tramo CD y el voladizo DE.

Si imaginamos reducido el sistema R_A, P_1 —fuerzas aplicadas en AC— al centro de reducción C, nos encontramos que en el nudo C actúan una resultante y un par de reducción. La resultante de reducción lo será de las fuerzas R_A y P_1, y el par tendrá por momento al momento respecto de C de aquéllas dos fuerzas, es decir que su intensidad será la del momento flexor en C, representado en el diagrama por la ordenada CC'.

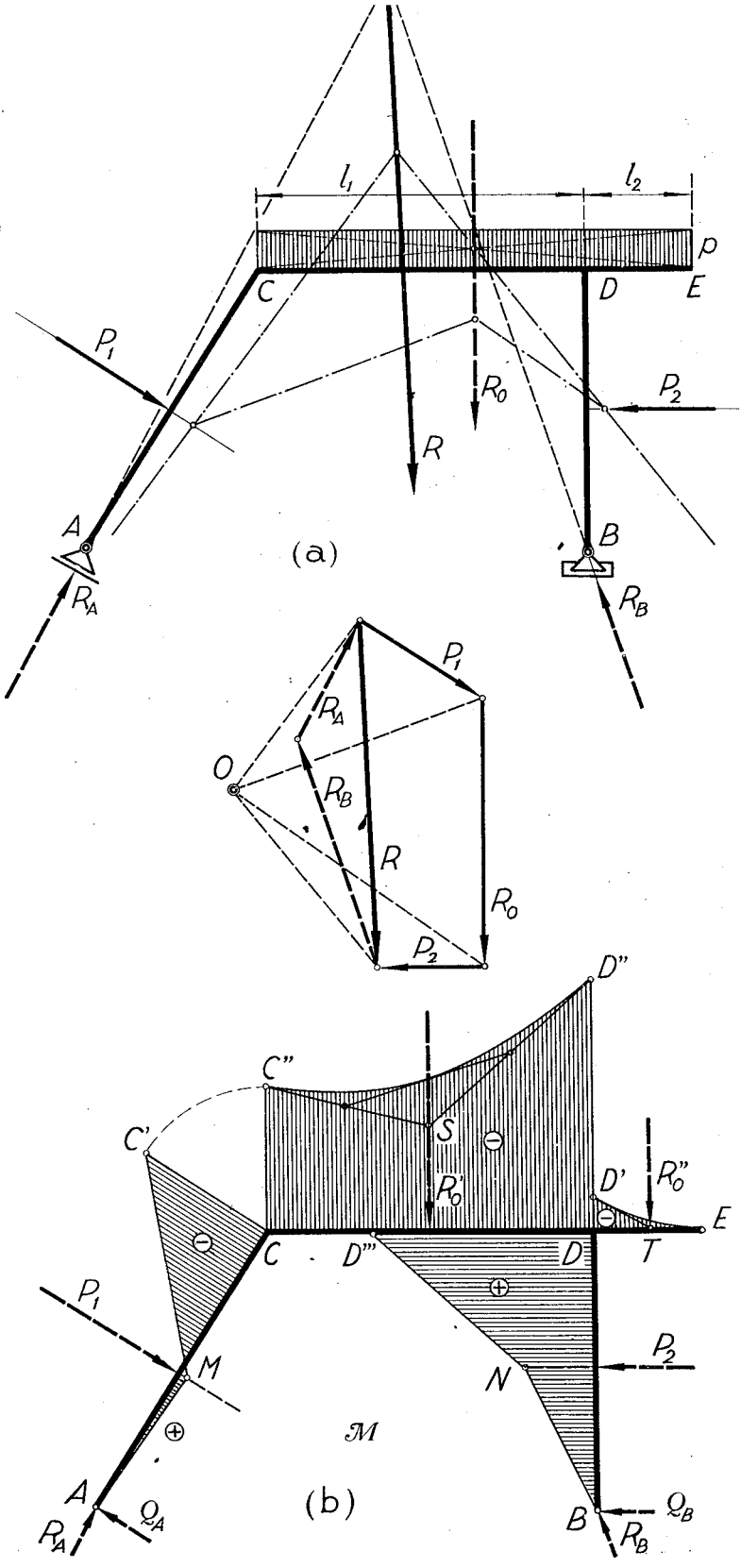
En consecuencia, al analizar el tramo CD, debemos considerar las siguientes acciones exteriores: una fuerza R_C y un par M_C, aplicados en C, y la carga distribuida sobre CD, cuya resultante es $R'_o = pl_1$. El efecto del par será constante a lo largo de la pieza, lo que gráficamente equivale a trasladar el eje de referencia CD paralelamente, asimismo, de la distancia $CC'' = CC'$, que en escala representa el momento flexor en C (igual al momento del par).

Estamos ahora en condiciones de trazar el diagrama de momentos flexores para el tramo CD. Proyectando en el polígono de fuerzas los vectores representativos de R_C y R'_o sobre el eje n-n normal a CD, obtenemos los vectores *1-0* y *2-1*, representativos de las componentes tangenciales de R_C y R'_o, respectivamente.

El primer rayo polar debe ser paralelo a CD. Trazando, en consecuencia, por O una paralela a CD, ubicamos sobre esta recta el polo O_2 a la misma distancia polar h utilizada para el polígono funicular correspondiente al tramo AC, con el objeto de mantener la escala del diagrama de momentos flexores.

Un razonamiento análogo al efectuado para el tramo AC, nos conduce a que el polo debe estar ubicado hacia afuera del polígono de fuer-

Fig. 8.29


l_1
l_2
p
C
D
E
P_1
R_0
P_2
R
A
B
(a)
R_A
R_B
P_1
R_A
O
R_B
R
R_0
P_2
D"
C"
C'
S
R_0'
D'
R_0''
E
C
D'''
D
T
P_1
M
N
P_2
$\mathcal{M}$
A
(b)
B
Q_A
Q_B
R_A
R_B

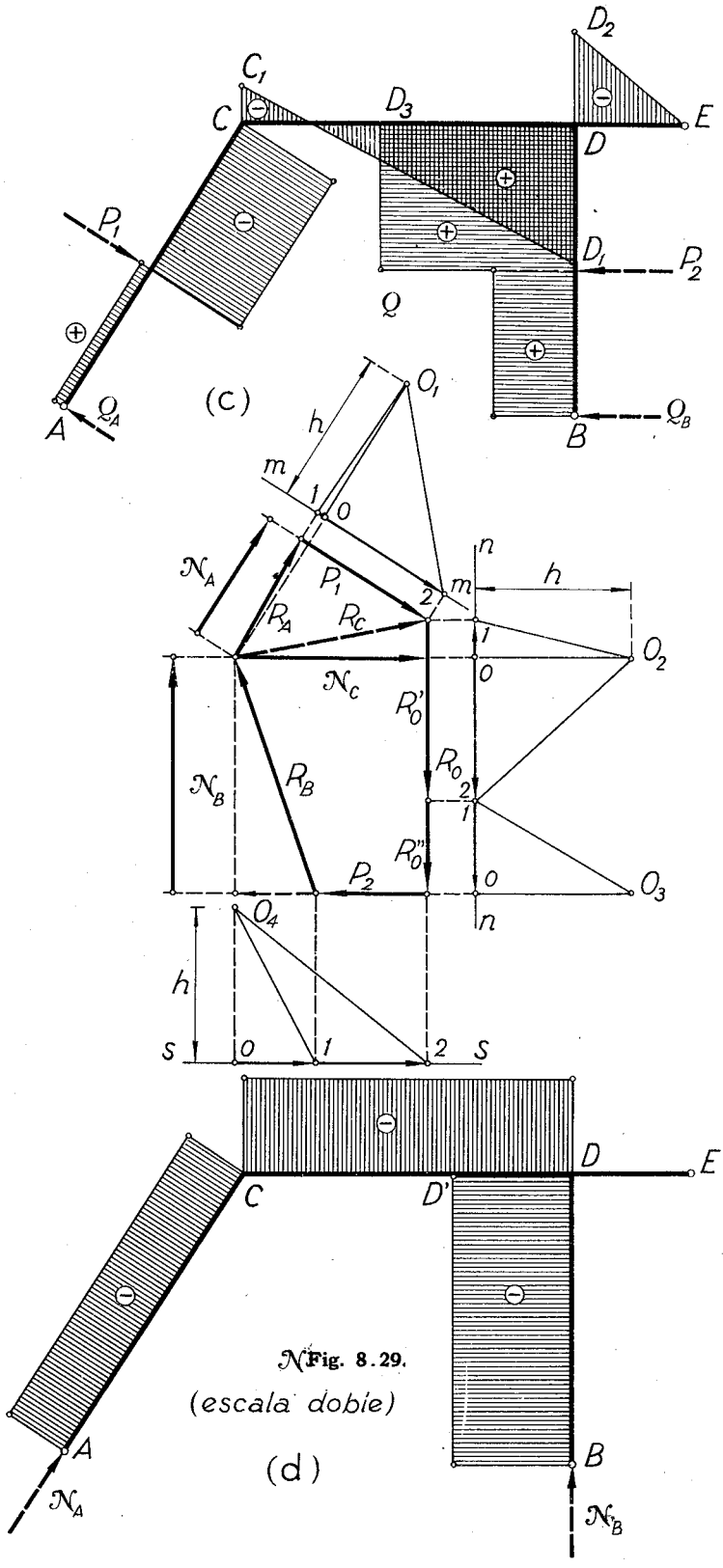


Fig. 8.29.

(escala dobie)

zas. El primer lado del funicular será paralelo a CD y pasará por C'', concurriendo en este punto con el segundo lado, que a su vez cortará la recta de acción de R'_0 en S, punto éste por donde pasará el tercero y último lado. El tercer lado determina sobre la vertical de D, un segmento DD'' que en la escala de momentos representa el momento flexor en la sección extrema derecha de la pieza CD, es decir, infinitamente próxima a la *izquierda* del nudo D.

Por tratarse de una carga distribuida uniformemente, el segundo y tercer lados del funicular así trazado son las tangentes extremas del arco de parábola que constituye la curva funicular correspondiente. Trazada la parábola en la forma conocida, queda completado el diagrama de momentos flexores para el tramo CD.

Cabe hacer notar que, en este caso, dada la configuración del sistema y las magnitudes relativas de las fuerzas exteriores aplicadas, el diagrama de momentos flexores para el tramo CD resulta ubicado en su totalidad por encima del eje de referencia, es decir, que todas sus ordenadas son negativas.

Pasamos ahora a considerar el tramo en voladizo DE. Por razones de sencillez operativa, conviene en este caso trabajar con las fuerzas que actúan a la *derecha* de las secciones consideradas, cambiando el signo a los momentos resultantes, para obtener los momentos flexores.

A la derecha de la sección extrema izquierda del voladizo, es decir, infinitamente próxima a la derecha del nudo D, actúa la carga repartida p, sobre la longitud l_2, siendo su resultante $R''_0 = pl_2$.

Para que el polígono funicular de esta carga, que referido a su primer lado nos dará el diagrama de momentos flexores, resulte orientado de acuerdo con la convención adoptada, en lugar de cambiar de signo a los momentos, cambiamos el sentido a R''_0. En consecuencia, el primer rayo polar pasará por el extremo del vector representativo de R''_0, en lugar de hacerlo por su origen. Luego, trazando por O, extremo de la proyección de R''_0 sobre n-n, una horizontal, ubicamos sobre la misma y hacia afuera, a una distancia h (la misma anterior) el polo O_3. El primer lado del funicular, paralelo a O-O_3, lo trazamos coincidente con el eje del voladizo, hasta cortar en T la recta de acción de R''_0. Por dicho punto pasará el segundo lado del funicular, que determina sobre la vertical de D un segmento DD' que en la escala correspondiente nos da el valor del momento flexor en la sección extrema izquierda de la pieza DE, es decir, infinitamente próxima a la *derecha* del nudo D.

En la sección extrema derecha E, el momento flexor es nulo, por cuanto a la derecha de la misma no existen fuerzas aplicadas.

Los dos lados del polígono funicular que hemos trazado, constituyen las tangentes extremas de la parábola cuadrática que corresponde a la

curva funicular de la carga p, la que trazada en la forma vista completa el diagrama de momentos flexores para el voladizo DE.

Consideremos finalmente el pilar BD. Sobre el mismo actúan la reacción R_B (de la que únicamente nos interesa su componente tangencial Q_B) y la fuerza P_2, las que aparecen en ese orden al recorrer el pilar de abajo hacia arriba. Proyectando ambas fuerzas sobre la normal s-s al eje del pilar, encontramos que el orden en que aparecen en la proyección se encuentra invertido con respecto al indicado antes. Si cambiamos sus sentidos, el orden correspondiente se restablece, pero entonces, para conservar el signo de los momentos flexores y a fin de que su diagrama resulte orientado conforme con la convención adoptada, es necesario invertir simultáneamente la posición del polo, que debe ubicarse hacia *adentro*.

En consecuencia, trazando una paralela al eje del pilar por el extremo de la proyección del vector representativo de R_B —que por el cambio de sentido se convierte en origen O— ubicamos hacia adentro y a la distancia h, el cuarto polo O_4. Completados los rayos polares, trazamos por B, punto en que el primer lado del funicular —coincidente con BD— corta la recta de acción de Q_B, el segundo lado que a su vez corta la recta de acción de P_2 en N, punto éste por donde pasa el tercero y último lado, que determina sobre la horizontal de D el segmento DD'''. Este segmento, leído en la escala de momentos flexores da el valor del correspondiente a la sección extrema superior del pilar, es decir, infinitamente próxima *abajo* del nudo D.

Como control de cierre, el segmento $D'D''$ debe ser igual al DD''', por las razones que expondremos a continuación.

Consideremos, figura 8.30, un nudo al que concurren tres barras de un pórtico, sujeto a un estado determinado de cargas. Imaginemos que cortamos las piezas que concurren al nudo por sus secciones infinitamente próximas a la izquierda, derecha y abajo del mismo. Para mantener el equilibrio es necesario aplicar en cada sección dos pares (M_1 y $-M_1$; M_2 y $-M_2$; M_3 y $-M_3$) opuestos entre sí, actuando uno en cada cara de la sección. Además, es necesario aplicar conjuntos de dos

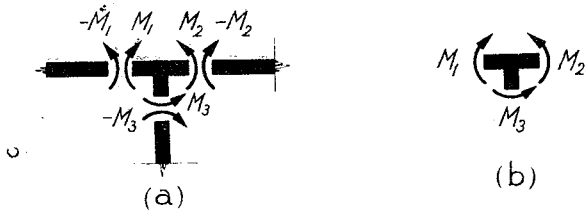


Fig. 8.30.

fuerzas opuestas, tangenciales y normales, pero prescindiremos de ellas pues no interesan a los efectos de nuestra demostración.

Aislado el nudo, nos encontramos que en las tres caras de las secciones actúan pares M_1; M_2 y M_3 que representan, respectivamente, los momentos de las resultantes izquierda, derecha y de abajo con respecto a los baricentros de las mismas. Como el nudo pertenece a un sistema de puntos materiales en equilibrio, considerado aislado, debe continuar en equilibrio. En consecuencia, para que éste se verifique debe tenerse:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0 \qquad [8.84]$$

de donde

$$M_3 = -(M_1 + M_2). \qquad [8.85]$$

Ahora bien, siendo M_1 el momento de las fuerzas de la izquierda de la sección considerada, respecto de su baricentro, corresponderá en magnitud y signo al momento flexor en aquélla, es decir que tendremos

$$\mathcal{M}_1 = M_1 . \qquad [8.86]$$

En cambio, para la sección infinitamente próxima a la derecha del nudo, M_2, que representa el momento de las fuerzas de la derecha con respecto al baricentro de la misma, tendrá igual intensidad pero signo contrario al del momento flexor en la sección, es decir

$$\mathcal{M}_2 = -M_2 . \qquad [8.87]$$

Finalmente, siendo M_3 el momento de las fuerzas ubicadas abajo de la sección infinitamente próxima por debajo del nudo, coincidirá en magnitud y signo con el correspondiente momento flexor, o sea

$$\mathcal{M}_3 = M_3 . \qquad [8.88]$$

Reemplazando estos valores en la [8.85] llegamos a

$$\mathcal{M}_3 = -(\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2) \qquad [8.89]$$

expresión que establece el equilibrio del nudo, y que constituye un control de cierre.

Aplicando la expresión anterior al ejemplo desarrollado en la figura 8.29, tenemos

$$\mathcal{M}_1 < 0 \quad ; \quad \mathcal{M}_2 < 0 \quad ; \qquad [8.90]$$

reemplazando signos en [8.89]

$$\mathcal{M}_3 = -(-\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \qquad [8.91]$$

pero siendo $|\mathcal{M}_1| > |\mathcal{M}_2|$ la suma del paréntesis es < 0, es decir que el momento flexor en la sección extrema superior del pilar BD debe ser positivo, cosa que efectivamente ocurre, como resulta del diagrama.

La expresión [8.89] nos permite trazar el diagrama de momentos flexores para el pilar, partiendo de su extremo superior. En efecto, conocidos los valores de los momentos flexores en las secciones extrema derecha de la pieza CD y extrema izquierda del voladizo, mediante la [8.89] calculamos en magnitud y signo el momento flexor en la sección extrema superior del pilar, que leído en la escala correspondiente, nos permite representar, orientada, la ordenada DD'''. El punto D''' será el de arranque del polígono funicular. En este caso, al proyectar sobre el eje s-s las fuerzas actuantes sobre el pilar, las proyecciones resultan ubicadas en el orden que corresponde, como es fácil observar. No obstante, como estamos considerando ahora fuerzas que actúan por *encima* de las distintas secciones, para que el diagrama resulte orientado es necesario cambiar el signo de los momentos resultantes, o lo que es lo mismo, invertir la posición del polo, el que en lugar de encontrarse ubicado hacia afuera del polígono de fuerzas, debe encontrarse hacia adentro del mismo.

Como es dado observar, la construcción resulta idéntica a la utilizada al efectuar el trazado del polígono funicular comenzando por el extremo inferior del pilar.

Si el pilar derecho del pórtico de la figura 8.29, en lugar de ser vertical fuera inclinado, las consideraciones para el trazado del correspondiente polígono funicular, así como también la expresión [8.89], cambian. En efecto, si la pieza es inclinada, el momento flexor tiene el signo del momento de las fuerzas de la *izquierda*. Supongamos que en el pórtico de la figura 8.29, el pilar derecho fuera ligeramente inclinado hacia la izquierda, es decir, que el punto B estuviera desplazado hacia la derecha.

La configuración general de los diagramas de momentos flexores en los tramos AC, CD y DE no se modificaría sustancialmente, salvo ligeras variaciones en la magnitud de los momentos flexores.

Ahora bien, estando Q_B, componente tangencial de R_B, dirigida hacia la izquierda, figura 8.31, su momento respecto del baricentro de una sección infinitamente próxima a la izquierda de B será positivo, y el momento flexor en dicha sección, negativo. En consecuencia, corresponde que la ordenada que lo represente en el diagrama, esté dirigida hacia la derecha, es decir, en sentido contrario a la fuerza P_2. Proyectando las fuerzas sobre s'-s', normal al eje del pilar, encontramos nuevamente que las proyecciones no se encuentran ubicadas en el orden que

corresponde al recorrer la pieza de izquierda a derecha, pero sí lo estarán si cambiamos el sentido de aquéllas. Este cambio de signo de las proyecciones hace que el diagrama, eligiendo el polo hacia *afuera*, resulte orientado, por cuanto debe recordarse que el polígono funicular referido al lado extremo, nos da en este caso los momentos de las fuerzas ubicadas a la derecha, al que es necesario cambiar de signo para obtener el momento flexor.

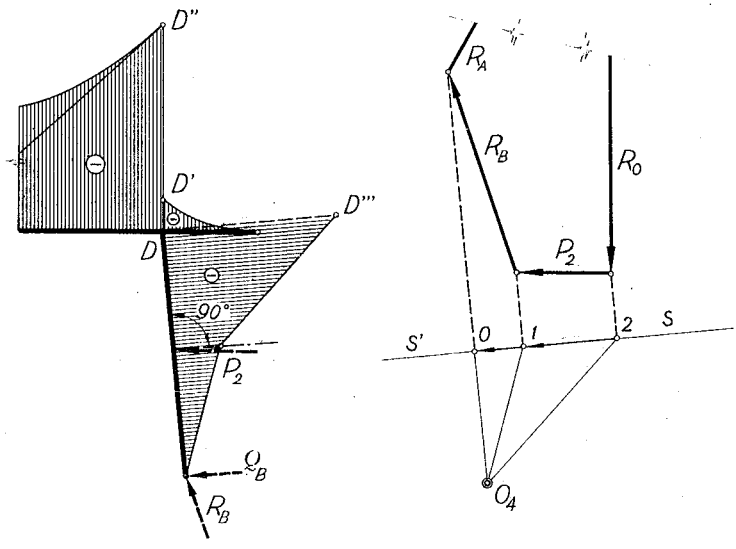


Fig. 8.31.

Resulta de interés destacar que la simple variación de inclinación del pilar, cambia el signo de los momentos flexores en el mismo, hecho que se debe exclusivamente a las convenciones adoptadas.

En lo que se refiere a la expresión [8.89], cuando el pilar derecho es inclinado, se tiene que

$$\mathcal{M}_3 = -\mathcal{M}_3 \qquad [8.92]$$

resultando, en consecuencia,

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2 \qquad [8.93]$$

b) *Esfuerzos de corte.*

En la sección A del pórtico de la figura 8.29, el esfuerzo de corte está dado en intensidad y signo por la proyección Q_A sobre el plano de

la sección, de la reacción de vínculo R_A. Dicha proyección, por tener a su vez proyección positiva sobre el eje director z, será positiva.

Para cualquier sección comprendida entre A y el punto de aplicación de P_1, la resultante izquierda es siempre la misma, es decir, R_A, y en consecuencia el esfuerzo de corte será constante e igual a Q_A. Por lo tanto, en dicha zona, el diagrama de esfuerzos de corte será una recta paralela al eje de referencia. Al pasar a la derecha de la sección en que actúa P_1, se suma ésta en toda su intensidad, por ser normal al eje de AC. El valor del esfuerzo de corte para la sección infinitamente próxima a la derecha, está dado por el vector $2\text{-}0$ en el polígono de fuerzas de polo O_1. No actuando entre dicha sección y C ninguna nueva fuerza, el esfuerzo de corte se mantendrá constante, por lo que su diagrama será otra recta paralela al eje de referencia.

Pasemos a considerar ahora el tramo CD. La resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de su sección extrema izquierda es R_C, que proyectada sobre el eje vertical $n\text{-}n$ nos da el vector $1\text{-}0$, representativo del esfuerzo de corte en dicha sección. Encontrándose cargado el tramo CD con una carga uniformemente distribuida, la variación del esfuerzo de corte a lo largo del mismo será lineal. En consecuencia, para trazar el diagrama correspondiente, bastará conocer la ordenada correspondiente a la sección extrema derecha, representativa del esfuerzo de corte en la sección infinitamente próxima a la izquierda de D. Dicho esfuerzo de corte será igual a la proyección sobre la normal a CD, de la resultante de las fuerzas ubicadas a la izquierda de D, y su vector representativo será el $2\text{-}1$ en el polígono de fuerzas de polo O_2. Conocidas las ordenadas extremas del diagrama, éste queda definido por la recta C_1D_1 de la figura 8.29 c. El signo del diagrama surge de la consideración del signo de los vectores $1\text{-}0$ y $2\text{-}0$. El primero será negativo por estar dirigido hacia arriba (proyección negativa sobre el eje y) y el segundo positivo, por ser de sentido contrario al anterior.

Para el tramo en voladizo, basta conocer el esfuerzo de corte en su sección extrema izquierda, que será igual en intensidad pero de sentido contrario al de la resultante R_0''. Llevando este valor, con el signo correspondiente en la escala de esfuerzos de corte, sobre la vertical de D, y uniendo el extremo del segmento así determinado con E, obtenemos el diagrama buscado, que debe resultar paralelo a la recta C_1D_1, por cuanto la intensidad de la carga p se mantiene constante en ambos tramos. En la sección B, extrema inferior del pilar BD, el esfuerzo de corte es igual a la componente tangencial Q_B de la reacción R_B, y será positivo por serlo la proyección de Q_B sobre el eje director z.

En las secciones sucesivas, hasta llegar a aquella en que actúa P_2, al no existir ninguna nueva fuerza, el esfuerzo de corte se mantiene constante, y su diagrama representativo será una recta paralela al eje de referencia. Al pasar a la sección inmediatamente por encima de la que actúa P_2, el esfuerzo de corte se incrementa en la intensidad de esta última fuerza, siendo su vector representativo el $2\text{-}0$ en el polígono de fuerzas de polo O_4, manteniéndose luego constante hasta la sección extrema superior del pilar.

c) *Esfuerzos normales.*

En la sección A, extrema izquierda del tramo AC, el esfuerzo normal es igual a la componente de R_A según la dirección AC, y su vector representativo es el N_A en el polígono de fuerzas. Dicho esfuerzo normal es *negativo*, por cuanto tiende a comprimir la sección. Por otra parte, la única fuerza actuante entre A y C es P_2, que por ser normal a AC tiene proyección axil nula. En consecuencia, a lo largo de AC el esfuerzo normal será constante, y su diagrama representativo, una recta paralela al eje de referencia. Otro tanto ocurre con el tramo CD. En efecto, para la sección extrema izquierda de este tramo, el esfuerzo normal está dado por la proyección sobre la dirección CD de la resultante R_C de las fuerzas que actúan a la izquierda de C, siendo su vector representativo el N_C en el polígono de fuerzas de polo O_2. Su sentido será negativo por cuanto tiende a comprimir la sección. Por otra parte, la carga distribuida a lo largo de CD es normal a dicho tramo, siendo nula su componente axil. En consecuencia, el esfuerzo normal se mantendrá constante, y su diagrama representativo será una recta paralela al eje de referencia.

En el tramo en voladizo, el esfuerzo normal es nulo para todas las secciones. En efecto, cualquiera sea la sección que consideremos, las fuerzas que actúan a la derecha de la misma son normales al eje del voladizo y en consecuencia serán nulas sus componentes axiles.

Finalmente, en la sección B del pilar BD, el esfuerzo normal será igual a la componente axil de la reacción R_B, cuyo vector representativo es N_B en el polígono de fuerzas. Como dicha componente tiende a comprimir la sección, el signo del esfuerzo normal será negativo. Siendo la fuerza P_2 normal al eje de BD, su componente axil será nula, y el esfuerzo normal, para cualquier sección comprendida entre B y D será constante, y su diagrama representativo una recta paralela al eje de referencia.

8.1.14. Método gráfico-numérico para el trazado de diagramas de características en pórticos.

El procedimiento gráfico-numérico consiste en determinar analíticamente los valores de los esfuerzos característicos en determinadas secciones de los pórticos, y luego de representados, completar el trazado de los diagramas utilizando los procedimientos gráficos que en cada caso corresponda.

Para aclarar conceptos, analizaremos el trazado de los diagramas de momentos flexores, esfuerzos de corte y normales, del pórtico de la figura 8.32. Se trata de una estructura isostática, vinculada mediante una articulación fija en A y un apoyo móvil, vertical, en B, sujeta a la acción de una carga triangular de intensidad máxima p_1 aplicada normalmente al pilar AC y otra uniformemente distribuida por unidad de longitud sobre la proyección horizontal del dintel, y de intensidad constante p_2.

En primer término, es necesario determinar las reacciones de vínculo, para lo que emplearemos el método analítico, utilizando dos ecuaciones de proyección sobre los ejes z é y, y una ecuación de momentos con respecto a A, elegido por comodidad. El planteo de las tres ecuaciones nos conduce a las siguientes expresiones:

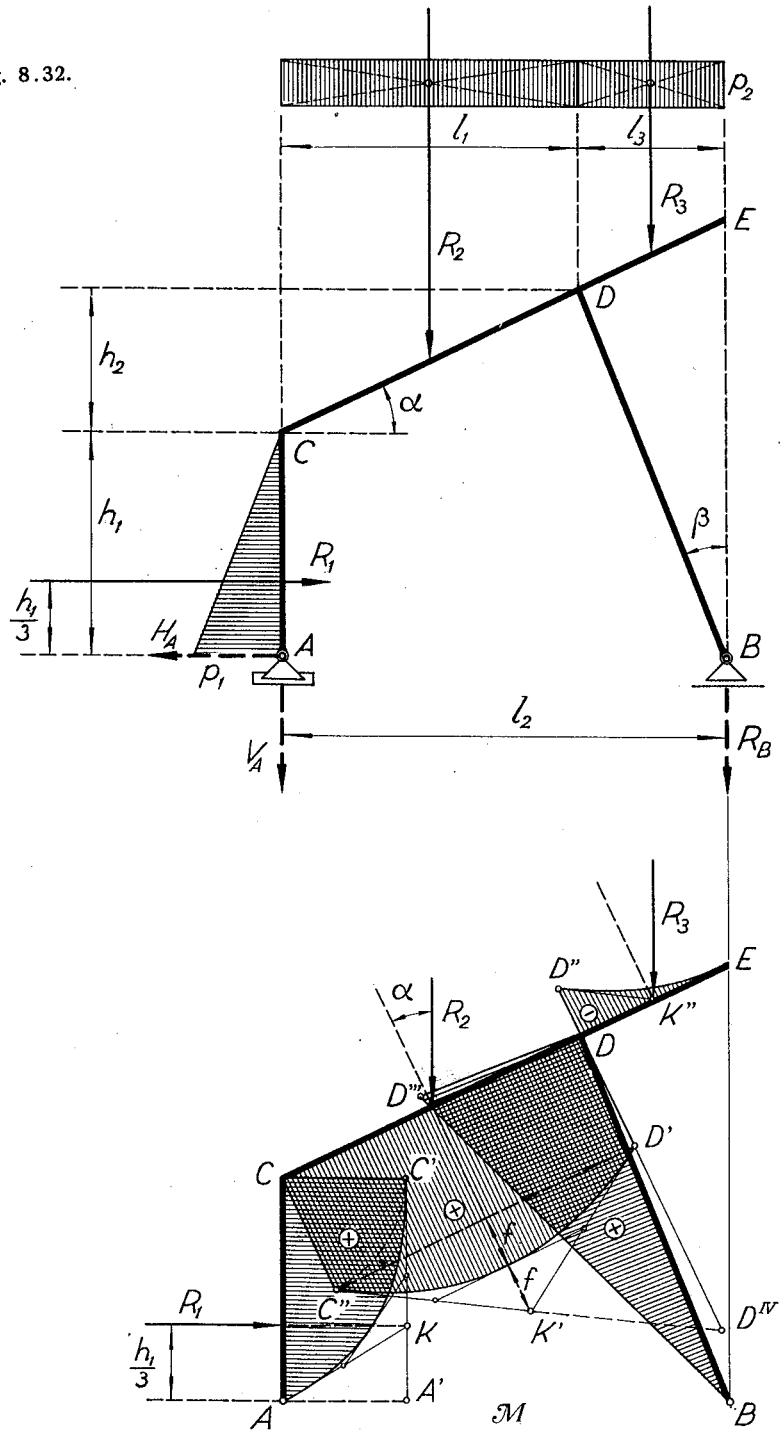
$$\left.\begin{aligned} &V_A + R_B + p_2(l_1 + l_3) = 0 \\ &H_A - \tfrac{1}{2}\, p_1 h_1 = 0 \\ &R_B l_2 + {}^1/_6\, p_1 h_1^2 + \tfrac{1}{2}\, p_2 (l_1 + l_3)^2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad [8.94]$$

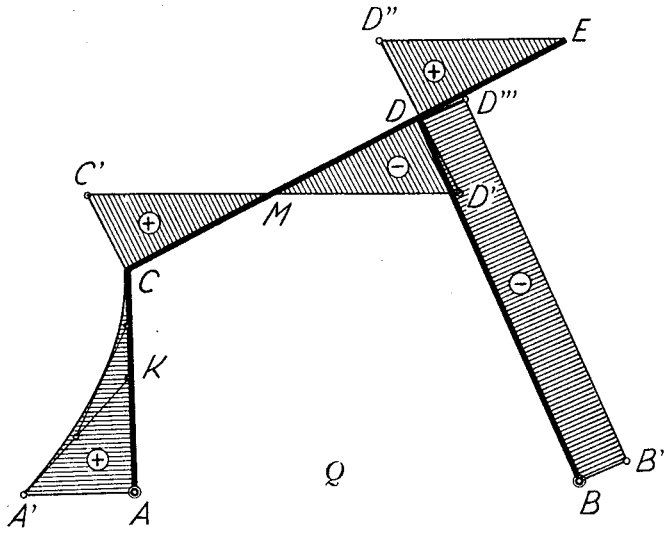
Despejados los valores de H_A, V_A y R_B, resultan ser positivo el primero y negativos los dos últimos. Conocidos los valores de las reacciones de vínculo, bastará calcular analíticamente los valores de los esfuerzos característicos en las secciones extremas de las piezas AC, CD, DE y DB, representarlos gráficamente conforme con las convenciones adoptadas, y luego hacer pasar por los extremos de las ordenadas que los representan, las curvas o rectas, según el caso, que representen las funciones que definen las variaciones de los esfuerzos característicos a lo largo de la pieza considerada. Analizaremos a continuación, independientemente, la construcción de los tres diagramas.

a) Diagrama de momentos flexores.

Consideremos el pilar AC. En la sección extrema inferior A, el momento flexor es nulo, por cuanto la reacción R_A pasa por el baricentro de aquélla. En la sección extrema superior C, el momento flexor será igual a la suma de los momentos, respecto de su baricentro, de H_A y

Fig. 8.32.





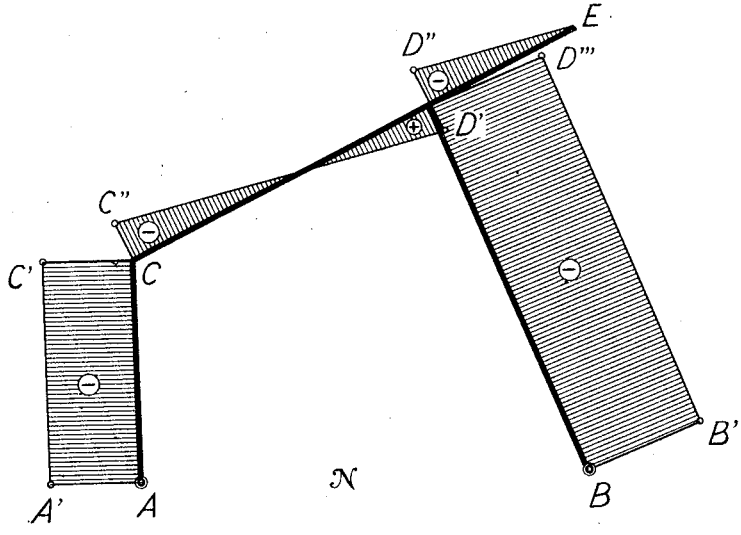


Fig. 8.32.

R_1, por cuanto el momento de V_A es nulo. Como las dos primeras constituyen un par, de acuerdo con la segunda de las [8.94], el momento flexor en C valdrá:

$$\mathcal{M}_C = \tfrac{1}{2}\, p_1 h_1 . \tfrac{1}{3} h_1 = \tfrac{1}{6}\, p_1 h_1^2 \qquad [8.95]$$

siendo su signo positivo.

Adoptada una escala de momentos flexores, llevamos, a partir de C, horizontalmente y hacia la derecha, un segmento CC', que en la escala adoptada represente el momento flexor en C, dado por la [8.95]. La curva representativa del diagrama de momentos flexores entre A y C será una parábola cúbica. Para trazarla es necesario conocer sus tangentes extremas.

Recordemos que las tangentes extremas de una curva funicular se cortan sobre la recta de acción de la resultante de la carga correspondiente. Por otra parte, dichas tangentes extremas definen sobre la paralela a la resultante trazada por uno de los puntos extremos de tangencia, un segmento que en la escala de momentos flexores representa el momento de la resultante respecto de dicho punto.

Llevando, en consecuencia, horizontalmente, a partir de A el segmento AA', representativo en la escala adoptada del momento de R_1 respecto de A, obtenemos el punto A' que unido con el C, determina la tangente en este último punto a la curva funicular de la carga triangular, que referida a AC corresponde al diagrama de momentos flexores buscado. La segunda tangente extrema la obtenemos uniendo A con el punto K en que la primera tangente corta la recta de acción de R_1. Considerando ahora esta última como divisoria de cargas, completamos el trazado de la parábola cúbica por tangentes y tenemos así completado el diagrama de momentos flexores para el pilar AC.

Pasamos ahora al tramo CD. El momento flexor en la sección extrema izquierda del tramo CD es el mismo que para la sección extrema superior del AC, que acabamos de determinar. En consecuencia, rebatiendo hacia abajo y sobre la normal en C al tramo CD el segmento CC', obtenemos un punto C'' por el que pasará el diagrama de momentos flexores de CD. La función que define este diagrama será una parábola cuadrática. Para trazarla necesitamos conocer en primer lugar otro punto de la misma: la ordenada en la sección extrema derecha D, que corresponde al momento flexor en la misma. Su expresión será:

$$\mathcal{M}'_D = H_A (h_1 + h_2) + V_A\, l_1 - \tfrac{1}{2}\, p_1 h_1 (h_2 + \tfrac{2}{3} h_1) = -\tfrac{1}{2}\, p_2 l_1^2 . \qquad [8.96]$$

En el caso que estamos analizando, como no conocemos los valores numéricos de los distintos términos de la [8.96], no podemos determinar

el valor absoluto ni el signo del momento flexor $\mathcal{M}'_D$. No obstante ello, determinaremos su signo en base a las consideraciones siguientes. El momento flexor $\mathcal{M}''_D$ en la sección extrema izquierda del voladizo es negativo y el $\mathcal{M}'''_D$, en la sección extrema izquierda del pilar BD, positivo, por cuanto R_B es negativa, pero se trata de una fuerza que actúa a la derecha. Por otra parte, es evidente que R_B es mayor, en valor absoluto, que R_3. En consecuencia, resulta $|\mathcal{M}'''_D| > |\mathcal{M}''_D|$.

Reemplazando en la [8.93] y despejando M'_D, tenemos

$$\mathcal{M}'_D = \mathcal{M}''_D + \mathcal{M}'''_D \qquad [8.97]$$

es decir que el momento flexor $\mathcal{M}'_D$ será en este caso, positivo. Si bien no conocemos su valor absoluto, supondremos que sea un poco menor que el de $\mathcal{M}_0$. Llevando por D y normalmente a CD el segmento DD' que en escala represente el valor de $\mathcal{M}'_D$, obtenemos un segundo punto por donde pasará el diagrama de momentos flexores.

Para trazar la curva funicular, que referida a CD representará dicho diagrama, debemos tener en cuenta que la carga distribuida, lo es por unidad de longitud de *proyección horizontal del tramo* CD.

Consideremos, figura 8.33 *a*, una barra AB sobre la que actúa una carga de intensidad p, distribuida sobre la proyección horizontal de la barra. Llamemos p_0 a la intensidad de la carga *vertical* equivalente, distribuida por unidad de longitud de la pieza, cuya longitud es s. La resultante de la primera será

$$R = pl \,. \qquad [8.98]$$

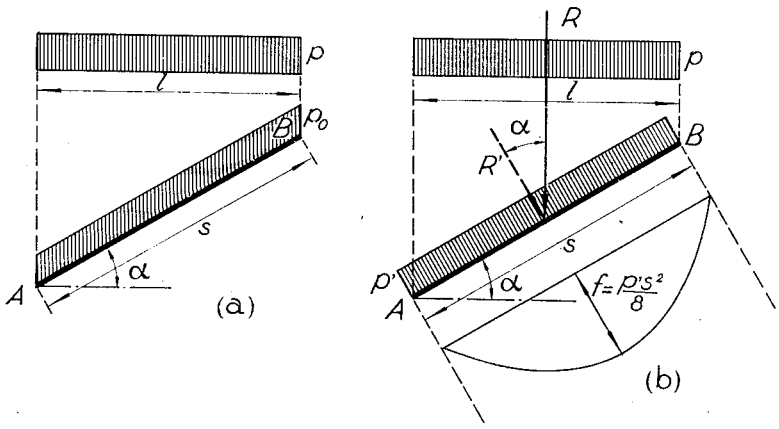


Fig. 8.33.

Pero como ambas cargas son equivalentes, debemos tener

$$R = pl = p_o s \qquad [8.99]$$

de donde

$$p_o = p\frac{l}{s} . \qquad [8.100]$$

Llamando α al ángulo que forma la dirección de la barra con la horizontal, se tiene

$$\frac{l}{s} = \cos\alpha \qquad [8.101]$$

de donde, reemplazando en [8.100]

$$p_o = p.\cos\alpha . \qquad [8.102]$$

Sea ahora la misma carga p distribuida sobre la proyección horizontal de la longitud de una barra AB, y nos interesa conocer la intensidad de la carga distribuida p' sobre la longitud s de aquélla, que actúa normalmente a la misma, y cuya resultante es la proyección normal a AB de la resultante R de la carga p.

Llamando R' a la resultante de p' tenemos

$$R' = R.\cos\alpha \qquad [8.103]$$

pero $R' = p's$; luego reemplazando en [8.103] y pasando s al segundo miembro

$$p' = \frac{R.\cos\alpha}{s} . \qquad [8.104]$$

Pero $R = pl$; de donde reemplazando en [8.104] y teniendo en cuenta que $l/s = \cos\alpha$, resulta finalmente

$$p' = p.\cos^2\alpha . \qquad [8.105]$$

La curva funicular de la carga p' será una parábola de 2º grado, cuya flecha, como sabemos, vale $f = p's^2/8$. Ahora bien, teniendo en cuenta que $l = s.\cos\alpha$ y que $p' = p.\cos^2\alpha$, reemplazando valores en la [8.105] llegamos a

$$\frac{p's^2}{8} = \frac{p.\cos^2\alpha.l^2}{8.\cos^2\alpha} = \frac{p.l^2}{8} . \qquad [8.106]$$

Es decir que la flecha de la curva funicular de la componente normal a una pieza inclinada de una carga distribuida por unidad de longitud, de proyección horizontal, es igual a la flecha de la parábola que representa la curva funicular de esta última.

Volviendo ahora a la figura 8.32, la curva funicular que pasa por C'' y D', corresponde a la carga distribuida a lo largo de CD y cuya intensidad es $p_o = p_2 . \cos^2 \alpha$. Pero, de acuerdo con la [8.106] no es necesario determinar previamente el valor de p_o, sino que bastará llevar a partir del punto medio de la recta $C''D'$ y en dirección normal a CD, en la escala de momentos flexores, el valor $f = pl_1^2/8$ que nos define el vértice de la parábola. Dicho segmento, duplicado, nos da el punto de intersección de las tangentes extremas al arco de parábola. Conocidas éstas, el trazado de la parábola es inmediato.

La determinación de las tangentes extremas al arco de parábola, puede también efectuarse en la forma indicada para el tramo AC, es decir, llevando a continuación de DD' un segmento de $D'D^{IV}$ que en la escala de momentos flexores represente el momento de $R_2 \cos \alpha$ con respecto a D. El extremo de dicho segmento, unido con el punto C'' determina la tangente en este último punto a la curva funicular. La tangente en D' se obtiene uniendo este punto con K', punto en que la primera tangente corta la recta de acción de la proyección de R_2 sobre la normal a CD.

En el tramo en voladizo DE, el diagrama de momentos flexores también estará representado por una parábola de 2º grado.

La parábola pasará por E, por cuanto en dicha sección el momento flexor es nulo, al no existir fuerzas a la derecha de la misma. Por otra parte, esta misma circunstancia hace que en dicha sección también el esfuerzo de corte sea nulo. De ahí que la tangente extrema en coincidencia con E al diagrama de momentos flexores coincida con el eje de referencia, por cuanto su pendiente mide el valor de la ordenada correspondiente del diagrama de esfuerzos de corte.

En la sección extrema izquierda del voladizo, es decir, inmediatamente a la derecha de D, el momento flexor es igual al momento de la resultante de las fuerzas de la derecha, con signo cambiado, es decir:

$$\mathcal{M}_D'' = -\tfrac{1}{2} p_2 . l_3^2 . \qquad [8.107]$$

Este valor, representado en la escala de momentos flexores nos conduce a la ordenada DD'', por cuyo extremo pasará la parábola que define el diagrama de momentos flexores buscado. La tangente al mismo

en dicho punto, pasará por K'', en que la tangente extrema derecha corta la recta de acción de la proyección normal a DE de la resultante R_3.

Finalmente, el diagrama de momentos flexores correspondiente al pilar BD, será una recta, de ordenada nula en correspondencia con B. En efecto, por el baricentro de la sección B pasa la recta de acción de R_B, única fuerza que actúa a la derecha de aquélla, siendo nulo, en consecuencia, su momento. Por otra parte, entre B y D no actúa ninguna nueva fuerza. El máximo valor del momento flexor ocurrirá para la sección extrema izquierda, es decir, inmediatamente a la derecha de D y su valor será

$$\mathcal{M}_D''' = R_B . l_3 . \qquad [8.108]$$

Si bien el momento de R_B respecto del baricentro de la sección extrema izquierda es negativo, el momento flexor correspondiente resulta de signo positivo, por tratarse de fuerzas que actúan a la derecha de la sección.

b) Diagrama de esfuerzos de corte.

Comenzando por la sección A del pilar AC, tenemos que el esfuerzo de corte en la misma es igual en magnitud y sentido a la componente H_A de la reacción en A. Dicha componente es positiva por serlo su proyección sobre el eje director z. En consecuencia, el esfuerzo de corte en A también será positivo. Llevando en escala a partir de A y hacia la izquierda, de acuerdo con la convención adoptada, un segmento AA', se obtiene la ordenada inferior del diagrama de esfuerzos de corte correspondiente al pilar AC. En la sección extrema superior del mismo, es decir, infinitamente por debajo de C el esfuerzo de corte es nulo. En efecto, las únicas fuerzas que actúan por debajo de C y que dan origen a esfuerzos de corte son H_A y la carga distribuida linealmente cuya resultante es R_1. Pero esta última resulta en este caso de igual intensidad y sentido contrario a H_A. En consecuencia, la suma de sus proyecciones sobre la normal a AC es nula.

Por otra parte, siendo nula la ordenada del diagrama de cargas en correspondencia con la sección C del pilar, la tangente en dicha sección al diagrama de esfuerzos de corte tendrá pendiente nula, es decir, su dirección coincidirá con la del eje de referencia AC. Estamos ahora en condiciones de trazar la parábola de segundo grado, representativa de la función que define la variación del esfuerzo de corte a lo largo de AC. La misma pasará por A' y C y tendrá en este último punto tangente vertical. El trazado se completa por tangentes en la forma conocida.

En la sección extrema izquierda del dintel CD, es decir, inmediatamente a la derecha de C, el esfuerzo de corte será igual en magnitud y signo a la proyección sobre la dirección normal a CD de V_A, por cuanto la suma de las proyecciones de H_A y R_1 es nula.

Tendremos así que

$$Q_{DC} = V_A . \cos \alpha \qquad [8.109]$$

con signo positivo, por serlo su proyección sobre el eje director z.

La variación del esfuerzo de corte a lo largo de CD responde a una función lineal, por ser constante la función de carga. En consecuencia, para el trazado del correspondiente diagrama, sólo es necesario conocer otro punto del mismo que en este caso será el extremo de la ordenada representativa del esfuerzo de corte en la sección extrema derecha del tramo. Su expresión será:

$$Q_{DC} = V_A . \cos \alpha - p_2 . l_1 . \cos \alpha \qquad [8.110]$$

y su signo negativo, por ser R_2 mayor en valor absoluto que V_A. Ubicado el punto D', unido mediante una recta con el C', obtenemos el diagrama de esfuerzos de corte correspondiente al tramo CD.

Para el tramo en voladizo, el trazado del diagrama de esfuerzos de corte es simple. En efecto, siendo la ordenada del diagrama de cargas de ambos tramos la misma, la pendiente de los diagramas de esfuerzos de corte correspondientes, será también la misma. Por otra parte, al no existir fuerzas a la derecha de la sección E, el esfuerzo de corte en correspondencia con la misma será nulo. Luego, si por E trazamos una recta paralela a la que define el diagrama de esfuerzos de corte del tramo CD, obtenemos el diagrama buscado. Su signo será positivo por cuanto, para cualquier sección del voladizo, la resultante de las fuerzas de la derecha tiene componente tangencial cuya proyección sobre el eje director z es negativa, por lo que el esfuerzo de corte será positivo.

Finalmente, para el pilar BD el esfuerzo de corte será constante para cualquier sección del mismo, e igual a la proyección, con signo contrario, sobre la normal a BD, de la reacción R_B.

c) *Diagrama de esfuerzos normales.*

Para el pilar AC, tanto H_A como R_1 tienen componentes axiles nulas. En consecuencia, para cualquier sección comprendida entre A y C, el esfuerzo normal será constante e igual en intensidad a V_A. Su signo será negativo por tratarse de un esfuerzo que tiende a comprimir las secciones.

En la sección extrema izquierda de la pieza CD el esfuerzo normal será igual a la proyección de V_A sobre la dirección del eje de la pieza, por cuanto la suma de las proyecciones de H_A y R_1 sobre dicha dirección es nula. La variación a lo largo de CD será lineal, y su diagrama representativo una recta que pasará por C'' y D', siendo DD' la ordenada que en escala representa el valor del esfuerzo normal en la sección extrema derecha de CD, y cuya expresión es

$$\mathcal{N}'_D = V_A \cdot \operatorname{sen}\alpha - p_2 \cdot l_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \,. \qquad [8.111]$$

No existiendo fuerzas a la derecha de la sección E del voladizo, el esfuerzo normal en la misma es nulo. El diagrama correspondiente a DE será una recta, de ordenada nula en E y máxima en correspondencia con la sección extrema izquierda, y de valor

$$\mathcal{N}'_D = -p_2 \cdot l_3 \cdot \operatorname{sen}\alpha \,. \qquad [8.112]$$

Finalmente, el diagrama de esfuerzos normales para el pilar BD se reduce a una recta, paralela al eje de referencia por ser constante el esfuerzo de corte a lo largo de la pieza. En efecto, sobre la misma actúa únicamente la reacción R_B y la expresión del esfuerzo normal será:

$$\mathcal{N}_B = \mathcal{N}_{D''} = -R_B \cdot \cos\beta \qquad [8.113]$$

donde β es el ángulo que forma la dirección de R_B con la de BD.

8.1.15. Método analítico (o numérico) para el trazado de diagramas de características en pórticos.

El procedimiento analítico, o numérico, es de aplicación en aquellos casos en que, por la configuración del sistema o por la naturaleza de las cargas, no son de aplicación ninguno de los métodos analizados en los parágrafos 8.1.13 y 8.1.14.

El procedimiento consiste simplemente en calcular numéricamente el valor del esfuerzo característico que se considere, para una serie de secciones convenientemente elegidas. Luego, representar dichos valores mediante ordenadas orientadas y paralelas a las correspondientes secciones, y unir mediante una curva los extremos de las mismas. La curva así obtenida, referida al eje de la estructura o aparte de la estructura, nos da el diagrama de la característica considerada.

Aclararemos los conceptos anteriores, desarrollando el ejemplo de la figura 8.34, limitándonos a la determinación del diagrama de momentos flexores.

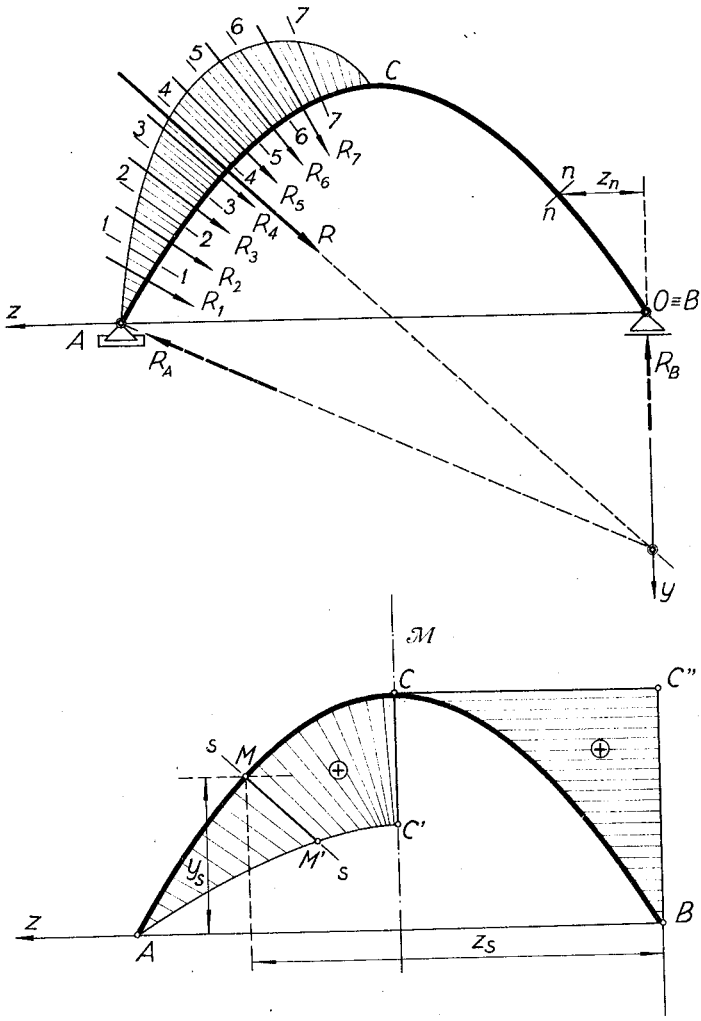


Fig. 8.34.

Se trata de un arco de eje parabólico, simplemente apoyado, sujeto a la acción de una carga distribuida según una ley arbitraria, normal en cada sección a la tangente en la misma al eje de la estructura, y limitada

a la mitad izquierda de la misma. Evidentemente, en este caso no son aplicables los procedimientos gráfico y gráfico-numérico.

Para resolver el problema, consideramos una sucesión de secciones normales *1-1*; *2-2*; ...; *7-7*, que dividan la carga distribuida en forma que los diagramas parciales resultantes puedan similarse sin mayor error a diagramas triangulares o trapeciales. Determinadas luego las respectivas resultantes parciales R_1, R_2, ..., R_7, mediante la construcción de un polígono funicular —omitido en la figura— hallamos la resultante total R, que nos permite determinar las reacciones de vínculo R_A y R_B.

Consideremos ahora una sección genérica s-s, coincidente con una divisoria de cargas y sean z_s, y_s las coordenadas de su baricentro, con respecto a un par de ejes z, y de origen O coincidente con el apoyo móvil B.

Descomponiendo cada una de las resultantes parciales ubicadas a la izquierda de la sección considerada en una componente horizontal H_i y otra vertical V_i y la reacción de vínculo R_A en sus componentes H_A y V_A, si z_i, y_i son las coordenadas del punto de aplicación de las primeras y z_A, y_A los de las últimas, siendo $y_A = 0$, la expresión del momento de las fuerzas que actúan a la izquierda de s-s con respecto a su baricentro será:

$$\mathcal{M}_s = V_A (z_s - z_A) - H_A(y_s) + V_i(z_s - z_i) - H_i(y_s - y_i) \quad [8.114]$$

que corresponde por definición al momento flexor en s-s.

Calculado el valor de $\mathcal{M}_s$, llevamos a partir de N y orientado, el segmento MM' que lo representa, normal a la tangente en N al eje de la estructura.

Repitiendo el proceso para cada una de las secciones coincidentes con las divisorias de cargas, obtenemos una serie de puntos que, unidos, determinan la curva AC' que define el diagrama de momentos flexores entre A y C.

Para las secciones ubicadas a la derecha de C, el procedimiento se simplifica. En efecto, al no aparecer nuevas cargas, la resultante izquierda correspondiente a cualquier sección será siempre la misma, e igual a la resultante de R_A y R. Ahora bien, por razones de equilibrio, la resultante izquierda correspondiente a una sección, es opuesta a la resultante derecha, la que en este caso se reduce a R_B. En consecuencia, bastará tomar momentos de R_B con respecto a los baricentros de las distintas secciones y cambiarles el signo, para obtener los correspondientes momentos flexores. En el caso particular que estamos analizando, en que la reacción en B es vertical, el momento de la misma respecto del baricentro de una sección cualquiera será igual al producto de la

intensidad de la misma por la abscisa z_n correspondiente. Y como R_B es constante para todas las secciones, la abscisa z_n, salvo escala, nos da directamente el valor del momento flexor. En consecuencia, volviendo a la figura 8.34 el diagrama de momentos flexores correspondiente a la parte CB del arco estará dado por la recta de acción de R_B referida al eje del arco. Hacemos notar que las ordenadas CC' y CC'' representan ambas un mismo valor, el momento flexor en C, y que si en la figura no coinciden es debido a que ambos diagramas parciales aparecen en escalas distintas.

En cuanto al trazado de los diagramas de esfuerzos de corte y normales, se efectúa en forma similar, determinando para cada sección la resultante de las fuerzas ubicadas a la izquierda de la misma, que descompuesta en sus componentes tangencial y normal, nos da los valores de los esfuerzos de corte y normal, respectivamente. Estos valores, representados en escala mediante ordenadas normales al eje de la estructura, y convenientemente orientadas, nos dan puntos que, unidos, determinan los correspondientes diagramas.

8.2. Sistemas espaciales de alma llena.

8.2.1. Conceptos generales.

En 8.1 nos hemos ocupado de la determinación de esfuerzos característicos en sistemas constituidos por una o más barras, ubicadas en un mismo plano y solicitados por sistemas de fuerza coplanares con aquéllas.

Existen, sin embargo, sistemas de barras rectas o curvas, en los que éstas no se encuentran ubicadas todas en un mismo plano. Tales sistemas reciben el nombre de *sistemas espaciales de alma llena.*

En estos sistemas, según sea el estado de cargas que los solicitan, aparte de los tres esfuerzos característicos definidos para los sistemas planos; *momento flexor, esfuerzos de corte y normal,* aparece un cuarto esfuerzo característico: *el momento torsor.*

El momento torsor aparece también en aquellos sistemas constituidos por una única barra, cuyo eje responde a una curva alabeada.

Consideremos, figura 8.35, un sistema constituido por una sucesión de barras rectas no coplanares, sujeto a la acción de un sistema de fuerzas en equilibrio. Supongamos la sección B, contenida en un plano π, normal a AB y sea R la resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de dicha sección.

Ubiquemos una terna de ejes coordenados en forma tal que su origen coincida con el nudo A, el eje y con la barra CA y la barra AB con el plano xy. Supongamos, además, por comodidad de exposición, que la resultante R esté ubicada en el plano zy.

Para determinar los esfuerzos característicos en la sección B, debemos simplemente reducir el sistema R al baricentro de la sección B.

Para ello, reduzcamos en un primer paso, R al punto A, lo que da origen a un par de reducción de momento $M_A = R.d$, cuyo vector,

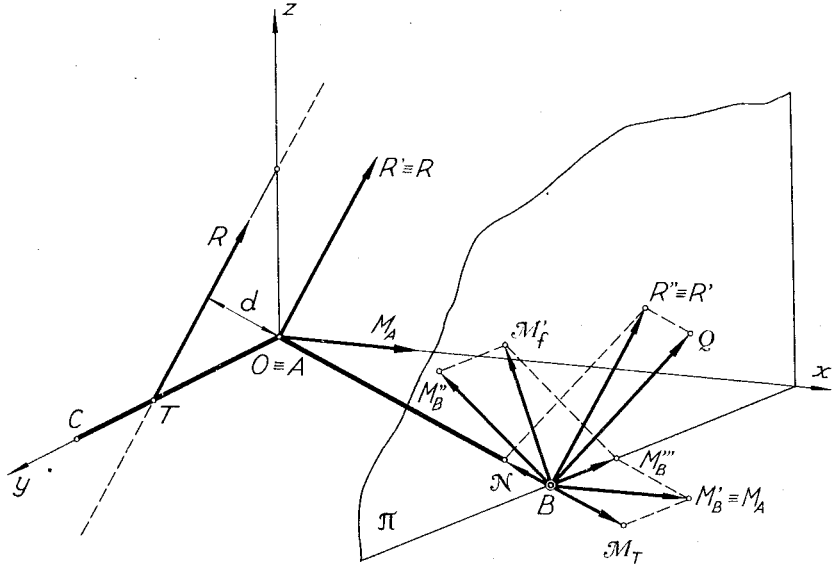


Fig. 8.33.

representativo, aplicado en A, estará dirigido según el semieje positivo x, y a una fuerza, $R' \equiv R$, también aplicada en A. Al reducir ahora el sistema (R', M_A) al baricentro de la sección B, tendremos: una fuerza $R'' \equiv R'$ aplicada en dicho punto, y dos pares de reducción. Uno de ellos, M'_B será idéntico a M_A, y el restante, M''_B será el par de reducción de R' al punto B. Su vector representativo se encontrará ubicado en el plano π, normal a AB. Descomponiendo ahora el vector M''_B en dos componentes dirigidas una según la dirección AB y la otra normal a la anterior y, en consecuencia, contenida en el plano π, obtenemos los vectores M'''_B y $\mathcal{M}_t$. El primero, compuesto con el M''_B nos da el vector $\mathcal{M}_t$, contenido en el plano π.

$\mathcal{M}_t$ corresponde a un par contenido en un plano normal a AB, el plano de la sección considerada, y se lo define como *momento torsor* o

momento de *torsión*. Es el cuarto esfuerzo característico que mencionáramos anteriormente.

En cuanto al *momento flexor*, resulta definido por el vector $\mathcal{M}_f$, que corresponde a un par que yace en un plano que contiene al eje de la barra AB.

La fuerza R'', aplicada en el baricentro B de la sección, no se encuentra ubicada en el plano de la misma. Descomponiéndola en una componente coplanar con ella y otra contenida en AB, obtendremos los valores Q y $\mathcal{N}$ que corresponden a los esfuerzos de corte y normal, respectivamente.*

Supongamos ahora que la sección B admita un eje de simetría, y que el mismo esté dirigido según el eje z (fig. 8.36 *a*).

Como es dable observar, en el caso analizado el vector $\mathcal{M}_f$ no coincide con ninguno de los dos ejes principales de inercia de la sección, como

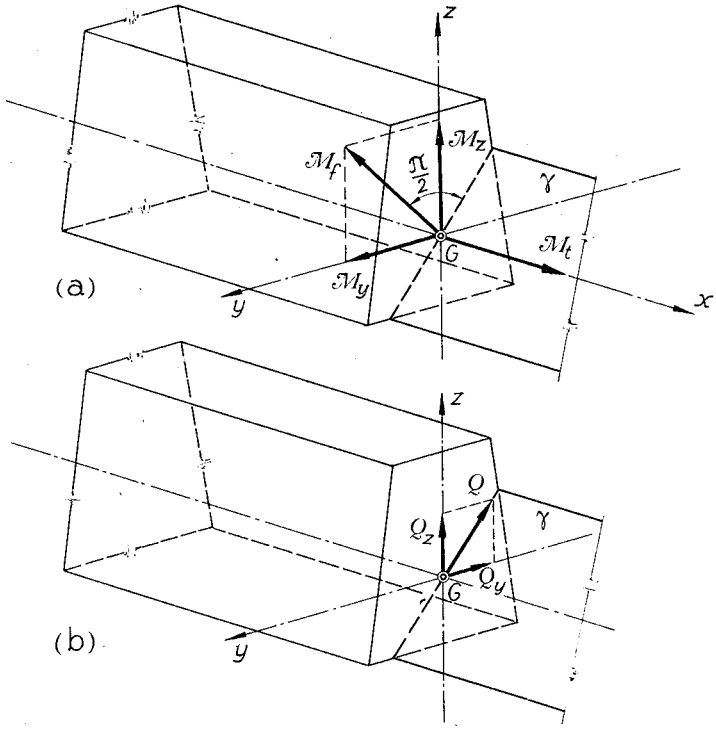


Fig. 8.36.

* $\mathcal{M}_t$, $\mathcal{M}_f$, Q y $\mathcal{N}$ corresponden a las componentes del par de reducción y de la resultante de reducción de las fuerzas que se encuentran entre C y la sección considerada. La reducción de las fuerzas situadas en el resto de la estructura conduce a vectores opuestos a los anteriores, que, conjuntamente con éstos, definen los esfuerzos característicos.

ocurre en el caso de los sistemas planos, en los que se parte de dicha suposición. El plano en que yace el par flexor es normal al eje del vector momento. Este caso de flexión recibe el nombre de flexión desviada o flexión oblicua. Descomponiendo el vector $\mathcal{M}_f$ según las direcciones de los ejes z é y, obtendremos los momentos flexores $\mathcal{M}_z$ y $\mathcal{M}_y$, actuando los pares correspondientes en los planos xy y xz.

Otro tanto ocurre con el vector Q, que define el esfuerzo de corte en la sección, el que admite dos componentes, Q_z y Q_y.

En general, esta situación es la que se presenta en los sistemas espaciales de alma llena, salvo que las fuerzas exteriores se encuentren ubicadas en uno de los planos que contienen a los ejes principales de inercia de la sección, o en planos paralelos a los mismos.

8.2.2. Trazado de los diagramas de características.

Para el trazado de diagramas de características de los sistemas espaciales, debemos distinguir los sistemas constituidos por una sucesión de barras rectas o curvas, o una combinación de ambas, no coplanares, de aquellos, constituidos por una barra o combinación de barras cuyos ejes respondan a curvas alabeadas.

Para ambos tipos de sistemas, es previa la determinación de las reacciones de vínculo. Como nos ocuparemos exclusivamente de sistemas constituidos por un único cuerpo rígido, para la determinación de las reacciones será necesario plantear las ecuaciones derivadas de las seis condiciones necesarias y suficientes para establecer el equilibrio de las fuerzas exteriores activas y reactivas. En general, y salvo casos especiales, conviene siempre encarar la solución analítica del problema, prescindiendo de la gráfica.

En los sistemas constituidos por sucesiones de barras rectas o curvas no coplanares, se determinan en primer lugar los esfuerzos característicos en los distintos nudos, numéricamente. Conocidos los valores de los mismos, podemos aislar cada barra, las que se encontrarán en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores que las solicitan y los esfuerzos característicos aplicados en sus secciones extremas. Descomponiendo luego unos y otros según los planos que contienen al eje de la barra y a los ejes principales de inercia de las secciones, reducimos el problema espacial a dos problemas planos, siendo, en consecuencia, aplicables los procedimientos analizados en el capítulo anterior. En lo que respecta al diagrama de momentos torsores, su trazado se efectúa por el

procedimiento numérico, determinando los valores correspondientes a secciones convenientemente ubicadas. Conocidos éstos, y representados en una cierta escala, tomando como eje de referencia el eje de la pieza, se unen los extremos de las ordenadas, así obtenidas, mediante rectas, que en conjunto constituyen el diagrama buscado.

En los sistemas constituidos por barras de eje alabeado, sólo es posible aplicar el procedimiento numérico, es decir, calcular para una sucesión de secciones los correspondientes esfuerzos característicos. Luego, adoptando una dirección cualquiera, se representan los valores calculados en escala, mediante ordenadas, cuyos extremos unidos por una curva nos dan el diagrama que corresponda.

Con el objeto de aclarar los conceptos anteriores desarrollaremos a continuación algunos ejemplos.

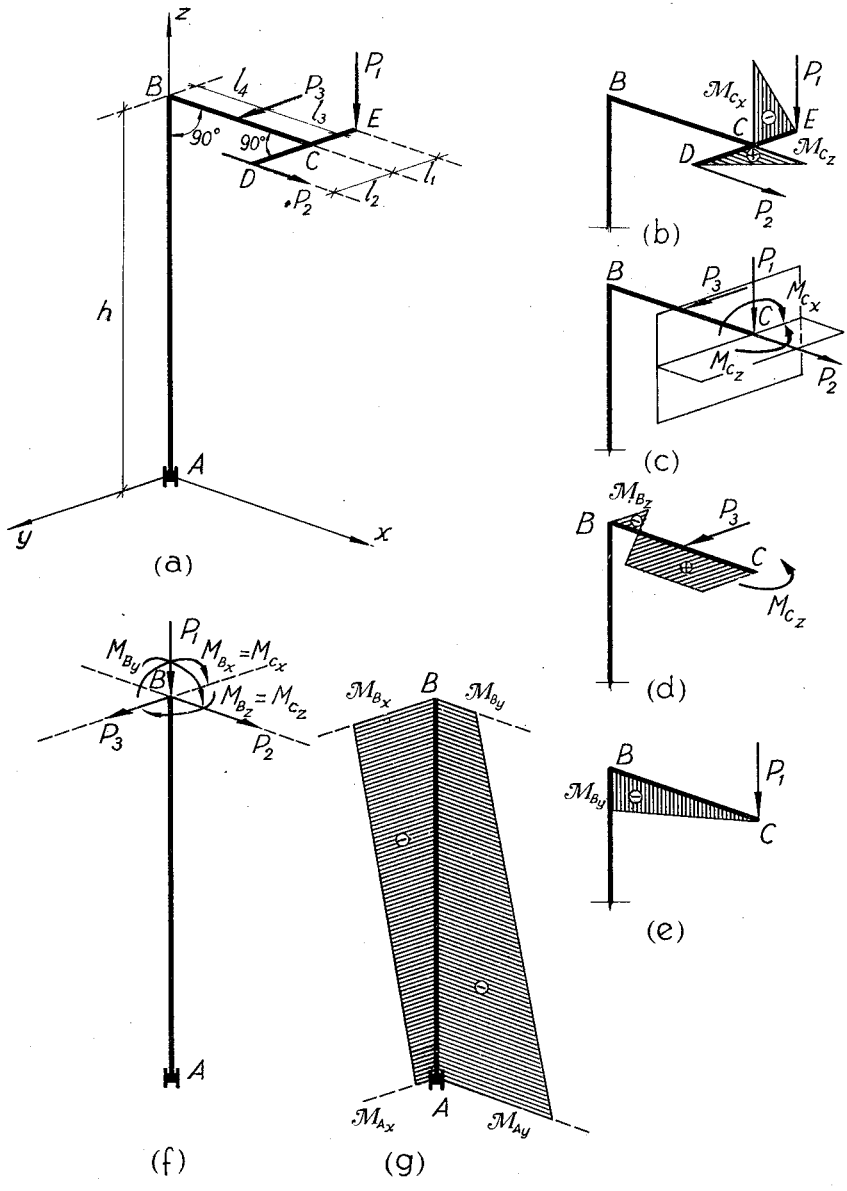
Sea el sistema de alma llena espacial de la figura 8.37 (*a*), constituido por un pilar AB y dos tramos rectos BC y DCE, normales entre sí y con el primero. Supongamos que el sistema se encuentre empotrado en su sección extrema inferior A, y que sobre el mismo actúen las fuerzas P_1, P_2 y P_3, cuyas rectas de acción y puntos de aplicación se indican en la figura.

Ubiquemos una terna de ejes coordenados haciendo coincidir su origen con el extremo A del pilar, el semieje positivo z con AB y de modo que BC resulte contenido en el plano xz. La pieza DCE resultará dirigida según el eje y.

La determinación de las reacciones de vínculo se efectúa planteando las seis condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de los sistemas gausos de fuerzas, es decir:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_1^n Z_i + R_z = 0 & \sum_1^n M_i^x + M_x = 0 \\ \sum_1^n Y_i + R_y = 0 & \sum_1^n M_i^y + M_y = 0 \\ \sum_1^n X_i + R_x = 0 & \sum_1^n M_i^z + M_z = 0 \end{array}\right\} \qquad [8.115]$$

En el caso que estamos analizando, para el trazado de los diagramas de características, no es necesario conocer a priori las reacciones de vínculo. En efecto, tratándose de un sistema empotrado en una sección extrema, es posible ir recorriendo la estructura partiendo de extremos libres, y calcular los esfuerzos característicos en base a las fuerzas ubicadas a un lado de la sección que se considere, las que son todas conocidas. Ello es lo que efectuaremos a continuación.



Diagramas de momentos flexores

Fig. 8.37

Previamente al trazado de los diagramas, es imprescindible establecer las convenciones de signo correspondientes, que necesariamente deben diferir de las adoptadas para los sistemas planos, por tratarse ahora de estructuras con elementos orientados según las tres direcciones del espacio.

En lo que respecta a los *pares*, mantendremos la convención adoptada en el capítulo 3, es decir, que serán positivos cuando un observador ubicado según el sentido del vector representativo del par, lo vea girar de izquierda a derecha.

A los momentos flexores convendremos en asignarles el signo de la componente normal a la sección del par originado por la reducción, al baricentro de la sección considerada, de las fuerzas actuantes entre esta última y el extremo de la estructura en el que se encuentre ubicado el origen de coordenadas, es decir, las fuerzas que van apareciendo cuando recorremos la estructura desde el origen de coordenadas a la sección.

Para el esfuerzo de corte, consideraremos el signo de la proyección sobre el plano de la sección, de la resultante de reducción al baricentro de la misma, de las fuerzas ubicadas entre el origen de coordenadas y la sección. En cuanto al esfuerzo normal, la convención no varía. El mismo será positivo cuando tracciona la sección, y negativo en caso contrario.

Finalmente debemos considerar la convención de signos para el cuarto esfuerzo característico: el momento de torsión. Convendremos en asignar el signo de la componente que actúa en el plano de la sección del par de reducción al baricentro de la misma, de las fuerzas ubicadas entre el origen de coordenadas y la sección misma.

Establecidas las convenciones anteriores, comenzaremos con el trazado de los diagramas de momentos flexores.

Para la pieza DC, la variación del momento flexor a lo largo de la misma es lineal, siendo nulo su valor para la sección extrema D en la que actúa la fuerza P_2, y máximo para la sección C, en donde vale

$$|\mathcal{M}_{G_z}| = |P_2 . l_2| \qquad [8.116]$$

Para todas las secciones comprendidas entre D y C, el momento flexor será positivo. En efecto, el par de reducción de P_2 al baricentro de cualquiera de ellas, es negativo, pero como dicha fuerza no se encuentra ubicada entre el origen de coordenadas y la sección, es necesario, de acuerdo con la convención adoptada, cambiar el signo al par para obtener el del momento flexor.

Otro tanto ocurre en el tramo EC, donde también el diagrama será lineal, con ordenada nula en E y máxima en C, de valor

$$|\mathcal{M}_{G_x}| = |P_1 . l_1| \qquad [8.117]$$

Ahora bien, siendo P_1 y P_2 normales entre sí, los respectivos pares de flexión actuarán también en planos normales. Por esta razón es que en la figura 8.37 (b), ambos diagramas se han representado normales el uno al otro. En cuanto al signo de los momentos flexores a lo largo de EC, observemos que para cualquier sección, el par de reducción de P_1 es positivo pero, por provenir de la reducción de una fuerza que no se encuentra ubicada *entre* el origen de coordenadas y la sección, es necesario cambiar de signo para obtener el del momento flexor. En consecuencia, el diagrama entre E y C será negativo.

Analizaremos ahora el tramo BC. La reducción a C de las fuerzas aplicadas en DC y EC conduce a la situación que muestra la figura 8.37 (c). Por una parte tenemos dos fuerzas: P_1 y P_2, la primera normal a BC y la segunda coincidente con esta última dirección, y por otra, dos pares $\mathcal{M}_{C_x}$ y $\mathcal{M}_{C_z}$. El primero actúa en el plano de la sección extrema C de la pieza BC y en consecuencia la solicita solamente por torsión, no dando origen a momentos flexores. Por esta razón no nos ocuparemos momentáneamente del mismo, dejándolo para cuando procedamos a trazar los diagramas de momentos torsores.

A lo largo del tramo BC existen momentos flexores que actúan en dos planos normales entre sí: xz y xy, por encontrarse ubicadas en los mismos las acciones que los originan.

Consideraremos primeramente los momentos flexores para los que el plano de flexión es el xz. Para las secciones comprendidas entre C y B el momento flexor, salvo signo, corresponderá al momento de P_1 respecto del baricentro de las mismas.

Además, su variación será lineal y su valor será nulo para la sección C y máximo para la B, donde su expresión será

$$|\mathcal{M}_{R_y}| = |P_1(l_3 + l_4)|. \qquad [8.118]$$

En cuanto al signo, el correspondiente al par de reducción de P_1 al baricentro de B es positivo, pero por tratarse de una fuerza que no se encuentra ubicada entre el origen de coordenadas y la sección, el signo del momento flexor será contrario, es decir, negativo.

En el plano xy actúan la fuerza P_2 y el par $\mathcal{M}_{C_z}$. Entre C y la sección en que se encuentra aplicada P_3, el diagrama de momentos flexores será constante, siendo sus ordenadas iguales en valor a $\mathcal{M}_{C_z}$ por cuanto P_2 no produce momentos, y su signo positivo, por ser un par negativo, al que es necesario cambiar de signo por tratarse de una acción que proviene de una parte de la estructura no comprendida entre el origen de coordenadas y la sección considerada.

Para las secciones comprendidas entre el punto de aplicación de P_3 y la sección extrema B, el diagrama de momentos flexores se obtiene por superposición de dos: uno constante, correspondiente al efecto del par M_{C_z}, y otro lineal, debido a P_3. En el caso analizado, como es evidente, ambos diagramas son de signo contrario, ocurriendo la ordenada máxima para la sección B, en que la expresión del momento flexor es

$$| \mathcal{M}_{B_z} | = | M_{C_z} | - | P_3 . l_4 | . \qquad [8.119]$$

Según $| P_3 . l_4 |$ resulte igual, mayor o menor que $| M_{C_z} |$ $\mathcal{M}_{B_z}$ será nulo, negativo o positivo, respectivamente. En la figura 8.37 (*d*) y (*e*) se han representado los diagramas de momentos flexores correspondientes tes al tramo BC.

Consideremos ahora el pilar AB. La reducción de las fuerzas que actúan sobre BC, DC y EC al baricentro de la sección extrema superior de AB, conduce al sistema que muestra la figura 8.37 (*f*), constituido por tres fuerzas P_1, P_2 y P_3, dirigidas según los tres ejes coordenados, y tres pares M_{B_y}, $M_{B_x} = M_{C_x}$ y $M_{C_z} = M_{B_z}$, que actúan en los planos xz, yz y otro paralelo al xy, respectivamente.

M_{B_z} no origina momentos de flexión a lo largo de AB, y sí momentos torsores. M_{B_x} conjuntamente con P_3 conducen a momentos flexores que actúan en el plano yz; M_{B_y} y P_2 lo hacen en el plano xz, y P_1 sólo origina esfuerzos normales.

Tanto para el plano xz como para el yz, los diagramas de momentos flexores a lo largo de AB serán lineales. Para el primero de ellos, la ordenada correspondiente a la sección B es igual a M_{B_y}, y siendo este par positivo, el momento flexor será negativo por las razones expresadas anteriormente. Para secciones comprendidas entre B y A, el momento flexor será igual, salvo signo, a la suma de los momentos del par y de P_2, y por ser ambos del mismo signo, el diagrama crecerá linealmente hasta la sección A, en que alcanzará su valor máximo

$$| \mathcal{M}_{A_y} | = | M_{B_y} | + | P_2 . h | \qquad [8.120]$$

siendo todas las ordenadas negativas.

Para el plano yz, el diagrama de momentos flexores lo obtenemos también por superposición de dos diagramas: el correspondiente a M_{Bx} y el originado por P_3. El primero tendrá ordenadas constantes, iguales en valor al del par, y de signo contrario, es decir negativas. El segundo, en cambio, será lineal con ordenada nula en B y máxima, igual a $P_3 . h$,

en A y su signo positivo, es decir opuesto al de los momentos debidos a P_3. Según M_{B_x} resulte igual, mayor o menor que $P_3.h$, el momento $\mathcal{M}_{A_x}$ resultará nulo, negativo o positivo respectivamente. En nuestro ejemplo hemos supuesto la segunda situación.

La figura 8.38 (a) muestra los diagramas de momentos torsores, los que sólo ocurren para los tramos BC y AB, como hemos visto anteriormente. La sección extrema C se halla solicitada en su plano por el

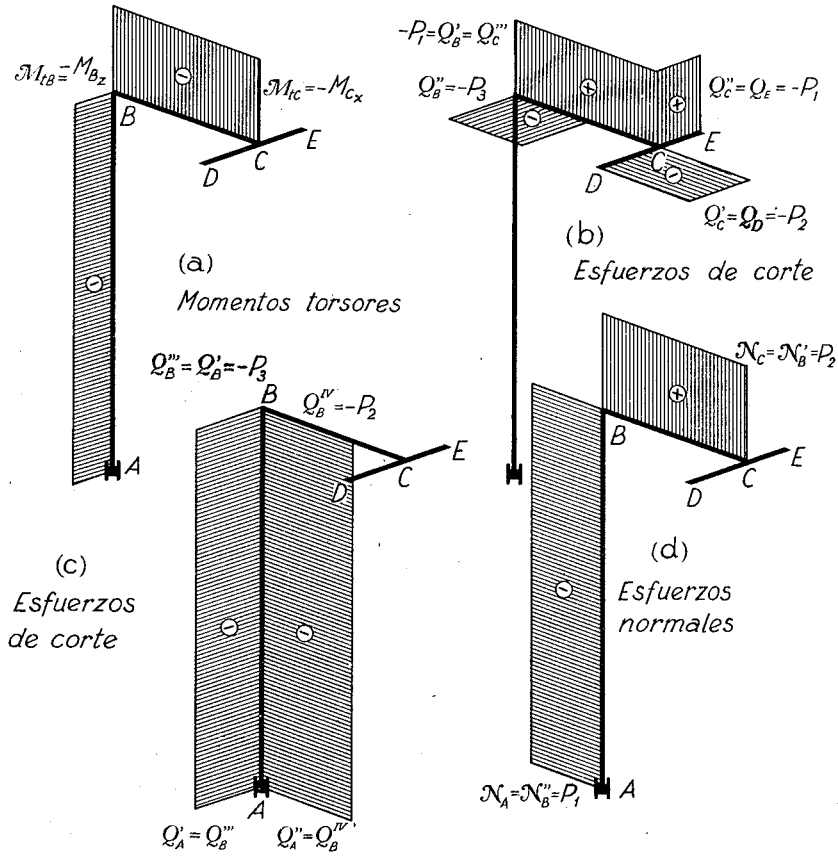


Fig. 8.38.

par M_{C_x}, par que se mantiene constante para cualquier otra sección comprendida entre C y B. En consecuencia, el correspondiente diagrama será una recta paralela a BC, cuyas ordenadas correspondan en escala al valor de M_{C_x}. De acuerdo con la convención adoptada, el signo del diagrama será negativo.

El pilar AB se encuentra sujeto en su sección extrema B a la acción del par M_{B_z}, coplanar con la misma, por lo que la solicita por torsión. Dicho par se mantiene constante a lo largo de AB y por otra parte no aparece ninguna nueva acción que solicite a la pieza por torsión. En consecuencia, también para AB el diagrama será una recta paralela al eje de referencia, y de acuerdo con la convención adoptada, su signo negativo.

Los diagramas de esfuerzos de corte aparecen representados en las figuras 8.38 (b) y (c). En la primera de ellas, figuran los correspondientes a los tramos BC, CD y CE, y en la segunda, los del pilar.

El tramo CD está sujeto a la acción de la fuerza P_2 exclusivamente, aplicada en el extremo D. El esfuerzo de corte a lo largo del mismo será constante y de intensidad igual a la de P_2, y su diagrama una recta paralela al eje de referencia, que hemos representado en el plano en el esfuerzo de corte, es decir, el xy. De acuerdo con la convención, el signo será negativo.

Para el tramo CE, el diagrama también estará constituido por una recta paralela al eje de referencia, por cuanto el esfuerzo de corte es constante e igual en intensidad a P_1, pero en este caso positivo por convención, y actuando en el plano zy.

A lo largo de BC actúan esfuerzos de corte según dos planos ortogonales: zx é yx. Para el primero de ellos, el esfuerzo de corte es constante y de igual intensidad y signo contrario a P_1. Para el segundo, será nulo entre C y el punto de aplicación de P_3 y constante e igual en intensidad y signo contrario al de esta última, entre su punto de aplicación y B. En cuanto a los esfuerzos de corte a lo largo del pilar AB, serán constantes y ocurrirán según los planos xz é yz. Para el primero de ellos su valor será igual a la intensidad de P_3 y su signo contrario, y para el segundo, corresponderá a la intensidad de P_2, siendo también negativo.

Finalmente, consideraremos los diagramas de esfuerzos normales, representados en la figura 8.38 (d). Como es fácil observar, las piezas CD y CE, no se encuentran solicitadas axilmente. Para la pieza BC el esfuerzo normal es constante e igual en intensidad a P_2, lo que conduce a un diagrama constituido por una recta paralela al eje de referencia. Por tratarse de una fuerza que tiende a traccionar la sección, el signo del diagrama será positivo. En cuanto al pilar AB, se encuentra solicitado por la fuerza P_1, que produce un esfuerzo de compresión (negativo) igual para todas las secciones. En consecuencia, el correspondiente diagrama será también una recta paralela al eje de referencia.

Consideremos ahora el caso de la figura 8.39 (a). Se trata de un resorte sujeto por sus extremos a la acción de dos fuerzas opuestas P y

$-P$, en consecuencia, en equilibrio. Constituye una estructura formada por una única barra de eje alabeado, engendrada por una generatriz de sección circular que se desplaza normalmente a una directriz constituida por una hélice circular, manteniendo su baricentro apoyado sobre la misma.

Ubiquemos una terna de ejes coordenados en la forma que muestra la figura 8.39 (*a*) y (*d*), y consideremos una sección cualquiera *s-s* normal a la hélice directriz. Las consideraciones que efectuaremos a continuación para la sección *s-s*, son extensibles a cualquier otra sección normal a la hélice directriz, por cuanto el resorte posee simetría central y la solicitación exterior coincide con el correspondiente eje de simetría.

La única fuerza aplicada en un lado de la sección analizada (en el caso presente consideramos la fuerza P que actúa en la parte superior del resorte) es P. Su reducción a G, baricentro de la sección *s-s* da origen a un sistema constituido por la fuerza P aplicada en G y un par de momento $M = P.R$, donde R es el radio de la hélice directriz. Dicho par yace en el plano determinado por G y el eje de la hélice directriz,

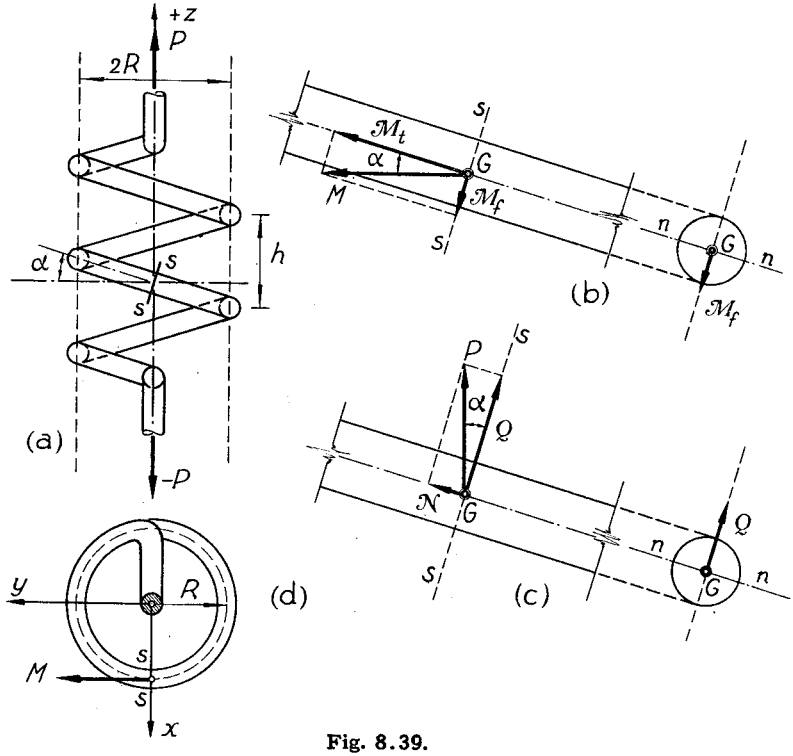


Fig. 8.39.

estando, en consecuencia, su vector representativo dirigido según la tangente a la proyección de aquélla sobre el plano xy, figura 8.39 (e).

Descomponiendo el vector M en sus componentes normal y coincidente con el plano de la sección s-s, obtenemos los vectores representativos de los momentos torsor y flexor, respectivamente, y $\mathcal{M}_t$ y $\mathcal{M}_f$. Llamando α al ángulo que la tangente a la hélice forma con la horizontal, los correspondientes valores serán

$$\mathcal{M}_f = M.\operatorname{sen}\alpha \qquad [8.121]$$

y

$$\mathcal{M}_t = M.\cos\alpha\ . \qquad [8.122]$$

El par de flexión actúa en un plano normal a la sección s-s, y cuya traza en la misma es la recta n-n.

Considerando ahora la fuerza P aplicada en G, su descomposición según dos direcciones, una normal y otra contenida en el plano de la sección nos conduce a los vectores $\mathcal{N}$ y Q, representativos de los esfuerzos normal y de corte, respectivamente.

Por las razones de simetría indicadas anteriormente, los esfuerzos característicos tendrán el mismo valor y signo, cualquiera sea la sección considerada, de modo que los diagramas representativos tendrán sus ordenadas constantes, y serán hélices concéntricas con la hélice directriz.

9. El principio de los trabajos virtuales.

9.1. Complementos de cinemática plana.

9.1.1. Desplazamiento de un punto material. Corrimientos.

Sea, figura 9.1, un punto material que se desplaza sobre una trayectoria cualquiera s, pasando de una posición inicial A a otra final B.

El simple cambio de lugar del punto —independientemente del tiempo requerido y de la trayectoria seguida, que podría haber sido otra cualquiera, tal como la s'— se define como *corrimiento* del punto. Como

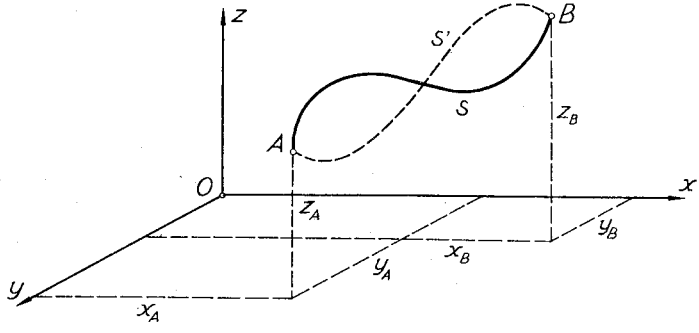


Fig. 9.1.

puede observarse, el corrimiento de un punto es independiente del camino recorrido, y depende exclusivamente de las posiciones inicial y final del mismo. Será, en consecuencia, una magnitud vectorial, representable por un vector, figura 9.2, paralelo a la dirección del corrimiento, cuyo módulo o intensidad es igual a la longitud del segmento determinado por las posiciones inicial y final, y dirigido de la primera a la segunda.

En lo que sigue, convendremos en designar con a al vector representativo del corrimiento de un punto.

Un punto puede, lógicamente, experimentar diversos corrimientos, definidos cada uno de ellos por su correspondiente vector representativo.

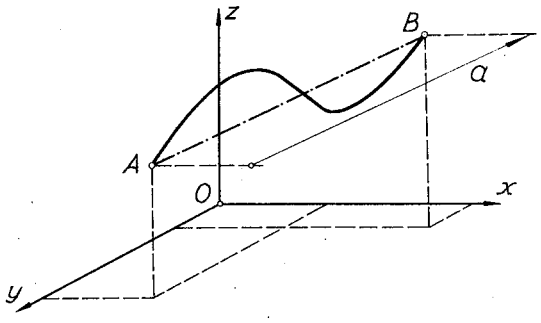


Fig. 9.2.

Como consecuencia de los mismos, llegará a una posición final. Es decir, el punto habrá sufrido un corrimiento resultante, definido por un vector que será el resultante de los vectores representativos de los distintos corrimientos experimentados por el punto y que se obtiene mediante la construcción de un polígono vectorial, figura 9.3. Como en éste, el vector resultante es independiente del orden en que se lleven los distintos vectores componentes, es evidente que el corrimiento resultante del punto también será independiente del orden en que tengan lugar los distintos corrimientos.

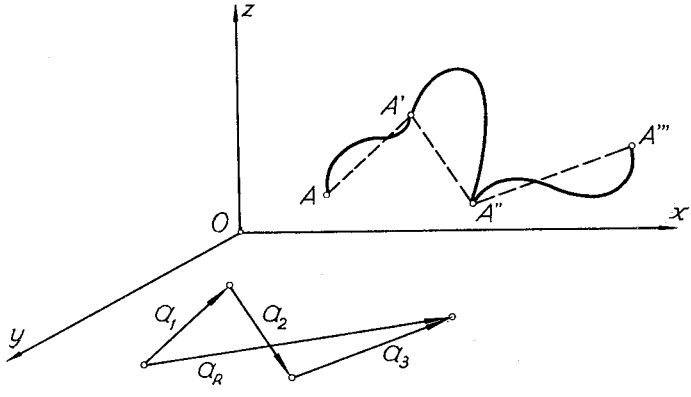


Fig. 9.3.

Es posible siempre descomponer un corrimiento en otros tres, paralelos a tres ejes no coplanares.

Dichos corrimientos componentes resultarán definidos por los vectores componentes del representativo del corrimiento. Si dos de los mismos son coplanares con el corrimiento dado, el tercero, evidentemente, resulta nulo.

Consideremos, figura 9.4, el corrimiento a del punto A descompuesto en las direcciones de los ejes coordenados componentes que coinciden con las correspondientes proyecciones y que denominaremos corrimientos horizotal y vertical de A, indicándolos con ξ y η respectivamente.

La convención de signos que utilizaremos en lo que sigue para los corrimientos, es la siguiente:

El corrimiento de un punto será positivo cuando lo sea su proyección sobre el eje z, salvo para corrimientos verticales, cuyo signo viene dado por el de su proyección sobre el eje y.

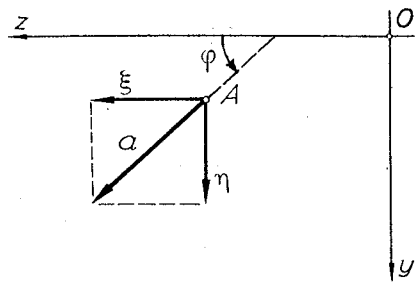


Fig. 9.4.

Llamando φ al argumento de la dirección del corrimiento, definido en la misma forma que para las fuerzas, tenemos como expresiones de los corrimientos vertical y horizontal

$$\left.\begin{aligned} \eta &= a.\operatorname{sen}\varphi \\ \xi &= a.\cos\varphi\ . \end{aligned}\right\} \qquad [9.1]$$

Si un punto A experimenta distintos corrimientos a_1; a_2; ...; a_n, las expresiones analíticas de los corrimientos resultantes vertical y horizontal serán las siguientes

$$\left.\begin{aligned} \eta_R &= \sum_1^n a_i \operatorname{sen}\varphi_i \\ \xi_R &= \sum_1^n a_i \cos\varphi_i\ . \end{aligned}\right\} \qquad [9.2]$$

La intensidad del corrimiento resultante será, en consecuencia,

$$|a_R| = \sqrt{\eta_R^2 + \xi_R^2} \qquad [9.3]$$

quedando definida su dirección por su argumento φ_R dado por la expresión

$$\operatorname{tg}\varphi_R = \frac{\eta_R}{\xi_R}\ . \qquad [9.4]$$

Las expresiones [9.2] nos permiten hallar analíticamente las componentes según dos direcciones dadas del corrimiento de un punto. En efecto, si a_1 y a_2 son las intensidades de los corrimientos incógnitos, φ_1 y φ_2 sus respectivos argumentos, y η y ξ las componentes vertical y horizontal del corrimiento conocido, las [9.2] nos permiten expresar:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= a_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + a_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \\ \xi &= a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 \end{aligned}\right\} \qquad [9.5]$$

sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas (a_1 y a_2) que nos resuelven el problema. Las mismas ecuaciones permiten resolver los distintos casos que, aparte del indicado antes, se pueden presentar en el problema de descomposición de un corrimiento, es decir:

a) Conocida la dirección e intensidad de un corrimiento componente, hallar las correspondientes al segundo.

b) Conocida la dirección de uno de los corrimientos componentes y la intensidad del restante, hallar la intensidad del primero y la dirección del segundo.

c) Conocidas las intensidades de ambos corrimientos componentes, hallar sus direcciones.

9.1.2. Desplazamientos finitos de chapas rígidas.

Al tratar en 6.1 los sistemas planos vinculados, definimos como sistema de puntos materiales o sistema rígido a un conjunto de puntos materiales sujetos al vínculo de la rigidez, es decir, un sistema en el que, para cualquier desplazamiento, la distancia entre dos puntos cualesquiera se mantenía invariable.

En el presente capítulo nos ocuparemos del estudio de los desplazamientos de aquellos sistemas rígidos cuyos puntos se encuentran ubicados en un mismo plano, y que hemos definido en 6.1.2 como chapas.

Los desplazamientos que puede experimentar una chapa en su plano pueden ser de dos clases: traslaciones o rotaciones.

Se dice que una chapa experimenta una traslación cuando los corrimientos de todos sus puntos son iguales entre sí. En cambio, el desplazamiento de la chapa será una rotación cuando sus puntos describan trayectorias constituidas por arcos de circunferencia con centro en un punto, denominado *polo* de la rotación, que permanece fijo.

De lo anterior deducimos que si una chapa experimenta una traslación, la misma queda completamente determinada si se conoce el corrimiento de uno de sus puntos.

Si una chapa experimenta un desplazamiento para el que los corrimientos de dos de sus puntos son iguales, el desplazamiento es una traslación.

En efecto, sea la chapa de la figura 9.5 en que los puntos A y B han experimentado iguales corrimientos a, pasando a ocupar, respectivamente las posiciones A' y B'. Al ser iguales los corrimientos de ambos puntos, el segmento $A'B'$ resultará igual y paralelo al AB.

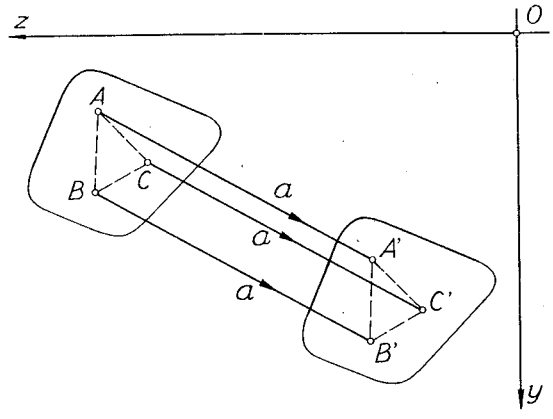


Fig. 9.5.

Consideremos ahora un tercer punto C de la chapa. Por estar sujetos los puntos de la chapa al vínculo de la rigidez, las distancias AC y AB no se modifican cualquiera sea el desplazamiento experimentado por la chapa a la que pertenecen los puntos. En consecuencia, los triángulos ABC y $A'B'C'$ resultan congruentes y por ello $AC \parallel A'C'$ y $BC \parallel B'C'$, de donde $CC' \parallel AA$. Es decir, que el punto C de la chapa, elegido arbitrariamente, experimenta el mismo corrimiento a que los puntos A y B.

Al estar determinada la traslación de una chapa por el corrimiento de uno de sus puntos, resulta evidente que, si la misma se encuentra sujeta a n traslaciones definidas por los corrimientos a_i, experimentará una traslación resultante cuya intensidad, dirección y sentido será la del vector resultante de componer los vectores representativos de los corrimientos a_i.

Consideremos ahora la chapa S de la figura 9.6 que experimenta una cierta rotación en torno de un polo O.

Un punto A describirá una trayectoria que es un arco de circunferencia y pasará a ocupar la posición A', y la recta AO, la $A'O$, girando un ángulo θ. Asimismo, otro punto cualquiera de la chapa, el B por ejemplo,

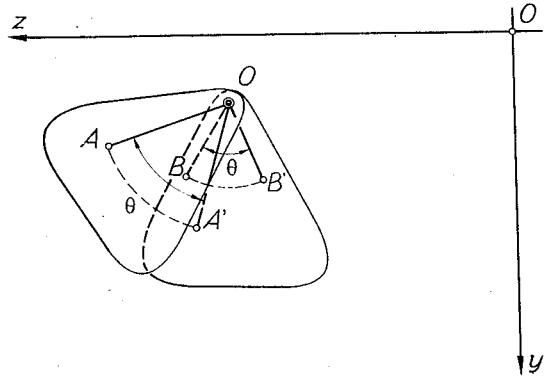


Fig. 9.6.

pasará a la posición B'. Ahora bien, estando los puntos de la chapa sujetos al vínculo de la rigidez, sus posiciones relativas en la chapa no se alteran, cualquiera sea el desplazamiento experimentado por ésta. En consecuencia, tenemos:

$$\overset{<}{AOB} = \overset{<}{A'OB'} \qquad [9.6]$$

Sumando a ambos miembros el ángulo $\overset{<}{A'OB}$ resulta

$$\overset{<}{AOB} + \overset{<}{A'OB} = \overset{<}{A'OB'} + \overset{<}{A'OB} \qquad [9.7]$$

o sea

$$\overset{<}{AOA'} = \overset{<}{BOB'} \qquad [9.8]$$

A este ángulo constante que forman las posiciones final e inicial de la recta definida por el polo y un punto cualquiera de una chapa que experimenta una rotación, lo denominaremos *intensidad* de la rotación y lo designaremos en lo sucesivo con θ.

En 6.1.4 demostramos que todo desplazamiento de una chapa en su plano era una rotación en torno de un polo, propio o impropio. Como consecuencia de ello podemos considerar la traslación como un caso límite de una rotación en que el polo de esta última es impropio.

9.1.3. Desplazamientos infinitésimos de chapas rígidas.

Consideremos, figura 9.7, una chapa que experimenta una rotación θ en torno de un polo O y supongamos que el ángulo que mide su intensidad sea despreciable en magnitud con relación a la de los ángulos finitos. Diremos que dicha rotación es *infinitésima.*

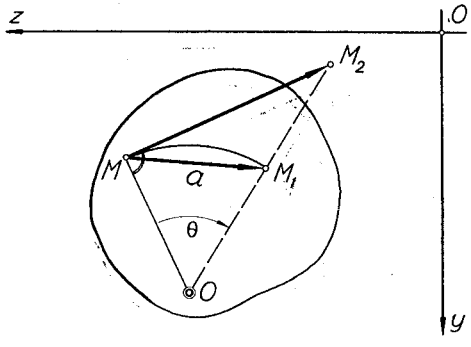


Fig. 9.7.

Sea ahora un punto M de la chapa. Como consecuencia del desplazamiento experimentado por ésta (rotación en torno de O) el punto M se desplazará sobre una trayectoria que es un arco de circunferencia, y pasará a ocupar la posición final M_1, experimentando el corrimiento $a = MM_1$.

Ahora bien, siendo θ in-

finitésima, también lo será el arco $\widehat{MM_1}$ y la cuerda MM_1 y, en última instancia, el segmento MM_2 definido sobre la tangente a la circunferencia en M por la prolongación del radio OM_1.

En consecuencia, podemos escribir:

$$a = \widehat{MM_1} = MM_1 = MM_2 \qquad [9.9]$$

Siendo, por otra parte

$$\widehat{MM_1} = OM.\theta \qquad [9.10]$$

resulta

$$a = MM_2 = OM.\theta\ . \qquad [9.11]$$

Como el ángulo $M_1 \overset{<}{M} M_2$ es del mismo orden de magnitud que el que mide la intensidad de la rotación θ, resulta despreciable en relación al MM_2O, recto en M. Es decir que, sin mayor error, podemos admitir que la dirección de a coincide con MM_2. Como consecuencia tenemos que:

un punto cualquiera perteneciente a una chapa que sufre una rotación infinitésima de intensidad θ, *experimenta un corrimiento de dirección normal a la recta que une al mismo con el polo, cuya magnitud está dada por el producto de la distancia del punto al polo por la intensidad de la rotación, y cuyo sentido coincide con el de esta última.*

De lo anterior surge que, conocido el corrimiento de un punto, el polo de la rotación que lo origina, sea propio o impropio, se encontrará ubicado sobre la recta normal al corrimiento trazada a partir de la posición inicial de aquél. Esta consideración nos permite ubicar de inmediato el polo si se conocen los corrimientos de dos puntos. En efecto, sea la chapa de la figura 9.8*a*, en que los puntos A y B han experimentado los corrimientos a_A y a_B respectivamente.

Si, de acuerdo con lo visto, el polo de la rotación infinitésima debe encontrarse, por una parte, sobre la normal a a_A trazada por A y, por otra, sobre la normal a a_B trazada por B, es evidente que el único punto que cumple simultáneamente ambas condiciones es el determinado por la intersección O de las normales que, en consecuencia, será el polo de la rotación infinitésima.

Si ambos corrimientos fueran paralelos y del mismo sentido, las correspondientes normales también resultarían paralelas y, en consecuencia, el polo sería impropio. En este caso el desplazamiento de la chapa sería

una traslación. Cuando los corrimientos conocidos son de sentido contrario y sus direcciones normales a la recta determinada por los puntos a los que corresponden los corrimientos, figura 9.8 c, la ubicación del polo

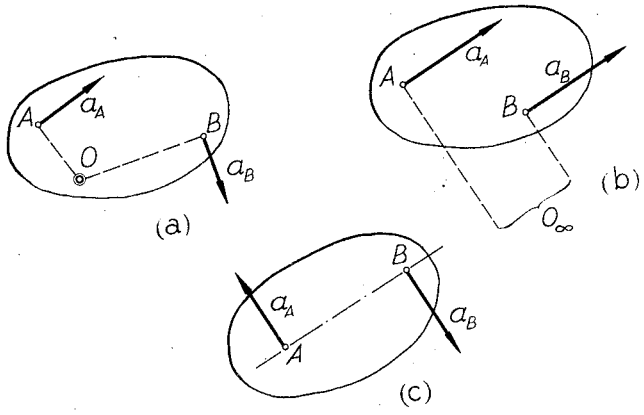


Fig. 9.8.

resulta indeterminada. En efecto, al coincidir ambas normales a los corrimientos, lo único que se sabe es que el polo pertenece a dicha recta pero, para ubicarlo, es necesario conocer el corrimiento de un tercer punto no alineado con A y B.

Si se conoce el corrimiento a_A de un punto A, figura 9.9, y la intensidad θ de la rotación que lo origina, la determinación del polo correspondiente es inmediata.

En efecto, de acuerdo con la [9.11] sabemos que:

$$a_A = \theta . d \qquad [9.12]$$

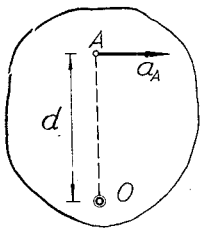


Fig. 9.9.

siendo d la distancia del punto A al polo O.

En consecuencia, resulta

$$|d| = \frac{|a_A|}{|\theta|} . \qquad [9.13]$$

Trazando por A la normal a a_A y llevando a partir del mismo la distancia d, queda ubicado el polo; sólo falta establecer a qué lado de a_A es necesario llevar d.

Ello surge del signo de θ. En efecto, la ubicación del polo debe ser tal que a_A tienda a hacer girar la chapa en torno a O en un

sentido cuyo signo corresponda al de θ. En el caso analizado, hemos supuesto $\theta > 0$.

En cambio, si se conoce el corrimiento a_A de un punto y la ubicación del polo, es posible determinar la intensidad y sentido de la rotación correspondiente, despejando θ de la expresión [9.12], por cuanto se conoce la distancia d entre el punto y el polo.

9.1.4. Diagrama de Williot-Mohr.

Sea, figura 9.10, una chapa S que experimenta una rotación θ en torno a un polo O. Como consecuencia de dicha rotación, los distintos puntos de la chapa sufrirán corrimientos a_i, los que serán normales a las rectas definidas por cada punto y el polo, siendo sus magnitudes proporcionales a las distancias de los puntos al polo, figura 9.10 a.

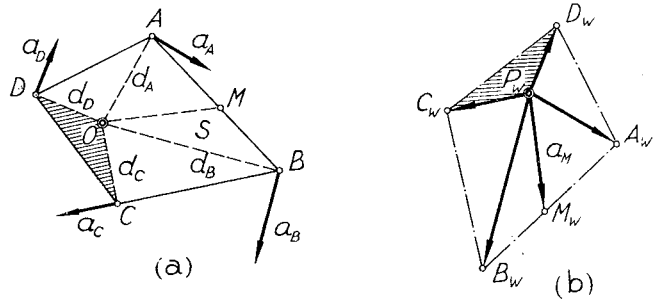


Fig. 9.10.

Si a partir de un punto cualquiera del plano P_w llevamos en una escala cualquiera vectores equipolentes con los corrimientos a_i experimentados por los puntos A, B, C, etc., obtendremos nuevos puntos A_w, B_w, C_w ... etc., que, unidos mediante una línea, determinan una figura denominada *diagrama de Williot-Mohr* (fig. 9.10 b).

Este diagrama es un diagrama polar de corrimientos, y facilita enormemente la determinación de los mismos. Al punto P_w, origen común de los vectores representativos de los corrimientos, se lo denomina polo del diagrama de *Williot-Mohr*.

Conocido el diagrama de *Williot-Mohr* correspondiente a una rotación de una chapa, para determinar el corrimiento de uno cualquiera de sus puntos, el M, por ejemplo, bastará trazar por P_w una paralela a la dirección del corrimiento posible del punto.

El vector definido por la intersección de dicha paralela con el diagrama de Williot-Mohr y el polo P_w, nos determina en magnitud y sentido, el corrimiento a_M experimentado por el punto M.

Consideremos ahora el triángulo DOC de la figura 9.10 *a* y su correspondiente $D_w P_w C_w$ de la figura 9.10 *b*. Dichos triángulos tienen los lados $P_w D_w$ y $P_w C_w$ respectivamente normales a los lados OD y OC, por construcción. Por otra parte, siendo

$$\left.\begin{aligned} a_C &= P_w C_w = \theta . d_C \\ a_D &= P_w D_w = \theta . d_D \end{aligned}\right\} \qquad [9.14]$$

resultan $P_w C_w$ y $P_w D_w$ proporcionales respectivamente a OC y OD. En consecuencia, los triángulos DOC y $D_w P_w C_w$ tienen dos lados correspondientes normales y proporcionales, por lo que los terceros lados $D_w C_w$ y DC también serán normales entre sí y proporcionales. Luego, los dos triángulos resultan ser normales entre sí y semejantes. Como es posible extender el razonamiento a los restantes triángulos que integran la figura, llegamos a la conclusión de que:

El diagrama de Williot-Mohr constituye una figura normal y semejante a la figura de la chapa que experimenta la rotación.

La conclusión anterior es de suma importancia para el trazado del diagrama de Williot-Mohr ya que, de acuerdo con la misma, para su trazado bastará conocer el corrimiento de un solo punto de la chapa que experimenta la rotación.

En efecto, sea la chapa de la figura 9.11, que sufre una rotación en torno al polo O. Como consecuencia de la misma, el punto A experimentará un corrimiento a_A.

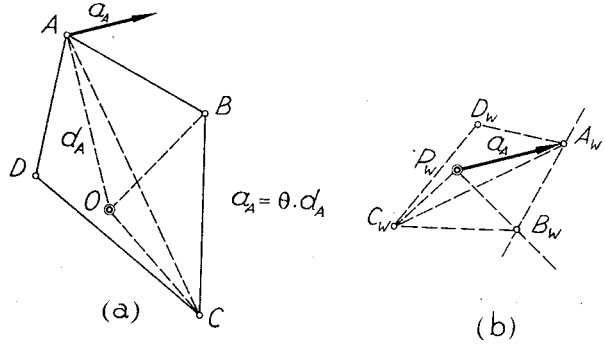


Fig. 9.11.

Llevando a partir de un punto P_w cualquiera y en una escala convenientemente elegida, un vector equipolente con a_A (fig. 9.11 *b*),

tendremos representado el punto A_w, que será un punto del diagrama de *Williot-Mohr*. Consideremos ahora el triángulo AOB. Sabemos que éste y el triángulo formado en el diagrama por P_w, A_w y el punto B_w correspondiente a B, son figuras normales y semejantes y que, en consecuencia, los lados correspondientes de ambos triángulos también serán normales entre sí. Por ello, para ubicar el punto B_w bastará trazar por A_w una normal a AB, y por P_w otra a OB. La intersección de ambas normales define el punto B_w buscado. En forma análoga, y partiendo de B_w, ubicamos C_w, lo que también podríamos haber realizado partiendo de A_w, es decir, trazando por este último punto una normal a AC, la que en su intersección con la normal a OC determina el punto C_w. Finalmente, el punto D_w lo podemos ubicar en la misma forma que la indicada para B_w y C_w o bien, sin recurrir a P_w, considerando que los triángulos ACD y $A_w C_w D_w$ deben ser normales y semejantes, conocidos A_w y C_w, trazamos por los mismos rectas normales respectivamente a AD y AC, las que en su intersección definen el punto D_w.

Conocidos A_w, B_w, C_w y D_w, los segmentos de recta $A_w B_w$, $B_w C_w$, $C_w D_w$ y $D_w A_w$ constituyen en su conjunto el diagrama de *Williot-Mohr* de la figura dada.

Cuando el desplazamiento que experimenta la chapa es una traslación, el diagrama de *Williot-Mohr* degenera y, de una figura normal y semejante a la dada, se transforma en un punto. En efecto, sea la chapa S de la figura 9.12 que experimenta una traslación definida por el vector a.

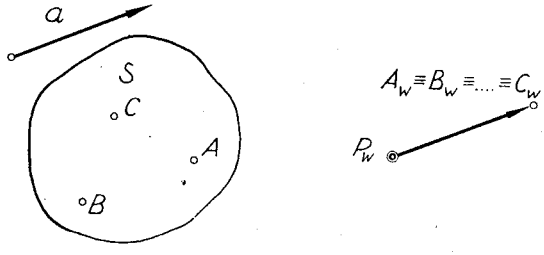


Fig. 9.12.

Elegido un punto P_w como polo del diagrama de *Williot-Mohr*, y llevando a partir del mismo un vector equipolente de a, su extremo define un punto que será el representativo, en el diagrama de *Williot-Mohr*, de la totalidad de los puntos de la chapa. En efecto, por tratarse de una traslación, todos los puntos de la chapa experimentarán el mismo corrimiento, igual en magnitud, dirección y sentido a los del vector que define la tras-

lación. Por ello, al coincidir todos los puntos del diagrama de *Williot-Mohr*, éste desaparece como tal y degenera en un punto.

9.1.5. Corrimientos debidos a rotaciones infinitésimas. Elaciones. Diagramas cartesianos de corrimientos.

Consideremos, figura 9.13, una chapa S que experimenta una rotación θ en torno al polo O y en la misma un punto A que, por efecto de la rotación de la chapa, sufrirá un corrimiento a, de intensidad $a = \theta . d$. Este corrimiento admite dos corrimientos componentes, uno ver-

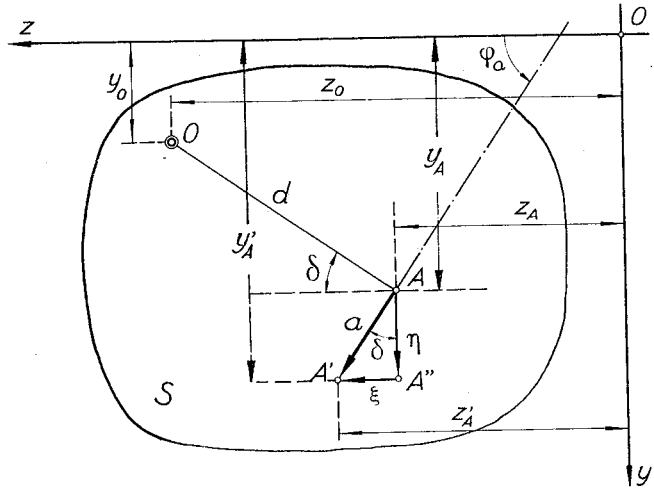


Fig. 9.13.

tical y otro horizontal, que hemos denominado η y ξ respectivamente y cuyas intensidades, en función de a y del argumento de su dirección, resultaban de las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= a . \operatorname{sen} \varphi_a \\ \xi &= a . \cos \varphi_a \end{aligned}\right\} \qquad [9.15]$$

Llamando δ al ángulo que forma la recta $OA = d$ con el eje z, tenemos

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} - |\delta| \qquad [9.16]$$

valor que, reemplazado en las [9.15] conduce a

$$\left.\begin{aligned} \eta &= a.\cos|\delta| \\ \xi &= a.\operatorname{sen}|\delta| \end{aligned}\right\} \qquad [9.17]$$

Introduciendo finalmente en las [9.17] el valor de a en función de θ resulta

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \theta.d.\cos|\delta| \\ \xi &= \theta.d.\operatorname{sen}|\delta| \end{aligned}\right\} \qquad [9.18]$$

expresiones que nos dan los valores de los corrimientos vertical y horizontal del punto A, en función del ángulo, que su distancia al polo forma con el eje z.

Si interpretamos a la distancia d como un vector de intensidad $|d|$ *y dirigido del punto al polo,* y llamamos z_A, y_A y z_O, y_O respectivamente a las coordenadas de A y O, tenemos que

$$\left.\begin{aligned} d.\cos|\delta| &= d_z = z_O - z_A \\ d.\operatorname{sen}|\delta| &= d_y = y_O - y_A \end{aligned}\right\} \qquad [9.19]$$

Reemplazando en los [9.18], resulta*

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \theta.d_z = \theta(z_O - z_A) \\ \xi &= -\theta.d_y = -\theta(y_O - y_A) \end{aligned}\right\} \qquad [9.20]$$

Por efecto de la rotación θ, el punto A, de coordenadas z_A, y_A, ha pasado a ocupar una nueva posición A' cuyas coordenadas son:

$$\left.\begin{aligned} z'_A &= z_A + \xi = z_A - \theta(y_O - y_A) = z_A - \theta.d_y \\ y'_A &= y_A + \eta = y_A + \theta(z_O - z_A) = y_A + \theta.d_z \end{aligned}\right\} \qquad [9.21]$$

Para cualquier otro punto de la chapa que consideremos, llegamos a expresiones análogas para las coordenadas de su posición final. En consecuencia, la rotación de una chapa transforma los puntos de coordenadas z_i, y_i en puntos de coordenadas dadas por las expresiones [9.21], es decir, que una rotación infinitésima es una *transformación biunívoca del plano.*

---

* Por ser $(y_O - y_A) < 0$ y $\theta > 0$, es necesario afectar la 2ª de las [9.20] con el signo (—) para que ξ resulte > 0.

La transformación del punto A, de coordenadas z_A, y_A en el punto A', de coordenadas z'_A, y'_A, puede suponerse como resultante de dos transformaciones parciales; una que lleve el punto A a la posición A'', y otra que traslade el punto A'' a su posición final. En efecto, imaginemos que apliquemos a los puntos de la chapa una transformación tal que, para los mismos, varíen únicamente sus ordenadas, manteniéndose constantes las abscisas, es decir, que para un punto tal como el A, se tenga:

$$\left.\begin{aligned} z''_A &= z_A \\ y''_A &= y_A + \theta(z_0 - z_A) \end{aligned}\right\} \qquad [9.22]$$

Como consecuencia de esta transformación parcial, el punto A pasará a ocupar la posición A'' y todos los puntos de la chapa habrán experimentado corrimientos paralelos al eje y y nulos en la dirección del eje z.

Efectuado lo anterior, apliquemos una segunda transformación, de naturaleza tal que los puntos de coordenadas z'', y'' pasen a la posición final que les corresponde como consecuencia de la rotación experimentada por la chapa a la que pertenecen. Dicha transformación debe desplazar a un punto tal como el A'', paralelamente al eje z, manteniendo constante su ordenada y''_A.

La transformación que hace cumplir lo anterior al punto A es la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} z'_A &= z''_A - \theta(y_0 - y_A) \\ y'_A &= y''_A \end{aligned}\right\} \qquad [9.23]$$

Si en la [9.23] reemplazamos los valores de z''_A, y''_A correspondientes a la primera transformación aplicada y dados por las [9.22] tendremos:

$$\left.\begin{aligned} z'_A &= z_A - \theta(y_0 - y_A) \\ y'_A &= y_A + \theta(z_0 - z_A) \end{aligned}\right\} \qquad [9.24]$$

expresiones que coinciden con las [9.21], que definían la posición final del punto A, luego del corrimiento originado por la rotación θ.

A cada una de estas transformaciones la denominaremos *elación*, definiéndola como una transformación biunívoca del plano por efecto de la cual todos los puntos experimentan corrimientos en una misma dirección. De acuerdo con lo anterior, una elación paralela al eje y, producirá en un punto A un corrimiento vertical.

$$\eta = \theta . d_z \qquad [9.25]$$

Si imaginamos dicha elación como un vector paralelo al eje y, aplicado en el polo O, y de intensidad y sentido iguales al de la rotación θ, figura 9.14, el corrimiento vertical η del punto A, debido a la misma, puede interpretarse como el momento estático, o de primer orden, del vector elación con respecto al punto A, siempre que a los efectos de la determinación del signo se considere la distancia como un vector dirigido del punto a la recta de acción del vector elación.

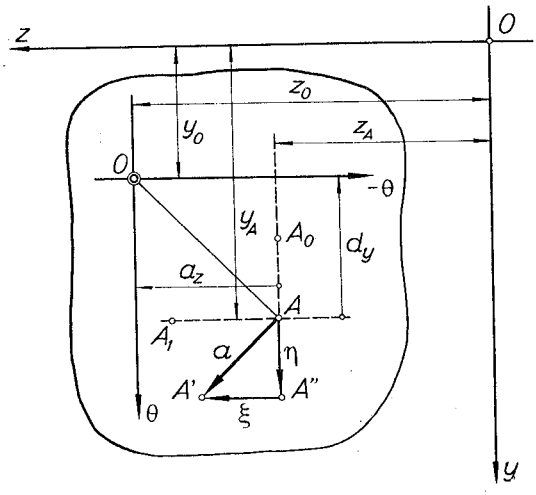


Fig. 9.14.

Conforme con lo anterior, y dado que el corrimiento horizontal de A tiene por expresión:

$$\xi = -\theta . d_y \qquad [9.26]$$

puede interpretárselo como el momento estático o de primer orden del vector elación, paralelo al eje z, de intensidad igual a la de la rotación pero de signo contrario.

De lo anterior surge que una rotación infinitésima puede interpretarse como resultante de dos elaciones θ y $-\theta$, paralelas a los ejes y y z respectivamente, y aplicadas al polo de la rotación.

Consideremos nuevamente las expresiones que definen los corrimientos vertical y horizontal del punto A de la figura 9.14:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \theta(z_0 - z_A) \\ \xi &= -\theta(y_0 - y_A) \end{aligned}\right\} \qquad [9.27]$$

Un punto tal como el A_0, situado sobre la vertical de A, tiene la misma abscisa z_A que este último. En consecuencia, el corrimiento vertical será el mismo para ambos. Otro tanto ocurre con el punto A_1, situado sobre la horizontal de A, en lo que respecta a su corrimiento horizontal, que será idéntico al de A. Por otra parte, si en la primera de las [9.27] hacemos variar z_A, η_A variará linealmente con z_A, por cuanto θ y z_0 permanecen constantes. Es decir que los corrimientos

verticales de los puntos de una chapa que experimenta una rotación de intensidad θ, varían linealmente en función de su distancia a la recta de acción de la correspondiente elación, ocurriendo otro tanto con los corrimientos horizontales.

En consecuencia, el diagrama que referido a una recta represente la ley de variación de los corrimientos en una determinada dirección, será otra recta.

Para que η se anule en la primera de las [9.27], es necesario que $z_0 = z_A$, lo que ocurre para los puntos ubicados sobre la vertical del polo, ocurriendo otro tanto para los corrimientos horizontales, que se anularán para los puntos ubicados sobre la horizontal trazada por el polo.

En consecuencia, los diagramas representativos de los corrimientos verticales y horizontales tendrán ordenadas nulas en correspondencia con la vertical del polo el primero y la horizontal el segundo.

Consideremos la chapa S de la figura 9.15 que experimenta una rotación $\theta > 0$ en torno a un polo O, y de la que pretendemos trazar los diagramas cartesianos de los corrimientos verticales y horizontales de sus puntos.

Para ello, elegimos un punto cualquiera A, y mediante las expresiones [9.27] calculamos sus corrimientos η y ξ. Para trazar el diagrama de corrimientos verticales, adoptamos un eje de referencia cualquiera, el n-n por ejemplo, y trazamos la vertical de O, recta de acción del vector θ, representativo de la elación vertical, que determina sobre el eje n-n, el punto O'. Adoptada una escala de corrimientos

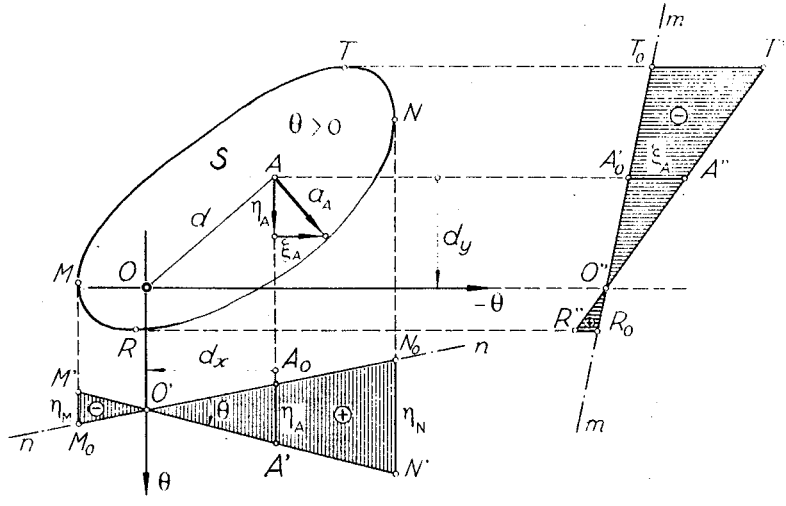


Fig. 9.15.

α(m/cm), llevamos en la misma, y a partir de A_o, intersección de la vertical de A con n-n, con su signo, el segmento $A_o A'$, representativo de η_A. De acuerdo con la convención adoptada en 9.1.1, si η_A es positivo, el segmento que lo represente deberá llevarse hacia abajo del eje de referencia. Uniendo A' con O', y prolongando dicha recta hasta las verticales extremas de la chapa (trazadas por M y N), tenemos completado el diagrama de corrimientos verticales. Las ordenadas ubicadas por debajo del eje de referencia, serán positivas, y negativas las que lo sean por encima.

El ángulo que forman el eje de referencia y la recta $M'N'$, en cierta escala, mide la intensidad de la rotación θ. Más rigurosamente, la intensidad de la rotación θ está expresada, en una cierta escala, por la tangente trigonométrica del ángulo que forman ambas rectas.

Para el trazado del diagrama de corrimientos horizontales, se procede en forma análoga, eligiendo un eje de referencia m-m y proyectando horizontalmente el polo O y el punto A en O'' y A'_o respectivamente. Llevando horizontalmente, a partir de A'_0 y con su signo, en la misma escala adoptada para el diagrama de corrimientos verticales, un segmento $A'_0 A''$, representativo de ξ_A, obtenemos un punto A'' que unido con O'' nos da el diagrama de corrimientos horizontales. En este diagrama, limitado por las horizontales trazadas por T y R puntos extremos superior e inferior de la chapa, tendrá, de acuerdo con la convención adoptada, sus ordenadas negativas situadas a la derecha del eje m-m y las positivas a la izquierda.

Si bien los ejes de referencia pueden ser de cualquier dirección, conviene por razones prácticas elegirlos horizontal para el diagrama de corrimientos verticales y vertical para el de los horizontales.

Sea ahora la chapa S de la figura 9.16, que experimenta una rotación $\theta > 0$.

Los correspondientes diagramas de corrimientos verticales y horizontales pueden trazarse sin haber determinado previamente los corrimientos de un punto, como veremos a continuación.

Aplicados en el polo O los vectores θ y $-\theta$ que corresponden a las elaciones paralelas a los ejes y y z respectivamente, trazamos un eje horizontal n-n y proyectamos sobre el mismo el polo O, obteniendo el punto O'. Trazando por éste la recta $M'N'$ que forme con n-n un ángulo cuyo sentido coincida con el de θ (positivo en el caso presente) obtenemos un diagrama de corrimientos verticales. Para que las ordenadas de este diagrama correspondan a los verdaderos corrimientos verticales experimentados por los puntos de la chapa como consecuencia de la rotación θ, debemos determinar la escala en que es necesario medir las ordenadas.

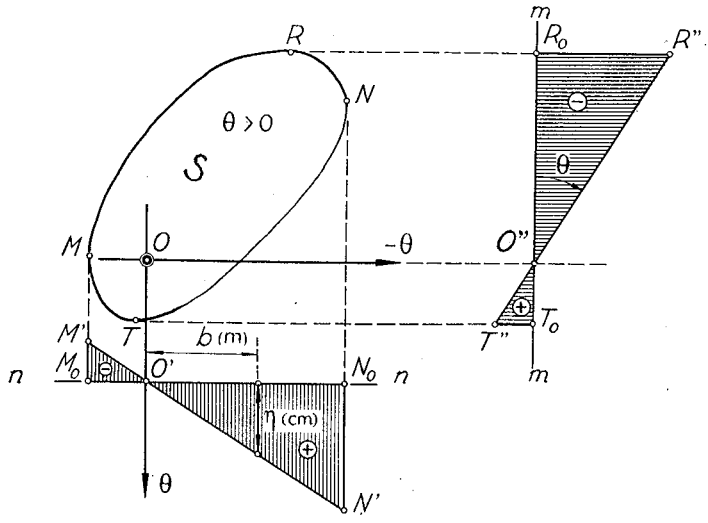


Fig. 9.16.

Para ello, recordemos que la tangente trigonométrica del ángulo que formen las rectas $M'N'$ y n-n, mide la intensidad de la rotación θ. Si a partir de O' llevamos horizontalmente un segmento que en la escala de longitudes represente una cierta longitud b(m) y por su extremo trazamos una vertical, esta última determina en el diagrama una ordenada η(cm) tal que

$$\frac{\eta(\text{cm}) \text{ escala de corrimientos}}{b(\text{m})} = \theta \qquad [9.28]$$

de donde:

$$\text{Escala de corrimientos} = \theta \frac{b}{\eta} \left(\frac{\text{m}}{\text{cm}} \right) . \qquad [9.29]$$

Para el trazado del diagrama de corrimientos horizontales elegimos un eje de referencia vertical m-m y proyectamos horizontalmente el polo O en O''. Si adoptamos para este diagrama la misma escala que para el de corrimientos verticales, el diagrama estará dado por una recta normal a $M'N'$ trazada por O''.

En efecto, si para ambos diagramas la escala es la misma, como la pendiente de cada diagrama con respecto a su eje de referencia mide la intensidad de la rotación θ, y ésta es única para los dos, las pendientes deben resultar iguales. En consecuencia, al ser octogonales los ejes de referencia, también deben serlo las rectas que constituyen los diagramas.

En lo que respecta al signo de los mismos, si las rectas que los definen han sido orientadas de modo que el sentido de los ángulos que forman con los respectivos ejes de referencia coincidan con el de la rotación, corresponderá signo positivo a las ordenadas ubicadas por debajo y a la izquierda de los ejes de referencia.

Conocido el diagrama de corrimientos de una dirección determinada, es posible determinar la dirección, intensidad y sentido del corrimiento efectivo de cualquier punto de la chapa. En efecto, sea la chapa de la figura 9.17, de la que conocemos su diagrama de corrimientos verticales η, debidos a una rotación $\theta > 0$, referido al eje horizontal n-n. Se pide determinar el corrimiento efectivo a_A de un punto cualquiera A. Para ello, determinamos en el diagrama el corrimiento vertical η_A. Uniendo luego A con O y trazando por el primero una normal a OA obtenemos la *dirección* del desplazamiento efectivo a_A buscado.

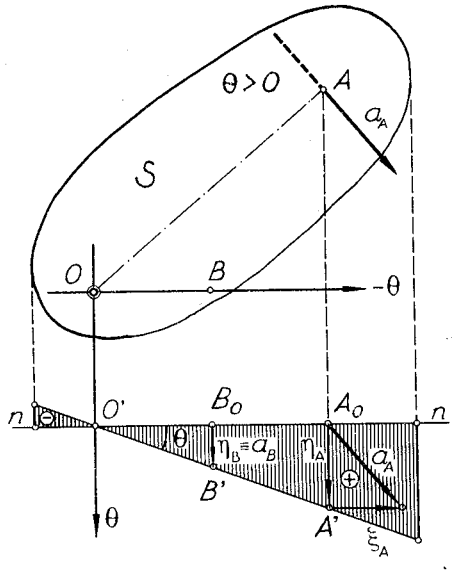


Fig. 9.17.

Trazando por el origen del vector representativo de η_A una paralela a la dirección de a_A, y desproyectando sobre la misma el extremo del vector η_A obtenemos la magnitud y sentido del vector a_A. El vector horizontal definido por los extremos de los vectores η_A y a_A corresponde al vector representativo del corrimiento horizontal de A, es decir ξ_A. Las ordenadas del diagrama dan directamente los corrimientos *efectivos* de los puntos de la chapa que pertenecen a una recta horizontal trazada por O, tal como el B. En efecto, para dichos puntos los corrimientos horizontales son nulos, por serlo el momento estático del vector $-\theta$ con respecto a los mismos. En consecuencia, siendo

$$| a_B | = | \sqrt{\eta_B^2 + \xi_B^2} | \qquad [9.30]$$

al ser nulo ξ_B resulta

$$a_B = \eta_B \, . \qquad [9.31]$$

9.1.6. Composición de rotaciones infinitésimas.

Si una chapa se encuentra sujeta a dos rotaciones θ_1 y θ_2 de polos O y O', respectivamente, el desplazamiento resultante que experimenta la misma, será, como hemos visto anteriormente, una nueva rotación. El problema se reduce entonces, a la determinación del polo e intensidad de la rotación resultante. Previo a ello demostraremos que: *Si una chapa experimenta rotaciones en torno de dos polos distintos, el corrimiento resultante para un punto cualquiera de la misma se obtiene componiendo los corrimientos originados aisladamente por cada rotación.*

Sea la chapa S de la figura 9.18 que experimenta sucesivamente dos rotaciones infinitésimas θ_1 y θ_2, en torno de los polos O y O_2.

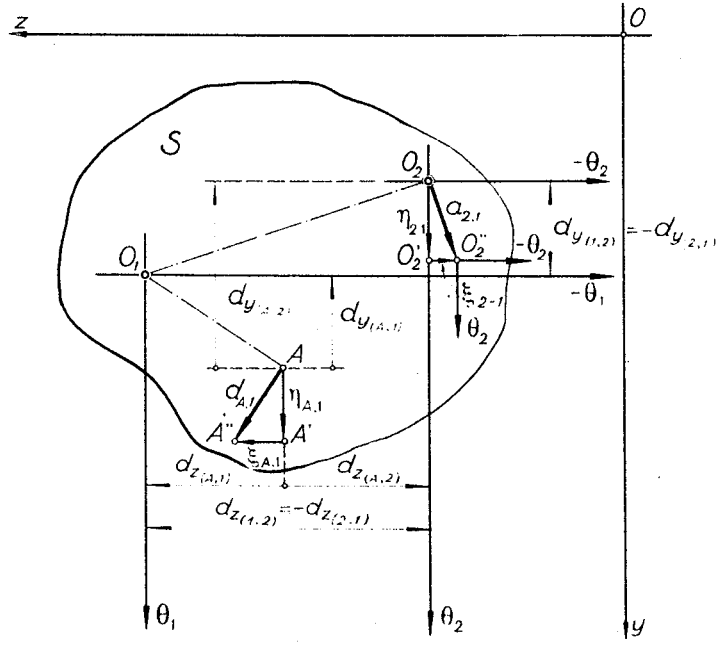


Fig. 9.18

Aplicamos primeramente la rotación θ_1 en el polo O_1, que descompuesta en las elaciones θ_1 y $-\theta_1$, paralelas a los ejes y y z respec-

tivamente, origina en un punto A cualquiera de la chapa los corrimientos

$$\left.\begin{aligned} \eta_{A.1} &= \theta_1 . d_{z(A.1)} \text{ (vertical)} \\ \xi_{A.1} &= -\theta_1 . d_{y(A.1)} \text{ (horizontal)} \end{aligned}\right\} \qquad [9.32]$$

pasando A a ocupar la posición A''.

Simultáneamente, el punto O_2, polo de la segunda rotación, experimentará corrimientos

$$\left.\begin{aligned} \eta_{2.1} &= \theta_1 . d_{z(2.1)} \\ \xi_{2.1} &= -\theta_1 . d_{y(2.1)} \end{aligned}\right\} \qquad [9.33]$$

Como consecuencia de estos corrimientos, el punto O_2 pasa a ocupar la posición O_2''.

Al hacer actuar la segunda rotación, que como en el caso de la primera, descompbnemos en dos elaciones paralelas a los ejes coordenados, los vectores θ_2 y $-\theta_2$ deberán aplicarse no ya en O_2, sino en O_2''.

En consecuencia, los corrimientos vertical y horizontal de A'' debidos a θ serán

$$\left.\begin{aligned} \eta_{A.2} &= \theta_2(d_{z(A.2)} + \xi_{2.1} + \xi_{A.1}) = \\ &= \theta_2 . d_{z(A.2)} + \theta_2 . \xi_{2.1} + \theta_2 . \xi_{A.1} \\ \xi_{A.2} &= -\theta_2(d_{y(A.2)} + \eta_{2.1} + \eta_{A.1}) = \\ &= -\theta_2 . d_{y(A.2)} - \theta_2 . \eta_{2.1} - \theta_2 . \eta_{A.1} \end{aligned}\right\} \qquad [9.34]$$

Por ser tanto la rotación como los corrimientos magnitudes infinitésimas, el producto de dos cualesquiera de ellas será un infinitésimo de orden superior al producto de una de ellas por una magnitud finita.

En consecuencia, en las expresiones [9.34], $\theta_2 \xi_{2.1}$; $\theta_2 \xi_{A.1}$ y $\theta_2 \eta_{2.1}$; $\theta_2 \eta_{A.1}$ serán despreciables frente a $\theta_2 . d_{z(A.2)}$ y $\theta_2 . d_{y(A.2)}$, es decir que

$$\left.\begin{aligned} \eta_{A.2} &= \theta_2 . d_{z(A.2)} \\ \xi_{A.2} &= -\theta_2 . d_{y(A.2)} \end{aligned}\right\} \qquad [9.35]$$

o, lo que es lo mismo, podemos suponer que O_2 no sufre corrimientos debidos a θ_1 y que, en consecuencia, las elaciones θ_2 y $-\theta_2$ están aplicadas directamente en O_2, y admitir además, que para determinar los corrimientos de A debidos a θ_2, dicho punto no se ha desplazado por efecto de O_1.

Sea ahora la chapa S de la figura 9.19 que experimenta una rotación $\theta_1 < 0$ en torno del polo O_1. Si aplicamos en este último una elación θ_1 paralela al eje y, como consecuencia de la misma el polo O_2 sufrirá un corrimiento vertical η_2 y pasará a ocupar la posición O_2' y la recta $O_1 O_2^+$ se transformará en la $O_1 O_2'$.

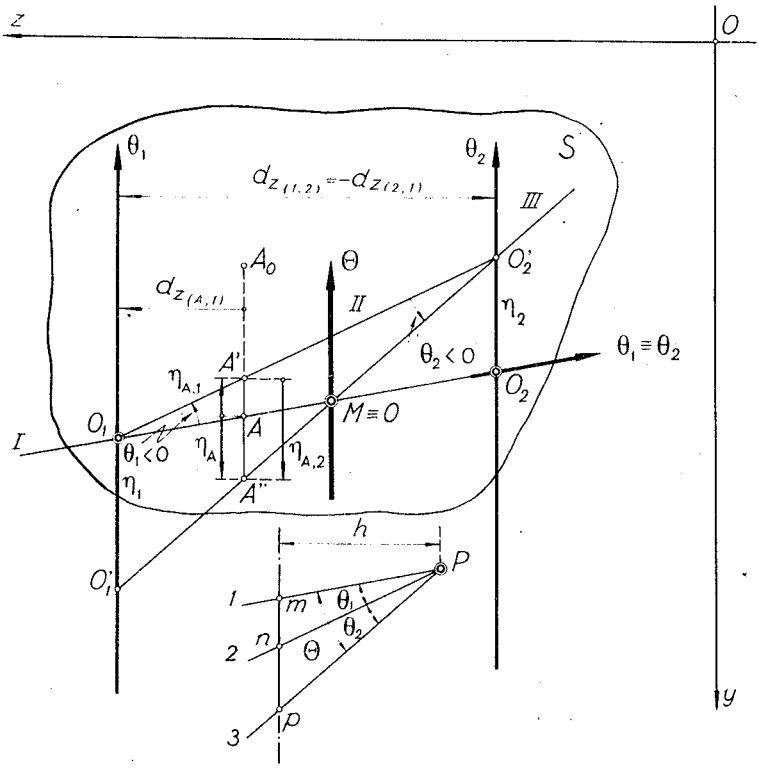


Fig. 9.19.

Las ordenadas comprendidas entre $O_1 O_2'$ y $O_1 O_2$ referidas a esta última, miden la magnitud de los corrimientos verticales de todos los puntas de la chapa ubicados sobre una misma vertical. Sometamos ahora la chapa a una segunda rotación $\theta_2 < 0$. Aplicada en O_2 la elación θ_2 paralela al eje y, como consecuencia de ella O sufrirá un corrimiento vertical η_1, y pasa a ocupar la posición O_1', transformándose la recta $O_2' O_1$ en la $O_2' O_1'$.

Las ordenadas comprendidas entre ambas rectas y referidas a la primera, miden los corrimientos verticales de los puntos de la chapa ubicados sobre una misma vertical.

Un punto tal como el A, por efectos de la primera rotación pasa a ocupar la posición A' experimentando un corrimiento vertical $\eta_{A.1}$. Como consecuencia de la segunda rotación, sufre el corrimiento vertical $\eta_{A.2}$. El corrimiento resultante será evidentemente $\eta_A = \eta_{A.1} + \eta_{A.2}$, es decir, la ordenada comprendida entre las rectas $O_1' O_2'$ y $O_1 O_2$, referida a esta última. Ello se cumple también para cualquier otro punto ubicado sobre la vertical de A, tal el A_0.

En consecuencia, la recta $O_1' O_2'$ referida a la recta $O_1 O_2$ constituye un diagrama de los corrimientos verticales resultantes de los puntos de la chapa sujeta a la acción de las dos rotaciones.

Es evidente que los puntos ubicados sobre la vertical de M, intersección de $O_1 O_2$ con $O_1' O_2'$ experimentan corrimientos verticales nulos y en consecuencia el polo O de la rotación resultante debe pertenecer a dicha vertical.

Si aplicamos ahora las elaciones θ_1 y θ_2 en los polos O_1 y O_2 respectivamente, de dirección $O_1 O_2$, los puntos ubicados sobre la recta $O_1 O_2$ no experimentarán corrimientos en dicha dirección.

En consecuencia, el punto M, por pertenecer a $O_1 O_2$ no sufre corrimientos en dicha dirección, y como por lo manifestado antes, tampoco experimentaba corrimientos verticales, resulta inmóvil y en consecuencia, coincidente con el polo.

Llegamos así a la siguiente conclusión:

El polo de la rotación resultante de dos rotaciones, se encuentra alineado con los polos de las rotaciones componentes.

Consideremos ahora en la figura 9.19 el triángulo $O_1 O O_2'$.

En el mismo tenemos:

$$O_2' \overset{\angle}{O} O_2 = O_2' \overset{\angle}{O_1} O + O_1 \overset{\angle}{O_2'} O \qquad [9.36]$$

pero $O_2' \overset{\angle}{O_1} O = \theta_1$; $O_1 \overset{\angle}{O_2'} O = \theta_2$. y llamando Θ al ángulo $O_2' O O_2$, resulta:

$$\Theta = \theta_1 + \theta_2 \qquad [9.37]$$

es decir que:

La intensidad de la rotación resultante es igual a la suma de las rotaciones componentes.

Nos falta aún determinar la ubicación del polo buscado.

Por un punto P cualquiera, tracemos tres rectas 1, 2 y 3, respectivamente paralelas a las rectas $O_1 O_2$; $O_1 O_2'$ y $O_1' O_2'$. Si a una distancia h cualquiera de P trazamos una recta vertical, la misma determina en su intersección con 1, 2 y 3 los puntos m, n y p.

Por construcción, los ángulos mPn y nPp son iguales respectivamente a θ_1 y θ_2, y en consecuencia:

$$\measuredangle mPp = \theta_1 + \theta_2 = \Theta . \qquad [9.38]$$

Por otra parte, por ser θ_1 y θ_2 infinitésimos, resulta:

$$\left.\begin{aligned} mn &= h\theta_1 \\ np &= h\theta_2 \end{aligned}\right\} \qquad [9.39]$$

es decir que los segmentos mn y np son respectivamente proporcionales a los vectores elación θ_1 y θ_2, siendo el factor de proporcionalidad la distancia polar h.

Por otra parte, las rectas $O_1 O_2 = I$ y $O_1 O_2' = II$, además de cortarse sobre el vector elación θ_1, son respectivamente paralelas a las rectas I y 2, que pasan por el origen y extremo del segmento mn.

En consecuencia, podemos considerarlas como lados consecutivos de un polígono funicular del vector elación θ_1, aplicado en O. Extendiendo lo anterior a la elación θ_2 aplicada en O_2, llegamos a que la recta de acción del vector representativo de la elación vertical resultante Θ debe pasar por el punto de intersección de los lados extremos del polígono funicular correspondiente a las elaciones verticales θ_1 y θ_2, interpretadas como vectores y aplicadas en sus respectivos polos.

Conocida la recta de acción de la elación vertical resultante, la ubicación del polo de la rotación resultante es inmediata, por cuanto debe encontrarse sobre la vertical de la elación Θ y alineado con O_1 y O_2.

Para determinar analíticamente el polo y la intensidad de la rotación resultante de dos rotaciones de polo conocido se procede en la forma que explicamos a continuación.

Sea la chapa S de la figura 9.20, que experimenta las rotaciones θ_1 y θ_2 de polos O_1 y O_2, definidos por sus coordenadas z_1, y_1 y z_2, y_2 respectivamente.

Descompuestas ambas rotaciones en sus elaciones paralelas a los ejes z é y y halladas sus respectivas resultantes Θ y $-\Theta$, las coordenadas

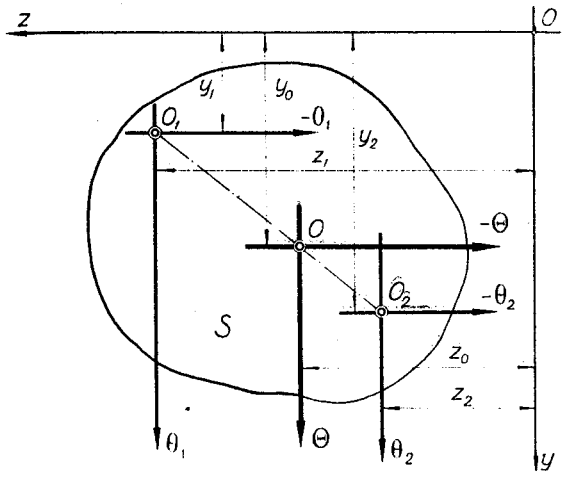


Fig. 9.20.

del polo de la rotación resultante estarán dadas por las distancias de estas últimas a los ejes coordenados.

Tendremos así que

$$\Theta = \theta_1 + \theta_2 \,. \qquad [9.40]$$

Tomando momentos de las elaciones respecto de los ejes y y z resulta:

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 &= \Theta z_0 \\ -\theta_1 y_1 - \theta_2 y_2 &= -\Theta y_0 \end{aligned}\right\} \qquad [9.41]$$

y teniendo en cuenta la [9.40]

$$\left.\begin{aligned} (\theta_1 + \theta_2) z_0 &= \theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 \\ -(\theta_1 + \theta_2) y_0 &= -\theta_1 y_1 - \theta_2 y_2 \end{aligned}\right\} \qquad [9.42]$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \frac{\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2}{\theta_1 + \theta_2} \\ y_0 &= \frac{\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2}{\theta_1 + \theta_2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.43]$$

expresiones que nos definen las coordenadas del polo O de la rotación resultante.

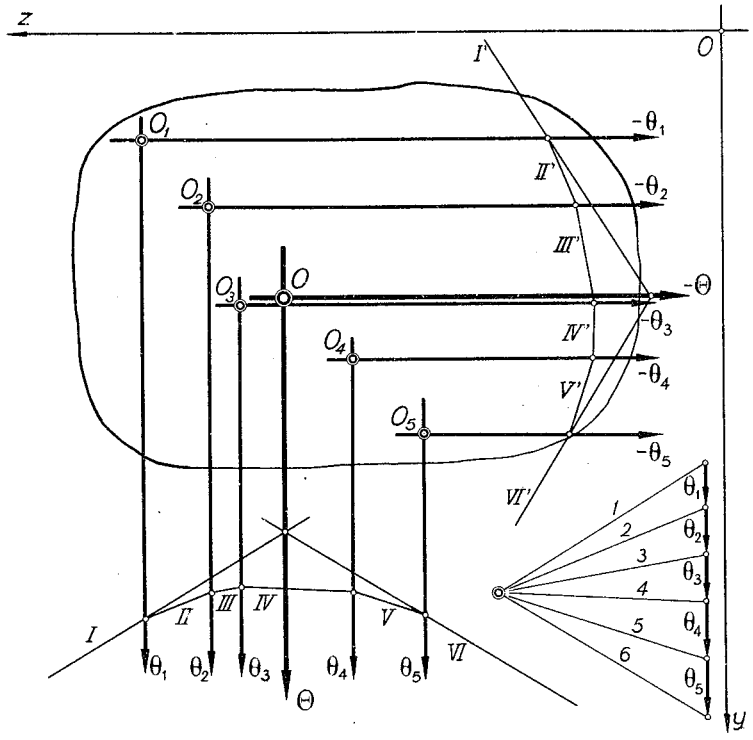


Fig. 9.21.

Si en lugar de dos rotaciones se tratara de n rotaciones θ_1, θ_2 ... θ_n aplicadas en polos O_1, O_2 ... O_n, la determinación analítica del polo y la intensidad de la rotación resultante es inmediata. Basta para ello extender las expresiones [9.40] y [9.43] a n elementos, obteniéndose:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \sum_1^n \theta_i \\ z_0 &= \frac{\sum_1^n \theta_i z_i}{\sum_1^n \theta_i} \\ y_0 &= \frac{\sum_1^n \theta_i y_i}{\sum_1^n \theta_i} \end{aligned}\right\} \qquad [9.44]$$

En cuanto a la solución gráfica, procede en la forma indicada en la figura 9.21.

Aplicados en los polos O_i los vectores elación paralelos al eje y, se determina mediante un polígono funicular de los mismos el vector elación resultante Θ de la dirección y. Procediendo análogamente para la dirección z, en la intersección de los vectores elación Θ y $-\Theta$, paralelos respectivamente a y y z, se tiene el polo O de la rotación resultante. La segunda elación podría aplicarse en otra dirección cualquiera, pero si se la hace coincidir con z, se simplifica el trazado, por cuanto los lados del segundo polígono funicular resultan normales a los correspondientes del primero.

9.1.7. Descomposición de rotaciones infinitésimas en rotaciones componentes.

El problema de la descomposición de una rotación de polo e intensidad conocida, en otras dos, de polos dados, exige, para que la solución sea posible, que los tres polos se encuentren alineados.

Sea la chapa S de la figura 9.22, que experimenta una rotación de intensidad Θ de polo O, y se desea conocer las intensidades de dos rotaciones componentes de polos O_1 y O_2.

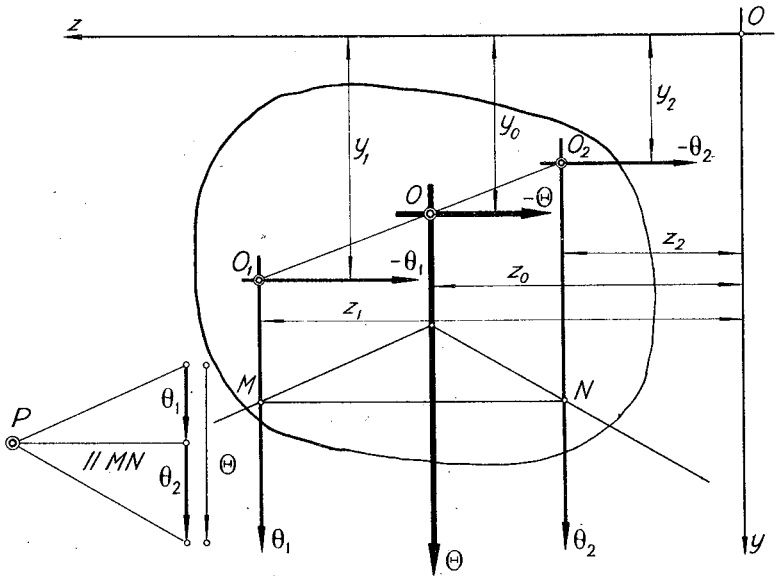


Fig. 9.22.

Aplicada en O la elación vertical Θ y trazado el correspondiente polígono funicular, los lados extremos determinan en su intersección con las rectas de acción de las elaciones verticales, incógnitas θ_1 y θ_2, aplicadas en O_1 y O_2 respectivamente, dos puntos M y N, que unidos definen el lado intermedio del funicular de θ_1 y θ_2. Trazando por P una paralela a su intersección con el vector representativo de Θ, ésta determina dos vectores, que serán representativos de las intensidades de θ_1 y θ_2.

La solución analítica se obtiene mediante las expresiones [9.41]. En efecto, en las mismas, son conocidos los valores de z_0, y_0, z_1, y_1, z_2 y_2, lo que conduce a un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas θ_1 y θ_2 que resuelven el problema.

Sea ahora el caso de la descomposición de una rotación de polo O e intensidad Θ conocidos, en tres rotaciones θ_1, θ_2 y θ_3 de polos conocidos.

El problema se resuelve descomponiendo la rotación Θ en una de las rotaciones (la θ_3 en el caso de la figura 9.23) y en otra auxiliar, cuyo polo queda definido por la intersección de las rectas determinadas por los polos de dos de las rotaciones por una parte, y por la otra, por el polo de la rotación restante y el de la conocida.

La solución analítica se efectúa mediante las ecuaciones [9.44], en las que se conocen las coordenadas de los cuatro polos y la intensidad de la rotación dada, siendo incógnitas las intensidades θ_1, θ_2 y θ_3 de las rotaciones componentes. Se llega así a un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas, que resuelven el problema.

En este problema, si dos de los polos de las rotaciones incógnitas se encuentran alineados con el polo de la rotación conocida, es evi-

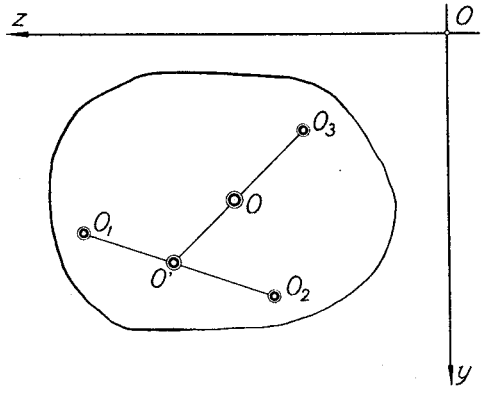


Fig. 9.23.

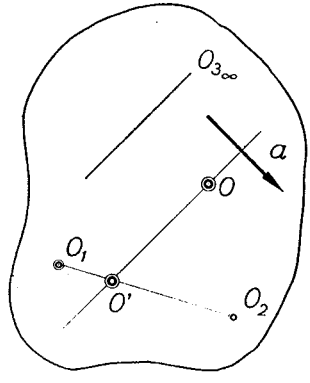


Fig. 9.24.

dente que la intensidad de la tercera rotación componente es nula. Si, en cambio, los tres polos de las rotaciones incógnitas estuvieran entre sí alineados, el problema sería indeterminado.

Cuando uno de los polos es el punto impropio de una dirección, el θ_3 de la figura 9.24 por ejemplo, el problema se reduce a descomponer la rotación en una rotación auxiliar de polo O' y una traslación normal a OO', equivalente a la rotación de polo impropio, procediéndose luego a descomponer la rotación auxiliar en las rotaciones de polos O_1 y O_2.

En el parágrafo siguiente analizaremos entre otros el problema de la descomposición de una rotación en otra rotación y una traslación.

9.1.8. Rotaciones y traslaciones, composiciones y descomposiciones varias.

Sea la chapa de la figura 9.25, que experimenta una rotación θ de polo O y una traslación definida por el corrimiento a.

Hacemos actuar primeramente la rotación θ, descompuesta en dos elaciones θ y $-\theta$ normales entre sí y paralela esta última a la dirección del corrimiento a que define la traslación.

Como consecuencia, los puntos de la recta n-n, normal a la dirección de a sufrirán corrimientos paralelos a esta última, pasando a ocupar la posición n'-n'. Aplicando ahora la traslación a, todos los puntos de la chapa experimentarán el mismo corrimiento y la recta n'-n' ocupará una nueva posición n''-n'', paralela a la anterior pero desplazada el valor a. El punto A, perteneciente a la recta n-n cuyo corrimiento debido a la elación $-\theta$ es de igual magnitud que a pero de sentido contrario, al aplicar la traslación, experimentará un corrimiento opuesto, y en consecuencia su corrimiento resultante en dirección normal a n-n será nulo. Como su corrimiento en la dirección de n-n también es nulo por pertenecer a la recta de acción del vector elación θ, el punto resulta inmóvil.

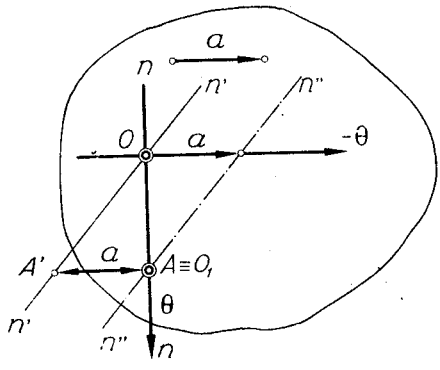


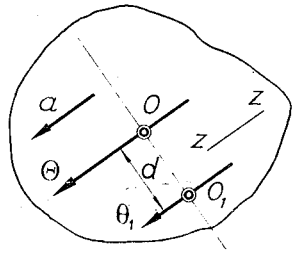
Fig. 9.25.

Como existe un solo punto que cumple con esta condición, dicho punto es necesariamente el polo del desplazamiento resultante, que resulta ser una rotación de igual intensidad y signo que la componente, pero de

polo desplazado en la dirección normal a la de la traslación, de una distancia

$$|d| = \frac{|a|}{|\theta|} . \qquad [9.45]$$

El problema inverso consiste en la descomposición de una rotación en otra rotación de polo conocido y una traslación, de dirección también conocida. Este problema sólo es posible si la dirección de la traslación es normal a la recta definida por ambos polos.



$|a| = |\Theta| . |d|$

Fig. 9.26.

Sea la chapa S de la figura 9.26, que experimenta una rotación Θ de polo O_i que se pide descomponerla en una rotación de polo O_1 y una traslación de dirección z-z. Aplicada en O la elación Θ de dirección paralela a z-z, el problema se reduce a determinar un par de vectores que traslade al vector representativo de Θ al polo O_1. El momento de dicho par está dado por la expresión:

$$|a| = |\Theta| . |d| . \qquad [9.46]$$

La expresión [9.46] nos da la intensidad de la traslación componente. En cuanto a la rotación θ_1, su intensidad será

$$\theta_1 = \Theta . \qquad [9.47]$$

Consideremos ahora la chapa de la figura 9.27, sujeta a una traslación a.

Supongamos un par de elaciones θ_1, tal que su momento, si llamamos d la distancia entre las rectas de acción de los vectores, tenga por expresión

$$a = \theta_1 , d . \qquad [9.48]$$

Consideremos ahora dos puntos, A, y B, ubicados cada uno de ellos sobre la recta de acción de una de las elaciones.

Por efecto de la elación θ_1, el punto B experimentará un corrimiento que, de acuerdo con la [9.48] valdrá precisamente a y que lo traslada a la posición B'. La recta AB se transforma en la AB'. Por su parte, la elación $-\theta_1$ trasladada en su dirección al punto A, que experimenta un corrimiento a, transformándose la recta AB' en la $A'B'$,

paralela a la AB. Es decir que, por efecto del par de elaciones, dos puntos de la chapa han experimentado un mismo corrimiento, lo que, como sabemos, define una traslación.

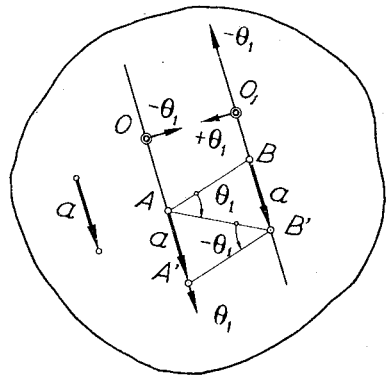


Fig. 9.27.

En consecuencia, *una traslación equivale a un par de elaciones de su misma dirección y de momento igual a la intensidad de la primera.*

Volviendo a la figura 9.27, supongamos dos puntos O y O_1, pertenecientes el primero a la recta de acción de θ_1, y el segundo a la de $-\theta_1$, y ubicados sobre una normal a ambos. Apliquemos en dichos puntos dos elaciones de intensidad θ_1, pero opuestas. Éstas, con las aplicadas según la dirección del desplazamiento a, configuran un par de rotaciones opuestas, de intensidad θ_1 y de polos O y O_1. Como las elaciones normales a a_1 por ser opuestas conducen a corrimientos nulos, concluimos que una traslación puede reemplazarse por un par de rotaciones, de momento igual a la intensidad de la traslación y cuyos polos se encuentren sobre una normal a la dirección de la última.

9.1.9. Corrimientos relativos. Variación de distancia entre dos puntos.

Sean dos puntos A y B, figura 9.28, que experimentan los corrimientos definidos por los vectores a_A y a_B respectivamente, y que como consecuencia de los mismos pasan a ocupar las posiciones A' y B'. Si analizamos las posiciones relativas de ambos puntos, antes y después de haber experimentado sus respectivos corrimientos, vemos que las mismas difieren. Los puntos, uno con respecto al otro, han experimentado un cierto corrimiento, que denominaremos *corrimiento relativo.* La magnitud, dirección y sentido de dicho corrimiento relativo, lo determinamos mediante el trazado de un diagrama de Williot-Mohr.

Llevando a partir de un punto P_w, elegido como polo del diagrama, vectores equipolentes con los corrimientos experimentados por los puntos A y B, sus extremos definen los puntos A_w y B_w. El vector dirigido de B_w a A_w que indicaremos con a_{AB} determina en intensidad, dirección y sentido, el corrimiento relativo de A respecto de B y el opuesto,

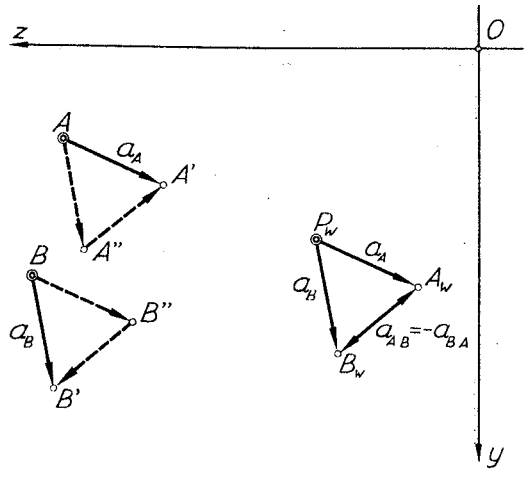


Fig. 9.28.

a_{BA} el de B respecto de A, es decir que

$$a_{AB} = -a_{BA} . \qquad [4.49]$$

En efecto, supongamos que ambos puntos estén sujetos a una traslación definida por el corrimiento a_B. El punto A se desplazará paralelamente al B, experimentando el mismo corrimiento que éste. Como consecuencia de dicho corrimiento, el punto B pasará a ocupar la posición B', que será definitiva, mientras que el A se encontrará en A''.

Para llevar ahora A a la posición definitiva A' que le corresponde por efecto del corrimiento a_A impuesto, es necesario hacerle experimentar un nuevo corrimiento $A''A'$, que coincide en intensidad, dirección y sentido con el vector a_{AB} del diagrama de Williot, como es fácil observar y que constituye el desplazamiento relativo de A respecto de B.

Si hubiéramos aplicado primeramente el corrimiento a_A a ambos puntos, el punto A habría pasado a ocupar su posición definitiva A', mientras que el B se encontraría en B'' y para llevarlo a su posición final B' sería necesario que experimentara un nuevo corrimiento $B''B' = a_{BA}$, *corrimiento relativo* de B respecto de A.

A los corrimientos a_A y a_B los denominaremos *corrimientos absolutos* de los puntos.

En lo que respecta al signo, tanto de los corrimientos relativos como absolutos, el mismo corresponderá al de la proyección del corrimiento sobre el eje z, salvo para los corrimientos verticales, en que se analizará el signo de la proyección sobre el eje y.

Sean ahora los puntos A y B de la figura 9.29 que experimentan los corrimientos a_A y a_B pasando a ocupar respectivamente las posiciones A' y B'. La longitud del segmento AB, como consecuencia de los corrimientos experimentados por los puntos que lo definen, habrá sufrido una variación, denominada *variación de distancia* entre ambos puntos, y que, en lo sucesivo, indicaremos con δ. Así δ_{AB} indica la variación de distancia entre A y B.

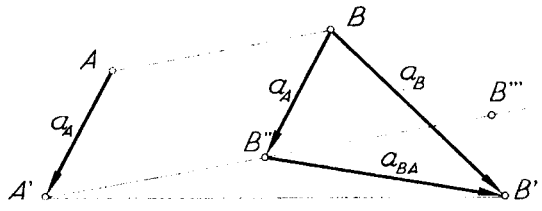


Fig. 9.29.

Para determinar la variación de distancia, tracemos por A' una paralela a AB y por B otra a AA'. La intersección de ambas, B'', determina por una parte el segmento $A'B'' = AB$ y por otra el vector $BB'' = a_A$. Como $BB' = a_B$ podemos interpretar el triángulo $BB'B''$ como un diagrama de Williot-Mohr en el que $B \equiv P_w$ y el vector $B''B' = a_{BA}$ corresponde al corrimiento relativo de B respecto de A.

La nueva distancia entre A y B será $A'B'$. Si prolongamos $A'B''$ y proyectamos sobre ella el punto B' en B''' tendremos

$$A'B''' = A'B' \cos B'\hat{A}'B''' \qquad [9.50]$$

pero, por ser a_{AB} infinitésimo, también lo será el ángulo $B'A'B''$. En consecuencia

$$AB''' = A'B' . \qquad [9.51]$$

salvo infinitésimos de orden superior.

La variación de distancia buscada será la diferencia

$$\delta_{AB} = A'B' - AB = A'B''' - AB = \\ = A'B''' - A'B'' = B''B''' . \qquad [9.52]$$

pero $B''B'''$ es la proyección de a_{BA} sobre la dirección de AB.

En consecuencia, diremos que *la variación de distancia entre dos puntos que experimentan corrimientos cualesquiera, está dada por la proyección del desplazamiento relativo de uno de los puntos respecto del otro, sobre la dirección definida por ambos.*

La variación de distancia es una magnitud escalar y su signo dependerá de si los puntos correspondientes se acercan o se alejan el uno del otro, como consecuencia de los corrimientos que experimentan. Si los puntos se *alejan*, hay aumento de distancia entre ellos y, en consecuencia la variación de distancia será *positiva*. En cambio, si los puntos se *acercan*, la distancia entre ambos disminuirá, siendo en este caso *negativa* la variación de distancia.

Resumiendo, diremos que para hallar la variación de distancia entre dos puntos que experimentan corrimientos determinados, bastará trazar el correspondiente diagrama de Williot-Mohr y proyectar sobre la dirección determinada por los puntos, el vector que define el corrimiento relativo de uno de ellos con respecto del otro. Dicha proyección mide la magnitud de la variación de distancia buscada. En el caso de la figura 9.29 si suponemos fijo el punto A, el B se habrá alejado de A, como es fácil observar. Hay aumento de la distancia y en consecuencia la variación de distancia será positiva. Al mismo resultado habríamos llegado si hubiésemos supuesto fijo el punto B, por ser el corrimiento relativo a_{AB} opuesto al a_{BA}. También A se habría alejado de B, es decir, hay aumento de distancia entre ambos.

9.1.10. Desplazamientos relativos de chapas rígidas.

Consideremos, figura 9.30, las chapas S_1 y S_2 que experimentan respectivamente las rotaciones $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 < 0$ en torno de los polos O_1 y O_2 y nos proponemos hallar el desplazamiento relativo de S_2 respecto de S_1.

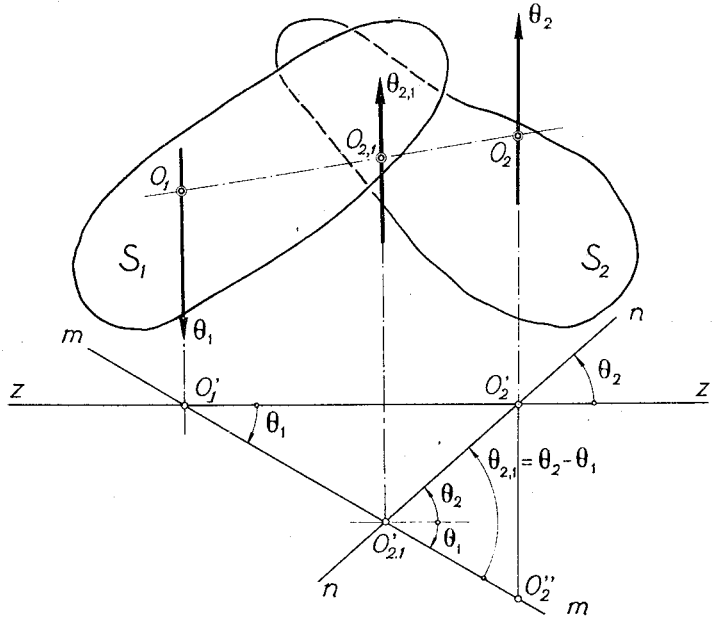


Fig. 9.30.

Este desplazamiento relativo, necesariamente es otra rotación, cuyo polo debe encontrarse alineado con los polos O_1 y O_2. Para hallarlo, apliquemos en estos últimos las elaciones θ_1 y θ_2 de una dirección cualquiera, vertical en el caso analizado.

Elegido un eje de referencia z-z su intersección con las rectas de acción de los vectores elación determinan dos puntos O_1' y O_2' por los que pasarán las rectas m-m y n-n, que definen los diagramas de corrimientos verticales correspondientes a ambas elaciones. Dichas rectas forman con el eje z-z los ángulos θ_1 y θ_2 que en cierta escala miden la intensidad de las rotaciones correspondientes. Por otra parte, ambas rectas se cortan en un punto $O_{2.1}'$.

Los desplazamientos experimentados por las chapas, pueden suponerse generados en la forma siguiente:

Admitamos las dos chapas rígidamente vinculadas entre sí y sujetas a la rotación θ_1.

La chapa S_1 habrá pasado a ocupar su posición definitiva, y el polo O_2, por efecto de la elación vertical θ_1, habrá experimentado un corrimiento vertical $O_2'O_2''$. Pero por ser polo, dicho punto, en la posición final de la chapa S_2, debe permanecer inmóvil. En consecuencia, será necesario darle a la chapa una cierta rotación de sentido opuesto a θ_1, tal que su correspondiente elación vertical lleve el punto O_2'' al O_2' y la recta que define el correspondiente diagrama de corrimientos verticales forme con z-z un ángulo que, en cierta escala, mida la intensidad de θ_2.

En consecuencia, el punto $O_{2.1}'$ intersección de las rectas m-m y n-n se encontrará sobre la recta de acción de la elación vertical relativa $\theta_{2.1}$ cuya intersección con la recta O_1O_2 define el polo $O_{2.1}$ buscado. El signo de la rotación relativa será en este caso negativo, por cuanto la recta n-n ha girado con respecto a la m-m, en torno de $O_{2.1}'$ en sentido negativo.

En cuanto a la intensidad de $\theta_{2.1}$, de la observación de la figura surge que es igual a θ_2 más θ_1 con signo cambiado, es decir

$$\theta_{2.1} = \theta_2 + (-\theta_1) = \theta_2 - \theta_1 \qquad [9.53]$$

o sea la diferencia de las rotaciones.

Es fácil observar que la rotación relativa de S_1 respecto de S_2 es opuesta a la de esta última respecto de la primera, es decir

$$\theta_{1.2} = -\theta_{2.1} \qquad [9.54]$$

de donde

$$\theta_{1.2} = \theta_1 - \theta_2 \qquad [9.55]$$

9.1.11. Desplazamientos de cadenas cinemáticas de un grado de libertad.

En el capítulo 6 definimos como cadena cinemática a un conjunto de chapas, vinculadas entre sí mediante articulaciones reales o ficticias, propias o impropias estas últimas, estableciendo que el número de grados de libertad de las mismas era de $n + 2$, siendo n el número de chapas que integraban la cadena.

Consideremos una cadena de dos chapas S_1 y S_2 (figura 9.31), vinculadas entre sí mediante dos barras KL y MN, que definen una articulación ficticia propia $A_{1.2}$, ubicada en la intersección de las mismas.

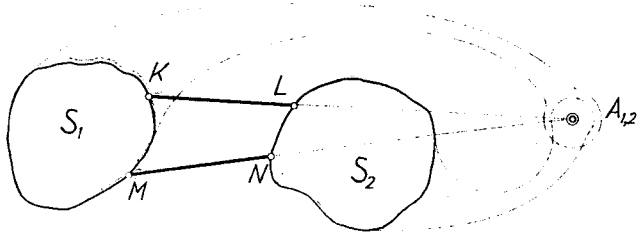


Fig. 9.31.

Para todo desplazamiento infinitésimo del mecanismo constituido por ambas chapas vinculadas, el desplazamiento relativo de una de ellas respecto de la otra, se traduce en una rotación en torno de la articulación $A_{1.2}$.

En efecto, el desplazamiento relativo de S_2 respecto de S_1, corresponde al desplazamiento absoluto que experimentaría S_2 si S_1 permaneciera fija.

Suponiendo en consecuencia que S_1 permanece inmóvil, las barras KL y MN se comportarán como vínculos externos de primera especie y la única posibilidad de desplazamiento de los puntos L y N, será que experimenten corrimientos normales a KL y MN respectivamente.

Pero dichos puntos pertenecen también a la chapa S_2 para la que, en consecuencia, se imponen los corrimientos de dos de sus puntos.

Pero, en 9.1.1 vimos que conocidos los corrimientos de dos puntos de una chapa, quedaba definido el polo de la rotación, propio o impropio, que daba origen a dichos corrimientos, el que se encontraba ubicado en la intersección de las normales a las direcciones de los corrimientos, trazados por los puntos mencionados.

En el caso de la figura 9.31, las normales a los corrimientos de los puntos L y N coinciden con las direcciones de las barras KL y MN,

las que, prolongadas, se cortan en el punto $A_{1.2}$, denominado *articulación ficticia* relativa entre las chapas S_1 y S_2 y que será el punto en torno al cual gira la chapa S_2 con respecto a S_1, experimentando así una *rotación relativa* $\theta_{2.1}$. El funcionamiento del mecanismo sería el mismo que resultaría de suponer prolongadas las chapas S_1 y S_2 y articuladas en forma real en el punto $A_{1.2}$, previa supresión de las barras KL y MN.

Si, como muestra la figura 9.32, las barras KL y MN que vinculan a ambas chapas, fueran paralelas, el desplazamiento relativo de las mismas resultaría una traslación relativa.

En efecto, supuesta fija la chapa S_1, las direcciones de los corrimientos posibles de los puntos L y N resultan paralelas entre sí e iguales, por cuanto deben necesariamente ser normales a las direcciones KL y MN, respectivamente, y éstas a su vez también son paralelas

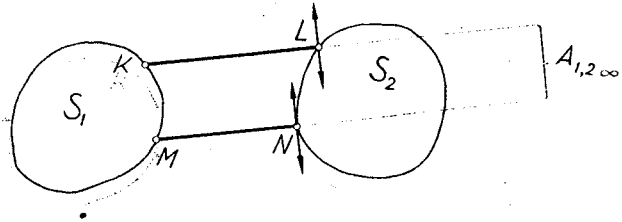


Fig. 9.32.

entre sí. Pero hemos visto que cuando los corrimientos de dos puntos de una chapa eran iguales y paralelos, el desplazamiento de la misma era una traslación.

En consecuencia, el desplazamiento relativo de la chapa S_2 respecto de la S_1 es una traslación relativa, resultando la *articulación relativa ficticia* ser el punto impropio de la dirección común a las dos barras.

Nos ocuparemos en lo que sigue, exclusivamente del análisis de los desplazamientos posibles de las cadenas cinemáticas que poseen solamente un grado de libertad, es decir, de aquellas a las que se han impuesto $n + 1$ condiciones de vínculo.

Demostraremos a continuación que *en toda cadena cinemática de un grado de libertad, para cualquier desplazamiento de la misma, las chapas que la constituyen experimentan cada una de ellas, rotaciones en torno de puntos fijos determinados, propios o impropios, denominados polos.*

Para cualquier cadena cinemática, ello se verifica por lo menos para una de las chapas. En efecto, si la cadena cinemática tiene sólo un grado de libertad, ello significa que se le han impuesto $n + 1$ condiciones de vínculo; como el número de chapas es n, por lo menos una de ellas resulta con no menos de dos ni más de tres condiciones de vínculo.

En el primer caso, o bien tiene un punto fijo o quedan determinadas las direcciones de los corrimientos de dos de ellos, y en el segundo resulta fija, con lo que queda demostrado lo que nos proponíamos. En efecto, si posee un punto fijo, el único desplazamiento posible de la chapa es una rotación en torno del mismo. Si, en cambio, resultan impuestas las direcciones de los corrimientos de dos puntos, sabemos que el desplazamiento posible de la chapa será una rotación, de polo propio o impropio, ubicado en la intersección de las normales a las direcciones de los corrimientos.

Finalmente, si la chapa posee tres condiciones de vínculo resulta inmóvil y las chapas vinculadas con la misma podrán experimentar rotaciones en torno de los puntos en que se articulan a la chapa fija, puntos que serán los polos. En este caso, se dice que la chapa que resulta inmóvil se encuentra sujeta al *vínculo del desplazamiento idéntico.*

9.1.12. Determinación de polos en cadenas cinemáticas de un grado de libertad.

Consideremos, figura 9.33, una cadena cinemática cualquiera, y supongamos conocido el polo O_1, de una de ellas.

Si $A_{1,2}$ es la articulación relativa entre las chapas S_1 y S_2, consideremos el punto como perteneciente a S_1, la dirección del único corrimiento posible del mismo, para una rotación infinitésima de la chapa a la que pertenece, será el de la normal a la recta $O_1 A_{1,2}$.

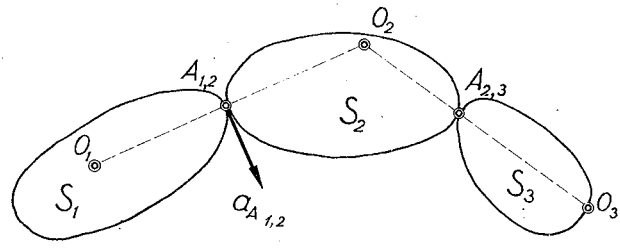


Fig. 9.33.

Pero $A_{1,2}$ pertenece también a la chapa S_2, y en tal condición su corrimiento será el mismo impuesto por la rotación de la chapa S_1. Interpretado dicho corrimiento como originado por una rotación de la chapa S_2, el polo de la misma, propio o impropio, deberá encontrarse ubicado sobre la normal a la dirección del corrimiento, trazada por $A_{1,2}$, es decir, sobre la prolongación de $O_1 A_{1,2}$, lo que nos permitió concluir que *en toda cadena cinemática de un grado de libertad, los polos de dos chapas consecutivas se encuentran alineados con la articulación relativa.*

Como corolario de lo anterior se tiene que, si se conocen los polos de dos chapas no consecutivas, la determinación del polo de la chapa intermedia es inmediata. En efecto. volviendo a la figura 9.33, vimos que el polo de la chapa S_2 debía encontrarse ubicado sobre la recta $O_1 A_{1,2}$. Supongamos ahora que conocemos también la ubicación del polo O_3 de la chapa S_3. Por un razonamiento análogo al efectuado antes, llegamos a que θ_2 debe encontrarse sobre $O_3 A_{2,3}$. En consecuencia, concluimos que debe necesariamente ser el punto O_3, intersección de las rectas $O_1 A_{1,2}$ y $O_3 A_{2,3}$.

Sentado lo anterior, estamos en condiciones de determinar los polos de una cadena cinemática de un grado de libertad, tal la que ilustra la figura 9.34, constituida por cuatro chapas $S_1 \ldots S_4$, articuladas entre sí mediante las articulaciones relativas $A_{1,2}$ (propia); $A_{2,3}$ (impropia) y $A_{3,4}$ (propia y ficticia) y vinculadas a tierra por un apoyo móvil A aplicado en S_1, otro fijo B ubicado en S_2 y dos apoyos móviles C y D en S_4.

El punto B es un punto fijo y por lo tanto coincidirá con el polo O_2 de S_2.

El punto A de la chapa S_1, por la condición impuesta por el vínculo aplicado al mismo, sólo podrá experimentar corrimientos normales a la dirección de aquél, por lo que el polo O_1 de S_1, necesariamente debe encontrarse sobre la recta que corresponde a la dirección del apoyo móvil. Por otra parte, hemos visto que el polo de O_1 debe estar alineado con

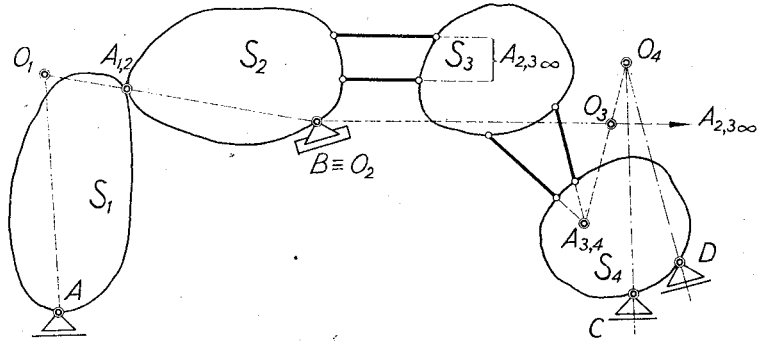


Fig. 9.34.

$A_{1,2}$ y el polo O_2. En consecuencia será el punto O_1 intersección de $O_2 A_{1,2}$ con la dirección del apoyo móvil A.

Pasando ahora a la chapa S_4, vinculada a tierra por intermedio de los apoyos móviles C y D, vemos que, por las razones expuestas

anteriormente, su polo será el punto O_4, intersección de las direcciones de los apoyos móviles mencionados.

En cuanto al polo de la chapa S_3, debe encontrarse alineado con los polos de las chapas inmediatas O_2 y O_4 y sus correspondientes articulaciones relativas.

La articulación relativa $A_{2,3\infty}$ es impropia. En consecuencia, trazando por O_2 una paralela a la dirección de las dos barras que definen $A_{2,3\infty}$, sobre dicha recta debe encontrarse O_3. Como, además, O_3 debe estar alineado con O_4 y $A_{3.4}$, la recta $O_4 A_{3.4}$ en su intersección con la $O_2 A_{2,3\infty}$ determina la posición del polo O_3 buscado.

9.1.13. Extensión del diagrama de Williot-Mohr al caso de cadenas cinemáticas de un grado de libertad.

Las cadenas cinemáticas de un grado de libertad constituyen mecanismos susceptibles de experimentar desplazamientos, compatibles con las condiciones de vínculo impuestas. Como consecuencia de dichos desplazamientos (rotaciones o traslaciones), los puntos de las distintas chapas sufren corrimientos, perfectamente definidos.

Al definir el diagrama de Williot-Mohr dijimos que se trataba de un diagrama polar de corrimientos, que constituía una figura normal y semejante con la figura dada, y que una vez conocida, nos permitía determinar de inmediato el corrimiento experimentado por cualquier punto de la chapa, para un desplazamiento dado de la misma.

Estos conceptos se extienden al caso de sistemas constituidos por más de una chapa. En efecto, sea el mecanismo de un grado de libertad de la figura 9.35, constituido por 3 chapas S_1, S_2 y S_3, articuladas entre sí y vinculadas a tierra mediante cuatro condiciones de vínculo.

Los polos de las chapas S_1 y S_3 conciden en este caso con los puntos A y B, donde se encuentran aplicadas sendas articulaciones fijas en tierra.

El polo de la chapa S_2 debe encontrarse alineado con $O_1 A_{1,2}$ por una parte, y con $O_3 A_{2,3}$ por otra. En consecuencia, serán el punto O_2 intersección de $O_1 A_{1,2}$ y $O_2 A_{2,3}$.

Determinados los polos en la forma indicada, damos a una cualquiera de las chapas, la S_1 por ejemplo, una rotación $\theta_1 > 0$. Como consecuencia de la misma, el punto $A_{1,2}$ experimentará un corrimiento $a_{A_{1,2}}$ de dirección normal a $O_1 A_{1,2}$ y de intensidad

$$a_{A_{1,2}} = \theta_1 . O_1 A_{1,2} . \qquad [9.56]$$

Elegido un punto cualquiera P_w como polo, estamos en condiciones de proceder al trazado del diagrama de Williot-Mohr correspondiente a la chapa S_1.

El punto $A \equiv O_1$, por ser un punto fijo, coincidirá con P_w. Llevando a partir de P_w el vector $P_w A_{1,2w}$ equipolente con $a_{1,2}$, su extremo define el punto $A_{1,2w}$. En la forma indicada en 9.1.4 procedemos

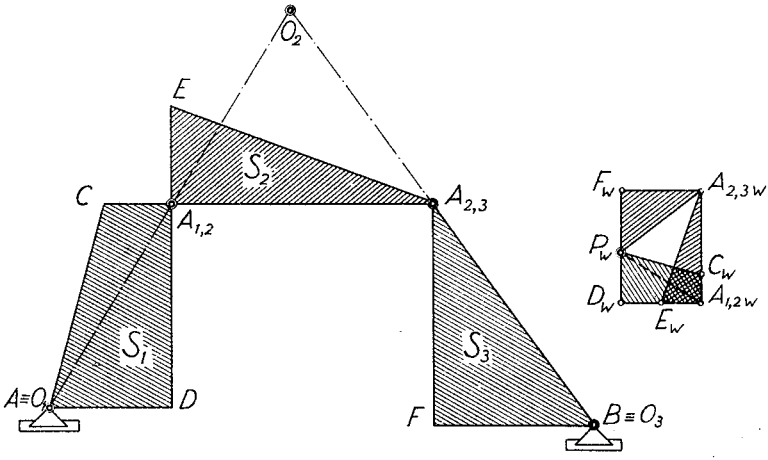


Fig. 9.35.

a continuación a ubicar los puntos C_w y D_w, obteniendo la figura P_w, $A_{1,2w}$, C_w, D_w normal y semejante a la A, $A_{1,2}$, C, D.

Pasando a la chapa S_2, en el diagrama de Williot-Mohr su polo O_{2w} coincidirá con P_w por tratarse de un punto fijo y $A_{1,2}$, considerado como perteneciente a S_2 coincidirá en el diagrama con $A_{1,2w}$ por cuanto $A_{1,2}$ es común a ambas chapas.

La determinación de $A_{2,3w}$ es inmediata, bastando para ello trazar por $A_{1,2w}$ y P_w sendas normales a $A_{2,3}A_{1,2}$ y $A_{2,3}O_2$. En la misma forma ubicamos E_w.

Finalmente, en la chapa S_3 sólo es necesario ubicar F_w, por cuanto O_{3w} coincide con P_w y $A_{2,3w}$ ya lo hemos hallado. Trazando por P_w y $A_{2,3w}$ normales a FO_3 y $FA_{2,3}$ respectivamente, en su intersección obtenemos el punto buscado.

Cuando la articulación relativa entre dos chapas es un punto impropio, es decir, si las mismas se encuentran vinculadas entre sí mediante dos barras paralelas, tal como en el caso de la figura 9.36, para el trazado del diagrama de Williot-Mohr es necesario proceder de la manera que explicamos a continuación, por cuanto el punto común a ambas cha-

pas, $A_{1.2}$, que permite el pasaje de una a otra de ellas en el diagrama de Williot-Mohr, es un punto impropio.

Una vez hallados los polos de las chapas en la forma conocida y determinado el corrimiento a_k del punto K, que define el punto K_w, consideramos a una de las barras que constituyen la articulación relativa,

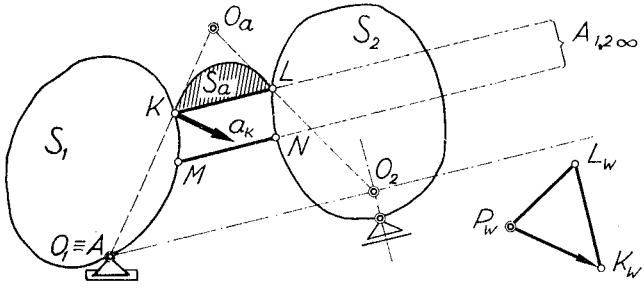


Fig. 9.36.

como una chapa auxiliar S_a. La determinación del polo de la misma es inmediato, y será el punto O_a intersección de las rectas $O_1 K$ y $O_2 L$. Conocido O_a ubicamos L_w como intersección, en el diagrama de *Williot-Mohr*, de las normales a LK y LO_a, trazados por k_w y P_w, respectivamente. Una vez determinado L_w, el trazado del diagrama se continúa en la forma conocida.

9.1.14. Trazado de diagramas cartesianos de corrimientos de puntos de cadenas cinemáticas sujetas a desplazamientos.

Para el trazado de los diagramas de corrimientos de dirección determinada, de puntos de cadenas cinemáticas de un grado de libertad sujetas a desplazamientos compatibles con los vínculos, se procede en forma semejante a la vista para el caso de una única chapa.

Sea por ejemplo la cadena cinemática de la figura 9.37, de la que se pide el trazado del diagrama de corrimientos verticales, originados por una rotación $\theta_1 > 0$ de la chapa S_1.

Determinados los polos de las distintas chapas aplicamos en O_1, polo de S_1, una elación vertical $\theta_1 > 0$ y adoptamos un eje de referencia m-m horizontal. El diagrama de corrimientos verticales de la chapa S_1 será, como sabemos, una recta que pasará por la proyección O_1' del polo O, por cuanto la ordenada del diagrama debe ser nula en corres-

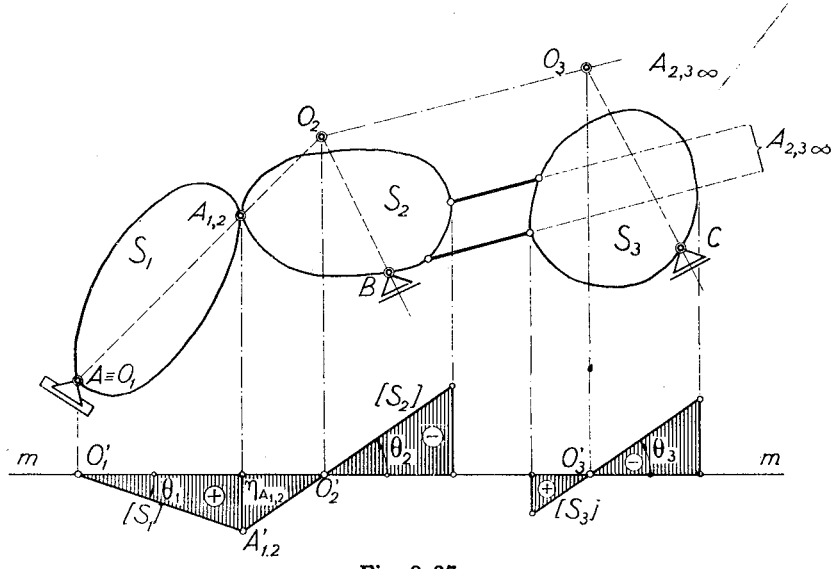


Fig. 9.37.

pondencia con la recta de acción del vector representativo de la elación θ_1. Dicha recta será válida entre las ordenadas extremas de la chapa S_1.

El corrimiento vertical del punto $A_{1.2}$ será común a las chapas S_1 y S_2. En consecuencia, la recta $[S_2]$, representativa del diagrama de corrimientos verticales de la chapa S_2, deberá pasar por $A'_{1.2}$, intersección de la vertical de $A_{1,2}$ con $[S_1]$ y por O'_2, proyección de O_2 sobre m-m, y se extenderá hasta encontrar la vertical extrema de la chapa S_2.

En cuanto al diagrama representativo de los corrimientos verticales de S_3, será una recta paralela a $[S_2]$ que pasará por O'_3, proyección sobre m-m de O_3. En efecto, el desplazamiento relativo de S_3 respecto de S_2 es una traslación, por cuanto la articulación relativa entre las mismas es impropia y, en consecuencia, los corrimientos relativos entre los puntos de ambas chapas y por ende sus proyecciones en cualquier dirección, son todos iguales entre sí. Y como las proyecciones verticales de los mismos están medidos en una cierta escala por las ordenadas comprendidas entre las rectas $[S_3]$ y $[S_2]$, al ser iguales para cualquier punto que se considere, dichas rectas necesariamente deben ser paralelas.

Cuando una de las chapas de la cadena cinemática posee dos condiciones de vínculo, constituidas por dos apoyos móviles paralelos, el diagrama de corrimientos, cualquiera sea la dirección del mismo, es una recta paralela al eje de referencia.

En efecto, sea el sistema de la figura 9.38, cuya chapa se encuentra vinculada a tierra mediante dos apoyos móviles B y C, paralelos.

Determinada la ubicación de los polos, el correspondiente a la chapa S_2 resulta ser el punto impropio de la dirección común de los apoyos. En consecuencia, los desplazamientos absolutos de S_2 sólo podrán ser

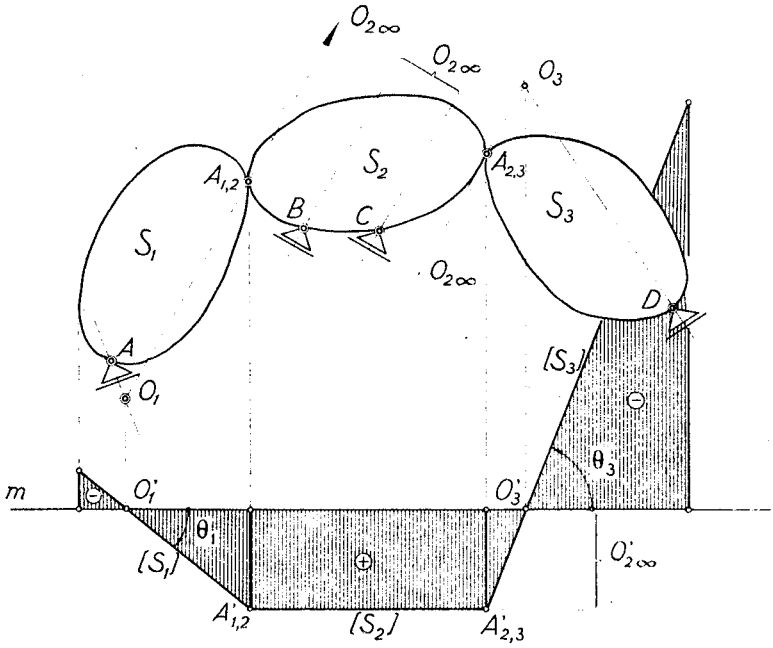


Fig. 9.38.

traslaciones, y como para una traslación de una chapa los corrimientos absolutos en una dirección cualquiera son iguales para todos los puntos de la misma, resulta así que las ordenadas del diagrama correspondiente serán también iguales entre sí, reduciéndose éste a una recta paralela al eje de referencia.

De acuerdo con lo anterior, trazando en la figura 9.38 una recta cualquiera paralela al eje de referencia, la misma constituirá el diagrama de corrimientos verticales de la chapa S_2, limitado por los puntos $A'_{1,2}$ y $A'_{2,3}$, intersecciones de dicha recta con las verticales trazadas por las articulaciones relativas $A_{1,2}$ y $A_{2,3}$ respectivamente. Uniendo $A'_{1,2}$ con O'_1, proyección de O_1 sobre el eje de referencia, obtenemos el diagrama de los corrimientos verticales de S_1 y efectuando análoga operación con $A'_{2,3}$ y O'_3 definimos el correspondiente a S_3. El signo de las distintas partes del diagrama, resulta del desplazamiento experimentado por S_3. Si éste es de sentido tal que sus corrimientos verticales resulten positivos, la recta paralela al eje de referencia que materializa

el correspondiente diagrama deberá trazarse por debajo de aquél, resultando así el diagrama orientado. En cuanto a la escala, si el corrimiento vertical de los puntos de la chapa S_2 fuera de a(m) y las ordenadas (todas iguales) del diagrama correspondiente fueran de η(cm), la escala resultante sería $a(\text{m})/\eta(\text{cm})$.

9.1.15. Articulaciones relativas entre chapas no consecutivas.

En todo mecanismo de un grado de libertad, constituido por una sucesión de chapas vinculadas entre sí, al desplazarse una cualquiera de las mismas, las restantes, como hemos visto, también experimentan desplazamientos.

En ciertos problemas interesa, y a veces es necesario, conocer para dos chapas no consecutivas, es decir, que no se encuentran vinculadas directamente entre sí, el punto del plano en torno al cual gira una de ellas, supuesta fija la otra, o sea, su articulación relativa. Consideremos, por ejemplo, el sistema de la figura 9.39 y veamos la forma de determinar la articulación relativa entre las chapas S_1 y S_3, es decir, $A_{1,3}$.

Supongamos por un momento que la chapa S_1 se encuentra fija. La chapa S_3 está vinculada con la S_1 por intermedio de la S_2, que desde el punto de vista cinemático se comporta como una biela de dirección $A_{1,2}\,A_{2,3}$. Por otra parte, al estar S_1 y S_3 articuladas directamente a tierra, podemos admitir esta última como una chapa rígida articulada a las anteriores en O_1 y O_3 respectivamente, chapa que cinemáticamente se comportará como una segunda biela de dirección $O_1\,O_3$. En consecuencia, las chapas S_1 y S_3 estarán vinculadas por las bielas $A_{1,2}\,A_{2,3}$ y $O_1\,O_3$, que equivalen a una articulación relativa ficticia $A_{1,3}$, ubicada en la intersección de las rectas prolongación de las mismas.

De lo expuesto deducimos que la articulación relativa entre dos chapas no consecutivas, se encuentra alineada con los polos de las mismas y con las articulaciones relativas con la chapa intermedia.

Trazado el diagrama de corrimientos de una dirección cualquiera, vertical en el caso de la figura 9.39, vemos que la articulación relativa $A_{1,3}$ se encuentra ubicada sobre la vertical del punto de intersección $A'_{1,3}$ de las rectas que definen los diagramas de corrimientos de las chapas S_1 y S_3 .

Ello es evidente, por cuanto el corrimiento vertical del punto $A_{1,3}$ considerado como perteneciente a la chapa S_1 debe ser el mismo que experimenta cuando se lo considera sobre la chapa S_3 .

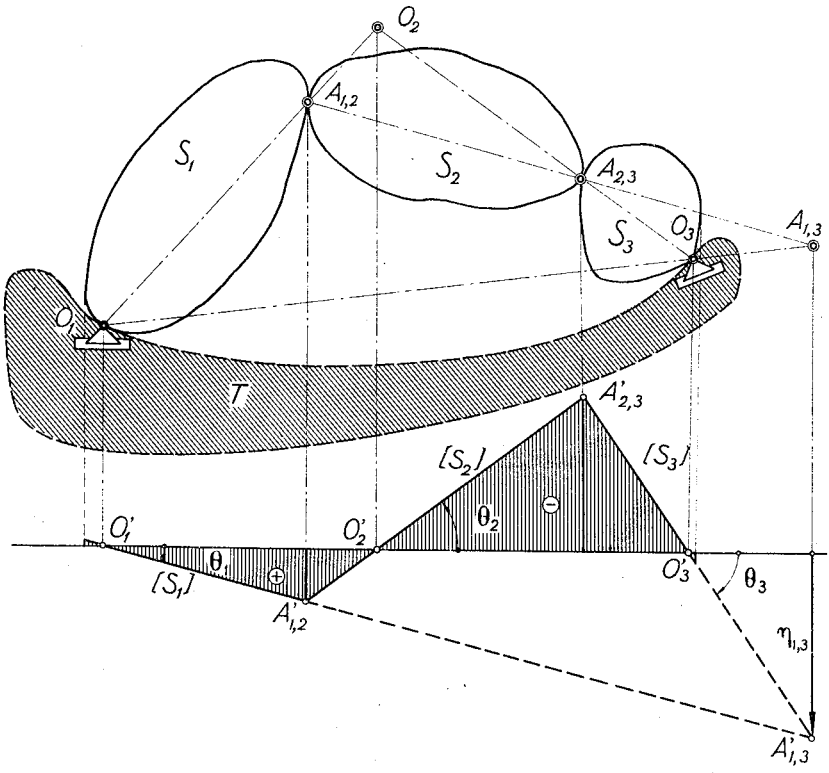


Fig. 9.39.

9.1.16. Variación de distancia entre puntos de una cadena cinemática de un grado de libertad.

Interesa en ciertos problemas conocer la variación de distancia que experimentan dos puntos determinados, pertenecientes a distintas chapas de una cadena cinemática, como consecuencia de un desplazamiento de la misma.

El problema puede resolverse, sea con el trazado de un diagrama de Williot-Mohr o bien mediante un diagrama de corrimientos en una determinada dirección.

Sea, por ejemplo, el mecanismo cinemático de la figura 9.40, del que se pide hallar la variación de distancia experimentada por los puntos A y B, como consecuencia de una rotación $\theta_1 > 0$ aplicada a la chapa S_1.

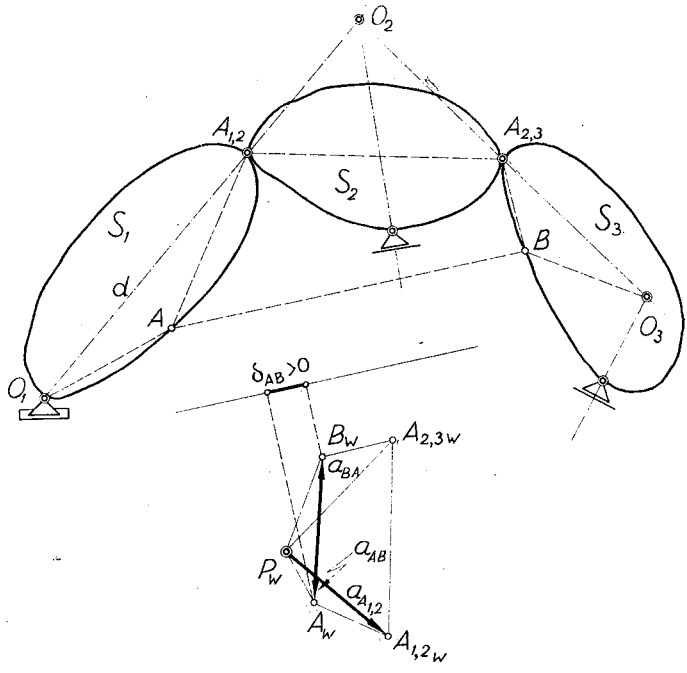


Fig. 9.40.

Resolveremos el problema mediante el trazado de un diagrama de Williot-Mohr, que para el caso no requiere la obtención de las figuras normales y semejantes en su totalidad, sino únicamente la ubicación de aquellos puntos que nos permitan conocer el desplazamiento relativo de A respecto de B (o su recíproco). Determinados los polos en la forma conocida, comenzamos por calcular el corrimiento efectivo de un punto de la chapa S_1, el $A_{1,2}$ por ejemplo, como consecuencia de la rotación θ_1 aplicada a la misma. Llamando d la distancia de $A_{1,2}$ al polo O_1, dicho corrimiento será de intensidad

$$a_{A_{1,2}} = \theta_1 . d \; . \qquad [9.57]$$

Elegido el polo P_w del diagrama de Williot-Mohr, llevamos a partir del mismo un vector $P_w A_{1,2w} = a_{A_{1,2}}$ cuyo extremo nos define el punto $A_{1,2w}$ y luego, en la forma explicada anteriormente, ubicamos el punto A_w. Conocido $A_{1,2w}$ pasamos a ubicar $A_{2,3w}$, que se encontrará en la intersección de las normales de $A_{2,3}$ O_2 y $A_{2,3}$ $A_{1,2}$ trazadas por P_w y

$A_{1,2\,w}$ respectivamente. El punto $A_{2,3\,w}$ es el único que nos interesa de la chapa S_2, por ser el que nos permite pasar a la chapa S_3.

Ubicado $A_{2,3w}$, determinamos a continuación B_w. El vector $A_w B_w$ corresponde, como sabemos, al corrimiento relativo a_{BA} y el opuesto al a_{BA}. La proyección de cualquiera de ellos sobre la dirección AB nos da la variación de distancia δ_{AB} buscada. Como puede observarse, en este caso δ_{AB} es positiva, por cuanto, para el desplazamiento experimentado por el mecanismo, los puntos se alejan el uno del otro.

La variación de distancia puede determinarse también mediante el trazado del diagrama de corrimientos en una dirección determinada. Consideremos para ello el mecanismo cinemático de la figura 9.41, del que se pide hallar la variación de distancia δ_{MN} para una rotación $\theta_1 > 0$.

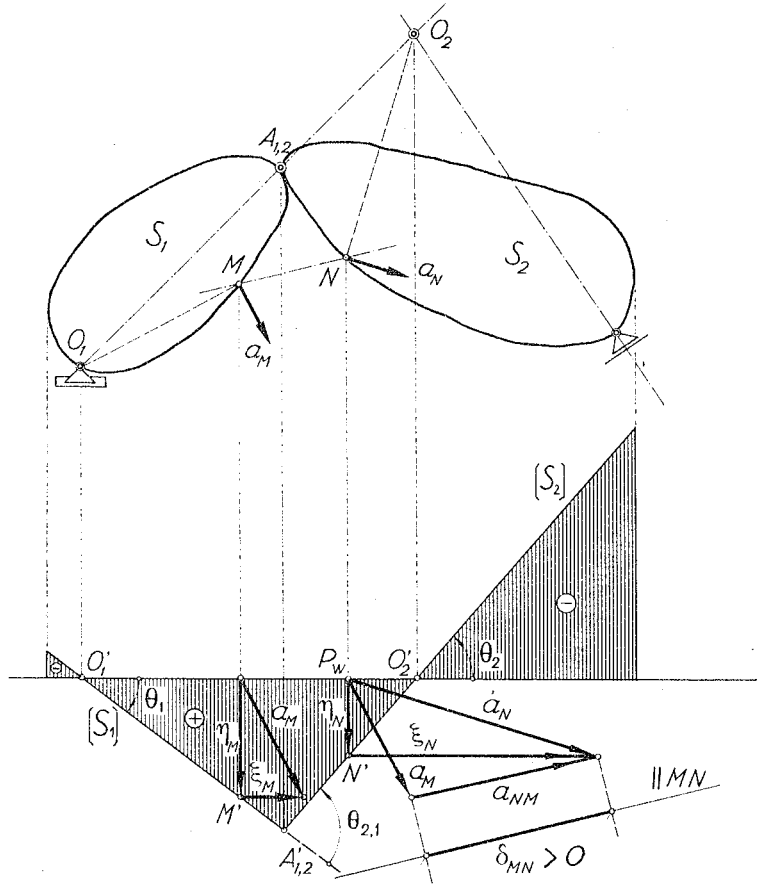


Fig. 9.41.

Determinados los polos de las chapas S_1 y S_2, trazamos un diagrama de los corrimientos verticales debidos a θ_1, que nos permite determinar η_M y η_N.

Por otra parte, como conocemos las direcciones de los corrimientos efectivos de M y N, normales respectivamente a O_1M y O_2N, trazando por el origen de η_M una paralela a la normal a O_1M y desproyectando su extremo sobre esta última dirección, obtenemos el vector representativo de a_M en intensidad, dirección y sentido. Procediendo en forma análoga con η_N obtenemos a_N y llevando a partir de un punto P_w vectores equipolentes a a_M y a_N, el vector definido entre los extremos de los mismos, con uno u otro sentido, nos da a_{MN} ó a_{NM} según el caso.

Finalmente, proyectando cualquiera de estos vectores sobre la dirección de la recta MN, obtenemos la variación de distancia δ_{MN}.

Analizando el diagrama de corrimientos verticales vemos que como consecuencia del desplazamiento experimentado por el mecanismo, la chapa S_2 ha sufrido con respecto a la S_1 una rotación relativa $\theta_{2,1} < 0$. En consecuencia, el punto N se aleja del M y la variación de distancia resulta ser positiva. A la misma conclusión habríamos llegado si hubiésemos considerado la rotación relativa $\theta_{1,2}$ de la chapa S_1 respecto de la S_2.

Existe una última forma de establecer la variación de distancia entre dos puntos de una cadena cinemática, y es partiendo del diagrama de corrimientos. Sea el mecanismo de un grado de libertad de la figura 9.42, del que se pide calcular la variación de distancia entre los puntos M y N debida a una rotación $\theta_1 < 0$ de la chapa S_1.

Determinados los polos y trazado el diagrama de corrimientos verticales llevamos a partir de $A'_{1,2}$ horizontalmente, un segmento t igual a la distancia de $A_{1,2}$ a la recta MN definida por los puntos de los que deseamos hallar la variación de distancia.

Trazando por el extremo de dicho segmento una vertical, la misma determina en su intersección con las rectas $O'_1 A'_{1,2}$ y $O'_2 A'_{1,2}$ un segmento TT' cuya longitud nos da la magnitud de la variación de distancia buscada.

En efecto, admitamos por un momento fija la chapa S_1. En tal caso, la rotación relativa $\theta_{2,1}$ se transforma en absoluta, y el polo de la misma será el punto $A_{1,2}$.

Si aplicamos en este punto la elación $\theta_{2,1}$ de la dirección MN, como consecuencia de la misma el punto N experimentará un corrimiento en dicha dirección de intensidad:

$$| a'_N | = | \theta_{2,1} | \cdot | t | . \qquad [9.58]$$

Ahora bien, como puede observarse en la figura, dicho corrimiento, en valor absoluto, coincide con la variación de distancia δ_{MN}, por ser la proyección normal de a_{NM} sobre la dirección MN. Por otra parte, en

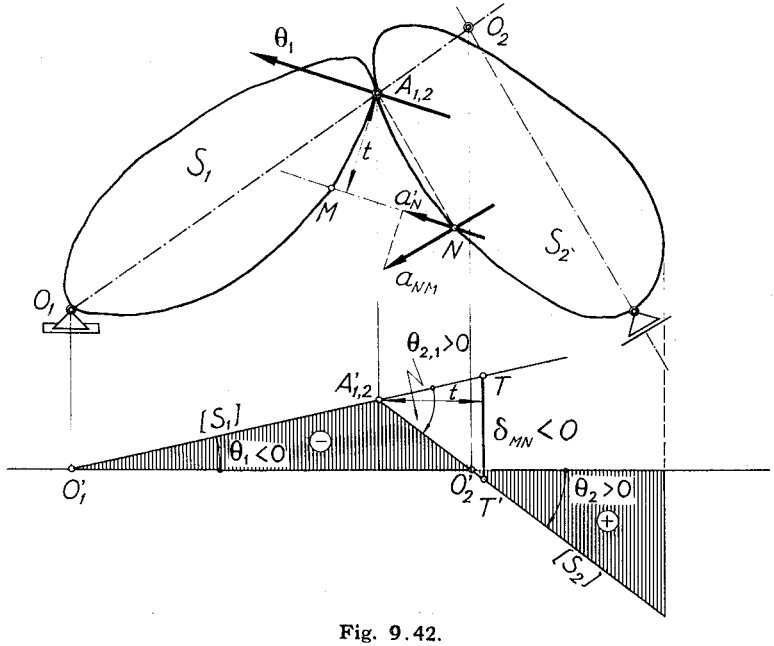


Fig. 9.42.

el diagrama de corrimientos verticales el ángulo $O'_2\ A'_{1,2}\ T$ mide, en cierta escala, la intensidad de la rotación $\theta_{2,1}$, y por ser ésta infinitésima tenemos

$$|\theta_{2,1}| \cdot |t| = T\,T'' \ . \qquad [9.59]$$

Comparando la [9.59] con la [9.58] y teniendo en cuenta que $|a'_N| = |\delta_{MN}|$ resulta finalmente

$$|TT'| = |\delta_{MN}| \ . \qquad [9.60]$$

En cuanto al signo de la variación de distancia, surge de considerar el sentido de la rotación relativa. En el caso analizado, resulta $\theta_{2,1} > 0$ por lo que el punto N se acerca al M, resultando con ello negativa la variación de distancia.

9.1.17. Casos particulares en la determinación de polos y trazado de diagramas de corrimientos.

En determinados casos, sea por la configuración del mecanismo cinemático o bien por la disposición de los vínculos, la determinación de los polos o el trazado de los diagramas de corrimientos, o bien ambos, presenta algunas dificultades.

Sea, por ejemplo, el sistema de un grado de libertad de la figura 9.43. El polo de la chapa S_2 se encuentra en la intersección de la recta $O_1 A_{1,2}$ con la recta que corresponde a la dirección del apoyo móvil B. Pero dicha intersección queda ubicada fuera de los límites del dibujo,

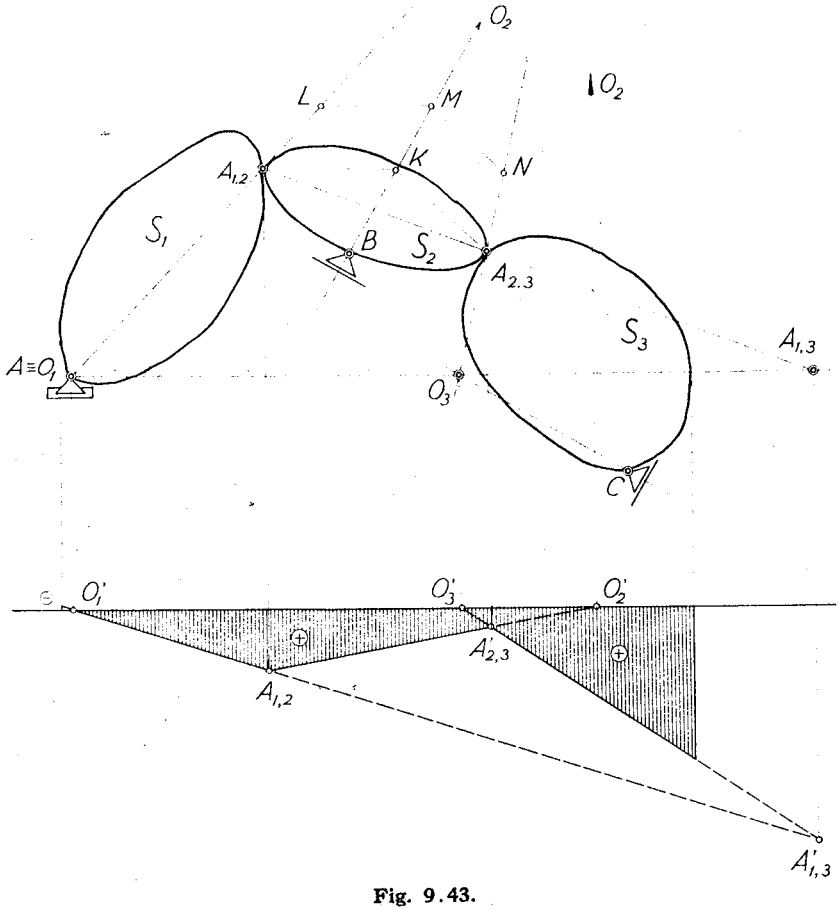


Fig. 9.43.

por lo que resulta a priori imposible ubicar el polo O_3, que debe encontrarse en la intersección de la dirección del apoyo móvil C con la recta $O_2 A_{2,3}$.

Pero esta última recta no se puede trazar por ser O_2 inaccesible. El problema se resuelve mediante la proposición de Desargues. Elegido un punto cualquiera K sobre la recta BO_2 construimos el triángulo $A_{1,2} K_1 A_{2,3}$. Luego, por un punto cualquiera L de la recta $O_1 A_{1,2}$ trazamos paralelas a $A_{1,2} A_{2,3}$ y a $A_{1,2} K$.

Esta última corta a BO_2 en M. Trazando por este último una paralela a $KA_{2,3}$, en su intersección con la paralela a $A_{1,2} A_{2,3}$ determina un punto N que unido con $A_{2,3}$ define una recta que pasa por O_2. Como, además, por construcción pasa por $A_{2,3}$, sobre la misma debe encontrarse el polo O_3, que queda determinado por la intersección de dicha recta con la que define la dirección del apoyo móvil C.

Una segunda dificultad se presenta para el trazado del diagrama de corrimientos verticales.

En efecto, elegido un eje horizontal de referencia, y proyectados los polos O_1 y O_3, obtenemos los puntos O'_1 y O'_3, en correspondencia de los cuales tendrán ordenada nula los diagramas de corrimientos correspondientes a las chapas S_1 y S_3. No ocurre lo mismo con O_2 por ser inaccesible, por lo que una vez trazada la recta $O'_1 A'_{1,2}$, nos vemos imposibilitados de continuar con el trazado del diagrama.

El problema se resuelve determinando la articulación relativa $A_{1,3}$ entre las chapas S_1 y S_3, que se encontrará en la intersección de las rectas $O_1 O_3$ y $A_{1,2} A_{2,3}$.

Ubicado $A_{1,3}$ prolongamos la recta $O'_1 A'_{1,2}$ hasta encontrar en $A'_{1,3}$ la vertical trazada por $A_{1,3}$. Por dicha intersección pasará la recta que define el diagrama de corrimientos de S_3. Como éste debe tener ordenada nula en O'_3, uniendo este último punto con $A'_{1,3}$, queda definido el diagrama.

En cuanto al diagrama correspondiente a S_2, debe pasar por $A'_{1,2}$ y por la intersección de $O'_3 A'_{1,3}$ con la vertical de $A_{2,3}$, con lo que queda resuelto el problema.

En el caso de la figura 9.43, si la dirección del apoyo móvil C fuera tal que su intersección con $A_{2,3} O_2$ también resultara inaccesible, debemos recurrir para el trazado del diagrama de corrimientos verticales al trazado de un diagrama auxiliar, como muestra la figura 9.44.

En la misma, para la determinación de la articulación relativa $A_{1,3}$ se ha recurrido a una segunda proposición de Desargues.

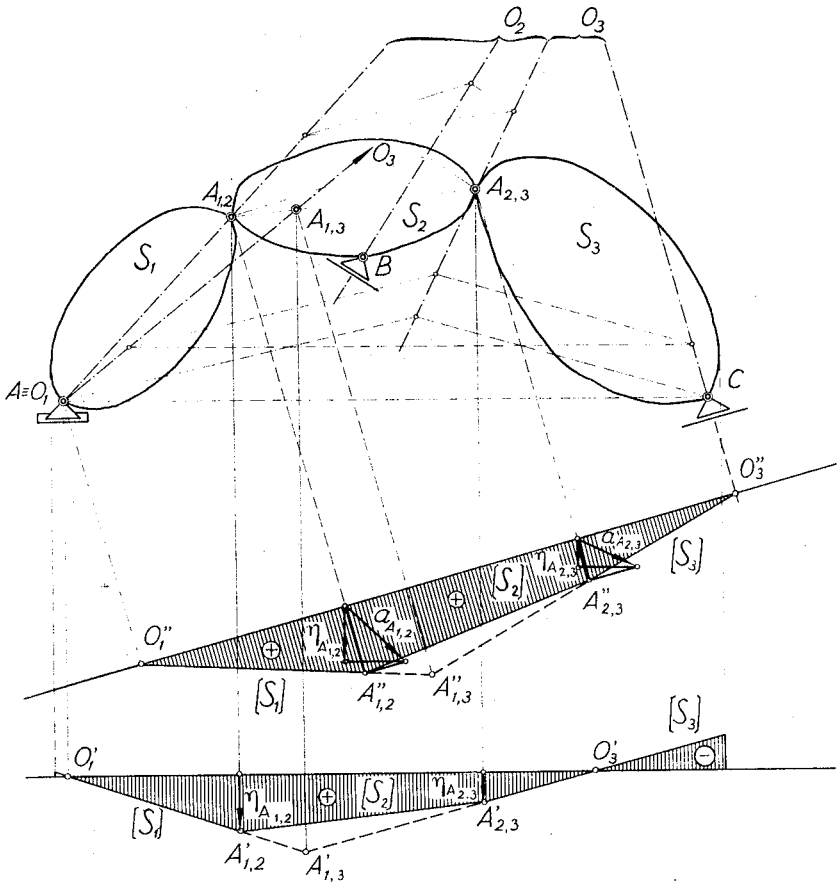


Fig. 9.44.

Conocida $A_{1,3}$ es posible trazar un diagrama de corrimientos de la dirección del apoyo móvil C, por cuanto el polo O_3 se encuentra sobre dicha recta, y si elegimos un eje de referencia normal al apoyo C, se proyecta en la dirección de este último.

Una vez trazado el diagrama de la dirección indicada, podemos determinar los corrimientos efectivos $a_{A_{1,2}}$ y $a_{A_{2,3}}$ de los puntos $A_{1,2}$ y $A_{2,3}$ que desproyectados sobre la dirección vertical nos permite conocer los corrimientos verticales $\eta_{A_{1,2}}$ y $\eta_{A_{2,3}}$, es decir, de *dos puntos* de la chapa S_2, con lo que queda perfectamente determinado el desplazamiento de la misma.

Adoptando ahora un eje de referencia vertical y llevando a partir del mismo sobre las proyecciones de $A_{1.2}$ y $A_{2.3}$ respectivamente y con

su signo $\eta_{A_{1,2}}$ y $\eta_{A_{2,3}}$, sus extremos, unidos, nos definen el diagrama correspondiente a la chapa S_2. Uniendo $A'_{1,2}$ así determinado, con O'_1 obtenemos el diagrama de la chapa S_1, que prolongado define en su intersección con la vertical de $A_{1,3}$ el punto $A'_{1,3}$, que unido finalmente con $A'_{2,3}$, determina el diagrama de S_3.

Sea ahora el sistema de la figura 9.45. El polo de la chapa S_1 coincide con la articulación A y el correspondiente a S_3 será el punto impropio de la dirección común de los apoyos móviles paralelos B y C.

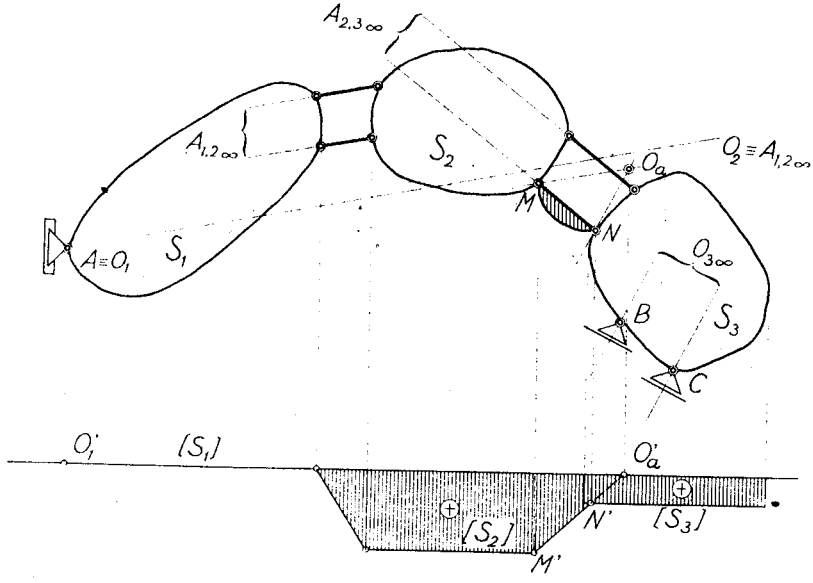


Fig. 9.45.

Las articulaciones relativas entre las chapas S_1-S_2 y S_2-S_3 son también impropias, por estar unidas dichas chapas dos a dos por pares de bielas paralelas.

El polo de la chapa S_2 debe encontrarse alineado con $O_1 A_{1,2\infty}$ y con $O_{3\infty} A_{2,3\infty}$. Siendo esta última recta la impropia del plano, el polo O_2 será, en consecuencia, el punto impropio de la paralela trazada por O_1 a las bielas que vinculan S_1 con S_3. Es decir que $O_{2\infty} \equiv A_{1,2\infty}$ resultando con ella la chapa S_1 con dos puntos fijos: O_1 y $A_{1,2\infty}$, este último por coincidir con $O_{2\infty}$. En consecuencia, resulta inmóvil.

Si damos un desplazamiento cualquiera al sistema, al trazar el diagrama de corrimientos de una dirección determinada, vertical por ejemplo, el correspondiente a S_1 se confunde con el eje de referencia, por cuanto los corrimientos de sus puntos son nulos.

Al estar la chapa S_2 vinculada mediante dos bielas paralelas a una chapa inmóvil, el único desplazamiento absoluto que puede experimentar es una traslación, por lo que el correspondiente diagrama de corrimientos será una recta paralela al eje de referencia.

La chapa S_3 se encuentra en análogas condiciones, por cuanto está vinculada con tierra mediante dos apoyos móviles paralelos. Como, además, está vinculada con la S_2 por una articulación relativa impropia, la recta que define su diagrama de corrimientos, resulta aparentemente indeterminada.

Para trazar el diagrama de la chapa S_2 debemos recurrir a una chapa auxiliar, la S_a, por ejemplo. El polo de la misma se encuentra en la intersección de las paralelas a $O_{1i}O_{2\infty}$ y a la dirección común de B y C, trazadas por M y N respectivamente.

Uniendo M', proyección de M sobre $[S_2]$ con O'_a y proyectando el punto N, sobre la recta así obtenida, obtenemos el N', que define el corrimiento vertical de N. Y como N pertenece a S_3, trazando por N' una paralela al eje de referencia, obtenemos el diagrama correspondiente a esta última chapa.

9.1.18. Determinación de polos en cadenas cinemáticas cerradas de un grado de libertad.

La determinación de los polos de las cadenas cinemáticas cerradas de cuatro chapas, que son las únicas de las que nos ocuparemos, no ofrece mayor dificultad, salvo en aquellos casos en que las tres condiciones de vínculo están distribuidas una por chapa.

Tratándose de 4 chapas y tres condiciones de vínculo, los casos posibles son tres:

a) dos condiciones de vínculo en una chapa, y la restante en una adyacente.

b) dos condiciones de vínculo en una chapa y la tercera en la opuesta.

c) una condición de vínculo en cada una de tres chapas.

Analizaremos a continuación los tres casos mencionados.

Caso a)

Consideremos la cadena cerrada de cuatro chapas de la figura 9.46, con dos condiciones de vínculo en S_1 y una en S_2. El polo O_1 de S_1 coincide con la articulación A. El correspondiente a S_2 se encuentra en la intersección de $O_1 A_{1,2}$ con la recta que define la dirección del

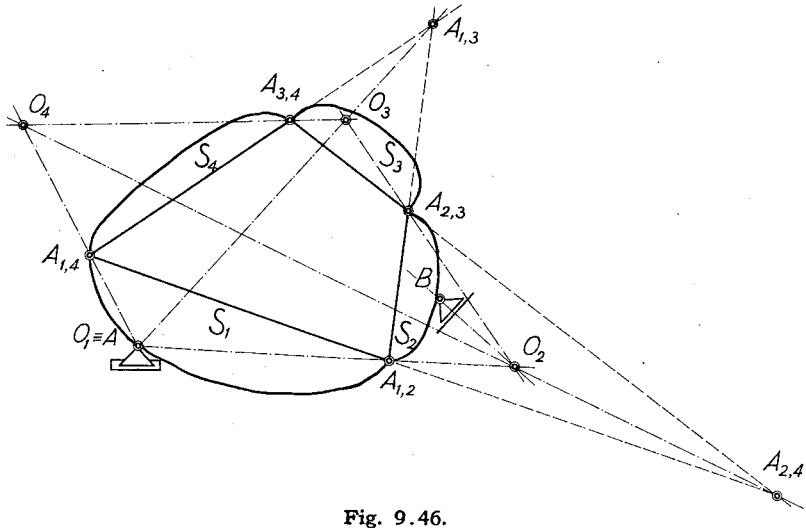


Fig. 9.46.

apoyo móvil B. Para determinar O_3, es necesario previamente hallar $A_{1,3}$, articulación relativa entre S_1 y S_3. Considerando las chapas S_2 y S_4 como dos bielas, $A_{1,3}$ se encontrará en la intersección de $A_{1,4}\,A_{3,4}$ con $A_{1,2}\,A_{2,3}$. Uniendo O_1 con $A_{1,3}$ y O_2 con $A_{2,3}$, en su intersección obtenemos O_3.

Finalmente, procediendo en forma similar, encontramos O_4. Como control, deben resultar O_3 y O_4 alineados con $A_{3,4}$.

Si el apoyo móvil B estuviera aplicado en S_4 en lugar de S_2 el camino a seguir para la determinación de los polos es el mismo.

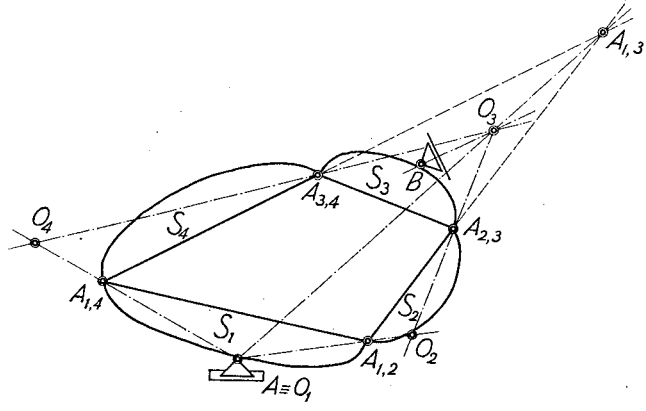


Fig. 9.47.

Caso b)

Determinada la articulación relativa $A_{1,3}$ el polo de la chapa S_3 queda determinado por la intersección de la recta definida por $O_1 \equiv A$ y $A_{1,3}$ con la dirección del apoyo B.

Conocido O_3, la determinación de O_2 es inmediata. Basta para ello unir O_3 con $A_{2,3}$ y O_1 con $A_{1,2}$, rectas que en su intersección definen el polo O_2 buscado. Para la determinación de O_4 se procede en forma análoga.

Caso c)

En los casos anteriores, la determinación de los polos tiene solución en forma directa por cuanto existe siempre una chapa con un punto fijo, si está articulada, o se conoce la dirección del desplazamiento de dos de sus puntos, si posee dos vínculos de primera especie.

Es decir que se conoce a priori el polo de una de las chapas, a partir del cual la determinación de los polos restantes no ofrece mayor dificultad.

En cambio, si ninguna chapa posee dos condiciones de vínculo, no existe ningún polo del cual partir, por lo que es necesario recurrir a procedimientos indirectos, como veremos a continuación.

Sea la cadena cerrada de la figura 9.48, sustentada a tierra por medio de 3 apoyos móviles A, B y C, ubicados en las chapas S_1, S_4 y S_3 respectivamente.

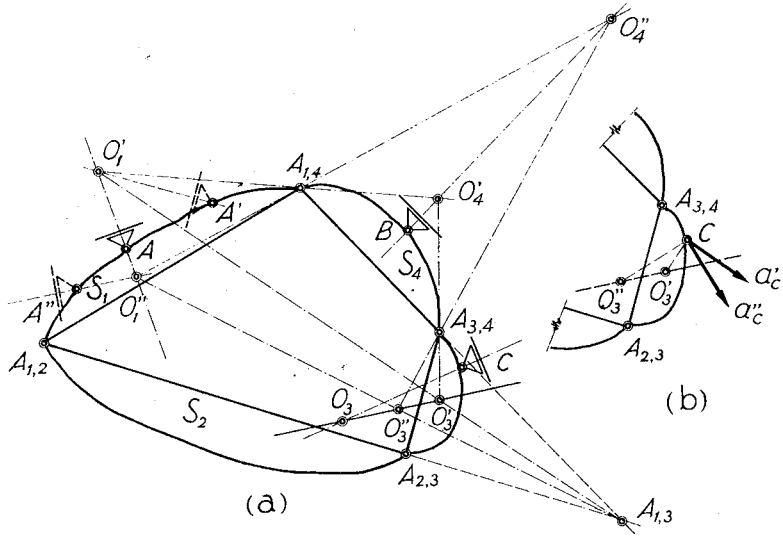


Fig. 9.48.

Supongamos por un momento suprimido el apoyo móvil C y reemplazado por otro apoyo móvil aplicado en S_1, en el punto A'. Si bien la cadena cinemática continúa teniendo un grado de libertad, sus condiciones de sustentación han cambiado, pero es posible ahora determinar los polos de las distintas chapas, por cuanto una de ellas, la S_1, posee dos condiciones de vínculo. El polo O_1' se encontrará en la intersección de las direcciones de los apoyos móviles A y A'. El polo O_4' resulta ubicado en la intersección del apoyo móvil B con la recta $O_1' A_{1,4}$ y finalmente el polo de la chapa S_3 resulta de la intersección de las rectas $O' A_{1,3}$ y $O_4' A_{3,4}$. Por el momento no interesa conocer la ubicación de O_2'.

Los polos hallados no son los que corresponden al sistema en las condiciones de sustentación dadas. En efecto, para un desplazamiento de la cadena cinemática, la chapa S_3 experimentará una cierta rotación θ_3' en torno de O_3' y como consecuencia de ella el punto C sufrirá un corrimiento efectivo a_c', normal a la dirección $O_3' C$. Pero dicho corrimiento es incompatible con la existencia del apoyo móvil C, que sólo permite al punto C corrimientos absolutos normales a la dirección del mismo.

Quitemos ahora de A' el apoyo sustituto de la chapa S_1 y ubiquémoslo en otro punto cualquiera A'' de la misma, determinando en la forma conocida los nuevos polos O_1'', O_3'' y O_4'' que tampoco serán los definitivos, por cuanto corresponden a condiciones de sustentación que no son las reales impuestas al sistema.

Para cualquier desplazamiento de la cadena cinemática, S_3 rotará en torno de O_3'' y C experimentará un corrimiento a_c'', normal a $O_3'' C$ que también será incompatible con las verdaderas condiciones de sustentación.

Ahora bien, siempre es posible dar a la chapa S_3 dos rotaciones θ' y θ'' en torno de los polos O_3' y O_3'' respectivamente, tales que compuestas conduzcan a un corrimiento de C compatible con la existencia en dicho punto del apoyo móvil C que corresponde a las verdaderas condiciones de sustentación de la cadena cinemática.

Ahora bien, hemos visto en 9.1.6 que al componer dos rotaciones, el polo de la rotación resultante se encuentra alineado con los polos de las rotaciones componentes. En consecuencia, el polo de la rotación que conduzca para el punto C a un corrimiento compatible con las reales condiciones de sustentación del sistema debe, necesariamente, encontrarse sobre la recta $O_3' O_3''$. Pero dicho polo, será el polo verdadero de S_3, y como éste necesariamente debe encontrarse sobre la recta que define la dirección del apoyo móvil C, será el punto de intersección de esta última con $O_3' O_3''$.

De la anterior deducimos que, en una cadena cinemática cerrada de un grado de libertad, si el polo de una chapa se desplaza sobre una recta, los polos de las chapas restantes también se desplazan sobre rectas.

Una vez hallado el polo real de S_3, la determinación de los polos de las chapas restantes es inmediata.

El procedimiento indicado admite una simplificación. En efecto, supongamos, figura 9.49, suprimido el apoyo móvil C de la chapa S_3 y reemplazado por otro aplicado a la chapa S_1, en una posición tal que el polo resulte ser el punto O_1.

En la misma forma explicada, determinamos los polos O'_3 y O'_4 Pasamos ahora a cambiar la posición del apoyo móvil, y supongamos que su nueva ubicación en S_1 sea tal que el polo O''_1 coincida con el punto de intersección de las direcciones de los apoyos móviles A y B. En tal caso, en dicho punto coinciden también O''_3 y O''_4.

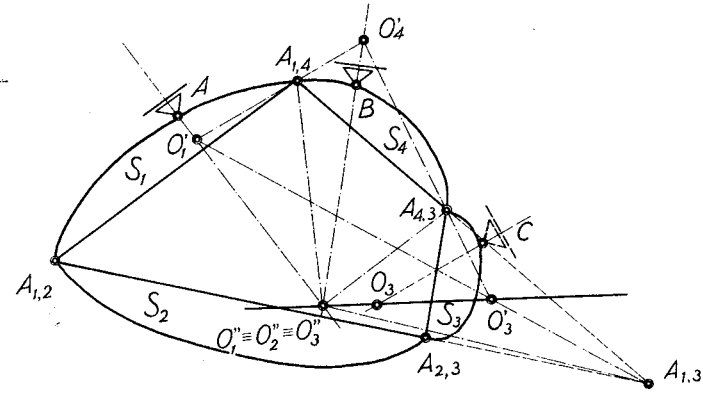


Fig. 9.49.

En efecto, como es fácil observar en la figura 9.50, el polo de la chapa S_4 debe encontrarse sobre la dirección de B y sobre la recta $O''_1 A_{1,4}$. Pero la intersección de las mismas coincide con O''_1, de donde $O''_1 \equiv O''_4$

Por un razonamiento análogo llegamos a que $O''_4 \equiv O''_3$, de donde resulta $O''_1 \equiv O''_3 \equiv O''_4$.

En consecuencia, para hallar el polo efectivo de S_3 bastará fijar un polo arbitrario a la chapa S_1 ubicado sobre la recta que define la dirección del apoyo móvil aplicado a la misma, y partiendo de éste determinar sucesivamente O'_4 y O'_3. Luego, uniendo O'_3 con el punto de intersección de los apoyos móviles A y B, hallamos la intersección de dicha recta con la dirección del apoyo móvil real de la chapa S_3, que nos define O_3.

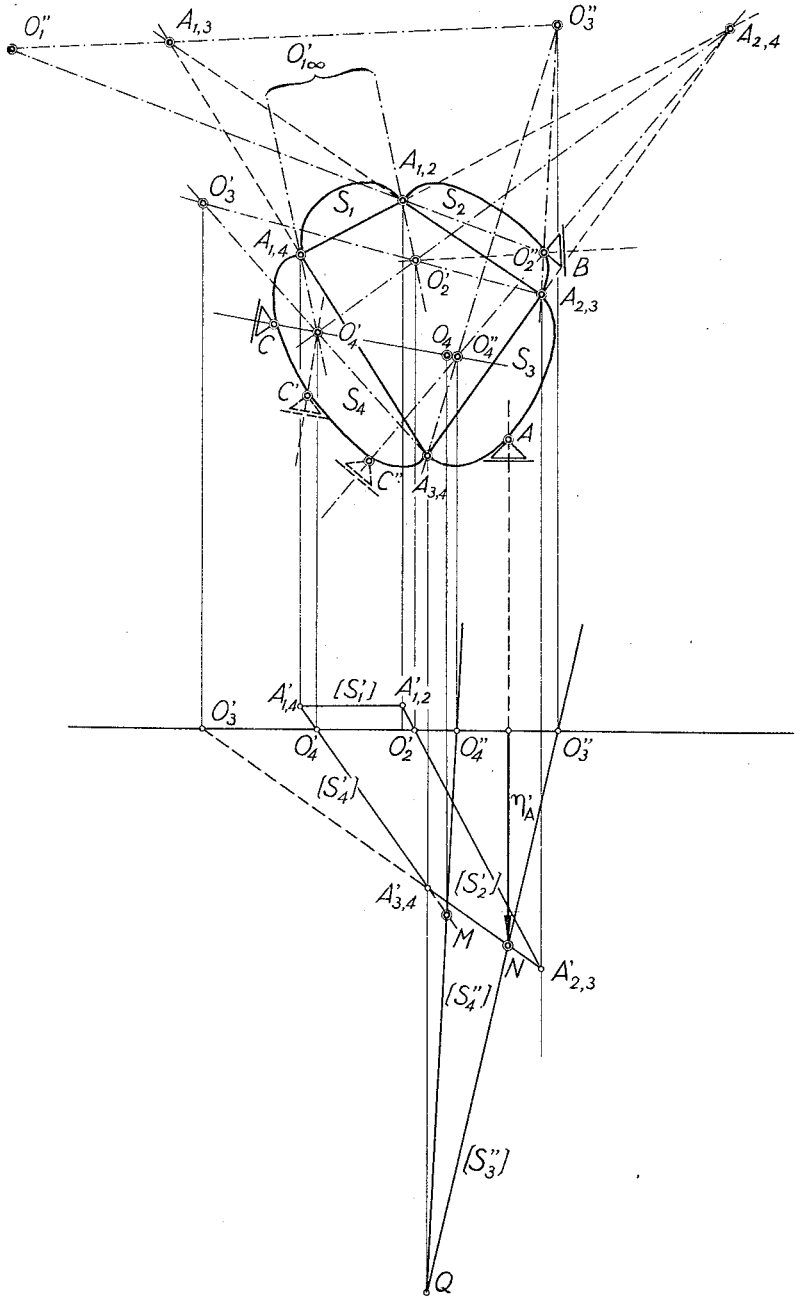

O_1''
$A_{1,3}$
$O_{1\infty}'$
O_3''
$A_{2,4}$
$A_{1,2}$
O_3'
S_1
S_2
$A_{1,4}$
O_2''
B
O_2'
$A_{2,3}$
C
O_4'
O_4
O_4''
S_3
C'
S_4
A
C''
$A_{3,4}$
$A'_{1,4}$
$[S_1']$
$A'_{1,2}$
O_3'
O_4'
O_2'
O_4''
O_3''
$[S_4']$
η'_A
$[S_2']$
$A'_{3,4}$
M
N
$A'_{2,3}$
$[S_4'']$
$[S_3'']$
Q

Fig. 9.50.

Es posible también ubicar los polos en el caso que estamos analizando, mediante el trazado de diagramas de corrimientos, como veremos a continuación.

Quitado el apoyo móvil A de la cadena cinemática de la figura 9.50 y aplicado en C' el apoyo sustituto, determinamos los polos $O_1' \ldots O_4'$.

Luego damos al sistema un desplazamiento cualquiera y trazamos el diagrama de corrimientos *de la dirección del apoyo suprimido* A. Como consecuencia de la rotación de la chapa S_3, el punto A de aplicación del apoyo móvil, experimenta un corrimiento η_A', que es incompatible con las condiciones reales de sustentación de la chapa, por cuanto el apoyo móvil original impide precisamente los corrimientos de su dirección para el punto A.

Ubicando el apoyo sustituto en una nueva posición de la chapa S_3, punto C'', determinamos los polos correspondientes, y damos ahora al sistema un segundo desplazamiento, tal que sumado al anterior conduzca para el punto A a corrimientos compatibles con su condición de vínculo primitivo. Es decir que el corrimiento resultante para el punto A debe ser tal que su proyección sobre la dirección del apoyo móvil sea nula. Si llamamos η_A'' al corrimiento vertical de A debido al segundo desplazamiento del sistema, debemos tener

$$\eta_A' + \eta_A'' = 0 \,. \qquad [9.61]$$

En consecuencia, si proyectamos sobre el eje de referencia adoptado el polo O_3'' y lo unimos con el punto N, extremo de la ordenada del diagrama que corresponde a η_A', la recta así obtenida, referida a la recta $[S_3']$ que corresponde al diagrama de corrimientos verticales de S_3 para la primera posición del apoyo móvil, nos da el diagrama de corrimientos verticales de la chapa S_3 en su verdadera condición de sustentación. Determinando ahora la intersección Q de dicha recta con la vertical de $A_{3,4}$, obtenemos un punto que, unido con la proyección sobre el eje de referencia de O_4'', determina la recta $[S_4'']$ que a su vez, referida a $[S_4']$ corresponde al diagrama de corrimientos de S_4 para su verdadera condición de sustentación.

En consecuencia, la intersección M de $[S_4']$ con $[S_4'']$ corresponde a un punto de S_4 de corrimiento vertical nulo, por lo que el polo O_4 debe encontrarse sobre la vertical del mismo. Trazada dicha vertical, su intersección con la dirección del apoyo móvil C define el polo O_4 de S_4. Conocido éste, la determinación de los polos restantes es inmediata.

9.2. Trabajo virtual.

9.2.1. Desplazamientos virtuales.

En 9.1 hemos analizado distintos problemas relativos a desplazamientos infinitésimos de chapas o sistemas de chapas, libres o vinculados.

Definiremos a continuación el concepto de *desplazamiento virtual*, diciendo que es *todo desplazamiento infinitésimo de un punto o sistema rígido de puntos materiales, compatible con sus condiciones de vínculo.*

Diremos que un desplazamiento virtual es *reversible*, cuando dado a partir de una cierta posición inicial, es siempre posible dar otro desplazamiento de igual intensidad pero de signo contrario. Cuando no exista esta posibilidad, el desplazamiento será *irreversible.*

Los desplazamientos virtuales dependen de los vínculos. En consecuencia, la reversibilidad o irreversibilidad de aquéllos será también función de la naturaleza de los vínculos.

Los vínculos de un sistema serán *bilaterales* cuando permitan únicamente desplazamientos virtuales *reversibles*, y unilaterales, cuando alguno de ellos pueda ser *irreversible.*

Supongamos, por ejemplo una chapa articulada en un punto O. Impuesta a la misma una rotación infinitésima θ cualquiera, siempre será posible dar a la chapa una rotación de igual intensidad pero de sentido contrario, en torno del mismo polo O. Es decir que el desplazamiento que experimenta la chapa es *reversible*, y como los únicos desplazamientos posibles de ésta son rotaciones de polo O, el vínculo constituido por la articulación será *bilateral.* Consideremos ahora un punto A material vinculado con un punto fijo O mediante un hilo inextensible. El punto podrá sufrir un desplazamiento infinitésimo en la dirección de la tangente al arco de circunferencia de centro O y radio OA. Dicho desplazamiento es evidentemente reversible, por cuanto puede ocurrir en dos sentidos contrarios. Pero, aparte de dicho desplazamiento, el vínculo materializado por el hilo permite al punto un desplazamiento en la dirección del radio de la circunferencia y dirigido hacia el centro de la misma, no siendo posible el desplazamiento opuesto debido a la inextensibilidad del hilo. Es decir que es posible un desplazamiento virtual *irreversible.*

En consecuencia, el vínculo es unilateral.

Un punto perteneciente a una chapa que experimenta un desplazamiento virtual, sufrirá un determinado corrimiento infinitésimo, corrimien-

to que no podrá ser cualquiera, sino que su dirección queda impuesta por los vínculos del sistema material a que pertenece el punto. Por esta razón será un *corrimiento virtual.*

Dos desplazamientos virtuales son *equivalentes* cuando es posible pasar del uno al otro multiplicando por una constante la intensidad de los corrimientos originados por uno de ellos.

Un desplazamiento o corrimiento virtual de un sistema, es *dependiente* cuando es resultante de dos o más desplazamientos o corrimientos experimentados por el mismo sistema. En cambio, será *independiente* si no depende o equivale a alguno o varios de ellos.

9.2.2. Trabajo de una fuerza.

Sea, figura 9.51, un punto A de una chapa en el que se encuentra aplicada una fuerza P. Supongamos que el punto experimenta un determinado corrimiento a.

Definiremos como trabajo Φ desarrollado por la fuerza P durante el desplazamiento a de su punto de aplicación, al producto de la intensidad de P por la proyección de a sobre la dirección de P, es decir

$$\Phi = P.a\cos\alpha = P.\delta \qquad [9.62]$$

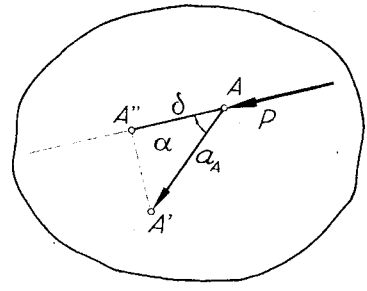


Fig. 9.51.

Si el corrimiento del punto de aplicación de la fuerza es un corrimiento virtual, diremos que el trabajo desarrollado por P es un *trabajo virtual.* En lo que sigue, nos ocuparemos exclusivamente del trabajo desarrollado durante desplazamientos virtuales, es decir, de trabajos virtuales.

Cuando el sentido de la proyección del corrimiento del punto de aplicación de la fuerza coincide con el de ésta, el trabajo será *positivo*, y *negativo* en caso contrario. Finalmente, si la dirección del corrimiento es normal a la recta de acción de la fuerza, el trabajo desarrollado por ésta es nulo. En la figura 9.52 se ilustran los tres casos indicados.

Demostraremos ahora que el trabajo desarrollado por un sistema de fuerzas aplicado en una chapa que experimente un cierto desplazamiento, es igual al trabajo de su resultante.

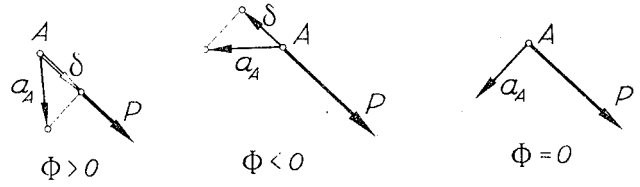


Fig. 9.52.

Supongamos para ello una chapa S que experimenta una rotación θ en torno de un polo O (figura 9.53) y que en el punto A de la misma actúen las fuerzas P_1 y P_2 cuya resultante es R.

Como consecuencia de la rotación impuesta a la chapa, el punto A experimentará un corrimiento a_A normal a OA de intensidad

$$a_A = \theta . OA . \qquad [9.63]$$

Llamando Φ_1, Φ_2 y Φ_R a los trabajos desarrollados durante el corrimiento virtual a_A por P_1, P_2 y R respectivamente, y α_1, α_2 y α_R los ángulos que sus direcciones forman con la de a_A, tendremos

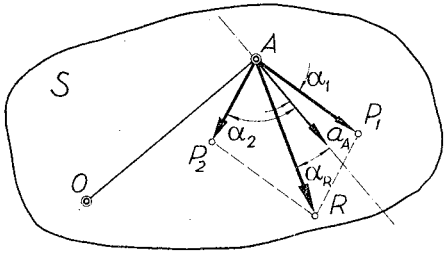


Fig. 9.53.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= P_1 . a_A \cos\alpha_1 \\ \Phi_2 &= P_2 . a_A \cos\alpha_2 \\ \Phi_R &= R . a_A \cos\alpha_R \end{aligned}\right\} \qquad [9.64]$$

Pero como $P_1 \cos\alpha$, $P_2 \cos\alpha_2$ y $R \cos\alpha_R$ corresponden a las proyecciones de cada una de las fuerzas y de la resultante sobre la dirección de a_A, resulta:

$$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = R \cos\alpha_R . \qquad [9.65]$$

Sumando miembro a miembro las dos primeras ecuaciones [9.64] y sacando factor común a_A:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = a_A (P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2) , \qquad [9.66]$$

y reemplazando el valor del paréntesis dado por la [9.65] se tiene:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = a_A R . \cos\alpha_R \qquad [9.67]$$

que por comparación con la tercera de las [9.64] nos conduce a:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_R \ . \qquad [9.68]$$

Es decir que el trabajo de la resultante es igual a la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas componentes.

La demostración se generaliza para un sistema constituido por un número cualquiera de fuerzas, mayor de dos, considerando primeramente dos de ellas y su resultante, y luego ésta y otra cualquiera, hasta llegar a la resultante total.

9.2.3. Trabajo de un par de fuerzas.

El trabajo de un par de fuerzas aplicado a un chapa rígida que experimenta una rotación es igual al producto de la intensidad del par por la intensidad de la rotación.

Para demostrarlo, consideremos la chapa de la figura 9.54, que experimenta una rotación $\theta > 0$ y sobre la que actúa un par de momento M positivo.

Supongamos materializado el par por dos fuerzas P y $-P$, aplicadas en dos puntos A y B de la chapa, alineados con el polo O y separados de una distancia d tal que se cumpla

$$P.d = M \ . \qquad [9.69]$$

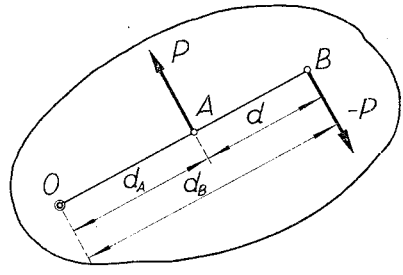


Fig. 9.54.

De acuerdo con el sentido del par, y la ubicación relativa de A y B respecto de O los sentidos de las fuerzas aplicadas a los mismos son los que se indican en la figura. Como consecuencia de la rotación, el punto A experimentará un corrimiento

$$a_A = \theta.d_A \qquad [9.70]$$

y el B otro

$$a_B = \theta.d_B \qquad [9.71]$$

Por ser $\theta > 0$ el signo de a_A será opuesto al de P y el de a_B coincidirá con el de $-P$. Como, por otra parte, la dirección de ambos corri-

mientos coincide con la común de P y $-P$, las expresiones de los respectivos trabajos serán

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= -P.a_A \\ \Phi_2 &= +P.a_B \end{aligned}\right\} \qquad [9.72]$$

y la suma de ambos nos da el trabajo realizado por el par, es decir

$$\Phi_M = P(a_B - a_A)\,. \qquad [9.73]$$

Reemplazando en esta última expresión los valores de a_A y a_B dados por las [9.70] y [9.71] resulta:

$$\Phi_M = P\theta(d_B - d_A) \qquad [9.74]$$

pero $d_B - d_A = d$, luego

$$\Phi_M = P.\theta.d\,. \qquad [9.75]$$

Teniendo en cuenta que $P.d = M$, llegamos finalmente a

$$\Phi_M = M.\theta\,. \qquad [9.76]$$

Como corolario tenemos que si el desplazamiento de la chapa es una traslación, el trabajo desarrollado por el par es nulo. En efecto, sabemos que para una traslación, los corrimientos de todos los puntos de la chapa, en cualquier dirección, son de igual intensidad y sentido. De acuerdo con ello, tenemos que $d_B = d_A$, por lo que el segundo miembro de la [9.74] es igual a cero, resultando

$$\Phi_M = 0\,. \qquad [9.77]$$

9.2.4. Trabajo de dos fuerzas opuestas.

Consideremos dos fuerzas opuestas $P_A = -P_B$, aplicadas respectivamente en los puntos A y B, que experimentan corrimientos a_A y a_B (figura 9.55).

Construido un diagrama de Williot-Mohr, proyectamos sobre la recta m-m, paralela a la dirección AB, los vectores equipolentes con a_A y a_B.

El trabajo de P_A será

$$\Phi_A = P_A . a'_A \ , \qquad [9.78]$$

y el correspondiente a P_B .

$$\Phi_B = P_B . a'_B \ , \qquad [9.79]$$

y el trabajo total

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B = P_A \, a'_A + P_B \, a'_B \ . \qquad [9.80]$$

Teniendo en cuenta que $P_A = -P_B$, reemplazando tenemos

$$\Phi = P_B (a'_B - a'_A) \ . \qquad [9.81]$$

Pero $a'_B - a'_A = a'_{BA}$ es la proyección sobre m-m, y en consecuencia sobre la dirección AB, del corrimiento relativo a_{BA} del punto B respecto del A, de donde

$$\Phi = P_B a'_{BA} \ . \qquad [9.82]$$

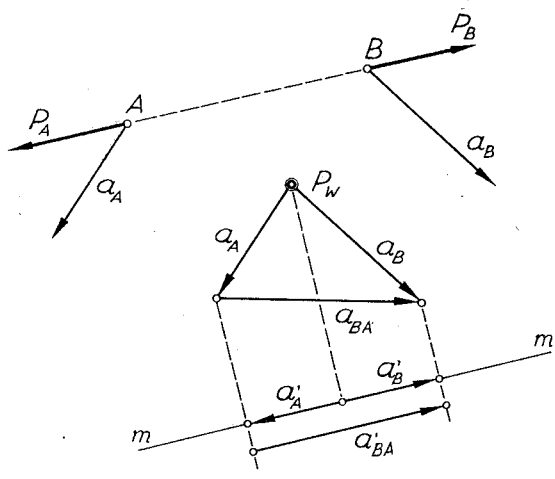


Fig. 9.55.

En consecuencia, *el trabajo desarrollado por dos fuerzas opuestas para corrimientos cualesquiera de sus puntos de aplicación, es igual al producto de la intensidad de cualquiera de ellas por la proyección sobre su dirección del corrimiento relativo de su punto de aplicación respecto de la otra fuerza.*

Consideremos ahora el sistema de la figura 9.56 constituido por dos chapas articuladas entre sí y vinculadas mediante una barra MN de modo de constituir un sistema rígido e indeformable, en equilibrio bajo la acción de un sistema P_i de fuerzas exteriores.

Suprimida la barra MN, el sistema no se encontrará más en equilibrio. Para restituirlo, es necesario aplicar en M y N, dos fuerzas opuestas que materialicen las reacciones internas ejercidas por la barra en los puntos M y N. Si damos al sistema un desplazamiento cualquiera, los puntos M y N experimentarán corrimientos de direcciones determinadas y las fuerzas T_M y T_N desarrollarán trabajo.

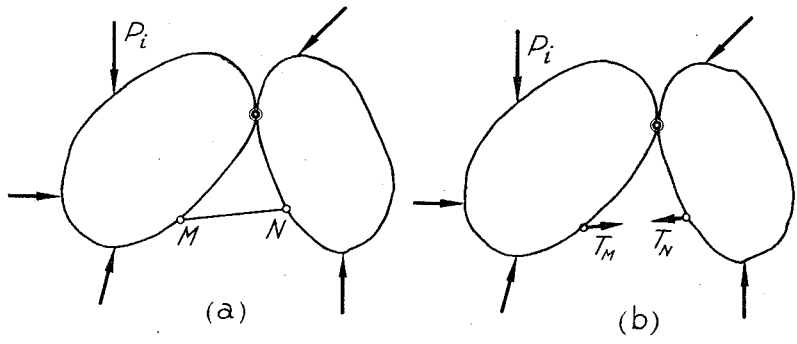


Fig. 9.56.

El trabajo total de ambas, de acuerdo con lo demostrado, tiene por expresión

$$\Phi = T_N . a'_{NM} = T_M . a'_{MN} \quad . \qquad [9.83]$$

Llamando T al esfuerzo en la barra MN, tenemos $|T| = |T_M| = |T_N|$. Además, por ser a'_{MN} la proyección sobre la dirección MN del desplazamiento relativo a_{MN}, resulta

$$|a'_{MN}| = |a'_{NM}| = |\delta_{NM}| \quad . \qquad [9.84]$$

de donde

$$\Phi = |T| \, . \, |\delta_{MN}| \, . \qquad [9.85]$$

Cuando T es positiva, es decir si el esfuerzo es de tracción, y la proyección a'_{NM} del corrimiento relativo a_{NM} también lo es el trabajo desarrollado resulta positivo. Pero si a'_{NM} es positivo, el punto N se acerca al M y, de acuerdo con la convención adoptada, la variación de distancia es negativa. Entonces, para que la [9.85] se corresponda con la [9.83] también en signo, es necesario considerar la variación de distancia con signo cambiado, es decir

$$\Phi = T . (-\delta_{NM}) \, . \qquad [9.86]$$

Resumiendo tenemos que, conforme con las convenciones adoptadas, el trabajo del esfuerzo interno de una barra es igual al producto de la intensidad del mismo por la variación de distancia entre sus puntos extremos cambiada de signo.

9.2.5. El principio de los trabajos virtuales.

Sea un conjunto de puntos materiales, sujetos al vínculo de la rigidez, sobre el que actúa un sistema de fuerzas. Para cualquier desplazamiento del sistema material, los puntos de aplicación de las distintas fuerzas experimentan corrimientos virtuales, y en consecuencia las mismas desarrollan trabajo. Denominaremos *trabajo virtual* del sistema de fuerzas, al trabajo que *desarrollarían* durante el desplazamiento virtual del sistema de puntos materiales.

El sistema de puntos materiales podrá o no encontrarse en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas aplicado. El principio de los trabajos virtuales, establece precisamente, las condiciones que se deben cumplir para que pueda existir equilibrio.

Su enunciado es el siguiente:

Es condición necesaria y suficiente para que un sistema de puntos materiales, sujeto a vínculos determinados, se encuentre en equilibrio en una determinada posición bajo la acción de un sistema de fuerzas cualesquiera, que el trabajo desarrollado por las mismas, para cualquier desplazamiento virtual del sistema de puntos materiales, dado a partir de dicha posición, sea nulo o negativo.

El principio de los trabajos virtuales es más restrictivo en el caso de desplazamientos reversibles que en el de irreversibles, exigiendo para los primeros que el trabajo sea nulo y permitiendo para los segundos que resulte negativo.

En efecto, si los desplazamientos posibles del sistema son reversibles, y para uno de ellos el trabajo desarrollado fuera negativo, existiría siempre la posibilidad de conferir al sistema un desplazamiento opuesto, con lo que el trabajo resultaría positivo. De acuerdo con el enunciado del principio, si el trabajo es positivo no puede haber equilibrio. En consecuencia, para desplazamientos virtuales reversibles, el trabajo desarrollado, necesariamente debe ser nulo.

Dado que los vínculos utilizados hasta ahora son todos bilaterales, y, en consecuencia, los desplazamientos infinitésimos compatibles con los mismos son reversibles, y como, además, no nos ocuparemos de otros tipos de vínculo, en lo sucesivo, al aplicar el principio de los trabajos virtuales lo haremos estableciendo que el trabajo desarrollado es siempre nulo.

El principio de los trabajos virtuales ha recibido y recibe otras designaciones. Especialmente en algunos textos se acostumbra a denominarlo principio de las velocidades virtuales. Otros autores lo llaman de los momentos virtuales. Hemos mantenido la denominación de trabajos virtuales, siguiendo con ello a la autoridad del ingeniero ENRIQUE BUTTY, quien en

su magistral tratado sobre *"Resolución estática de sistemas planos"* justifica las razones que abonan esta denominación.

En el capítulo 1 dijimos que, si bien para el desarrollo de los distintos capítulos de la Estática nos apoyaríamos en el principio del paralelogramo de fuerzas, era también posible realizarlo sobre la base de otros principios, por ejemplo, el de los trabajos virtuales.

A título de ejemplo, veremos a continuación, cómo la aplicación del principio de los trabajos virtuales a chapas rígidas sujetas a sistemas de fuerzas, conducen a las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema plano de fuerzas.

Sea, figura 9.57, una chapa S, libre en su plano, sujeta a la acción de un sistema de fuerzas no concurrentes, de intensidades P_i y direcciones de argumento φ_i.

Como sabemos, las condiciones necesarias y suficientes para que dicho sistema de fuerzas se encuentre en equilibrio son tres, expresables entre otras, mediante las tres ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n P_i \cos\varphi_i &= 0 \\ \sum_1^n P_i \operatorname{sen}\varphi_i &= 0 \\ \sum_1^n P_i . d_i &= 0 \ , \end{aligned}\right\} \qquad [9.87]$$

donde d_i son las distancias de las rectas de acción de cada una de las fuerzas al centro de momentos elegido, que en nuestro caso es el origen de coordenadas O.

Una chapa posee en su plano tres grados de libertad y en consecuencia es susceptible de experimentar tres desplazamientos independientes: dos traslaciones y una rotación.

Si damos a la chapa una traslación paralela al eje z de intensidad a_z, todos los puntos y en especial los de aplicación de las fuerzas P_i experimentarán corrimientos iguales, de intensidad a_z. Para que la chapa se encuentre en equilibrio bajo la acción del sistema P_i, de acuerdo con el principio de los trabajos virtuales, debemos tener

$$\Phi = \sum_1^n P_i \, a_i \cos\varphi_i = 0 \ . \qquad [9.88]$$

Pero los corrimientos a_i son todos iguales entre sí e iguales a a_z, por tratarse de una traslación; de donde

$$\sum_1^n P_i\, a_i \cos \varphi_i = a_z \sum_1^n P_i \cos \varphi_i = 0 \qquad [9.89]$$

y finalmente

$$\sum_1^n P_i \cos \varphi_i = 0 \qquad [9.90]$$

expresión que corresponde a la primera de las [9.87].

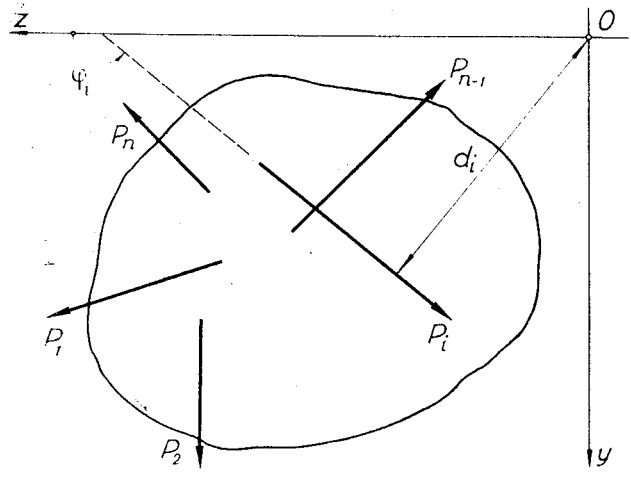


Fig. 9.57.

Dando ahora un desplazamiento a_y paralelo al eje y, y planteada la correspondiente ecuación de trabajos virtuales, tenemos

$$\Phi = \sum_1^n P_i\, a_i \operatorname{sen} \varphi_i = a_y \sum_1^n P_i \operatorname{sen} \varphi_i = 0\ , \qquad [9.91]$$

de donde

$$\sum_1^n P_i \operatorname{sen} \varphi_i = 0\ . \qquad [9.92]$$

que se corresponde con la 2ª de las [9.87].

Finalmente, para una rotación θ de la chapa en torno del polo O, si aplicamos en éste elaciones θ de la dirección de cada una de las fuerzas, tendremos que los corrimientos de cada uno de sus puntos de aplicación según la dirección de las mismas valdrán

$$a_i' = \theta . d_i \qquad [9.93]$$

y el trabajo virtual desarrollado por el sistema, que de acuerdo con el enunciado del principio de los trabajos virtuales debe ser nulo, tendrá por expresión:

$$\sum_1^n P_i . a_i' = \sum_1^n P_i \, \theta . d_i = \theta \sum_1^n P_i \, d_i = 0 \qquad [9.94]$$

de donde

$$\sum_1^n P_i \, d_i = 0 \ , \qquad [9.95]$$

expresión idéntica con la tercera de las [9.87].

9.2.6. Aplicación del principio de los trabajos virtuales a la determinación de incógnitas estáticas en sistemas estáticamente determinados.

Consideremos la chapa de la figura 9.58 (*a*), isostáticamente sustentada y sujeta a la acción de las cargas P_i. El sistema de puntos materiales se encuentra en equilibrio. Quitemos una de las condiciones de vínculo, el apoyo móvil B, por ejemplo, con lo que la chapa adquiere un grado de libertad, no encontrándose más en equilibrio.

Para restituirlo, debemos aplicar en B y en la dirección del vínculo suprimido una fuerza X, que materialice la reacción que este último es capaz de desarrollar. La operación de quitar el vínculo y poner en su lugar la reacción, se denomina *poner en evidencia la incógnita*, extendiéndose el concepto tanto a las reacciones de vínculo externo como interno, sean estas últimas esfuerzos normales o de corte.

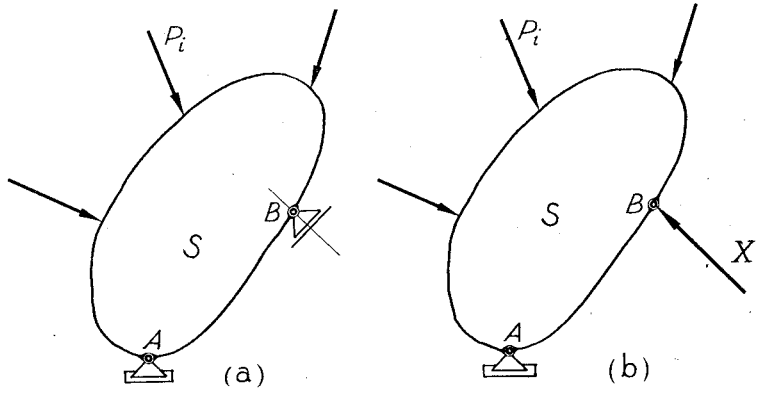


Fig. 9.58.

Si X es capaz de mantener en equilibrio el sistema de puntos materiales, para un desplazamiento virtual cualquiera del mismo, de acuerdo con el principio de los trabajos virtuales, el trabajo desarrollado por el sistema $(P_i\ ,\ X)$ debe ser nulo, teniéndose, en consecuencia,

$$\sum_1^n P_i\ a_i' + X\ a_x' = 0 \qquad [9.96]$$

donde a_i' y a_x' corresponden a las proyecciones sobre las direcciones de P_i y X, respectivamente, de los corrimientos efectivos de sus puntos de aplicación.

De la [9.96] deducimos que

$$X = -\frac{\sum_1^n P_i\ a_i'}{a_x'} \qquad [9.97]$$

expresión que nos permite calcular el valor de la incógnita X, que en este caso es una reacción de vínculo. Los valores a_i' y a_x' pueden obtenerse analíticamente, de un diagrama de Williot-Mohr, o bien mediante el trazado de un diagrama de corrimientos en una dirección cualquiera.

A continuación aclararemos mediante algunos ejemplos específicos, los conceptos anteriores.

a) *Determinación de reacciones de vínculo externo.*

Sea la viga simplemente apoyada de la figura 9.59 (*a*), sujeta a la acción de las fuerzas P_1 y P_2, de la que se pide calcular la reacción en el apoyo móvil B.

El primer paso consiste en poner en evidencia la incógnita, suprimiendo el vínculo y aplicando en B la fuerza incógnita X, positiva y de la dirección en que es capaz de reaccionar el vínculo suprimido (figura 9.59(*b*).

La chapa posee ahora un grado de libertad, y es susceptible de experimentar desplazamientos que, dada su forma de vinculación, sólo pueden

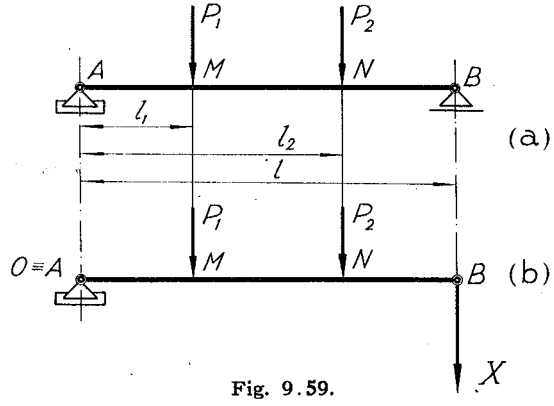


Fig. 9.59.

ser rotaciones θ en torno al polo O coincidente con el apoyo fijo A.

Si la chapa experimenta una rotación θ, por ser las direcciones de las fuerzas P_1, P_2 y X paralelas entre sí y normales al eje de la viga, los corrimientos efectivos de sus puntos de aplicación originados por la rotación, se proyectarán en verdadera magnitud sobre la dirección de las fuerzas, es decir, que

$$a_i' \equiv a_i \ . \qquad [9.98]$$

La expresión de la ecuación de trabajos virtuales es

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + X a_x = 0 \qquad [9.99]$$

Pero $a_1 = \theta . l_1$; $a_2 = \theta . l_2$, y $a_x = \theta . l$;

en consecuencia, reemplazando estos valores en [9.99], tenemos

$$P_1 \theta l_1 + P_2 \theta l_2 + X . \theta . l = 0 \ , \qquad [9.100]$$

y finalmente, dividiendo por θ

$$P_1 l_1 + P_2 l_2 + X l = 0 \qquad [9.101]$$

de donde

$$X = -\frac{P_1 l_1 + P_2 l_2}{l} \qquad [9.102]$$

expresión idéntica a la que conduce la aplicación de las condiciones de equilibrio estático.

b) *Determinación de esfuerzos en barras.*

Consideremos la viga de reticulado, simplemente apoyada, sujeta a la acción del sistema de cargas de la figura 9.60, de la que se pide calcular el esfuerzo en la barra MN.

Puesta en evidencia la incógnita, suprimiendo la barra y reemplazada por dos fuerzas T y $-T$, que materializan un esfuerzo de tracción (positivo), el sistema se transforma en un mecanismo de un grado de libertad constituido por las chapas S_1 y S_2, articuladas en C.

Para un desplazamiento virtual del sistema, la correspondiente ecuación de trabajos virtuales será:

$$P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + T(-\delta_{MN}) = 0 \qquad [9.103]$$

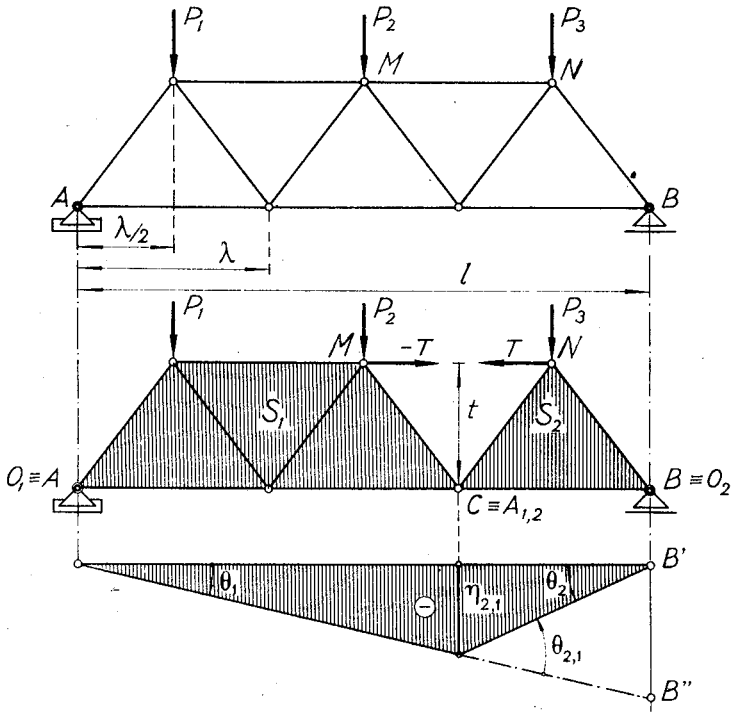


Fig. 9.60.

donde δ_{MN} es la variación de distancia entre los puntos MN y η_1, η_2, η_3 los corrimientos verticales de los puntos de aplicación de las fuerzas.

Supongamos que la chapa S_1 experimenta una rotación $\theta_1 > 0$. Como consecuencia de la misma, la S_2 sufrirá a su vez otra rotación θ_2, que será en este caso negativa. Los polos de las mencionadas rotaciones serán, para la chapa S_1, la articulación fija A y para la S_2 el punto B por encontrarse alineado con O_1 y $A_{1,2} \equiv C$ y sobre la dirección del apoyo móvil B.

Si aplicamos en O_1 una elación vertical (por ser verticales las fuerzas actuantes) de intensidad θ_1 y llamamos λ a la longitud de la malla del reticulado, los corrimientos verticales de los puntos de aplicación de P_1 y P_2 valdrán respectivamente

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \theta_1 . \frac{\lambda}{2} \\ \eta_2 &= \theta_1 . \frac{3}{2}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad [9.104]$$

Análogamente, aplicando en O_2 la elación vertical θ_2 obtenemos para el punto de aplicación de P_3 el siguiente corrimiento vertical:

$$\eta_3 = \theta_2 . \frac{\lambda}{2} . \qquad [9.105]$$

En consecuencia

$$\sum_1^3 P_i \eta_i = P_1 \frac{\lambda}{2} \theta_1 + P_2 \frac{3}{2} \lambda \theta_1 + P_3 \frac{\lambda}{2} \theta_2 . \qquad [9.106]$$

El corrimiento vertical de $A_{1,2}$, común a ambas chapas, será

$$\eta_{1,2} = \theta_1 2\lambda = \theta_2 \lambda \qquad [9.107]$$

y la variación de distancia

$$| \delta_{MN} | = | \theta_{2,1} . t . | \qquad [9.108]$$

Si $\theta_1 > 0$ resultan $\eta_i > 0$ y $\delta_{MN} < 0$.

Por otra parte, de la figura tenemos

$$B' B'' = \theta_1 l = -\theta_{2,1} \lambda \qquad [9.109]$$

de donde

$$\theta_{2,1} = -\theta_1 \frac{l}{\lambda} . \qquad [9.110]$$

Reemplazando en la [9.106] θ_2 por su valor dado por la [9.107] resulta

$$\sum_1^3 P_i \eta_i = \frac{\lambda}{2} \theta_1 [P_1 + 3P_2 + 2P_3] \qquad [9.111]$$

Finalmente, de acuerdo con las [9.108], [9.110] y [9.111] y teniendo en cuenta el signo de δ_{MN}, la [9.103] se transforma en

$$\frac{\lambda}{2} \theta_1 [P_1 + 3P_2 + 2P_3] + T . \theta_1 \frac{tl}{\lambda} = 0 . \qquad [9.112]$$

Despejando T y considerando que $3\lambda = l$.

$$T = -\frac{P_1 + 3P_2 + 2P_3}{6t} \lambda , \qquad [9.113]$$

expresión que nos da en intensidad y signo, el esfuerzo en la barra MN.

c) *Esfuerzos característicos en sistemas de alma llena.*

Hemos visto que para poder aplicar el principio de los trabajos virtuales a la determinación de incógnitas estáticas, es necesario ponerlas previamente en evidencia, confiriendo al sistema de puntos materiales un grado de libertad, para que en esta forma pueda experimentar desplazamientos.

En el caso de las reacciones de vínculo externo o esfuerzos en barras de reticulado, la incógnita la evidenciábamos suprimiendo el vínculo externo o interno, y haciendo actuar en su reemplazo, la reacción que era capaz de desarrollar.

Veamos ahora la forma de poner en evidencia los tres esfuerzos característicos de una sección cualquiera de un sistema de alma llena: momento flexor, esfuerzo de corte y esfuerzo normal.

Consideremos para ello el sistema de la figura 9.61*a*, isostáticamente sustentado, y sujeto a un estado de cargas P_i. En una sección cualquiera s-s, las fuerzas exteriores, activas y reactivas, ubicadas a uno u otro lado de la misma, al ser reducidas al baricentro de la sección dan origen a un momento flexor, un esfuerzo de corte y un esfuerzo axil o normal.

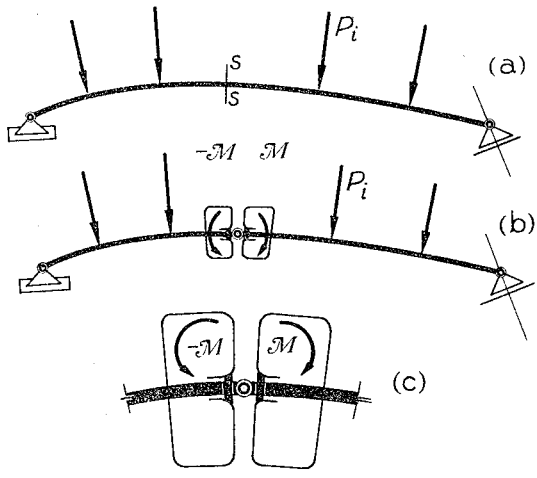


Fig. 9.61.

Si pretendemos poner en evidencia el momento flexor, debemos idear un mecanismo cinemático que, ubicado en la sección que se analice, no permita la propagación de momentos a través de la misma.

Pero dicho mecanismo sí debe permitir la transmisión de los esfuerzos normales y de corte.

El mecanismo mencionado se logra simplemente disponiendo una articulación en coincidencia con el baricentro de la sección considerada (fig. 9.61 *b*). Dicha articulación es capaz de transmitir cualquier fuer-

za de la parte izquierda a la derecha o viceversa, pero no así un par, por cuanto éste haría girar la chapa en la cual estuviera aplicado, en torno a dicha articulación.

Introducida la articulación, el sistema se transforma en una cadena cinemática de dos chapas, con tres condiciones de vínculo. En consecuencia, posee un grado de libertad, y como se encuentra cargada, no estará más en equilibrio, experimentando cada una de las chapas desplazamientos que, en el caso de la figura, serán rotaciones en torno de polos propios.

La chapa de la derecha experimentará con respecto a la de la izquierda una rotación relativa en torno a la articulación introducida. Para restituir el equilibrio, y evitar la rotación relativa entre las partes, imaginemos dos chapas empotradas en las secciones extremas de cada parte del sistema, inmediatas a la articulación, y supongamos actuando dos pares opuestos, uno en cada chapa, tales que se opongan a la rotación relativa (figura 9.61 c).

Impedida de girar una parte del sistema con respecto a la otra, éste se encontrará en las condiciones iniciales, es decir, se ha restituido el equilibrio y al mismo tiempo evidenciado un par de pares, opuestos, que por definición materializan el momento flexor.

Supongamos ahora el mismo sistema de la figura 9.61 cortado en la sección s-s, y separadas ambas caras de la misma una distancia infinitésima dl (fig. 9.62 *a*). Si vinculamos ahora las dos partes por medio de dos bielas paralelas y normales a la sección (fig. 9.62 *b*), el desplazamiento relativo posible de una parte respecto de la otra es una traslación de dirección normal a la de las bielas, resultando impedida toda rotación relativa y cualquier traslación de la dirección de aquéllas. Por

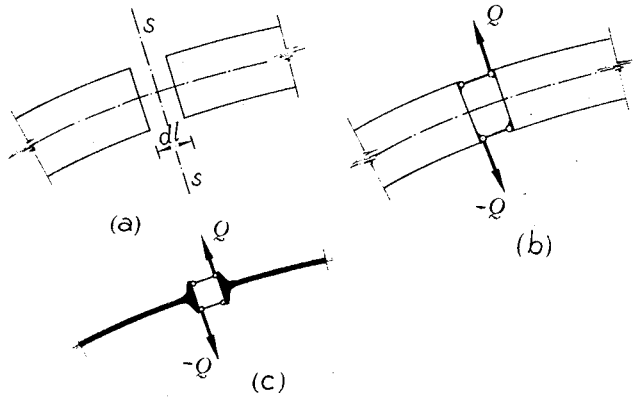


Fig. 9.62

otra parte, el mecanismo indicado, permite transmitir pares y esfuerzos normales entre las dos partes del sistema, pero no así esfuerzos de corte. En efecto, las dos fuerzas que constituyen el par pueden considerarse de rectas de acción coincidentes con los ejes de las bielas, y como éstas son capaces de absorber esfuerzos colineales con ellas, están en condiciones de transmitir las fuerzas que forman el par, de una parte a la otra del sistema. Lo mismo ocurre con el esfuerzo normal, que aplicado en el baricentro de una cara de la sección y siendo normal a la misma, puede ser descompuesto en dos fuerzas paralelas coincidentes con los ejes de las bielas.

No ocurre lo mismo con fuerzas contenidas en el plano de la sección, tal el esfuerzo de corte, por cuanto las mismas tenderían a producir desplazamientos relativos entre las dos partes del sistema, precisamente de la dirección que permiten las bielas.

Prácticamente, cuando se opera con sistemas de alma llena y se los representa por su eje, el mecanismo que permite poner en evidencia el esfuerzo de corte se indica esquemáticamente en la forma que muestra la figura 9.62-(c).

Se hace notar que las dos fuerzas Q y $-Q$ que materializan el esfuerzo de corte en la sección, si bien aparecen como desplazadas, en realidad tienen la misma recta de acción, estando aplicadas cada una de ellas a una de las caras de la sección, infinitamente próximas entre sí.

Para evidenciar el esfuerzo normal recurrimos a un mecanismo cinemático constituido también por dos bielas paralelas, pero dispuestas paralelamente al plano de la sección en la forma que indica la figura 9.63.

Este mecanismo sólo permite desplazamientos relativos entre las dos partes del sistema, de dirección normal a la dirección de las bielas, impidiendo tanto las rotaciones relativas como las traslaciones relativas de la dirección de las mismas. Por otra parte, permite la propagación de pares, reemplazados por dos fuerzas de rectas de acción coincidente con los ejes

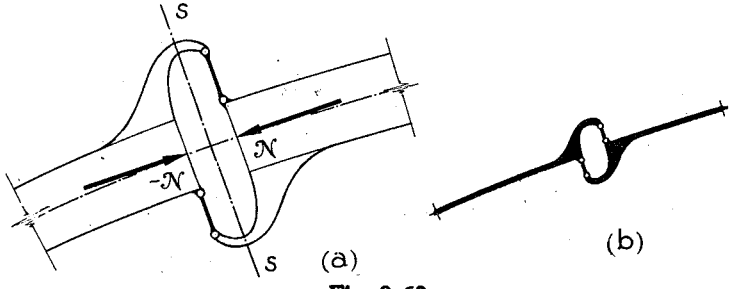


Fig. 9.63.

de las bielas, o bien de esfuerzos de corte, materializados por dos fuerzas, también coincidentes con aquéllas. En cambio, el esfuerzo axil, constituido por dos fuerzas opuestas normales al plano de la sección, y en consecuencia a las bielas, tiende a producir un desplazamiento relativo de ambas caras de aquélla, o a impedirlo.

En la figura 9.63 (*b*) indicamos la forma esquemática de representar dicho mecanismo.

La figura 9.64 (*a*) muestra un sistema isostáticamente sustentado, sujeto a un estado de cargas P_i al que hemos puesto en evidencia el esfuerzo de corte en una sección s-s.

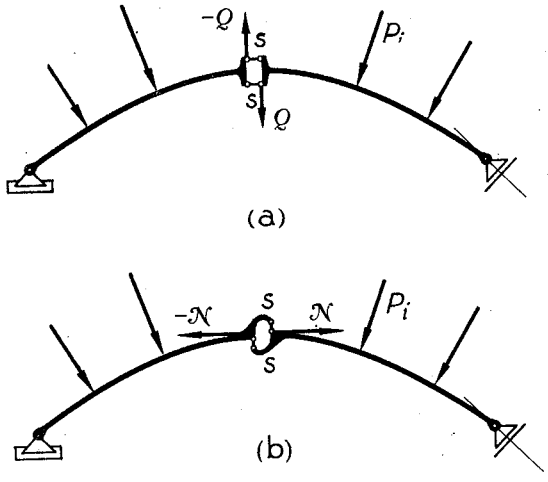


Fig. 9.64.

Para ello, hemos cortado en la sección y aplicado a la misma el mecanismo cinemático de la figura 9.62, con lo que el sistema adquiere un grado de libertad. Por encontrarse sujeto a la acción de las cargas P_i, no se encontrará más en equilibrio y las dos chapas en que ha quedado dividido el sistema, tenderán a desplazarse relativamente en dirección normal a las bielas, es decir, paralelamente al plano de la sección. Para restituirlo, aplicamos en ambas caras de la misma, fuerzas opuestas que tiendan a evitar dicho desplazamiento relativo, y que materializan el esfuerzo de corte. En forma similar, hemos puesto en evidencia el esfuerzo normal en la sección, lo que ilustra la figura 9.64 (*b*).

De acuerdo con la convención adoptada, el signo del momento flexor coincide, para piezas horizontales e inclinadas, con el signo del momento de la resultante de las fuerzas ubicadas a la izquierda de la sección, con respecto al baricentro de la misma, y con el de la resultante de las ubicadas por debajo, si la pieza es vertical. En consecuencia, de los dos pares que materializan el momento flexor en la figura 9.64 (c), el que define el signo del mismo es el aplicado a la parte *derecha* del sistema, por cuanto es el que equilibra a la misma si se suprime la parte izquierda. Para una pieza vertical, el signo del momento flexor correspondería al par aplicado a la parte superior de las dos en que se divide la pieza.

La situación es análoga para el esfuerzo de corte, en que el signo del mismo se corresponde con el de la fuerza aplicada a la cara *derecha* de la sección, o a la *superior*, si la pieza es vertical.

Para el esfuerzo normal, el signo resulta de si la componente normal a la sección de uno u otro lado de la misma, la comprime o tracciona. En este caso es indistinto considerar una u otra de las dos fuerzas que materializan el esfuerzo axil.

Establecida la forma de poner en evidencia los tres esfuerzos característicos de una sección, veremos a continuación la forma de determinar sus valores aplicando el principio de los trabajos virtuales.

Sea la viga simplemente apoyada de la figura 9.65, sujeta a la acción de una carga distribuida de intensidad constante p, de la que pretendemos calcular el valor del momento flexor $\mathcal{M}$ en la sección s-s ubicada a una distancia l_1 del apoyo A.

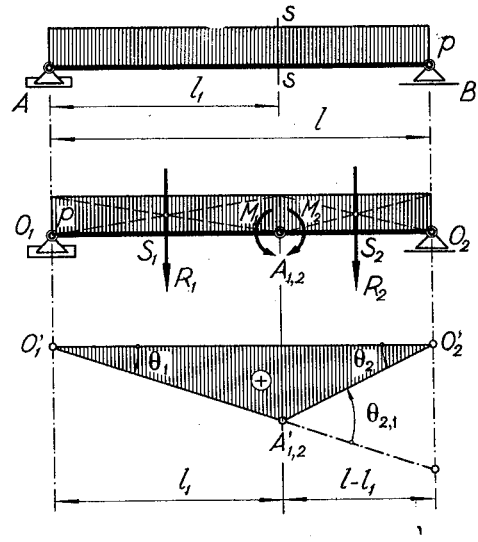


Fig. 9.65.

Puesta en evidencia la incógnita, introduciendo una articulación en s-s y aplicando dos pares opuestos $M_1 = -M_2$ en los extremos de las dos chapas en que ha quedado dividida la viga, damos un desplazamiento cualquiera al sistema, previa la determinación de los polos, que es inmediata.

Supongamos que S_1 experimente una rotación $\theta_1 > 0$. El trabajo desarrollado por la carga parcial distribuida que actúa sobre aquélla, será igual al producto de la intensidad de su resultante $R_1 = pl_1$ por el corrimiento de su punto de aplicación en la dirección de R_1, que coincide con el corrimiento efectivo a_1 y cuyo valor es:

$$a_1 = \theta_1 \frac{l_1}{2} \qquad [9.114]$$

y el trabajo desarrollado

$$\Phi_1 = R_1 a_1 = p\theta_1 \frac{l}{2} . \qquad [9.115]$$

Análogamente, para la chapa S_2 tenemos:

$$\Phi_2 = R_2 . a_2 = p . \theta_2 \frac{(l - l_1)^2}{2} . \qquad [9.116]$$

El trabajo de los dos pares será, llamando $\mathcal{M}$ al momento flexor,

$$\Phi_M = \mathcal{M}(\theta_2 - \theta_1) = \mathcal{M}\,\theta_{2,1} , \qquad [9.117]$$

y de acuerdo con el principio de los trabajos virtuales debemos tener

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_M = \tfrac{1}{2}\, p[\theta_1 l_1^2 + \theta_2 (l - l_1)^2] + \mathcal{M}\,\theta_{2,1} = 0 . \qquad [9.118]$$

Pero de la figura:

$$\left.\begin{aligned} |\,\theta_2\,| &= |\,\theta_1 \frac{l_1}{l - l_1}\,| \\ \theta_{2,1} &= -\theta_1 \frac{l}{l - l_1} \end{aligned}\right\} \qquad [9.119]$$

valores que reemplazados en [9.118] conducen a

$$\tfrac{1}{2}\, p\, \theta_1 [l_1^2 + l_1 (l - l_1)] - \mathcal{M}\,\theta_1 \frac{l}{l - l_1} = 0 \qquad [9.120]$$

de donde

$$\mathcal{M} = \tfrac{1}{2}(p/l)[l - l_1]\, l l_1 = \tfrac{1}{2}\, p[l l_1 - l_1^2] . \qquad [9.121]$$

Si, en cambio, deseamos calcular el esfuerzo de corte en la sección indicada, lo ponemos en evidencia introduciendo en la misma el mecanismo correspondiente (fig. 9.66).

Si θ_1 y θ_2 son las rotaciones experimentadas por las chapas S_1 y S_2 durante el desplazamiento del sistema, como el desplazamiento relativo de θ_2 respecto de θ_1 es en este caso una traslación, resulta $\theta_1 = \theta_2$. En consecuencia, tenemos

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= R_1 a_1 = p\,\theta_1 \frac{l_1^2}{2} \\ \Phi_2 &= R_2 a_2 = -p\,\theta_1 \frac{(l - l_1)^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad [9.122]$$

El trabajo del conjunto de las dos fuerzas que materializan el es-

fuerzo de corte es, como sabemos, igual al producto de la intensidad de una de ellas por la proyección sobre su dirección del corrimiento relativo de su punto de aplicación. En este caso, dicha proyección coincide con el corrimiento relativo, por cuanto las fuerzas Q y $-Q$ son de la dirección de este último. Considerando, para la expresión del trabajo, la fuerza Q aplicada a la chapa de la derecha, por cuanto coincide en signo con el esfuerzo de corte, resulta:

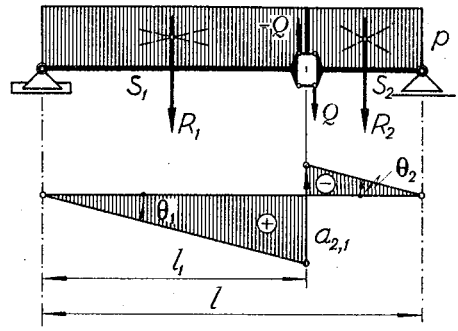


Fig. 9.66.

$$\Phi_Q = -Q.a_{2,1} \qquad [9.123]$$

por ser negativo el corrimiento relativo $a_{2,1}$.

En consecuencia, la ecuación de los trabajos virtuales será

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_Q = \tfrac{1}{2}\, p\, \theta_1[l_1^2 - (l - l_1)^2] - Q.a_{2,1} = 0\ . \qquad [9.124]$$

Pero, de la figura tenemos:

$$|\, a_{2,1}\,| = |\, \theta_1\, l_1\,| + |\, \theta_2(l - l_1)\,| = |\, \theta_1\, l\,|\ , \qquad [9.125]$$

expresión que reemplazada en [9.124] conduce a:

$$\tfrac{1}{2}\, p\, \theta_1[l_1^2 - (l - l_1)^2] - Q\, \theta_1\, l = 0 \qquad [9.126]$$

de donde, despejando Q:

$$Q = p(l_1 - \tfrac{1}{2}\, l)\ . \qquad [9.127]$$

Sea finalmente hallar el esfuerzo normal en la sección s-s del sistema de la figura 9.67 constituido por una viga con apoyos a distintos niveles, sujeta a la acción de una carga de intensidad p por unidad de longitud de la proyección horizontal de la viga.

Puesta en evidencia la incógnita mediante el mecanismo correspondiente y dado un desplazamiento posible al sistema, previa determinación de los polos, por las mismas razones expuestas para el esfuerzo de corte, resulta $\theta_1 = \theta_2$.

Los corrimientos verticales de los puntos M y N de aplicación de las resultantes parciales R_1 y R_2, respectivamente, valen

$$\left.\begin{aligned} \eta_M &= \theta_1 \tfrac{1}{2} l_1 \\ \eta_N &= -\theta_2 \cdot \tfrac{1}{2}(l - l_1) = -\theta_1 \tfrac{1}{2}(l - l_1) \end{aligned}\right\} \qquad [9.128]$$

y los trabajos desarrollados por R_1 y R_2

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= p\,\theta_1 \tfrac{1}{2} l_1^2 \\ \Phi &= -p\,\theta_1 \tfrac{1}{2}(l - l_1)^2 \end{aligned}\right\} \qquad [9.129]$$

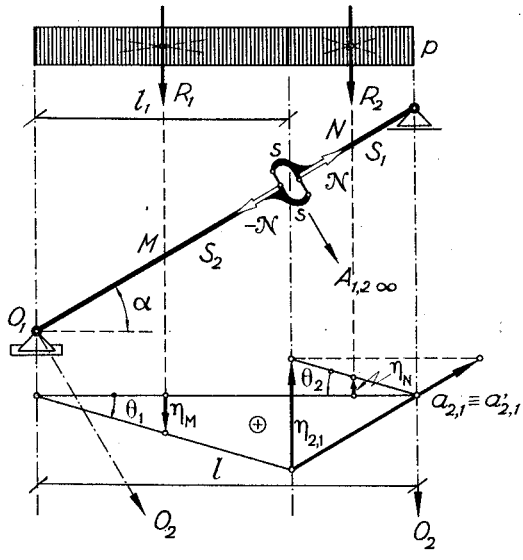


Fig. 9.67.

El trabajo correspondiente a la fuerza N aplicada en la chapa derecha, llamando $\mathcal{N}$ al esfuerzo normal y $a'_{2,1}$ a la proyección sobre su dirección del corrimiento relativa $a_{2,1}$ de su punto de aplicación, será

$$|\Phi_N| = |\mathcal{N} \cdot a'_{2,1}| \,. \qquad [9.130]$$

La dirección de $a_{2,1}$ coincide con la de N por ser las dos bielas que constituyen el mecanismo, normales al eje de la viga.

En consecuencia $a'_{2,1} \equiv a_{2,1}$.

Por otra parte, de la figura tenemos

$$a'_{2,1} \equiv a_{2,1} = \eta_{2,1} \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad [9.131]$$

y

$$|\eta_{2,1}| = |\theta_1 . l| \,. \qquad [9.132]$$

Como $\eta_{2,1} < 0$, resulta

$$a'_{2.1} = -\frac{\theta_1 l}{\operatorname{sen} \alpha} \,. \qquad [9.133]$$

En consecuencia, la ecuación de trabajos virtuales será:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_N = \tfrac{1}{2}\, p\, \theta_1 [l_1^2 - (l - l_1)^2] - \mathcal{N}\frac{\theta_1\, l}{\operatorname{sen}\alpha} = 0 \qquad [9.134]$$

y despejando $\mathcal{N}$.

$$\mathcal{N} = p \operatorname{sen}\alpha (l_1 - \tfrac{1}{2}\, l)\,. \qquad [9.135]$$

10. Sistemas planos sujetos a cargas móviles.

10.1. Teoría de las líneas de influencia.

10.1.1. Definiciones.

En capítulos anteriores nos hemos ocupado del estudio del equilibrio de sistemas planos sujetos a cargas fijas y de la determinación en los mismos de las reacciones de vínculo interno y externo. En el presente, desarrollaremos los procedimientos que nos permitan conocer los valores de dichas magnitudes, cuando las cargas que solicitan el sistema no ocupan una posición fija y determinada, sino que, al contrario, pueden desplazarse a lo largo de una línea de la estructura, ocupando cualquier posición.

Sea el sistema de la figura 10.1, que puede ser de alma llena o reticulado, sujeto a la acción de la fuerza P aplicada en m, del que nos interesa conocer el valor de una incógnita cualquiera que llamaremos X y que por el momento no especificaremos. La misma puede ser una reacción en un apoyo móvil, el esfuerzo en una barra, un esfuerzo característico de una sección, pero no así la reacción en un apoyo fijo o un empotramiento, por significar en estos casos la existencia de dos o tres incógnitas respectivamente.

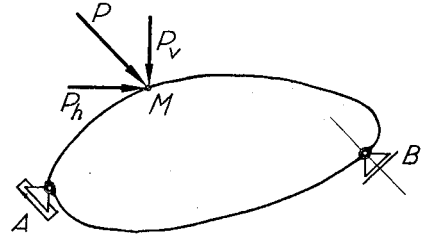


Fig. 10.1.

Denominaremos en lo sucesivo influencia de P sobre X, al valor de esta última magnitud originado por P.

De acuerdo con el principio del paralelogramo de fuerzas, el efecto de la fuerza P es equivalente al de sus componentes P_1 y P_2 según dos direcciones cualesquiera.

Basándonos en ello, y en el hecho de que el efecto de un sistema plano de fuerzas es equivalente al de su resultante, podemos establecer:

1º) La influencia de una fuerza P sobre una incógnita X determinada, es igual a la suma de las influencias de sus componentes P_1 y P_2 según dos direcciones cualesquiera.

2º) La influencia de un sistema de fuerzas cualesquiera P_i es sobre una incógnita X determinada, igual a la suma de las influencias de cada una de las fuerzas componentes.

Supongamos ahora fijado el punto de aplicación y la recta de acción de una fuerza. Es evidente que su influencia sobre una incógnita X será directamente proporcional a la intensidad de la primera, es decir que podemos escribir:

$$X = iP \qquad [10.1]$$

donde i, es el coeficiente de proporcionalidad, y se lo define como *coeficiente de influencia*. Este coeficiente es *independiente* de P, siendo función de la naturaleza de la incógnita, de la configuración del sistema y de la forma de sustentación del mismo. Despejando i de la [10.1] tenemos

$$i = \frac{X}{P} \qquad [10.2]$$

expresión que nos permite interpretar el coeficiente de influencia como el valor de X originado por una fuerza unitaria.

Sea ahora el sistema de la figura 10.2 y una línea cualquiera m-n del mismo. Supongamos que en el punto A de esta última actúe una fuerza P que descomponemos en sus componentes vertical P_v y horizontal P_h.

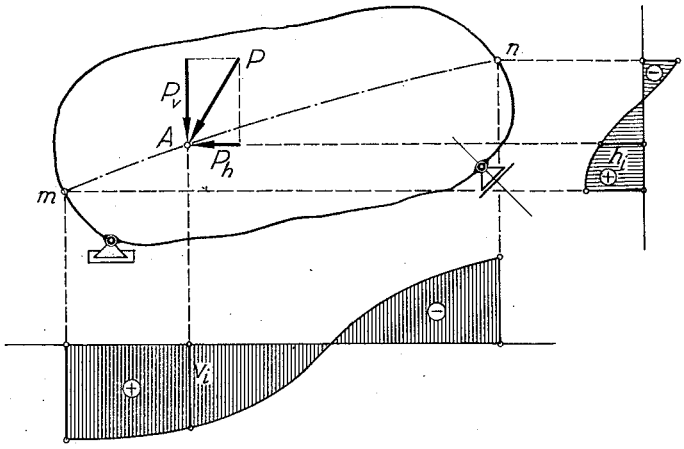


Fig. 10.2.

Si X es una incógnita cualquiera, su valor originado por P será, de acuerdo con lo que dijéramos anteriormente

$$X = P_v . v_i + P_h . h_i \qquad [10.3]$$

donde v_i y h_i corresponden, respectivamente, a los coeficientes de influencia sobre X de las componentes vertical y horizontal de P, cuando está aplicada en A.

Supongamos ahora que el punto de aplicación de P se desplaza sobre la línea m-n, ocupando sucesivas posiciones sobre la misma. Para cada una de dichas posiciones de P, el valor de la incógnita variará, siendo expresable por la misma expresión [10.3], teniéndose para cada posición un valor distinto tanto de v_i como de h_i.

Si a partir de un eje, generalmente horizontal, y en coincidencia con las verticales trazadas por los sucesivos puntos de aplicación de la fuerza P que recorre la línea m-n, llevamos en una escala cualquiera ordenadas que representen los sucesivos valores del coeficiente de influencia vertical v_i, el lugar geométrico de los extremos de dichas ordenadas configura una línea, denominada *línea de influencia vertical* correspondiente a la incógnita X.

Procediendo en forma semejante con los coeficientes de influencia horizontales h_i, obtenemos la *línea de influencia horizontal.*

El signo de la línea de influencia de una determinada dirección dependerá del signo de los coeficientes de influencia, y el de éstos, a su vez, de la convención adoptada en cada caso para el signo de la incógnita X.

Teniendo en cuenta que el coeficiente de influencia puede interpretarse como el valor de la incógnita originado por una carga unitaria, diremos que:

Línea de influencia de una incógnita en una determinada dirección es un diagrama cuyas ordenadas miden, en una cierta escala, el valor de la misma cuando una fuerza, unitaria y positiva, se desplaza sobre una línea del sistema, manteniéndose paralela a dicha dirección.

De lo expuesto deducimos que, para calcular el valor de una incógnita cualquiera de un sistema sujeto a la acción de cargas P_i de direcciones e intensidades cualesquiera, basta conocer las líneas de influencia de la incógnita, en dos direcciones.

En efecto, sea el sistema de la figura 10.3, del que hemos trazado las líneas de influencia vertical y horizontal correspondientes a una determinada incógnita X.

Supongamos que en el sistema actúan las fuerzas P_i. Descompuestas en sus componentes vertical y horizontal, si v_i y h_i, son respectivamente las ordenadas correspondientes de las líneas de influencia vertical y horizontal, el valor de la incógnita X será, de acuerdo con lo visto:

$$X = \sum_1^n P_{iv} v_i + \sum_1^n P_{ih} \cdot h_i \qquad [10.4]$$

debiendo leerse tanto v_i como h_i en la escala correspondiente.

Por construcción, las ordenadas de las líneas de influencia se corresponden con las rectas de acción de las componentes de las fuerzas, sean éstas verticales u horizontales. De modo que, elegido un par de ejes coordenados z, y, paralelos respectivamente a las direcciones en que se desea trazar las líneas de influencia, la posición de las componentes de

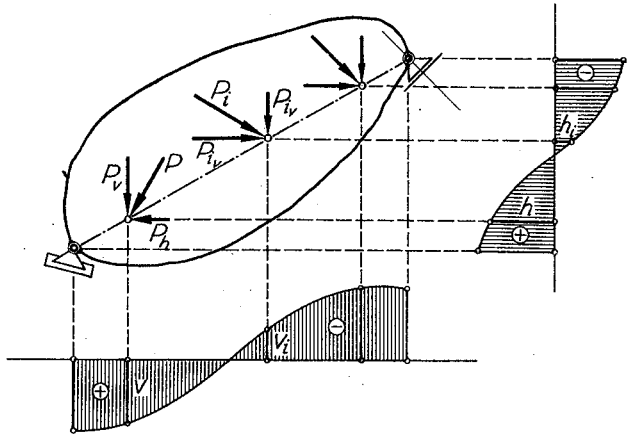


Fig. 10.3.

la fuerza actuante para una determinada posición, queda definida por la coordenada z si la fuerza es vertical, o por la y, si es horizontal. En consecuencia, como para un mismo sistema, los coeficientes de influencia de una incógnita son función del punto de aplicación de la fuerza resulta:

$$\left.\begin{aligned} v_i &= f(z) \\ h_i &= \varphi(y) \end{aligned}\right\} \qquad [10.5]$$

Es decir que el trazado de las líneas de influencia se reduce a la determinación de las funciones indicadas en 10.5.

Las líneas de influencia de magnitudes estáticas en sistemas isostáticos, únicas de las que nos ocuparemos, están siempre constituidas por rectas o combinaciones de rectas, es decir, poligonales.

10.1.2. Influencia de una carga uniformemente distribuida.

Consideremos un tramo de una estructura, sujeto a la acción de una carga uniformemente distribuida de intensidad constante p (fig. 10.4), y supongamos trazada para el mismo, la línea de influencia de una incóg-

nita X en la dirección de la carga. Hagamos coincidir el origen de un par de ejes coordenados z, y, con el extremo derecho de la longitud l cargada. En una sección cualquiera ubicada en una abscisa z, consideremos un entorno dz, sobre el que actuará una fuerza elemental $dP = p\,dz$.

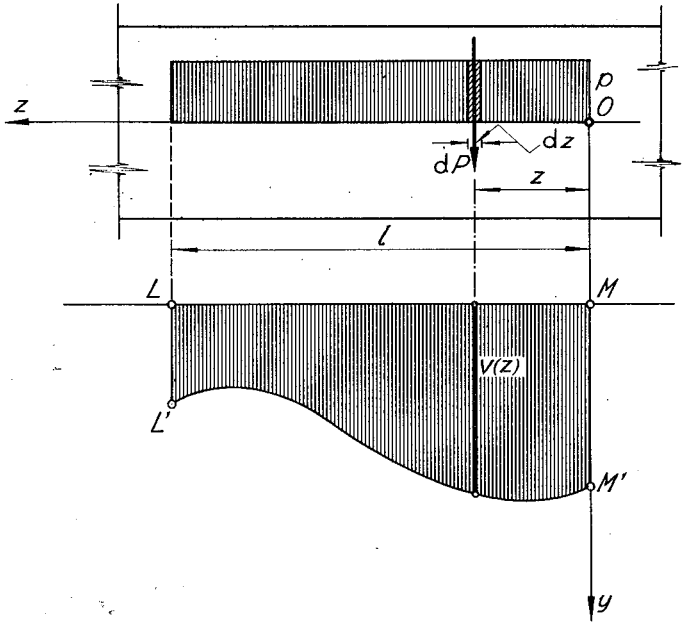


Fig. 10.4.

Si $v(z)$ es la ordenada de la línea de influencia en correspondencia con la abscisa z, de acuerdo con la definición de coeficiente de influencia tenemos que la influencia de dP sobre la incógnita X será:

$$dX = v(z)\,dP = v(z)\,p\,dz \qquad [10.6]$$

y la influencia de la totalidad de la carga p la obtendremos sumando las influencias de las infinitas fuerzas elementales que actúan sobre la longitud l, es decir, integrando entre los límites 0 y l:

$$X = \int_0^l v(z)\,p\,dz\,. \qquad [10.7]$$

Como p es constante, resulta:

$$X = p \int_0^l v(z)\, dz \,, \qquad [10.8]$$

pero la integral representa el área de la superficie del diagrama, limitada por las ordenadas extremas correspondientes a la longitud cargada. En consecuencia, llamando F a dicha área, tenemos:

$$X = pF \,. \qquad [10.9]$$

Ahora bien, multiplicando y dividiendo por l el segundo miembro de [10.9] resulta:

$$X = pl \frac{F}{l}, \qquad [10.10]$$

pero $pl = P$, resultante de la carga distribuida, y $F/l = v_m$, ordenada media de la línea de influencia, de donde

$$X = P.v_m \qquad [10.11]$$

es decir, que la influencia de una carga uniformemente distribuida es igual al producto de su resultante por la ordenada media del tramo de la línea de influencia correspondiente a la parte cargada.

10.1.3. Influencia de una carga que varía linealmente.

Sea ahora el mismo caso de la figura 9.66, pero sujeto a la acción de una carga que varía linealmente, siendo su intensidad nula en el extremo derecho de la zona cargada (fig. 10.5). Considerando la carga elemental $dP = p(z)\, dz$, que actúa a la distancia z del origen, y razonando como en el caso anterior, llegamos a la siguiente expresión para la influencia total de la carga:

$$X = \int_0^l p(z)\, v(z)\, dz \,. \qquad [10.12]$$

Ahora bien, por tratarse de una carga cuyo diagrama representativo es triangular, tenemos que $p(z) = p(z/l)$, siendo p la ordenada extrema del diagrama de cargas.

Reemplazando en [10.12] resulta:

$$X = \frac{p}{l}\int_o^l v(z)\, z\, dz, \qquad [10.13]$$

donde la integral corresponde al momento estático del área de la superficie de la parte cargada de la línea de influencia con respecto a la orde-

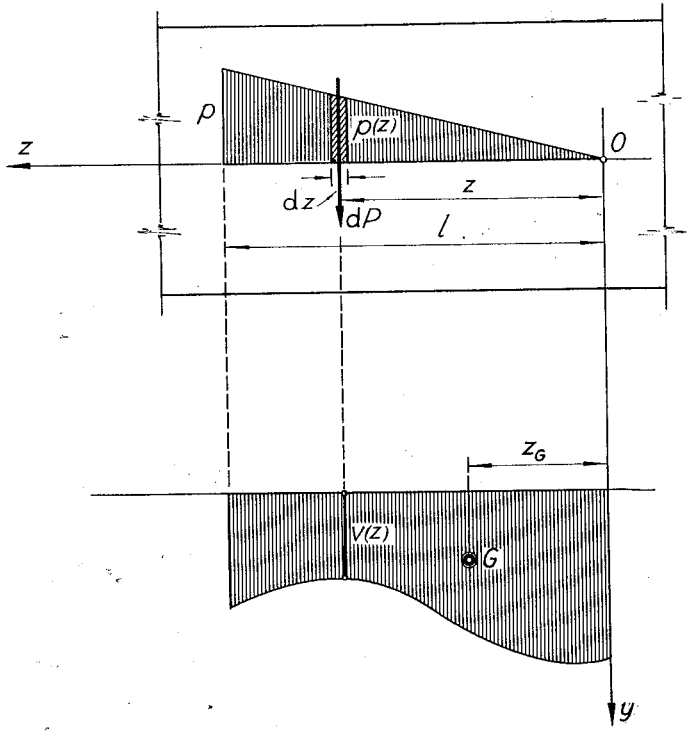


Fig. 10.5.

nada correspondiente al extremo del diagrama de cargas en que la intensidad de ésta es nula. Si llamamos S_y a dicho momento estático, la [10.13] se transforma en:

$$X = \frac{p}{l} S_y \qquad [10.14]$$

y teniendo en cuenta que:

$$S_y = F.z_G\ , \qquad [10.15]$$

donde $F =$ área de la superficie de la línea de influencia correspondiente a la zona cargada y $z_G =$ distancia a la ordenada extrema medida desde el baricentro de la superficie mencionada, se tiene, reemplazando en [10.14]

$$X = \frac{pF}{l} z_G = p\, v_m\, z_G \qquad [10.16]$$

como expresión de la influencia de una carga distribuida según un diagrama triangular.

10.1.4. Influencia de un sistema de cargas concentradas paralelas.

Consideremos primeramente una línea de influencia constituida por un único tramo rectilíneo, y supongamos que la misma esté cargada con un sistema de fuerzas P_i (fig. 10.6).

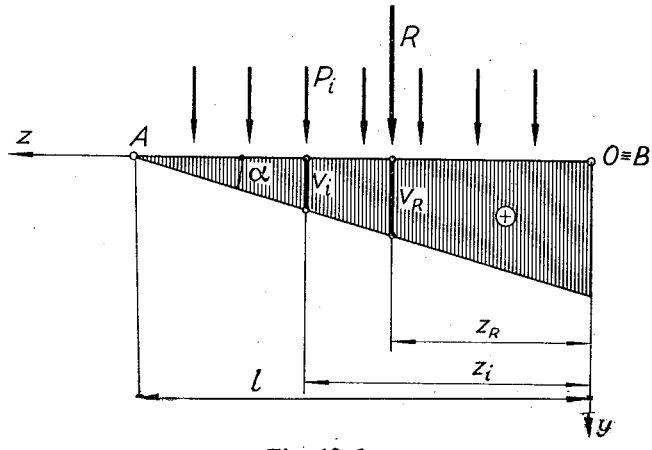


Fig. 10.6.

Sea z_i la distancia genérica de las rectas de acción de las fuerzas P_i a un extremo del tramo cargado, R la resultante de las mismas y z_R su distancia al mismo extremo.

La influencia del sistema P_i sobre el valor de la incógnita X a que corresponde la línea de influencia será

$$X = \sum_1^n P_i\, v_i \qquad [10.17]$$

Si l es la distancia entre las ordenadas extremas de la línea de influencia y α el ángulo que la misma forma con el eje de referencia horizontal, tendremos

$$\left.\begin{aligned} v_i &= (l - z_i)\,\mathrm{tg}\,\alpha \\ v_R &= (l - z_R)\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{aligned}\right\} \qquad [10.18]$$

Reemplazando este valor de v_i en la [10.17]:

$$X = \sum_1^n P_i(l - z_i)\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha \sum_1^n P_i(l - z_i)\ . \qquad [10.19]$$

Pero $\sum_1^n P_i(l - z_i)$ representa la suma de los momentos de las fuerzas respecto del punto A, que es igual al momento respecto del mismo punto de la resultante R. En consecuencia,

$$\mathrm{tg}\,\alpha \sum_1^n P_i(l - z_i) = \mathrm{tg}\,\alpha\, R(l - z_R) \qquad [10.20]$$

y reemplazando en [10.19]

$$X = \mathrm{tg}\,\alpha\, R(l - z_R)\ . \qquad [10.21]$$

Pero, de acuerdo con la 2ª de las [10.18], $\mathrm{tg}\,\alpha(l - z_R) = v_R$, de donde resulta finalmente

$$X = R\,v_R\ . \qquad [10.22]$$

Es decir que, si la línea de influencia está constituida por un único tramo rectilíneo, la influencia de un sistema de fuerzas paralelas es igual a la influencia de su resultante.

La conclusión anterior no es aplicable cuando la línea de influencia esté constituida por dos o más tramos rectilíneos.

En este caso, figura 10.7, es necesario considerar las resultantes parciales de las fuerzas que actúan sobre cada tramo.

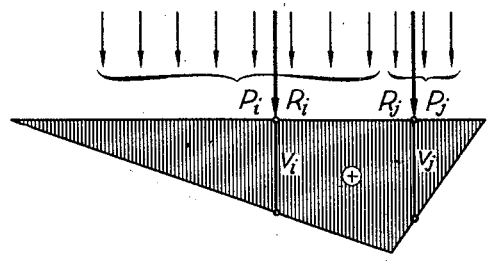


Fig. 10.7.

Multiplicadas éstas por las correspondientes ordenadas de la línea de influencia, la suma de los productos nos da la influencia sobre la incógnita del sistema de fuerzas, es decir:

$$X = R_i v_i + R_j v_j \,. \qquad [10.23]$$

10.1.5. Influencia de cargas transmitidas en forma indirecta.

En ciertos sistemas, las fuerzas aplicadas no actúan directamente sobre la estructura portante sino que lo hacen en forma indirecta, por intermedio de elementos estructurales secundarios.

Consideremos, por ejemplo, el caso de la figura 10.8, donde S es parte del elemento estructural resistente al que se transmite el efecto de

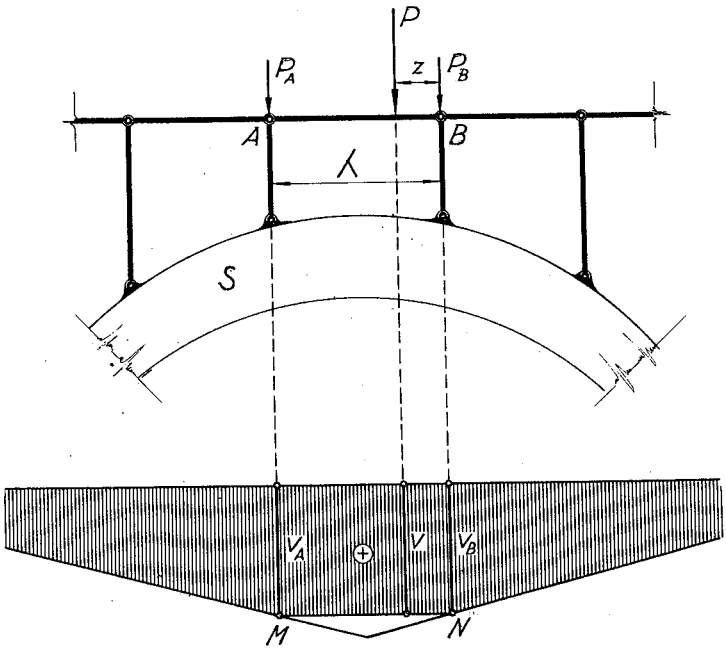


Fig. 10.8.

la fuerza P por intermedio de una superestructura constituida por barras articuladas.

Llamemos λ la longitud de la barra AB sobre la que actúa P y supongamos conocida la línea de influencia de una incógnita cualquiera X de la estructura portante.

Descompuesta P en dos componentes paralelas P_A y P_B aplicadas en A y B, si z es la distancia de B al punto de aplicación de P tendremos:

$$\left.\begin{aligned} P_A &= P\frac{z}{\lambda} \\ P_B &= P\frac{\lambda - z}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad [10.24]$$

En consecuencia, como la influencia de P sobre X es igual a la suma de las influencias de sus componentes, si v_A y v_B son las ordenadas de la línea de influencia en correspondencia con P_A y P_B respectivamente,

$$X = P_A v_A + P_B v_B , \qquad [10.25]$$

y reemplazando P_A y P_B por sus valores dados por las [10.24]

$$X = \frac{1}{\lambda} P[v_A z + v_B(\lambda - z)] \qquad [10.26]$$

o también

$$X = P\left[v_B - (v_B - v_A)\frac{z}{\lambda}\right]. \qquad [10.27]$$

Si en la línea de influencia unimos mediante una recta los puntos M y N, extremos de las ordenadas v_A y v_B respectivamente, dicha recta define en su intersección con la vertical trazada por el punto de aplicación de P una ordenada v, cuya magnitud es

$$v = v_B - (v_B - v_A)\frac{z}{\lambda} \qquad [10.28]$$

como es dado observar en la figura.

Reemplazando este valor en la [10.27] resulta:

$$X = Pv . \qquad [10.29]$$

En consecuencia, cuando una fuerza se transmite a la estructura en forma indirecta, es necesario corregir la línea de influencia, en la zona que corresponda, mediante una recta. La influencia de la fuerza sobre la incógnita se obtendrá, en este caso, multiplicando directamente la intensidad de la fuerza por la correspondiente ordenada medida hasta la recta de corrección.

10.1.6. Influencia de un sistema móvil de cargas concentradas.

Supongamos que la línea de influencia correspondiente a una incógnita X de un sistema dado sea triangular (fig. 10.9), y que la estructura esté cargada con un sistema de cargas concentradas que se desplaza a lo largo de la misma, manteniéndose invariable la distancia entre fuerzas, que en el caso de la figura, hemos supuesto igual para todas ellas. Las consideraciones siguientes son igualmente válidas cuando las fuerzas son todas distintas, o iguales entre sí y sus distancias mutuas difieren de una fuerza a otra, o son constantes, o bien existen grupos de fuerzas de igual intensidad.

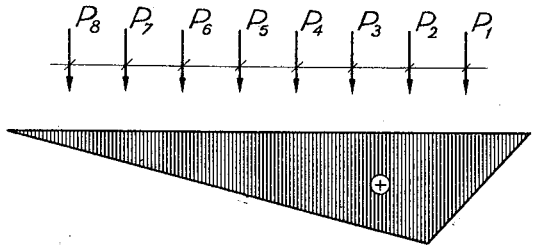


Fig. 10.9.

Para una posición determinada del sistema de fuerzas, la influencia del mismo sobre la incógnita X tiene por expresión:

$$X = \sum_{1}^{n} P_i v_i \ . \qquad [10.30]$$

Al variar la posición de las fuerzas, varían las correspondientes ordenadas de la línea de influencia, con lo que el valor de X es cambiable. Y entre todos los valores que puede tomar, habrá uno que será máximo. A la posición del sistema de fuerzas que hace máximo el valor de la incógnita lo denominaremos *posición de máximo*. Analizaremos a continuación la forma de determinar la *posición de máximo*.

El sistema de fuerzas de la figura 10.9 corresponde generalmente al peso de los ejes de un convoy de cargas y, en consecuencia, las cargas pueden recorrer la estructura en sentido inverso, es decir, invirtiéndose el orden de sucesión de las fuerzas. Es evidente que para que el valor de X resulte un máximo, es necesario que los productos $P_i v_i$ sean del mayor valor posible.

Como para cada fuerza la intensidad es invariable, resulta evidente que v_i debe ser lo más grande posible. De ello deducimos que para que X alcance un máximo, es necesario:

1º) Hacer entrar el convoy de cargas del lado en que la línea de influencia tiene menor pendiente, pues de este modo la variación de las ordenadas será menor.

2º) Hacer incidir las fuerzas de mayor intensidad, que generalmente son las ubicadas adelante, en correspondencia con las ordenadas mayores de la línea de influencia.

Sentado lo anterior, demostraremos a continuación este teorema:

Para que una posición del sistema de fuerzas pueda corresponder a un máximo valor de la incógnita, es necesario que una de las fuerzas incida sobre un vértice de la línea de influencia.

La justificación de este enunciado la efectuaremos demostrando la situación inversa, es decir, que una posición para la que ninguna de las fuerzas incida sobre un vértice de la línea de influencia, no puede ser posición de máximo.

Para demostrarlo, consideremos (fig. 10.10) la línea de influencia de una incógnita X y supongamos una posición del sistema de fuerzas tal, que ninguna de ellas incida sobre el vértice.

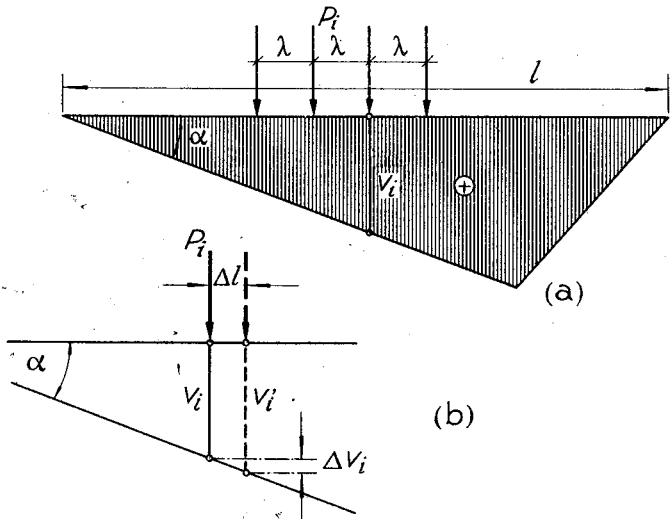


Fig. 10.10.

Para dicha posición, el valor de la incógnita será:

$$X = \sum_1 P_i \, v_i \, . \qquad [10.31]$$

Desplacemos ahora el sistema de fuerzas una pequeña distancia Δl, hacia la derecha, por ejemplo, con lo que todas las fuerzas sufrirán el mismo desplazamiento. Para la nueva posición del sistema, las ordenadas de la línea de influencia en correspondencia de las fuerzas habrán variado, y la incógnita tomará otro valor, incrementándose en una cierta cantidad ΔX teniéndose:

$$X' = X + \Delta X = \sum_1^n P_i \, v_i' \, . \qquad [10.32]$$

Llamando Δv_i al incremento de v_i resulta:

$$v_i' = v_i + \Delta v_i \qquad [10.33]$$

valor que reemplazado en la [10.32] conduce a:

$$X + \Delta X = \sum_1^n P_i (v_i + \Delta v_i) \, . \qquad [10.34]$$

Desarrollando el paréntesis y restando [10.31] de [10.34] llegamos a:

$$\Delta X = \sum_1^n P_i \, \Delta v_i \, . \qquad [10.35]$$

Llamando α al ángulo que forma el tramo de la línea de influencia con el eje de referencia horizontal, de la figura 10.10 (b) resulta:

$$\Delta v_i = \Delta l \operatorname{tg} \alpha \qquad [10.36]$$

y reemplazando en [10.35]

$$\Delta X = \sum_1^n P_i \, \Delta l \operatorname{tg} \alpha = \Delta l \operatorname{tg} \alpha \sum_1^n P_i \, , \qquad [10.37]$$

de donde,

$$\frac{\Delta X}{\Delta l} = \operatorname{tg} \alpha \sum_1^n P_i \, . \qquad [10.38]$$

Si hacemos tender Δl a cero, tenemos finalmente

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}l} = \operatorname{tg} \alpha \sum_1^n P_i \, . \qquad [10.39]$$

La expresión [10.39] no es nula, por cuanto $\operatorname{tg}\alpha$ y $\sum_1^n P_i$ tienen valores definidos. En consecuencia, cualquiera sea el sentido del desplazamiento Δl, no se anula y en consecuencia X nunca puede alcanzar un valor máximo. De ahí que, para que pueda haber máximo necesariamente debe incidir una fuerza en correspondencia con el vértice. En efecto, consideremos la misma línea de influencia y un sistema de fuerzas del que hacemos incidir una de ellas, la P_k en correspondencia del vértice de la línea de influencia, figura 10.11 *a*.

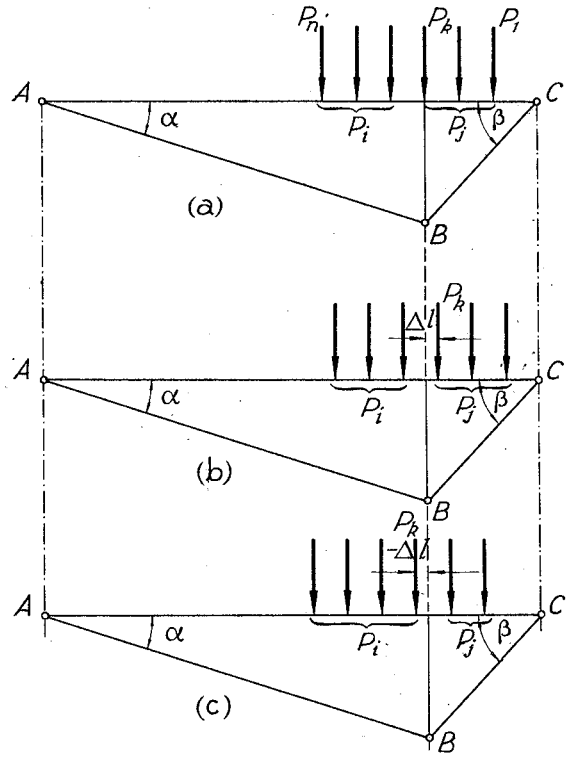


Fig. 10.11.

Llamemos P_i a las fuerzas que inciden sobre el tramo AB y P_j a las que lo hacen sobre el BC.

La fuerza P_k, que incide sobre el vértice, puede considerarse indistintamente como perteneciente a uno u otro sistema. En este caso suponemos que pertenezca al P_j.

Para la posición indicada, el valor de la incógnita X será

$$X = \sum_{k+1}^{n} P_i v_i + \sum_{1}^{k} P_j v_j \,. \qquad [10.40]$$

Si desplazamos el sistema hacia la derecha de Δl, la incógnita experimentará un incremento ΔX, como consecuencia de los incrementos Δv_i y Δv_j de las ordenadas de la línea de influencia, incrementos que serán iguales a

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_i &= \Delta l \operatorname{tg}\alpha \\ \Delta v_j &= \Delta l \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \qquad [10.41]$$

donde α y β son los ángulos que forman con la horizontal los dos tramos de la línea de influencia. Reemplazando valores y procediendo en forma análoga al caso anterior, llegamos finalmente a:

$$\Delta X = \Delta l \left[\operatorname{tg}\alpha \sum_{k+1}^{n} P_i + \operatorname{tg}\beta \sum_{1}^{k} P_j \right], \qquad [10.42]$$

y

$$\frac{\Delta X}{\Delta l} = \operatorname{tg}\alpha \sum_{k+1}^{n} P_i + \operatorname{tg}\beta \sum_{1}^{k} P_j . \qquad [10.43]$$

Si el desplazamiento Δl tiene lugar hacia la izquierda a partir de la posición inicial (fig. 10.11 c), la fuerza P_k pasa a pertenecer al sistema P_i, obteniéndose para este caso las siguientes expresiones correspondientes con las [10.42] y [10.43]:

$$\Delta X = \Delta l \left[\operatorname{tg}\alpha \sum_{k}^{n} P_i + \operatorname{tg}\beta \sum_{1}^{k-1} P_j \right], \qquad [10.44]$$

$$\frac{\Delta X}{\Delta l} = \operatorname{tg}\alpha \sum_{k}^{n} P_i + \operatorname{tg}\beta \sum_{1}^{k-1} P_j . \qquad [10.45]$$

Ahora bien, $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ son de signo contrario. En consecuencia, el signo del segundo miembro de las [10.43] y [10.45] dependerá del valor relativo de las sumatorias. Es decir que, para una cierta posición del sistema de fuerzas, o sea, cuando una fuerza determinada incide sobre el vértice de la línea de influencia, al desplazarlo hacia uno u otro lado de la posición de origen, los correspondientes incrementos de la incógnita pueden ser del mismo signo, o sea que ésta pasa por un máximo o mínimo.

Si hacemos tender Δl a cero, y llamamos R_i y R_j a las resultantes de las fuerzas que inciden sobre cada tramo, para que la función X pase por un máximo o por un mínimo deberá cumplirse:

$$\frac{dX}{dl} = \operatorname{tg}\alpha R_i + \operatorname{tg}\beta R_j = 0 . \qquad [10.46]$$

Prácticamente, para hallar la posición de máximo, se recurre a un procedimiento gráfico debido a Winkler, conocido con el nombre de *polígonos de Winkler*.

Supongamos una línea de influencia triangular (figura 10.12*a*) y un sistema de fuerzas que se desplaza, y del que deseamos hallar la posición de máximo.

Para ello, ubiquemos la primera fuerza en correspondencia con el vértice de la línea de influencia, lo que denominaremos primera posición del sistema de cargas.

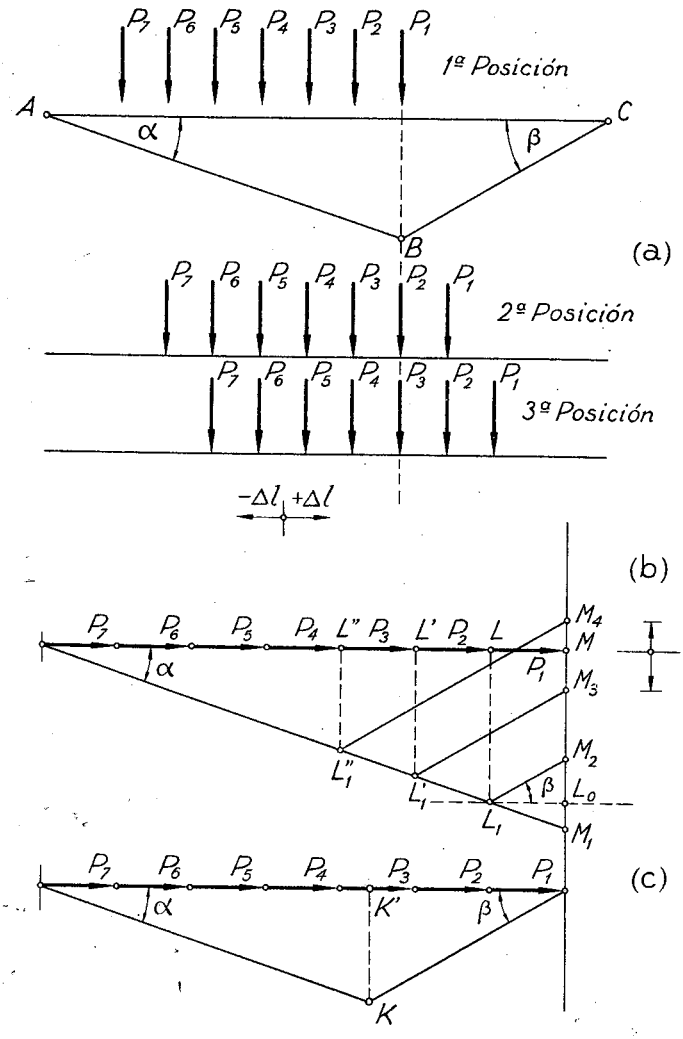


Fig. 10.12.

En una escala cualquiera, llevamos horizontalmente, uno a continuación del otro y en el orden en que aparecen las fuerzas, vectores representativos de las mismas. Si damos un desplazamiento al sistema hacia la izquierda, la fuerza P pasa a incidir sobre el tramo AB, mientras que el BC resulta descargado.

Trazando por el origen del vector representativo de la última fuerza una paralela al tramo AB de la línea de influencia, su intersección con

la vertical trazada por el extremo del vector P_1 determina un segmento

$$MM_1 = \sum_1^7 P_i \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha R_i \qquad [10.47]$$

dirigido hacia abajo.

Desplazando luego el sistema hacia la derecha, P_1 pasa a incidir sobre el tramo BC y se resta a la resultante R_i. Si por el extremo del vector P_2 trazamos una vertical, y por su intersección L_1 con la paralela a AB, trazamos $L_1 M_2 \parallel BC$, el segmento $L_0 M_2$ representa $P_1 \operatorname{tg}\beta$ y $LL_1 = \sum_2^7 P_i \operatorname{tg}\alpha$, de donde

$$MM_2 = \sum_2^7 P_i \operatorname{tg}\alpha - P_1 \operatorname{tg}\beta. \qquad [10.48]$$

Pero MM_2 y MM_1 son del mismo signo, para desplazamientos Δl opuestos. Como MM_1 y MM_2 constituyen la representación gráfica del término entre paréntesis de la expresión [10.42], resulta que la primera posición del sistema de cargas no corresponde a una posición de máximo, por cuanto los incrementos ΔX son de signo contrario.

En consecuencia, es necesario probar una segunda posición, ubicando la segunda fuerza en correspondencia con el vértice de la línea de influencia. Como es fácil observar en la figura, esta segunda posición tampoco corresponde a un máximo de X, por cuanto los segmentos MM_2 y MM_3 son del mismo signo. Recién para la tercera posición, en que la fuerza P_3 incide sobre el vértice de la línea de influencia, los segmentos MM_3 y MM_4, obtenidos al desplazar el sistema a uno y otro lado de la tercera posición, tienen signo contrario, por lo que, de acuerdo con la [10.42], X pasa por un máximo.

Existe un procedimiento más expeditivo que permite determinar directamente la fuerza que debe incidir en correspondencia con el vértice de la línea de influencia para obtener un máximo valor de la incógnita, y es el que muestra la figura 10.12 c y que interpreta gráficamente la expresión [10.46].

Consiste en llevar como antes, uno a continuación del otro y en el orden en que aparecen las fuerzas, vectores representativos de las mismas y en trazar por el origen y extremo de dicho polígono de fuerzas, paralelas a los dos tramos de la línea de influencia.

Su intersección K proyectada sobre el polígono de fuerzas en K' indica cuál es la fuerza que debe incidir sobre el vértice de la línea de

influencia, que en este caso resulta ser P_3. En efecto, los segmentos $K'K$ y KK' tienen sentidos contrarios e igual magnitud, representando el primero $\operatorname{tg}\alpha R_i$ y el segundo $\operatorname{tg}\beta R_j$. En consecuencia, cuando la fuerza así determinada incide sobre el vértice de la línea de influencia, se cumple la [10.46], correspondiendo a la incógnita un valor máximo.

10.1.7. Influencia de una carga distribuida móvil.

Consideremos una carga uniformemente distribuida sobre una longitud a, de intensidad p, que se desplaza a lo largo de una estructura, de la que hemos trazado la línea de influencia correspondiente a una cierta incógnita X (fig. 10.13).

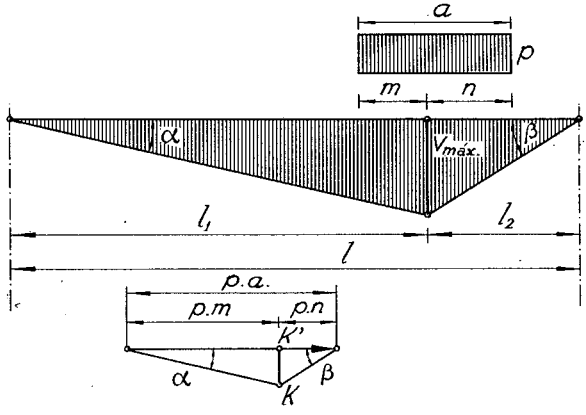


Fig. 10.13.

Para determinar la posición de máximo de la carga distribuida parcial, definida por la distancia n de su extremo al vértice de la línea de influencia, utilizamos la expresión [10.46].

$$\frac{dX}{dl} = \operatorname{tg}\alpha R_i + \operatorname{tg}\beta R_j = 0 \qquad [10.49]$$

quien, para cumplirse, exige que

$$\operatorname{tg}\alpha R_i = -\operatorname{tg}\beta R_j \,. \qquad [10.50]$$

En nuestro caso, por ser $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$, se transforma en:

$$\operatorname{tg}\alpha\, R_i = \operatorname{tg}\beta\, R_j \,. \qquad [10.51]$$

Para la carga distribuida parcial, si m y n son las distancias de sus extremos al vértice de la línea de influencia, en la posición de máximo debemos tener:

$$\operatorname{tg}\alpha\, pm = \operatorname{tg}\beta\, pn, \qquad [10.52]$$

de donde

$$\frac{m}{n} = \frac{a-n}{n} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \,. \qquad [10.53]$$

Pero, de la figura resulta

$$v_{máx} = l_1 \operatorname{tg}\alpha = l_2 \operatorname{tg}\beta \,, \qquad [10.54]$$

de donde

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{l_1}{l_2} \,, \qquad [10.55]$$

valor que reemplazado en [10.53] conduce a

$$a - n = n\frac{l_1}{l_2} \,. \qquad [10.56]$$

Finalmente, despejando n:

$$n = a\frac{l_2}{l_1 + l_2} = a\frac{l_2}{l} \,, \qquad [10.57]$$

con lo que queda perfectamente determinada la posición de la carga distribuida que corresponde a un máximo de X.

El problema puede también resolverse gráficamente, en la forma que muestra la figura 10.13, que consiste en llevar horizontalmente un vector representativo de la intensidad de la resultante pa de la carga distribuida, y trazar por sus extremos paralelas a los dos tramos de la línea de influencia.

La intersección de las mismas determina un punto K, que proyectado en K' sobre pa, define dos vectores pm y pn que constituyen la solución del problema.

En efecto, de la figura se tiene:

$$\left.\begin{aligned} K'K &= pm \operatorname{tg}\alpha \\ KK' &= pn \operatorname{tg}\beta \end{aligned}\right\} \qquad [10.58]$$

y por ser ambos segmentos opuestos, resulta:

$$pm \operatorname{tg}\alpha = pn \operatorname{tg}\beta \qquad [10.59]$$

es decir, que se cumple la [10.52].

Conocido pn, la determinación de n es inmediata, con lo que queda resuelto el problema.

10.2. Determinación analítica de líneas de influencia.

10.2.1. Consideraciones generales.

Hemos visto en 10.1.1 que para proceder al trazado de las líneas de influencia de incógnitas X cualesquiera, bastaba establecer las funciones

$$\left.\begin{aligned} v_i &= f(z) \\ h_i &= \varphi(y) \end{aligned}\right\} \qquad [10.60]$$

que definían, respectivamente, las variaciones de los coeficientes de influencia vertical y horizontal a lo largo de una línea de la estructura.

En los parágrafos siguientes nos ocuparemos de la forma de establecer dichas funciones para las distintas incógnitas, que se presentan en los sistemas estáticamente determinados, a saber: componentes de reacción en apoyos fijos, reacciones en apoyos móviles, esfuerzos en barras y esfuerzos característicos en secciones.

Limitaremos el análisis al establecimiento de las ecuaciones correspondientes a líneas de influencia para cargas verticales, por cuanto las relativas a cargas horizontales se deducen en forma similar, sin presentar mayores dificultades.

10.2.2. Líneas de influencia de reacciones de vínculo externo.

Sea el sistema de la figura 10.14, simplemente apoyado, sujeto a la acción de una fuerza vertical P cuya posición, variable, queda definida por la abscisa z de su punto de aplicación. Para determinar la ecuación de la línea de influencia de la reacción en el apoyo móvil A, ponemos

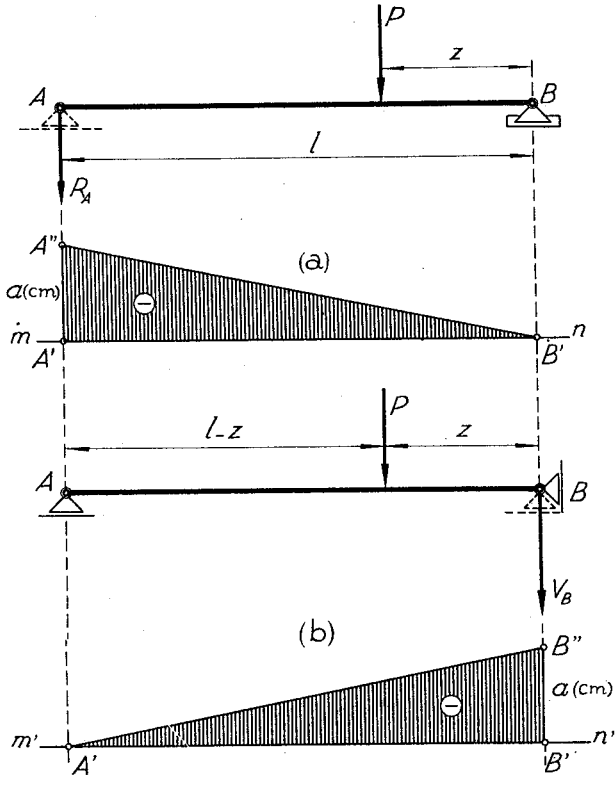


Fig. 10.14.

en evidencia la incógnita R_A y determinamos su valor mediante una condición de nulidad de momentos respecto de B.

$$-R_A . l - P_z = 0 . \qquad [10.61]$$

de donde

$$R_A = -P \frac{z}{l} \qquad [10.62]$$

Dividiendo por P

$$\frac{R_A}{P} = -\frac{z}{l} , \qquad [10.63]$$

pero, por definición de coeficiente de influencia $R_A/P = v_A$, o sea la ordenada variable de la línea de influencia de R_A, de donde

$$v_A = -\frac{z}{l} , \qquad [10.64]$$

Es decir que la ecuación de la línea de influencia de la reacción R_A responde a una ley lineal. Para representar la función, que será una recta, basta conocer dos de sus puntos. Dando a z los valores extremos $z = 0$ y $z = l$ resulta

$$\text{para} \begin{cases} z = 0 & v_A = 0 \\ z = l & v_A = -1 \end{cases} \qquad [10.65]$$

Adoptando un eje de referencia horizontal m-n, llevamos con signo negativo (hacia arriba del eje) y en coincidencia con $z = l$ un segmento a(cm), cuyo extremo unimos con el punto B' de ordenada nula. La recta así determinada, referida al eje m-n será la línea de influencia buscada; figura 10.14 a. De acuerdo con la [10.63], su signo será negativo. En cuanto a la escala en que se leerán las ordenadas v_A, será $1/a$(cm).

Considerando ahora el apoyo fijo B, la reacción en el mismo queda definida por sus componentes vertical y horizontal. Para la fuerza P vertical, es evidente que la última de las componentes siempre será nula.

Para determinar la ecuación de la línea de influencia de la componente vertical, reemplazamos el apoyo fijo por dos apoyos móviles concurrentes en B, uno vertical y otro horizontal y ponemos en evidencia la incógnita suprimiendo el primero.

El valor de V_B lo determinamos mediante una condición de nulidad de momentos respecto del punto A.

$$V_B . l + P(l - z) = 0 , \qquad [10.66]$$

de donde

$$V_B = -P\frac{l - z}{l} , \qquad [10.67]$$

expresión que dividida por P nos da la ecuación de la línea de influencia de v_B:

$$v_B = -\frac{l-z}{l} . \qquad [10.68]$$

La función es lineal en z. Para representarla, damos valores extremos a la variable, teniéndose:

$$\text{para} \left\{ \begin{array}{ll} z = l & v_B = 0 \\ z = 0 & v_B = -1 \end{array} \right\} \qquad [10.69]$$

Adoptado un eje de referencia horizontal m'-n', llevamos en coincidencia con $z = 0$ y hacia arriba, un segmento a(cm) que en escala represente la unidad. Uniendo su extremo con el punto A' de ordenada nula, la recta así obtenida será la línea de influencia de V_B. Su signo será negativo, como surge de [10.65] y la escala en que deberán leerse sus ordenadas $1/a$(cm).

Supongamos ahora el caso más general de la figura 10.15, en que el apoyo móvil A no es vertical, sino que su dirección forma un ángulo φ con la horizontal.

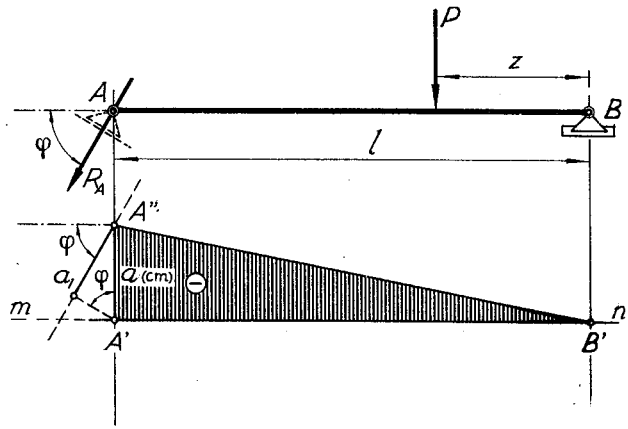


Fig. 10.15.

Puesta en evidencia la incógnita, calculamos su valor tomando momentos respecto de B:

$$-Pz - R_{A''}.l.\operatorname{sen}\varphi = 0 . \qquad [10.70]$$

Despejando R_A y dividiendo ambos miembros por P, obtenemos la ecuación de la línea de influencia, cuya expresión será:

$$v_A = -\frac{z}{l \operatorname{sen} \varphi} . \qquad [10.71]$$

Dando a z valores extremos tenemos:

$$\text{para} \left\{ \begin{array}{ll} z = 0 & v_A = 0 \\ z = l & v_A = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \end{array} \right\} \qquad [10.72]$$

Llevando, como en los casos anteriores, a partir de A' y con su signo (negativo en este caso) un segmento a(cm) que en escala represente $1/\operatorname{sen} \varphi$, su extremo A'' unido con B' determina una recta, que será la línea de influencia buscada. Sus ordenadas serán todas negativas, y en cuanto a la escala, será $1/a \operatorname{sen} \varphi$. Ahora bien, si por A'' trazamos una paralela a la dirección del apoyo móvil A, y proyectamos sobre ésta la longitud del segmento a, obtendremos una nueva longitud a_1 tal que

$$a_1 = a \operatorname{sen} \varphi \qquad [10.73]$$

y, en consecuencia, la escala resulta ser directamente $1/a_1$(cm).

En el caso de la figura 10.15, la ecuación de la línea de influencia de la componente vertical V_B de la reacción B se determina en la misma forma que en el caso de la figura 10.14, por lo que no entraremos en mayores detalles. En cambio, para la componente horizontal H_B, se procede en la forma que describimos a continuación:

Puestas en evidencia las reacciones R_A y R_B, esta última mediante sus componentes V_B y H_B, si proyectamos las fuerzas exteriores, activas y reactivas, sobre un eje horizontal, por tratarse de un sistema en equilibrio, debemos tener:

$$R_A \cos \varphi + H_B = 0 \qquad [10.74]$$

de donde

$$H_B = -R_A \cos \varphi . \qquad [10.75]$$

De acuerdo con la [10.70]

$$R_A = -P \frac{z}{l \operatorname{sen} \varphi} \qquad [10.76]$$

y reemplazando en [10.75]

$$H_B = P \frac{z}{l \operatorname{tg} \varphi} \qquad [10.77]$$

y finalmente, dividiendo ambos miembros por P

$$v_{H_B} = \frac{1}{l \operatorname{tg} \varphi} , \qquad [10.78]$$

ecuación de una recta, de ordenada nula para $z = 0$, y que para $z = l$ adquiere el valor

$$v_{H_B} = \frac{z}{\operatorname{tg} \varphi} . \qquad [10.79]$$

Llevando sobre la vertical de A y a partir de A' un segmento $A'A'' = a(\text{cm})$ y uniendo su extremo A'' con el punto de ordenada nula ubicado sobre la vertical de B, obtenemos una recta que es la línea de

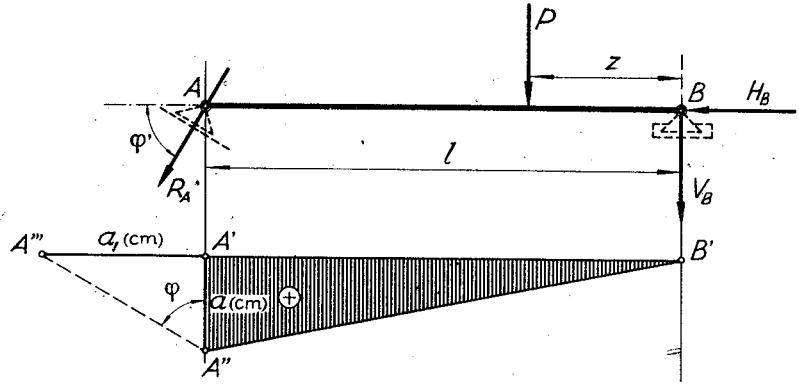


Fig. 10.16.

influencia de v_{H_B}. Su signo, de acuerdo con la [10.78] es positivo, y la escala en que deben leerse las ordenadas será $1/a \operatorname{tg} \varphi$. Ahora bien, si por A'' trazamos una normal a la dirección de R_A obtenemos en su intersección con el eje de referencia un punto A'''. Llamando $a_1(\text{cm})$ al segmento $A'A'''$, tendremos:

$$a_1(\text{cm}) = a(\text{cm}) \operatorname{tg} \varphi \qquad [10.80]$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{a_1(\text{cm})} = \frac{1}{a(\text{cm})\,\text{tg}\,\varphi} \qquad [10.81]$$

es decir que la inversa de la longitud a_1 medida en cm, es directamente la escala.

10.2.3. Línea de influencia de esfuerzos en barras de reticulado.

a) *Barras de cordón.*

Sea el sistema de reticulado de la figura 10.17, del que nos proponemos determinar las ecuaciones de la línea de influencia del esfuerzo

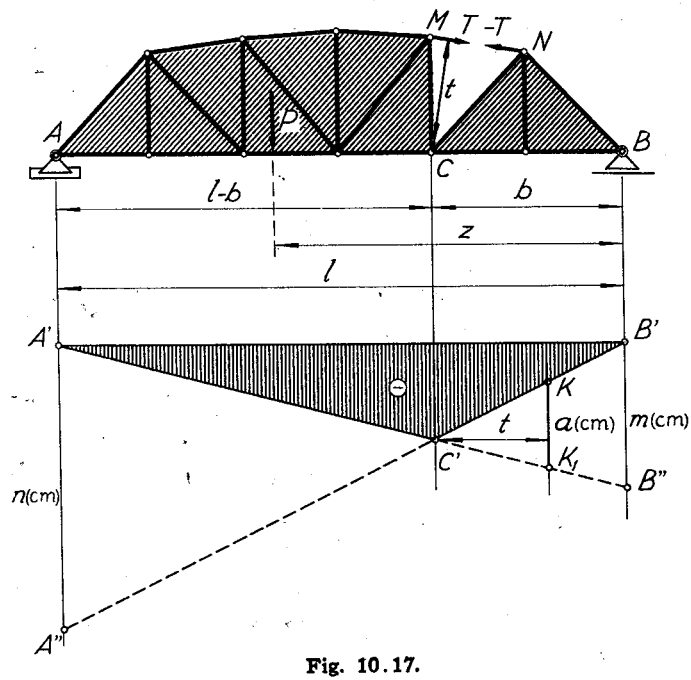


Fig. 10.17.

en la barra MN del cordón superior, para fuerzas verticales que se desplazan a lo largo del cordón inferior.

Supongamos una fuerza P, cuya posición quede definida por la abscisa z de su punto de aplicación. Las expresiones de las reacciones

en los vínculos A y B serán

$$\left.\begin{aligned} R_A &= -P\,\frac{z}{l} \\ R_B &= -P\,\frac{l-z}{l}\,. \end{aligned}\right\} \qquad [10.82]$$

Puesta en evidencia la incógnita mediante la supresión de la barra MN y su reemplazo por las fuerzas T y $-T$ aplicadas en los nudos M y N, y que materializan un esfuerzo de tracción, el sistema se transforma en una cadena de dos chapas articuladas en C.

Supongamos primeramente que la fuerza P se desplaza sobre la chapa ubicada a la derecha de C, es decir, entre C y B. El equilibrio de la chapa izquierda exige que la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas a la misma, sea nula con respecto a la articulación C, es decir:

$$R_A(l-b) + T.t = 0\,, \qquad [10.83]$$

de donde

$$|T| = \left|\frac{R_A(l-b)}{t}\right| \qquad [10.84]$$

pero

$$R_A = -P\frac{z}{l}\,. \qquad [10.85]$$

valor que reemplazado en [10.84] conduce a:

$$|T| = \left|P\frac{z(l-b)}{lt}\right|\,. \qquad [10.86]$$

Dividiendo por P tenemos

$$|v_T| = \left|\frac{z(l-b)}{lt}\right|\,, \qquad [10.87]$$

ecuación de una recta válida entre $z=0$ y $z=b$ y que corresponde a la línea de influencia del esfuerzo T para cargas que actúan entre C y B.

El momento de R_A respecto de C es positivo, por cuanto R_A tiene signo negativo. En consecuencia, para que se cumpla la [10.83] debe ser negativo el momento de T respecto del mismo punto. Como es dado observar en la figura 10.17, para que esto último ocurra es necesario que

la fuerza T aplicada en M concurra a dicho punto. Consecuentemente, la fuerza opuesta $-T$ aplicada en N también debe concurrir al nudo, por lo que ambas materializan un esfuerzo de compresión, es decir, negativo. De ahí que las ordenadas de la línea de influencia entre C y B sean negativas. En consecuencia, la [10.87] se transforma en

$$v_T = -\frac{z(l-b)}{lt} . \qquad [10.88]$$

Consideremos ahora a la fuerza P actuando entre A y C, y en lugar de analizar el equilibrio de la chapa ubicada a la izquierda de C, por razones de simplicidad lo haremos con la que se encuentra a la derecha de dicha articulación. En efecto, sobre dicha chapa actúan únicamente la reacción R_B y la fuerza $-T$ aplicada en el nudo N.

Su equilibrio exige, como antes, que la suma de los momentos de dichas fuerzas sea nula con respecto de C, teniéndose en consecuencia

$$R_B . b - T . t = 0 . \qquad [10.89]$$

Despejando T:

$$| T | = \left| \frac{R_B . b}{t} \right| \qquad [10.90]$$

y reemplazando R_B por su valor dado por la segunda de las [10.82], resulta:

$$| T | = \left| \frac{P(l-z)b}{lt} \right| \qquad [10.91]$$

y dividiendo ambos miembros por P:

$$| v_T | = \left| \frac{(l-z)b}{lt} \right| . \qquad [10.92]$$

La [10.92] es la ecuación de una recta, de ordenada nula en correspondencia con $z = l$ y que corresponde a la ecuación de la línea de influencia del esfuerzo T cuando las cargas actúan entre A y C, es decir, válida entre $z = b$ y $z = l$.

Por ser negativo el momento de R_B respecto de C, para que se cumpla la [10.89], el momento de T con respecto a dicho punto debe ser positivo, y para que ello ocurra, la fuerza T aplicada en N debe concurrir a este último punto. Consecuentemente, la fuerza aplicada en

M debe ser opuesta, por lo que ambas materializan un esfuerzo de compresión, es decir, negativo. Por esta razón, la [10.92] se transforma en

$$v_T = -\frac{(l-z)b}{lt} . \qquad [10.93]$$

Las dos rectas a que corresponden las [10.88] y [10.93] se cortan en un punto ubicado sobre la vertical de la articulación relativa C. En efecto, igualando ambas expresiones, tenemos

$$\frac{z(l-b)}{lt} = \frac{(l-z)b}{lt} , \qquad [10.94]$$

de donde, despejando z:

$$z = b \qquad [10.95]$$

es decir que para $z = b$, ambas expresiones tienen el mismo valor y precisamente $z = b$ es la abscisa de la articulación relativa C.

El trazado de la línea de influencia lo efectuamos dando valores extremos a la [10.93]:

$$\text{para} \begin{cases} z = 0 & v_T = -\dfrac{b}{t} \\ z = l & v_T = 0 \end{cases} \qquad [10.96]$$

Elegido un eje de referencia horizontal, proyectamos los puntos A y B en A' y B' respectivamente y llevamos verticalmente a partir de este último un segmento $B'B'' = m(\text{cm})$, que en escala representa b/t. Uniendo B'' con A' obtenemos una recta que es la representación gráfica de la función [10.93]. Uniendo el punto C', intersección de dicha recta con la vertical trazada por C, con B, obtenemos una segunda recta que constituye la representación gráfica de la [10.88] y que prolongada determina sobre la vertical de A un punto A''. El segmento $A'A''$ corresponde, en escala, a $(l-b)/t$, que es el valor que adquiere la [10.88] para $z = l$. La línea de influencia buscada será la poligonal $A'C'B'$ y su signo será negativo por que, tanto la [10.88] como la [10.93], son negativas para cualquier valor de z. En cuanto a la escala en que debemos leer las ordenadas, teniendo en cuenta que el valor b/t lo hemos representado por $m(\text{cm})$ será:

$$\text{Escala} = \frac{b}{t.m(\text{cm})} \qquad [10.97]$$

o, análogamente,

$$\frac{l-b}{t.n(\text{cm})} .$$

La escala puede determinarse en la forma siguiente: llevando a partir de C', horizontalmente, un segmento de longitud t, y trazando por su extremo una vertical, ésta, en su intersección con $C'B'$ y la prolongación de $A'C'$ define un segmento $KK_1 = a(\text{cm})$.

De la semejanza de los triángulos KK_1C' y $B'B''C'$ tenemos:

$$\frac{t}{a(\text{cm})} = \frac{b}{m(\text{cm})} \qquad [10.98]$$

de donde

$$\frac{1}{a(\text{cm})} = \frac{b}{t.m(\text{cm})} , \qquad [10.99]$$

pero como el segundo miembro corresponde a la escala, ésta resulta ser también $1/a(\text{cm})$.

Para una barra de cordón inferior, tal como la UV del reticulado de la figura 10.18, el procedimiento a seguir para la determinación de las ecuaciones de la línea de influencia del esfuerzo en la misma, y su ulterior representación gráfica, es similar al que hemos descripto para una barra

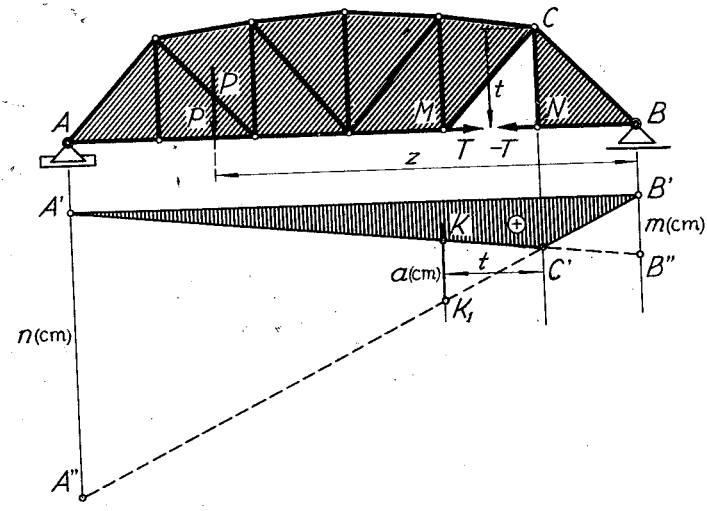


Fig. 10.18.

de cordón superior, por lo que no entraremos en mayores detalles. En este caso, el signo de la línea de influencia para cargas verticales positivas, resulta negativo. En efecto, cuando la fuerza P se desplaza sobre el cordón inferior de la chapa derecha, las únicas fuerzas aplicadas a la chapa izquierda son R_A y T, esta última en el nudo U. La suma de los momentos de ambas con respecto a C debe ser nula, y al ser positivo el momento de R_A, es necesario que el de T sea negativo.

En consecuencia, la fuerza T aplicada en U en la dirección de la barra UV debe alejarse del nudo. Por consideraciones análogas llegamos a la conclusión de que la fuerza $-T$ aplicada en el nudo V también se aleja del mismo. En consecuencia, ambas fuerzas, en conjunto, materializan un esfuerzo de tracción, es decir, positivo, por lo que las ordenadas de la línea de influencia, en este caso todas del mismo signo, serán positivas.

Cuando se trata de reticulados del tipo del de la figura 10.19, es necesario corregir la línea de influencia de las barras de cordón inferior, para cargas que se desplazan sobre el mismo, como puede observarse en la figura.

En efecto, cuando la fuerza P actúa sobre la chapa izquierda, puede desplazarse entre A y U, y cuando lo hace sobre la chapa derecha, entre V y B. Entre U y V la transmisión de cargas a la estructura

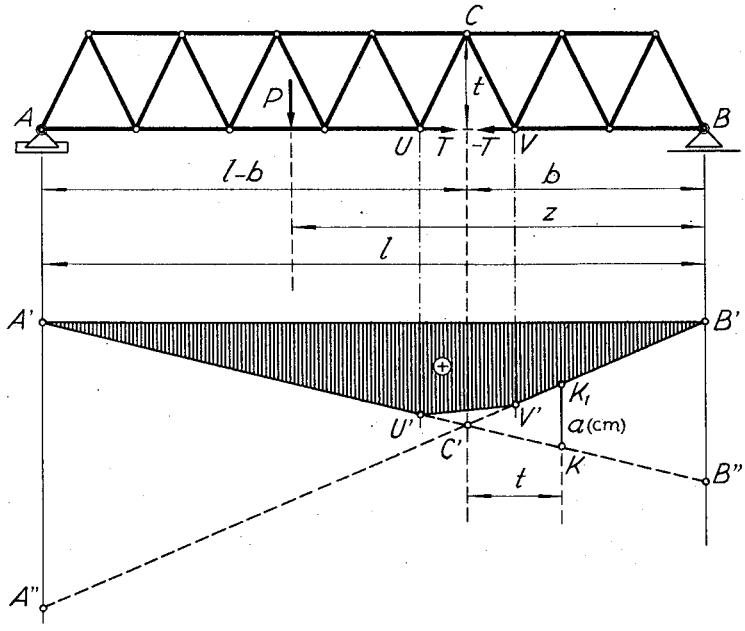


Fig. 10.19.

portante se efectúa en forma indirecta, por lo que es necesario corregir la línea de influencia entre verticales trazadas por dichos puntos, mediante la recta $U'V'$, obteniéndose como línea de influencia la poligonal $A'U'V'B'$.

b) *Barras de alma.*

Analizaremos en primer término la determinación de las ecuaciones de la línea de influencia de esfuerzos en barras de alma, diagonales o montantes, de estructuras de reticulado de cordones no paralelos, considerando para ello la barra NU del reticulado de la figura 10.20, sobre cuyo cordón inferior se desplaza una fuerza P.

Las expresiones de las reacciones de vínculo son

$$\left.\begin{aligned} R_A &= -P\frac{z}{l} \\ R_B &= -P\frac{l-z}{l}\,. \end{aligned}\right\} \qquad [10.100]$$

Puesto en evidencia el esfuerzo en la barra NU, el sistema se transforma en una cadena cinemática de dos chapas S_1 y S_2 articuladas en C mediante las bielas MN y UV.

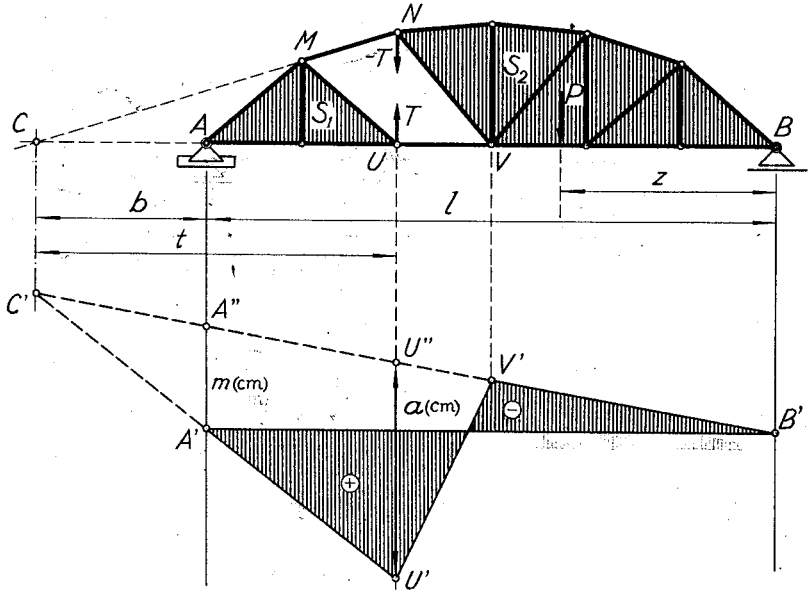


Fig. 10.20.

Consideremos primero la fuerza P desplazándose entre V y B. El equilibrio de S_1 exige que la suma de los momentos con respecto a C. de las fuerzas aplicadas en la misma, sea nula, es decir:

$$-R_A\, b - T.t = 0 \qquad [10.101]$$

de donde

$$|T| = \left| R_A \frac{b}{t} \right| . \qquad [10.102]$$

Reemplazando el valor de R_A dado por la [10.100] y dividiendo ambos miembros por P, resulta

$$|v_T| = \left| \frac{z.b}{lt} \right| . \qquad [10.103]$$

Considerando ahora que la fuerza P se desplaza sobre la chapa S_1 entre A y U, el equilibrio de S_2 exige que

$$-R_B(l+b) + Tt = 0 \qquad [10.104]$$

de donde, reemplazando R_B por su valor dado por la [10.100] y dividiendo por P

$$|v_T| = \left| \frac{(l+b)(l-z)}{lt} \right| . \qquad [10.105]$$

Cuando la fuerza P actúa sobre la chapa S_2, al ser negativo el momento de R_A respecto de C, el de T aplicada en U debe ser positivo, lo que exige que esta última fuerza esté dirigida hacia el nudo U. Consecuentemente, la fuerza $-T$ aplicada en N, también converge a éste, por lo que ambas materializan un esfuerzo de compresión, es decir negativo. Por esta razón la [10.103] se transforma en:

$$v_T = -\frac{z.b}{lt} . \qquad [10.106]$$

Análogamente, cuando la fuerza P actúa sobre la chapa S_1 el momento de R_B respecto de C es negativo, exigiendo el equilibrio de S_2 que el momento de $-T$, aplicada en N, sea positivo con respecto al mismo punto. Para que ello se verifique, es necesario que $-T$ se aleje del nudo N. La fuerza aplicada en U será opuesta, y ambas materializarán un esfuer-

zo de tracción, es decir, positivo. En consecuencia, la [10.105] tendrá por expresión

$$v_T = +\frac{(l+b)(l-z)}{lt} . \qquad [10.107]$$

Las ecuaciones [10.106] y [10.107] corresponden a dos rectas, de ordenada nula en correspondencia con $z = 0$ y $z = l$ respectivamente, que constituyen la línea de influencia del esfuerzo en la barra NU. Ambas rectas se cortan sobre la vertical de C. En efecto, igualando [10.106] y [10.107] tenemos

$$-\frac{z.b}{lt} = \frac{(l+b)(l-z)}{lt} \qquad [10.108]$$

y despejando z

$$z = l + b . \qquad [10.109]$$

La representación gráfica de las ecuaciones la efectuamos trazando por los puntos A' y B', proyecciones de A y B sobre un eje horizontal de referencia, dos rectas que se corten sobre un punto cualquiera C' de la vertical de C.

La recta de ordenada nula en A' corresponde a la línea de influencia de esfuerzo T para cargas que se desplazan entre A y U y, en consecuencia será válida desde A hasta su intersección U' con la vertical de U. La segunda recta, de ordenada nula en B', será la línea de influencia para cargas que actúan entre V y B, la que será válida entre B y su intersección V' con la vertical de V. Entre U y V, la variación del coeficiente de influencia será lineal, y la correspondiente línea de influencia será la recta $U'V'$.

Las ordenadas definidas por la recta $A'U'$ serán positivas (ecuación [10.107]) y las que lo son por la $V'B'$, negativas (ecuación [10.106]).

En lo que respecta a la escala, observemos que para $z = l$, la expresión [10.106] toma el valor

$$v_T = -\frac{b}{t} , \qquad [10.110]$$

que en la figura está representado por el segmento $A'A'' = m(\text{cm})$. En consecuencia, la escala resulta ser $\frac{b}{t.m(\text{cm})}$. Pero, por otra parte, de la semejanza de los triángulos $C'A''A'$ y $C'U''U'$ se tiene

$$\frac{b}{m(\text{cm})} = \frac{t}{a(\text{cm})} , \qquad [10.111]$$

de donde

$$\frac{b}{t.m(\text{cm})} = \frac{1}{a(\text{cm})}, \qquad [10.112]$$

es decir que, al ser $\frac{b}{t.m(\text{cm})}$ la escala, también lo será en $\frac{1}{a(\text{cm})}$.

En la figura 10.21 hemos procedido al trazado de la línea de influencia de la barra diagonal MV. No entraremos en mayores detalles al respecto, por cuanto las ecuaciones de las que deriva, se plantean en la forma vista para el montante NU de la figura 10.20 y son en un todo semejantes a las que corresponden a éste.

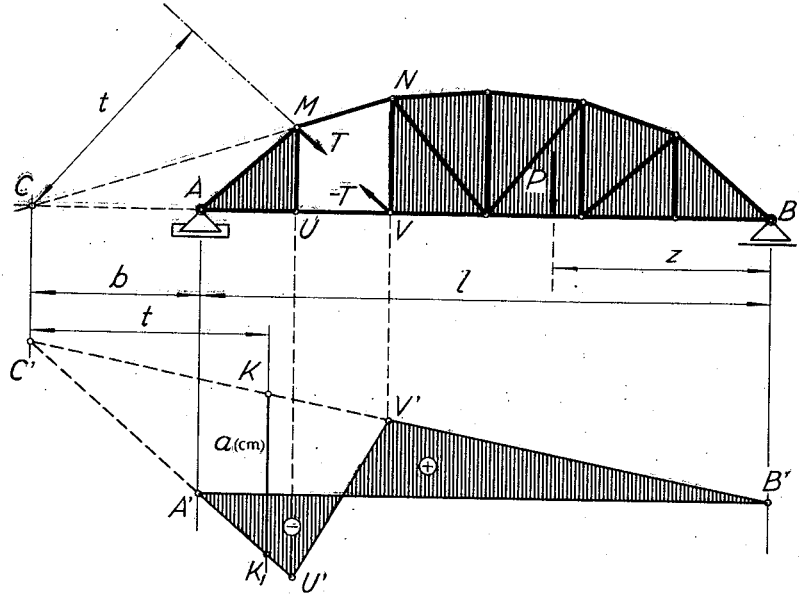


Fig. 10.21.

La determinación de los signos se efectúa en forma similar, analizando el equilibrio de una chapa cuando la fuerza P actúa en la restante. En cuanto a la escala de la línea de influencia, se establece llevando horizontalmente a partir de C la distancia t y trazando por su extremo una vertical, cuya intersección con las rectas $C'U'$ y $C'V'$ define un segmento $KK_1 = a(\text{cm})$, cuya inversa es la escala, es decir, $1/a(\text{cm})$.

En el caso de una viga de cordones paralelos, figura 10.22, al poner en evidencia el esfuerzo en una barra diagonal (o montante) la articulación relativa entre las dos chapas que constituyen el mecanismo resultante, resulta ser el punto impropio de la dirección común de las dos

barras de cordón. Cuando la fuerza se desplaza sobre el cordón inferior de la chapa S_2, el equilibrio de la chapa S_1 lo establecemos teniendo en cuenta que la resultante de las fuerzas aplicadas a la misma (R_A y T), debe pasar por la articulación C_∞. En consecuencia, dicha resultante será paralela a la dirección común de las barras de cordón, equivaliendo la condición de paralelismo a una condición de nulidad de proyecciones sobre la dirección normal. Llamando δ al ángulo formado por la dirección de la barra MV con la vertical, tenemos

$$R_A + T\cos\delta = 0 \qquad [10.113]$$

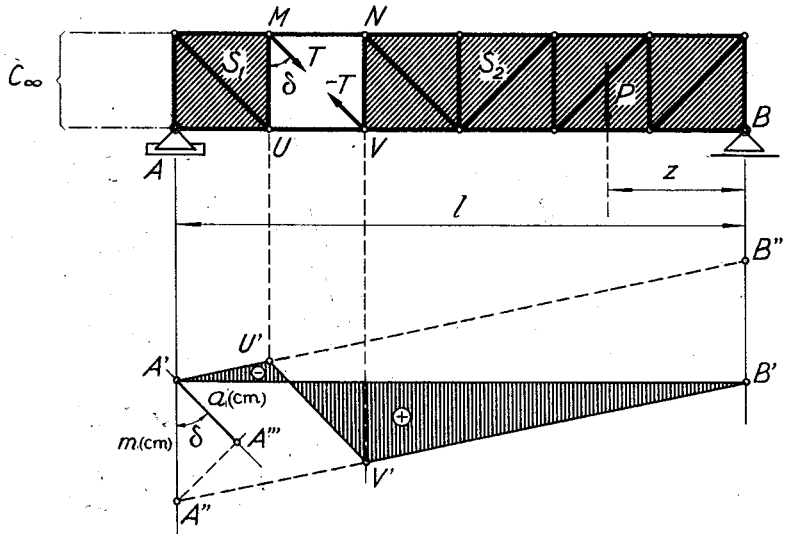


Fig. 10.22.

de donde

$$|T| = \left|\frac{R_A}{\cos\delta}\right| \qquad [10.114]$$

pero $R_A = -P(z/l)$, de donde, reemplazando y dividiendo ambos miembros por P

$$|v_T| = \left|\frac{z}{l\cos\delta}\right|. \qquad [10.115]$$

Por ser R_A negativa, $T\cos\delta$ tiene que ser positiva con el fin de que se cumpla la [10.113], y, en consecuencia, debe estar dirigida hacia abajo

(sentido positivo del eje y). De ahí que la fuerza T aplicada en M se aleje del nudo y, en consecuencia, también $-T$, aplicada en V, materializando ambas un esfuerzo de tracción, es decir, positivo. En consecuencia

$$v_T = \frac{z}{l \cos \delta} \cdot \qquad [10.116]$$

Cuando P actúa en S_1, el equilibrio de S_2 exige que

$$R_B + (-T) \cos \delta = 0 \qquad [10.117]$$

de donde, teniendo en cuenta el valor de R_B llegamos a

$$| v_T | = \left| \frac{l - z}{l \cos \delta} \right| \qquad [10.118]$$

Al ser negativa R_B, $(-T) \cos \delta$ deberá ser positiva (dirigida hacia abajo) y la fuerza $-T$ aplicada en V tiene que concurrir al nudo, ocurriendo otro tanto con su opuesta T. Ambos materializan por ello un esfuerzo de compresión, es decir negativo, por lo que

$$v_T = -\frac{l - z}{l \cos \delta} \cdot \qquad [10.119]$$

Las expresiones [10.116] y [10.119] son las ecuaciones de dos rectas, que corresponden a la línea de influencia del esfuerzo T, y que se anulan para $z = 0$ y $z = l$ respectivamente. Dichas rectas son paralelas. En efecto, para $z = l$ en la [10.116] se tiene $v_T = 1/\cos \delta$ y para $z = 0$, en la [10.119] $v_T = -(1/\cos \delta)$.

Para representar la línea de influencia, elegido un eje de referencia horizontal, trazamos por las proyecciones A' y B' de A y B dos rectas paralelas cualesquiera. La recta de ordenada nula en A' corresponde a la línea de influencia de T cuando P actúa sobre la chapa S_1 y en consecuencia es válida entre A' y su intersección U' con la vertical del nudo U, límite de la chapa S_2.

La segunda recta corresponde a la línea de influencia de T cuando P actúa sobre la chapa S_2, y es válida entre B y su intersección V' con la vertical de V. Entre U' y V' la línea de influencia será la recta $U'V'$.

El signo será negativo para las ordenadas limitadas por $A'U'$ y positivo para las restantes.

Hemos visto que, para $z = l$, la [10.116] toma el valor $1/\cos\delta$, representado en la figura por el segmento $A'A'' = m(\text{cm})$. En consecuencia, la escala de la línea de influencia resulta ser $\dfrac{1}{\cos\delta . m(\text{cm})}$. Si por A' trazamos una paralela a la dirección de la barra MV y proyectamos A'' sobre la misma en A''', obtenemos un segmento $A'A''' = a(\text{cm})$ tal que

$$a(\text{cm}) = m(\text{cm}) \cos\delta , \qquad [10.120]$$

de donde

$$\frac{1}{a(\text{cm})} = \frac{1}{\cos\delta . m(\text{cm})} \qquad [10.121]$$

por lo que la escala es directamente $1/a(\text{cm})$.

Existe, sin embargo, otra forma más simple de determinar la escala, similar a la deducida para las barras de cordón y cuyo detalle puede verse en la figura 10.23 que reprodùce, ampliada, parte de la figura 10.22.

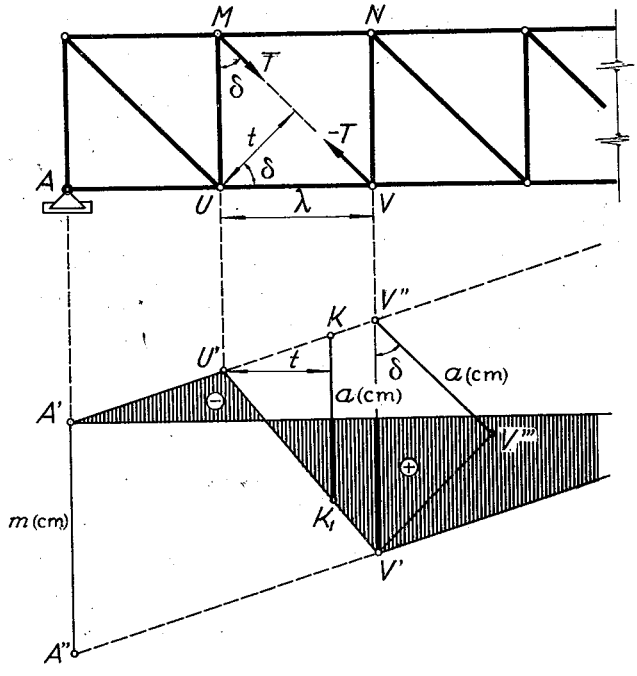


Fig. 10.23

Por ser paralelos ambos tramos de la línea de influencia, se tiene

$$V''V' = A'A'' = m(\text{cm}) \ . \qquad [10.122]$$

Llevando a partir de U', horizontalmente la longitud t, y trazando por su extremo una vertical, ésta determina en su intersección con $A'U'$ y $U'V'$ un segmento $KK_1 = a(\text{cm})$ cuya inversa, de acuerdo con la [10.121] será la escala de la línea de influencia. En efecto, de la semejanza de los triángulos $U'KK_1$ y $U'V''V'$ resulta:

$$\frac{\lambda}{t} = \frac{V''V'}{KK_1} = \frac{m(\text{cm})}{KK_1(\text{cm})} \qquad [10.123]$$

de donde

$$\frac{1}{KK_1(\text{cm})} = \frac{\lambda}{t.m(\text{cm})} \ . \qquad [10.124]$$

Pero, como es fácil observar en la figura

$$\frac{\lambda}{t} = \frac{1}{\cos\delta} \ , \qquad [10.125]$$

y reemplazando en [10.124]

$$\frac{1}{KK_1(\text{cm})} = \frac{1}{\cos\delta \, . \, m(\text{cm})} \ . \qquad [10.126]$$

Por comparación con [10.121] llegamos finalmente a que

$$\frac{1}{KK_1(\text{cm})} = \frac{1}{a(\text{cm})} \qquad [10.127]$$

es decir, la escala de la línea de influencia.

10.2.4. Líneas de influencia de esfuerzos característicos en sistemas de alma llena.

a) *Momento Flexor*

Sea el sistema de la figura 10.24, del que se pide determinar las ecuaciones de la línea de influencia del momento flexor en la sección s-s, para cargas verticales que se desplazan sobre el mismo.

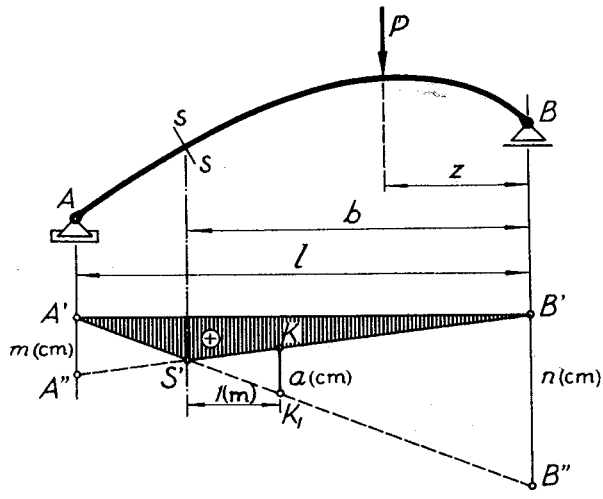


Fig. 10.24.

Las expresiones de las reacciones de vínculo debidas a P, son las mismas que en los casos anteriores, es decir

$$\left.\begin{aligned} R_A &= -P\frac{z}{l} \\ R_B &= -P\frac{(l-z)}{l} \end{aligned}\right\} \qquad [10.128]$$

Supongamos que la fuerza P se desplaza a la derecha de la sección s-s. Para una posición cualquiera de la misma, el momento flexor en s-s será, en magnitud y signo, igual al momento de la resultante izquierda, que en éste se reduce a R_A. En consecuencia

$$\mathcal{M}_s = R_A(l-b) = +P\frac{l-b}{l}z\,, \qquad [10.129]$$

y dividiendo por P

$$\frac{\mathcal{M}_s}{P} = v_M = \frac{l-b}{l}z\,, \qquad [10.130]$$

ecuación de una recta, válida entre $z=0$ y $z=b$, de ordenada nula para la primera de dichas abscisas, y que corresponde a la línea de influencia del momento flexor en s-s, para cargas aplicadas entre dicha sección y el extremo B.

Cuando la fuerza P se desplaza a la izquierda de s-s, establecemos la expresión del momento flexor en la sección partiendo, por sencillez, de la resultante derecha, que en este caso se reduce a R_B, cambiando el signo a su momento. Obtenemos, en consecuencia

$$\mathcal{M}_s = R_B b = P \frac{b}{l} (l - z) . \qquad [10.131]$$

Dividiendo por P resulta

$$\frac{\mathcal{M}_s}{P} = v_M = \frac{b}{l} (l - z) . \qquad [10.132]$$

expresión de una recta, de ordenada nula en correspondencia con $z = l$, que representa la línea de influencia del momento flexor en s-s para cargas que se desplazan a la izquierda de dicha sección. Esta recta y la definida por la [10.130] se cortan sobre un punto de la vertical de la sección s-s. En efecto, igualando [10.130] con [10.132]

$$\frac{l - b}{l} z = \frac{b}{l} (l - z) \qquad [10.133]$$

de donde obtenemos $z = b$ como abscisa de la sección en que la ordenada de la línea de influencia es la misma en las dos expresiones indicadas.

Elegido un eje horizontal de referencia, trazamos por las proyecciones A' y B' de los apoyos, dos rectas cualesquiera que se corten en un punto S' de la vertical de la sección considerada, rectas que constituyen la línea de influencia del momento flexor en s-s. Su signo será en este caso positivo, por cuanto, tanto la [10.130] como la [10.132] son positivas para cualquier valor de z positivo. Para determinar la escala en que deben leerse sus ordenadas, observemos que, para $z = 0$, la [10.132] toma el valor $v_M = b(\text{m})$ y que este valor está representado en la figura por el segmento $B'B'' = n(\text{cm})$. En consecuencia, la escala será $b(\text{cm})/n(\text{cm})$. Llevando a partir de S' en la escala de longitudes horizontalmente una distancia de $1(\text{m})$ de longitud y trazando a dicha distancia de S' una recta vertical, ésta determina en su intersección con los tramos de la línea de influencia un segmento $KK_1 = a(\text{cm})$. De la semejanza de los triángulos $S'KK_1$ y $S'B'B''$ resulta

$$\frac{b(\text{m})}{n(\text{cm})} = \frac{1(\text{m})}{a(\text{cm})} \qquad [10.134]$$

pero, como hemos visto, el primer miembro corresponde a la escala que, en consecuencia, también tendrá por expresión $1(\mathrm{m})/a(\mathrm{cm})$.

b) *Esfuerzo de corte*

El esfuerzo de corte en la sección s-s de la estructura de la figura 10.25, cuando la fuerza P actúa entre la sección y el apoyo B, está dado en intensidad y signo, por la proyección sobre el plano de la sección, de la reacción R_A. Llamando φ el ángulo que forma la normal a la sección con la horizontal, tenemos

$$|Q_s| = |R_A \cos\varphi|, \qquad [10.135]$$

pero $R_A = -P(z/l)$ de donde, reemplazando y dividiendo por P ambos miembros

$$|v_\varphi| = \left|\frac{z\cos\varphi}{l}\right| . \qquad [10.13]6$$

Teniendo en cuenta que Q_s es positivo, de acuerdo con la convención adoptada, resulta finalmente

$$v_\varphi = \frac{z\cos\varphi}{l} . \qquad [10.137]$$

Cuando la fuerza se desplaza a la izquierda de la sección, expresamos el esfuerzo de corte en función de la reacción R_B cambiada de signo, llegando a la siguiente expresión:

$$v_\varphi = -\frac{(l-z)\cos\varphi}{l} . \qquad [10.138]$$

Las [10.137] y [10.138] son las ecuaciones de dos rectas paralelas, de ordenada nula para $z = 0$ la primera y $z = l$ la segunda.

Elegido un eje de referencia horizontal, figura 10.25 *a*, trazamos por sus extremos A' y B', dos rectas paralelas cualesquiera, limitadas por la vertical trazada por la sección considerada, rectas que constituyen la línea de influencia buscada. El signo será positivo para las ordenadas limitadas por la recta $B'S''$ y negativo para las restantes. Para determinar la escala en que deberán leerse las ordenadas de la línea de influencia, observemos que para $z = l$ la [10.137] toma el valor $v_\varphi = \cos\varphi_1$

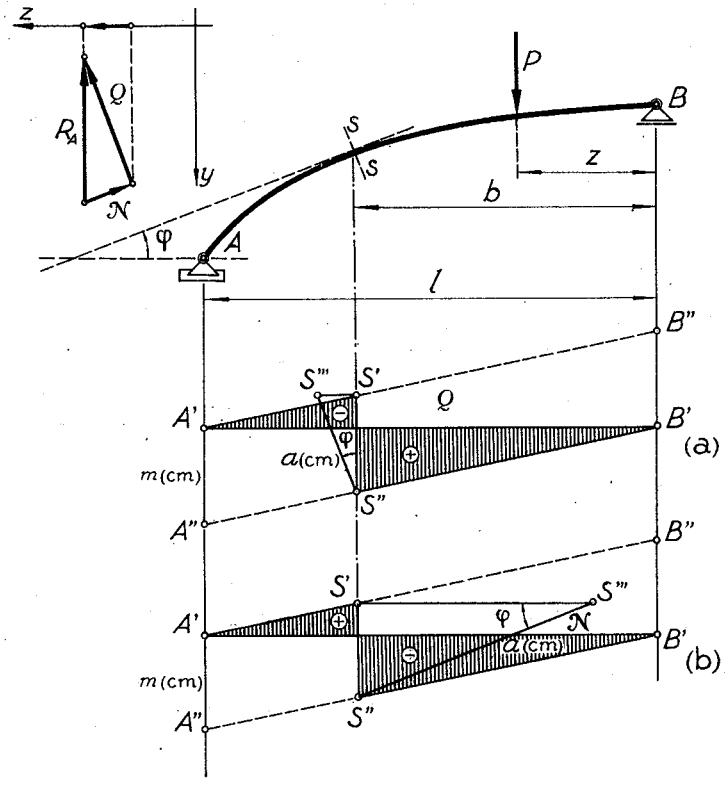


Fig. 10.25.

que en la figura está representado por el segmento $A'A'' = m(\text{cm})$. En consecuencia, la escala será $\cos\varphi/m(\text{cm})$.

Si por el extremo S'' del segmento $S'S''$ trazamos una paralela a la sección s-s, la desproyección de S' sobre dicha dirección determina un punto S''' que define un segmento $S''S'''$, para el que se verifica

$$S''S''' = \frac{S'S''}{\cos\varphi} = \frac{m(\text{cm})}{\cos\varphi} . \qquad [10.139]$$

Llamando $a(\text{cm})$ a la longitud de dicho segmento, resulta

$$\frac{1}{a(\text{cm})} = \frac{\cos\varphi}{m(\text{cm})} , \qquad [10.140]$$

es decir, que la escala está dada directamente por $1/a(\text{cm})$.

c) *Esfuerzo normal.*

El esfuerzo normal en la sección s-s de la estructura de la figura 10.25, cuando la fuerza P actúa a la derecha de aquélla está dado en magnitud por la proyección de la resultante izquierda, en este caso R_A, sobre la dirección normal al plano de la sección, es decir

$$| \mathcal{N} | = | R_A \operatorname{sen} \varphi | . \qquad [10.141]$$

Reemplazando el valor de R_A y dividiendo por P tenemos:

$$| v_N | = \left| \frac{z \operatorname{sen} \varphi}{l} \right| . \qquad [10.142]$$

Como puede observarse en la figura, la proyección $\mathcal{N}$ de R_A *comprime* a la sección. En consecuencia $\mathcal{N}$ será negativo y la [10.142] se transforma en

$$v_N = -\frac{z \operatorname{sen} \varphi}{l} . \qquad [10.143]$$

Cuando P actúa a la izquierda de s-s, expresamos $\mathcal{N}$ en función de R_B llegando a la siguiente expresión

$$v_N = +\frac{(l - z) \operatorname{sen} \varphi}{l} . \qquad [10.144]$$

con signo positivo, por cuanto la proyección de $\mathcal{N}$ de R_B tracciona la sección.

Las expresiones [10.143] y [10.144] son análogas a las [10.137] y [10.138], con la única diferencia de que en las primeras aparece $\operatorname{sen} \varphi$ y en las segundas $\cos \varphi$. En consecuencia, la línea de influencia del esfuerzo normal será igual a la del esfuerzo de corte, difiriendo en signo y escala.

Para determinar la escala, observemos que la [10.143], para $z = l$ toma el valor

$$v_N = -\operatorname{sen} \varphi \qquad [10.145]$$

representado en la figura 10.25 *b* por el segmento $A'A'' = m(\text{cm})$, por lo que la escala resulta ser $\operatorname{sen} \varphi / m(\text{cm})$. Si por el extremo S'' del segmento $S'S''$ trazamos una paralela a la normal a la sección y desproyectamos $S'S''$ sobre la misma, obtenemos un segmento $S''S''' = a(\text{cm})$, para el que se verifica

$$S'S'' = m(\text{cm}) = a(\text{cm}) \operatorname{sen} \varphi , \qquad [10.146]$$

de donde

$$\frac{1}{a(\text{cm})} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{m(\text{cm})} . \qquad [10.147]$$

El segundo miembro define, como hemos visto, la escala de la línea de influencia, por lo que ésta resulta ser directamente $1/a(\text{cm})$.

10.3. Método cinemático para el trazado de líneas de influencia de magnitudes estáticas.

10.3.1. Consideraciones generales.

El método cinemático para el trazado de líneas de influencia de magnitudes estáticas se basa en la aplicación del principio de los trabajos virtuales, del que nos ocupáramos en 9.2.5. Constituye un procedimiento simple a la vez que elegante, y que permite trazar con facilidad las líneas de influencia en cualquier dirección, para cualquier incógnita, y en el sistema más complejo.

El procedimiento consiste en lo siguiente: dado un sistema cualquiera, isostáticamente sustentado, sujeto a la acción de una carga P de una dirección determinada, al poner en evidencia una incógnita cualquiera X, confiriendo al sistema un grado de libertad, lo transformamos en un mecanismo cinemático capaz de sufrir un desplazamiento independiente.

Si damos al sistema un desplazamiento virtual, las fuerzas aplicadas al mismo P y X, producirán cada una un trabajo cuya suma, de acuerdo con el principio de los trabajos virtuales, debe ser necesariamente nula. Llamando η_P al corrimiento en la dirección de P de su punto de aplicación y a al correspondiente a X, tendremos

$$P\eta_P + X.a = 0 \qquad [10.148]$$

de donde

$$\frac{X}{P} = -\frac{\eta_P}{a} . \qquad [10.149]$$

De acuerdo con la definición de coeficiente de influencia

$$\frac{X}{P} = v_x \qquad [10.150]$$

y en consecuencia

$$v_X = -\frac{\eta}{a} . \qquad [10.151]$$

Trazado un diagrama de corrimientos $\eta(z)$ de la dirección de la fuerza P, la expresión [10.151] nos dice que las ordenadas $\eta(z)$ del mismo corresponden, salvo escala y signo, a las ordenadas v_X de la línea de influencia de la incógnita X, para esa dirección.

La escala resulta ser $1/a$, donde a es el desplazamiento del punto de aplicación de la incógnita proyectada en la dirección de la misma, que genéricamente denominaremos *desplazamiento correspondiente a la incógnita.*

El desplazamiento correspondiente a la incógnita varía según la naturaleza de la misma. En el cuadro siguiente hemos resumido los desplazamientos que corresponden a las distintas incógnitas.

NATURALEZA DE LA INCÓGNITA	DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTE
Fuerza	Corrimiento en su dirección
Dos fuerzas opuestas	Corrimiento relativo según la dirección común. Variación de distancia
Par	Rotación absoluta
Par de pares	Rotación relativa

El signo de la línea de influencia resulta directamente de la expresión [10.151]. En efecto, la misma nos dice que, para corrimientos η positivos, el signo de v es contrario al de a, por estar afectado el segundo miembro del signo (—). De lo anterior deducimos la siguiente regla general para establecer el signo de la línea de influencia:

A la parte positiva del diagrama de corrimientos corresponde signo contrario al del desplazamiento correspondiente a la incógnita.

En resumen, para trazar la línea de influencia de una incógnita X por el método cinemático, se procede en la forma siguiente:

1º) Se pone en evidencia la incógnita, confiriendo al sistema un grado de libertad.

2º) Se determinan los polos del mecanismo cinemático resultante, y se da al mismo un desplazamiento virtual.

3º) Se traza un diagrama de corrimientos de la dirección en que se desea trazar la línea de influencia.

4º) Se determina el desplazamiento correspondiente a la incógnita, en magnitud y signo, que permite conocer la escala de la línea de influencia y su signo.

Al estudiar el trazado de diagramas de corrimientos, vimos que los correspondientes a dos direcciones perpendiculares, estaban constituidos por tramos rectilíneos ortogonales entre sí. En consecuencia, conocida la línea de influencia de una determinada dirección, la obtención de la correspondiente a la dirección normal es inmediata.

A continuación analizaremos en detalle el trazado de las líneas de influencia de las distintas incógnitas.

3.2. Líneas de influencia de reacciones de vínculo externo.

Sea el sistema de la figura 10.26, del que se pide la línea de influencia de la reacción R_B.

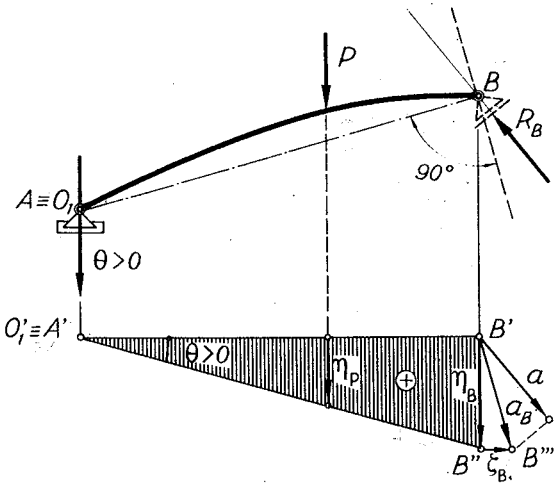


Fig. 10.26.

Puesta en evidencia la incógnita suprimiendo el apoyo móvil B el polo de la chapa coincide con la articulación fija A. Aplicando en el mismo una elación vertical $\theta > 0$, trazamos un diagrama de corrimientos verticales posibles η, que será una recta de ordenada nula en A'. Con la notación de la figura, la correspondiente ecuación de trabajos virtuales será

$$P\eta_P + R_B . a = 0 \qquad [10.152]$$

de donde

$$v_{R_B} = -\frac{R_B}{P} = -\frac{\eta_P}{a} . \qquad [10.153]$$

Para determinar a, corrimiento correspondiente a la incógnita, trazamos por B' una paralela a la dirección del corrimiento efectivo de B, que

es normal a la dirección O_1B. Desproyectando sobre la misma el punto B'' en B''', obtenemos el vector a_B, representativo del corrimiento efectivo de B, que proyectado a su vez sobre la dirección de R_B, nos da a, corrimiento correspondiente a la incógnita cuyo signo es negativo por serlo su proyección sobre el eje director z.

En consecuencia, la escala de la línea de influencia será $1/a(\text{cm})$ y su signo positivo, por corresponder a las ordenadas positivas del diagrama de corrimientos signo contrario al de a, y ser éste negativo.

Determinaremos a continuación las líneas de influencia de las componentes vertical y horizontal de R_A.

Para trazar la línea de influencia de V_A, reemplazamos el apoyo fijo A (figura 10.27) por dos apoyos móviles, uno horizontal y otro vertical. La incógnita la ponemos en evidencia, suprimiendo el último de ellos, y reemplazándolo por la componente de reacción V_A. El polo de la chapa es el punto O de intersección de las direcciones del apoyo móvil B con el que queda en A. Aplicada en O una elación vertical $\theta > 0$, trazamos el correspondiente diagrama de corrimientos verticales referido al eje $A'B'$, figura 10.27 (a), limitado por las ordenadas extremas $A'A''$ y $B'B''$ en correspondencia con las verticales de A y B.

En este caso particular, el corrimiento vertical de A coincide con el efectivo, por encontrarse el polo O sobre la horizontal de aquel punto y, además, con el corrimiento correspondiente a la incógnita por ser su dirección vertical, es decir,

$$\eta_A \equiv a_A \equiv a . \qquad [10.154]$$

En esta forma queda determinada la escala, que será $1/a(\text{cm})$. En cuanto al signo de la línea de influencia, resulta ser negativo, por ser $a > 0$.

En la misma figura hemos procedido al trazado de la línea de influencia de la componente horizontal H_A. Para ello hemos suprimido el apoyo móvil horizontal, reemplazándolo por la fuerza H_A. El polo O_1 se encuentra ubicado en la intersección de los apoyos móviles B y el vertical de A. Aplicada en O_1 una elación vertical $\theta_1 > 0$, trazamos el diagrama de corrimientos verticales correspondiente, referido a la horizontal $A'B'$, figura 10.27 (b).

El diagrama será una recta, de ordenada nula en $O_1' \equiv A'$, proyección del polo O_1 sobre el eje de referencia.

La determinación de la escala de la línea de influencia no es posible, en este caso, en forma directa, por cuanto el corrimiento efectivo de

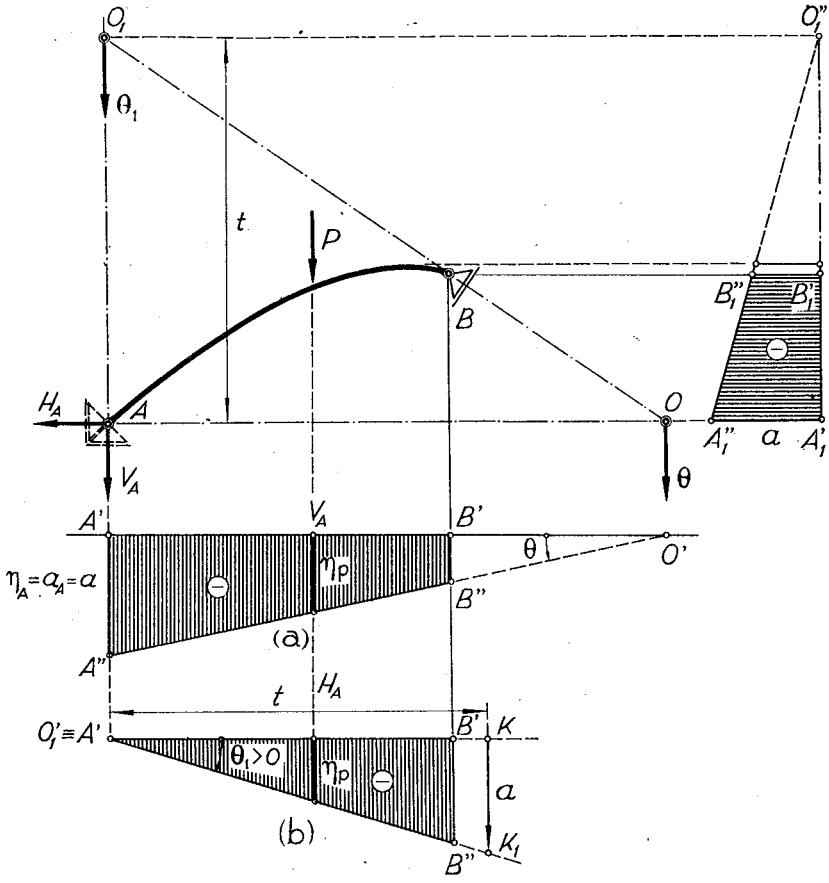


Fig. 10.27.

A tiene componente vertical nula. En consecuencia, para determinarlo es necesario recurrir al trazado del diagrama de corrimientos horizontales, que es inmediato. En efecto, eligiendo un eje vertical de referencia $A_1'B_1'$ proyectamos en O_1'' el polo O_1 y por dicho punto trazamos una recta normal a la $A'B''$ de la figura 10.27 (b). Dicha recta, limitada por las proyecciones horizontales de A y B, corresponde al diagrama de corrimientos horizontales. La ordenada $A_1'A_1''$ del mismo nos da, en magnitud y sentido, el corrimiento efectivo del punto A, que por ser H_A horizontal será igual al corrimiento a correspondiente a la incógnita. En consecuencia la escala de la línea de influencia será $1/a(\text{cm})$.

En cuanto al signo, al ser $a > 0$ corresponde, a la parte positiva del diagrama de corrimientos, signo contrario, es decir, negativo debajo del

eje de referencia para la línea de influencia vertical, y a la izquierda del eje para la horizontal.

La determinación del corrimiento correspondiente a la incógnita, en magnitud y sentido puede, en este caso, efectuarse también sin recurrir al trazado del diagrama de corrimientos horizontales.

En efecto, el corrimiento efectivo de A, coincidente con a, puede expresarse en función de la rotación θ_1 impuesta a la chapa, teniéndose

$$a \equiv a_A \equiv \theta_1 t \qquad [10.155]$$

donde t es la distancia $O_1 A$.

Llevando horizontalmente a partir de O_1' en el diagrama de corrimientos, dicha distancia t y trazando por su extremo una vertical, en su intersección con el eje de referencia y la recta A' y B'', determina dos puntos K y K_1 que definen un segmento $KK_1 = a(\text{cm})$ para el que se verifica, como hemos visto anteriormente,

$$a = \theta_1 . t . \qquad [10.156]$$

10.3.3. Líneas de influencia de esfuerzos en barras de reticulado.

Sea el sistema de reticulado de la figura 10.28, del que pretendemos trazar la línea de influencia del esfuerzo en la barra MN, para cargas verticales. Puesta en evidencia la incógnita, el sistema se transforma en un mecanismo cinemático de dos chapas articuladas en $A_{1,2}$. La determinación de los polos es inmediata, así como también el trazado del diagrama de corrimientos verticales para un desplazamiento cualquiera del sistema, constituido por dos rectas de ordenada nula en correspondencia con las proyecciones de los polos y que se cortan sobre la vertical de la articulación relativa $A_{1,2}$.

La ecuación de los trabajos virtuales tiene, con la notación de la figura, la siguiente expresión:

$$P\eta_P + T.a = 0 \qquad [10.157]$$

donde T es el esfuerzo en la barra MN y a el desplazamiento correspondiente a la incógnita, que en este caso es igual a la variación de distancia entre los puntos M y N cambiada de signo, es decir

$$a = -\delta_{MN} . \qquad [10.158]$$

En consecuencia

$$v_T = \frac{T}{P} = -\frac{\eta_P}{(-\delta_{MN})} . \qquad [10.159]$$

Como hemos visto en 9.2.4 la variación de distancia tiene por expresión

$$|\delta_{MN}| = |\theta_{2,1} . t| . \qquad [10.160]$$

En consecuencia llevando horizontalmente a partir de $A'_{1,2}$ la distancia t y trazando por su extremo una vertical, su intersección con los

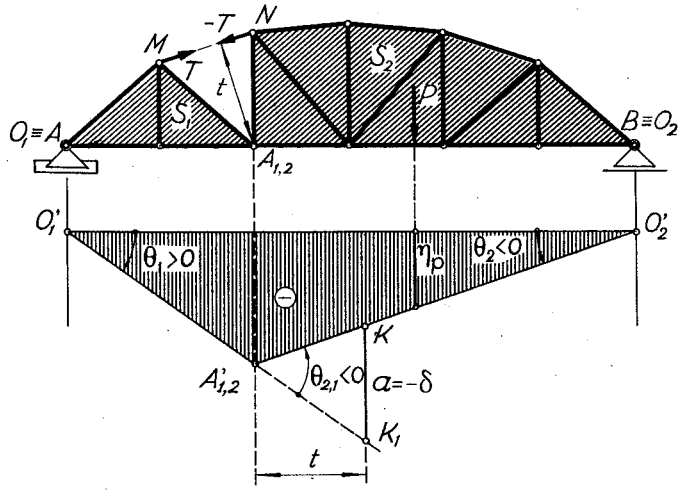


Fig. 10.28.

dos tramos de la línea de influencia determina los puntos K y K_1 que definen el segmento $KK_1 = a = |\delta_{MN}|$ cuya inversa será la escala, es decir $1/a(\text{cm})$.

En lo que se refiere al signo, observemos que la rotación relativa $\theta_{2,1}$ es negativa y que, como consecuencia, los puntos M y N se acercan mutuamente. De ahí que la variación de distancia resulte negativa, y con ello $a > 0$. En consecuencia, el signo de la línea de influencia será negativo en correspondencia con las ordenadas positivas (por debajo del eje) del diagrama de corrimientos verticales.

Para las barras de cordón inferior, el trazado de la línea de influencia se efectúa en forma análoga a la descripta, por lo que no entraremos en mayores detalles.

En la figura 10.29 hemos procedido al trazado de la línea de influencia del esfuerzo en la barra diagonal MV. Puesta en evidencia la incóg-

nita, la articulación relativa $A_{1,2}$ entre las dos chapas resultantes queda ubicada en la intersección de las bielas MN y UV que las vinculan. Determinados los polos en la forma conocida, trazamos un diagrama de corrimientos verticales. La recta $A'_{1,2}O'_1$ que corresponde al diagrama de corrimientos de la chapa S_1 queda limitada entre O'_1 y su intersección U' con la vertical trazada por U, extremo derecho de la chapa.

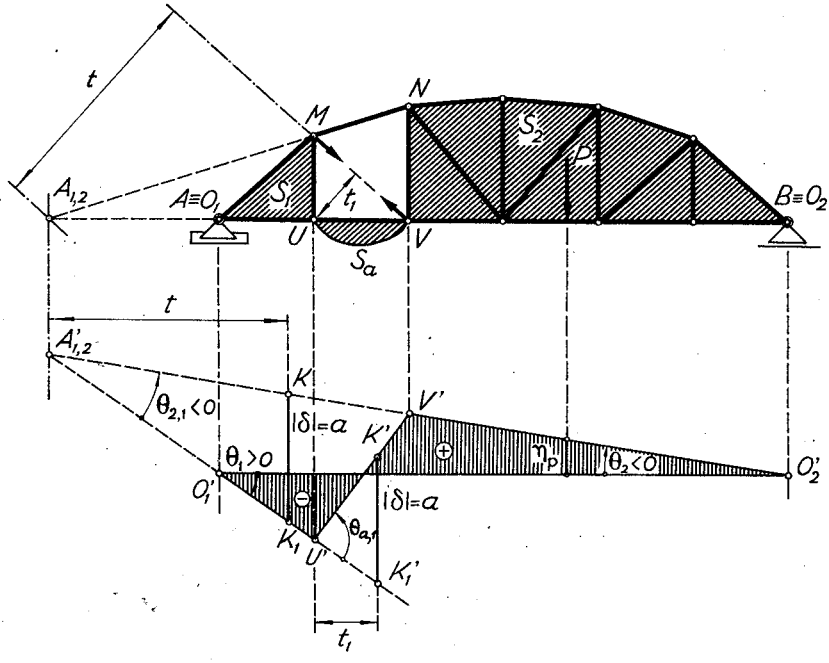


Fig. 10.29.

La recta $O'_2A'_{1,2}$ que corresponde a la chapa S_2 resulta limitada entre O'_2 y V', proyección sobre la misma de V, extremo izquierdo de S_2. Considerando la barra UV como una chapa intermedia S_a articulada en U y V, con S_1 y S_2 respectivamente, su diagrama de corrimientos verticales será la recta $U'V'$.

Análogamente al caso anterior, la escala será el valor inverso de la variación de distancia. Para determinar este último valor, llevamos la distancia t de $A_{1,2}$ a la dirección de la barra MV horizontalmente a partir de $A'_{1,2}$. La vertical trazada por su extremo determina en su intersección con las rectas $O'_2A'_{1,2}$ y $O'_1A'_{1,2}$ un segmento $KK_1 = a = |\delta_{MV}|$; siendo $1/a$(cm) la escala buscada, que también puede determinarse en la forma que explicamos a continuación. El punto V per-

tenece a la chapa S_a. En consecuencia, la variación de distancia δ_{MV} puede calcularse mediante la rotación relativa $\theta_{a,1}$ de la chapa S_a con respecto a la S_1. Por ello, llevando a partir de U', horizontalmente la distancia t_1, la vertical trazada por su extremo determina entre las rectas $O_1'U'$ y $U'V'$ un segmento $K'K_1' = \theta_{a,1}.t_1$, es decir que

$$K'K_1' = a = |\delta_{MV}| . \qquad [10.161]$$

En cuanto al signo de la línea de influencia, la rotación $\theta_{2,1}$ es negativa, por lo que el punto V se acerca al M. De ahí que la variación de distancia resulte negativa y $a > 0$.

En consecuencia, a la parte positiva del diagrama de corrimientos, es decir, las ordenadas ubicadas por debajo del eje de referencia, les corresponde signo contrario, o sea, negativo.

10.3.4. Líneas de influencia de esfuerzos característicos en sistemas de alma llena.

a) *Momentos flexores.*

Consideremos el sistema de alma llena de la figura 10.30, del que nos proponemos trazar la línea de influencia del momento flexor en la sección s-s, para cargas verticales.

Cargado el sistema con una fuerza P, si introducimos en s-s una articulación, confiriéndole con ello un grado de libertad, se rompe el equilibrio. Para restituirlo debemos aplicar en las secciones extremas de las chapas en que ha quedado dividido el sistema, dos pares opuestos

$$M_1 = -M_2 \qquad [10.162]$$

que restituyan el equilibrio y que en conjunto materializan el momento flexor $\mathcal{M}$ en la sección. El signo del momento flexor está dado por el del par M_2 aplicado en la chapa S_2, por cuanto representa el momento de las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección.

Determinados los polos O_1 y O_2, si damos un desplazamiento virtual cualquiera al sistema, las chapas que lo integran experimentarán rotaciones θ_1 y θ_2 y las fuerzas aplicadas desarrollarán trabajo, cuya suma, de acuerdo con el principio de los trabajos virtuales, debe ser nula, por cuanto el sistema debe encontrarse en equilibrio.

La ecuación de trabajo será

$$P\eta_P + M_1\theta_1 + M_2\theta_2 = 0 , \qquad [10.163]$$

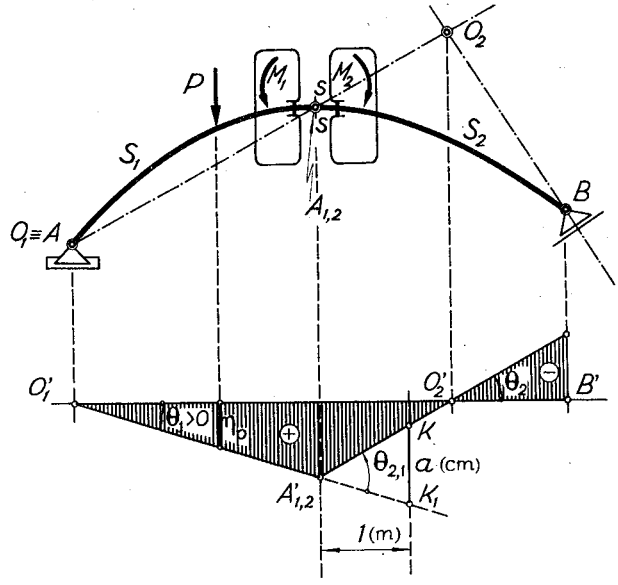


Fig. 10.30.

Por ser $M_1 = -M_2$ y correspondiendo este último, en valor y signo al momento flexor, reemplazando tenemos

$$P\,\eta_P + \mathcal{M}(\theta_2 - \theta_1) = 0\ . \qquad [10.164]$$

Pero $\theta_2 - \theta_1 = \theta_{2,1}$, de donde

$$P\,\eta_P + \mathcal{M}\,\theta_{2,1} = 0\ , \qquad [10.165]$$

y finalmente

$$\frac{\mathcal{M}}{P} = v_M = -\frac{\eta_P}{\theta_{2,1}}\ . \qquad [10.166]$$

El diagrama de corrimientos verticales, está constituido por dos rectas de ordenada nula en correspondencia con las proyecciones O_1' y O_2' de los polos sobre el eje de referencia, rectas que se cortan sobre la vertical de la articulación relativa $A_{1,2}$.

Como puede observarse en la [10.166], en el caso del momento flexor, el desplazamiento correspondiente a la incógnita es la rotación relativa $\theta_{2,1}$ de la chapa S_2 en que actúa el par que corresponde en valor y signo al momento flexor, con respecto a la chapa izquierda S_1. La inversa de dicha rotación será la escala de la línea de influencia.

Para determinarla, llevamos horizontalmente a partir de $A'_{1,2}$ un segmento que en la escala de longitudes corresponda a $1(\mathrm{m})$ y trazamos por su extremo una vertical, cuya intersección con las rectas $O'_1 A'_{1,2}$ y $A'_{1,2} O'_2$ determina dos puntos K y K_1 que definen un segmento $KK_1 = a(\mathrm{cm})$. Por tratarse de una rotación infinitésima tenemos

$$\theta_{2,1} \cdot 1(\mathrm{m}) = a(\mathrm{cm}) \qquad [10.167]$$

de donde

$$\frac{1(\mathrm{m})}{a(\mathrm{cm})} = \frac{1}{\theta_{2,1}}, \qquad [10.168]$$

es decir que la escala resulta ser $1(\mathrm{m})/a(\mathrm{cm})$.

La rotación $\theta_{2,1}$, desplazamiento correspondiente a la incógnita, es, en este caso, negativa. En consecuencia, a la parte positiva del diagrama de corrimientos le corresponde signo contrario, por lo que las ordenadas de la línea de influencia ubicadas por debajo del eje serán positivas y negativas las restantes.

b) *Esfuerzos de corte.*

Puesta en evidencia, en la forma conocida, el esfuerzo de corte en la sección s-s del sistema de la figura 10.31, y cargado el mismo con la fuerza P, para un desplazamiento virtual cualquiera del sistema, la ecuación de trabajos virtuales es

$$P\eta_P + Q.a = 0 \qquad [10.169]$$

de donde

$$\frac{Q}{P} = v_Q = -\frac{\eta_P}{a}. \qquad [10.170]$$

De las dos fuerzas Q que materializan el esfuerzo de corte, en la ecuación anterior, hemos considerado la aplicada al baricentro N de la sección extrema izquierda de la chapa S_2, porque la misma corresponde en magnitud y signo al esfuerzo de corte. En cuanto a a, corrimiento correspondiente a la incógnita, es en este caso la proyección sobre la dirección de Q del corrimiento relativo del punto N en que está aplicada Q respecto de M, en que lo es $-Q$. Si bien Q y $-Q$ son fuerzas opuestas, no cabe en este caso expresar el trabajo desarrollado por el conjunto de ambas en función de la variación de la distancia de sus puntos de aplicación, porque al ser coincidentes éstos, no existe distancia entre los mismos.

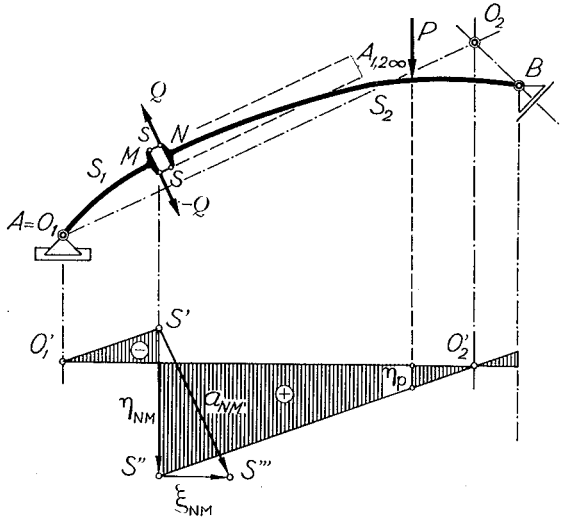


Fig. 10.31.

El diagrama de corrimientos verticales estará constituido en este caso por dos rectas paralelas, por ser $A_{1,2}$ impropia, y de ordenada nula, en correspondencia con las proyecciones de los polos. La recta representativa del diagrama de corrimientos de la chapa S_1 queda limitada por el punto S', de intersección con la vertical de la sección, la que a su vez determina el punto S'', límite del diagrama de corrimientos de S_2.

El segmento $S'S''$ representa el corrimiento vertical relativo η_{NM} del punto N respecto del M. Por ser las bielas que definen la articulación relativa $A_{1,2\infty}$, normales a la dirección de Q, el desplazamiento relativo efectivo a_{NM} resulta de la dirección del esfuerzo de corte. En consecuencia, trazando por S' una paralela a la dirección de Q, la desproyección de S'' sobre la misma determina un punto S''' que define el vector $S'S''' = a_{NM}$, corrimiento relativo efectivo de N respecto de M. Para obtener el corrimiento correspondiente a la incógnita, debemos proyectar a_{NM} sobre la dirección de esta última. Pero como ambas direcciones coinciden, resulta $a_{NM} = a$. En consecuencia, la escala de la línea de influencia del esfuerzo de corte será $1/a(\text{cm})$. En cuanto al signo de la misma, observemos que a es negativo, por serlo su proyección sobre el eje director z, por lo que corresponderá signo positivo a la parte del diagrama ubicado por debajo del eje de referencia.

c) *Esfuerzo normal.*

Cargado el sistema de la figura 10.32 con la fuerza P y puesto en evidencia el esfuerzo normal mediante el mecanismo correspondiente, para

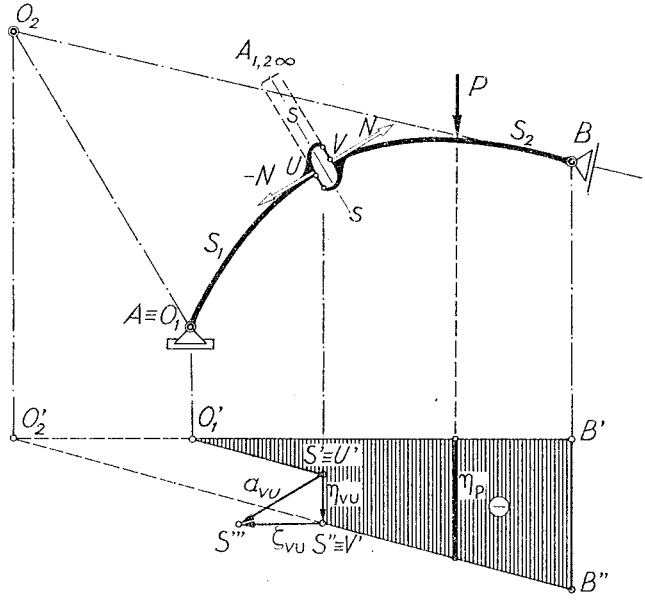


Fig. 10.32.

un desplazamiento virtual del mismo, el trabajo desarrollado por las fuerzas P, N y $-N$ tiene por expresión

$$P\eta_P + N.a = 0 \qquad [10.171]$$

donde N es la fuerza normal aplicada al baricentro V de la sección extrema izquierda de S_2 y a el corrimiento correspondiente a la incógnita, que en este caso es la proyección sobre la dirección de N del corrimiento relativo a_{VU}. De la [10.171] se tiene

$$\frac{P}{N} = v_N = -\frac{\eta_P}{a}. \qquad [10.172]$$

Por ser $A_{1,2}$ impropia, el diagrama de corrimientos verticales —como en el caso del esfuerzo de corte— estará constituido por dos rectas paralelas de ordenada nula en correspondencia con las proyecciones O_1' y O_2' de los polos.

Para determinar la escala, dada por $1/a(\mathrm{m})$, trazamos por S' una paralela a la dirección de N y proyectamos sobre la misma el punto S'' en S''', obteniendo un segmento $S'S''' = a_{VU}$, corrimiento relativo efectivo de V respecto de U y que coincide con a, por cuanto tiene la misma dirección que N.

Por otra parte a es negativo por serlo su proyección sobre z. En consecuencia, a la parte positiva del diagrama de corrimientos corresponde asignarle, para obtener la línea de influencia, signo positivo.

10.3.5 Líneas de influencia de las componentes de reacción en un empotramiento.

Por considerarlo de interés analizaremos el trazado de las líneas de influencia de las componentes de reacción en un empotramiento.

Como sabemos, un empotramiento constituye un vínculo de tercera especie, que implica la existencia de tres incógnitas.

Se acostumbra elegir como incógnitas el par de empotramiento y las componentes vertical y horizontal de la reacción, que denominaremos M_e, V_e y H_e respectivamente.

a) *Línea de influencia de* M_e.

El sistema de la figura 10.33 está constituido por dos chapas S_1 y S_2 articuladas entre sí y se halla sustentado por medio de un empotramiento en A y un apoyo móvil en C.

Consideremos la tierra representada por una chapa S_0 fija, en la que se encuentra empotrada la S_1 por su sección A. En consecuencia, cargado el sistema con la fuerza P, si articulamos en A la chapa S_1 habremos roto el equilibrio, que restituimos aplicando en la sección extrema izquierda de dicha chapa un par M_e que materializa el momento de empotramiento.

Para un desplazamiento infinitésimo cualquiera del sistema, la ecuación de trabajo será

$$P.\eta_P + M_e.\theta_1 = 0 \qquad [10.173]$$

de donde

$$\frac{M_e}{P} = v_M = -\frac{\eta_P}{\theta_1}. \qquad [10.174]$$

El trazado del correspondiente diagrama de corrimientos verticales se efectúa en la forma conocida.

Como puede observarse en la [10.174], el corrimiento correspondiente a la incógnita es en este caso la rotación absoluta θ_1. Ello es

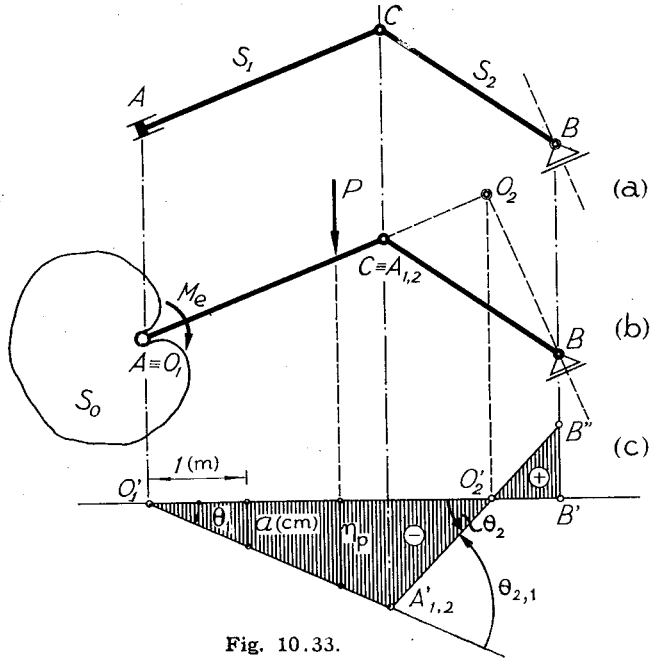


Fig. 10.33.

lógico, por cuanto el par opuesto al M_e se halla aplicado a la chapa S_0 que es fija, por lo que el trabajo correspondiente es nulo.

La determinación de la escala y signo procede en la forma conocida, por lo que no nos extenderemos sobre ella.

b) *Línea de influencia de* H_e .

Consideramos, como en el caso anterior, la chapa S_1 del sistema de la figura 10.34 empotrada en A en la auxiliar S_0 y a ésta, sustentada mediante tres apoyos móviles, dos verticales y uno horizontal. Cargado el sistema con la fuerza P, suprimimos el apoyo móvil horizontal y para restituir el equilibrio aplicamos según la dirección del mismo la reacción H_e .

Para un desplazamiento infinitésimo del sistema, la ecuación de trabajo tiene la expresión siguiente:

$$P.\eta_P + H_e.a = 0 \qquad [10.175]$$

de donde

$$\frac{H_e}{P} = v_{H_e} = -\frac{\eta_P}{a} . \qquad [10.176]$$

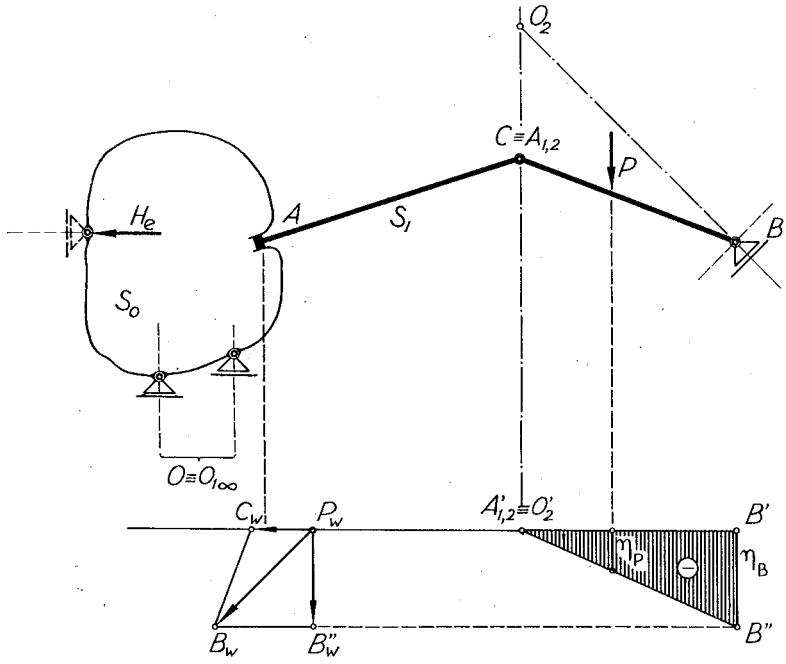


Fig. 10.34.

Como el polo de la chapa S_0 es impropio, el desplazamiento de todos sus puntos, incluso el del punto de aplicación de H_e, es el mismo, ya que la chapa experimenta una traslación horizontal.

En consecuencia, a será el corrimiento horizontal de un punto cualquiera de la chapa S_0, o de la S_1, por cuanto ambas están rígidamente unidas entre sí. Para determinar a, recurrimos a un diagrama de *Williot-Mohr*, determinando primero el corrimiento efectivo del punto B, partiendo del corrimiento vertical η_B. Ubicado B_w, la determinación de C_w es inmediata, y por pertenecer C a la chapa S_1, el vector $P_w C_w$ nos da en magnitud y signo el corrimiento a correspondiente a la incógnita. La escala de la línea de influencia será $1/a$(cm) y el signo negativo, por ser $a > 0$.

c) *Línea de influencia de* V_e.

Para la determinación de la línea de influencia de V_e, sustentamos la chapa auxiliar mediante dos apoyos móviles horizontales y uno vertical y ponemos en evidencia la incógnita, una vez cargado el sistema,

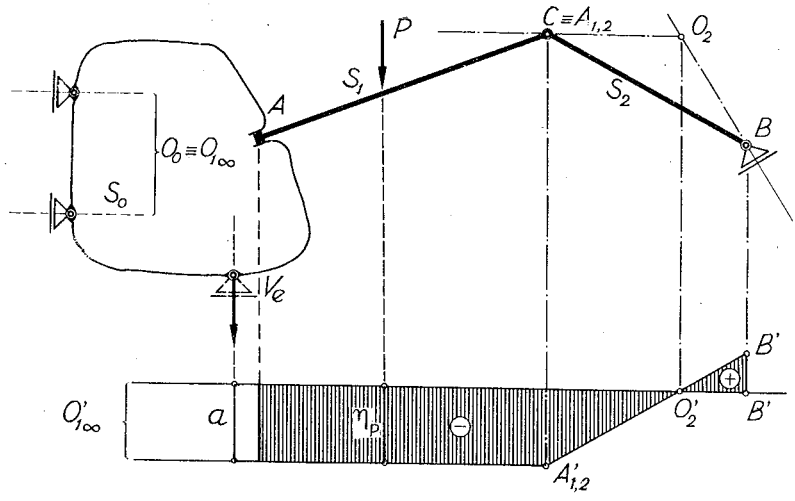


Fig. 10.35.

suprimiendo el último apoyo mencionado y haciendo actuar en su reemplazo V_e.

Para un desplazamiento virtual cualquiera, la correspondiente ecuación de trabajo será:

$$P \cdot \eta_P + V_e \cdot a = 0 \qquad [10.177]$$

de donde

$$\frac{V_e}{P} = v_{V_e} = -\frac{\eta_P}{a} . \qquad [10.178]$$

En este caso, a, corrimiento correspondiente a la incógnita, será el corrimiento efectivo común de todos los puntos de las chapas S_0 y S_1, por cuanto el único desplazamiento posible de las mismas es una traslación vertical.

Trazado el diagrama de corrimientos, el correspondiente a S_1 será una recta paralela al eje de referencia y el de la S_2 otra de ordenada nula en la proyección O'_2 de O_2 y que se corta con la anterior sobre la vertical de $A_{1,2}$. La escala será $1/a(\text{cm})$, donde a es el corrimiento vertical común de los puntos de S_1 y el signo de la línea de influencia será negativo en la parte ubicada por debajo del eje de referencia, por cuanto a es positivo.

10.4. Diagramas envolventes.

10.4.1. Conceptos generales.

En el Capítulo 8 hemos analizado el trazado de diagramas de esfuerzos característicos en sistemas de alma llena. Dichos diagramas correspondían a posiciones fijas de las cargas aplicadas y sus ordenadas nos daban, en una cierta escala, el valor del esfuerzo característico en las distintas secciones de la estructura, para una determinada posición de las cargas.

Tratándose de cargas que pueden desplazarse a lo largo de una línea de la estructura, el problema cambia, por cuanto, para una determinada sección, el valor del esfuerzo característico variará con la posición de la carga, pudiendo adquirir valores variables y aún cambiar de signo.

Es evidente que para proceder al dimensionamiento de las secciones de una estructura, problema del que se ocupa la Resistencia de materiales, es necesario conocer, para cada sección, el máximo valor de los esfuerzos característicos que se puedan originar en los mismos.

Si en una estructura determinada calculamos para cada sección el valor máximo que puede alcanzar en la misma un esfuerzo característico cualquiera, debido al efecto de un sistema de cargas que pueden ocupar cualquier posición, y en coincidencia con cada sección representamos, a partir de un eje de referencia, mediante una ordenada, dicho valor máximo, el lugar geométrico de los extremos de dichas ordenadas constituye lo que denominamos *diagrama envolvente* del esfuerzo característico.

En lo que sigue distinguiremos los siguientes tipos de cargas:

a) *Cargas permanentes:* Cargas concentradas o distribuidas, cuya posición e intensidad permanece invariable.

b) *Cargas móviles:* Cargas concentradas, de intensidad y dirección constantes, cuyo punto de aplicación puede ocupar cualquier posición en la estructura.

c) *Cargas útiles:* Cargas distribuidas, de intensidad constante, pero cuya longitud cargada puede variar y al mismo tiempo ocupar cualquier posición.

Sentado lo anterior, pasamos a ocuparnos del trazado de diagramas envolventes de momentos flexores y esfuerzos de corte correspondientes a determinadas estructuras y tipo de cargas.

10.4.2. Diagramas envolventes de momentos flexores y esfuerzo de corte en vigas simplemente apoyadas.

a) *Caso de una única carga concentrada.*

Sea la viga simplemente apoyada de la figura 10.36, sujeta a la acción de una carga concentrada de intensidad P, normal a su eje, y supongamos que su posición quede definida por la abscisa z al origen le coordenadas, coincidente con el apoyo B.

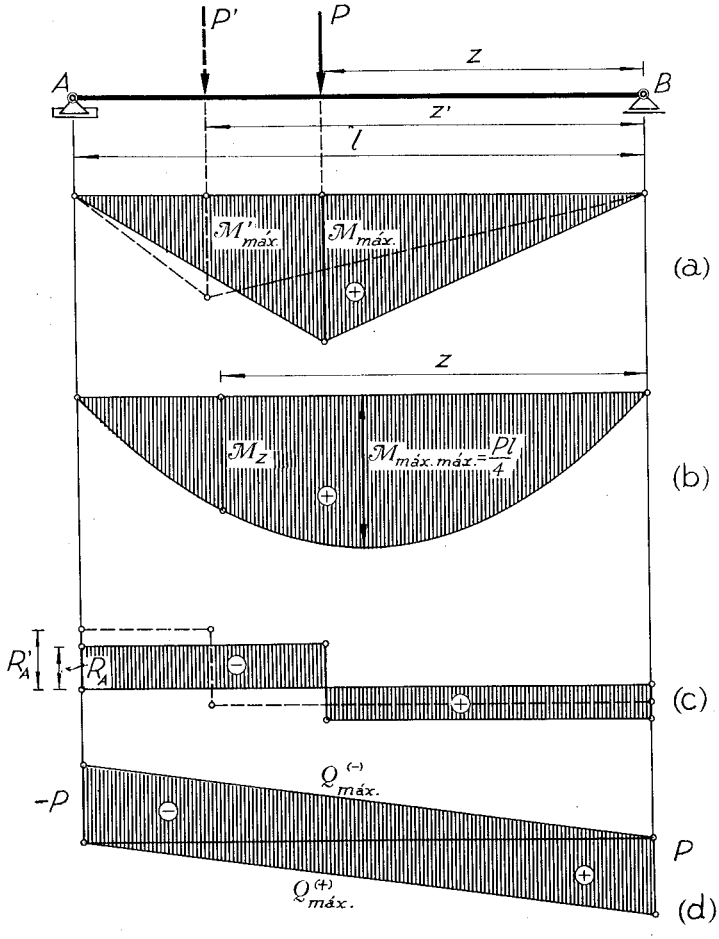


Fig. 10.36.

Para dicha posición de la carga, el diagrama de momentos flexores es triangular, con ordenadas nulas en coincidencia con los apoyos y máxima en correspondencia con el punto de aplicación P (fig. 10.36 *a*).

Si cambiamos la posición de P obtendremos un nuevo diagrama de momentos flexores, también triangular, pero cuya coordenada máxima diferirá en posición y magnitud de la anterior.

No obstante, vemos que, en cualquier caso, la ordenada máxima del diagrama coincide con el punto de aplicación de la carga, es decir, que z será la abscisa común de P y de la sección solicitada por el momento flexor de valor máximo.

Si establecemos el valor del momento flexor en la sección en que está aplicada P, en función de z, obtendremos una expresión que nos dará el valor de $\mathcal{M}_{máx}$ para cualquier sección.

La reacción de vínculo R_A tiene por expresión

$$R_A = -P\frac{z}{l}\,, \qquad [10.179]$$

y, en consecuencia, el momento flexor en una sección de abscisa z resulta

$$\mathcal{M}_z = -R\ (l-z) = P\frac{(l-z)}{l}z\,, \qquad [10.180]$$

que es la expresión del diagrama envolvente de momentos flexores en la viga simplemente apoyada, sujeta a una carga concentrada móvil P. Es una parábola de 2º grado, de ordenada nula para $z=0$ y $z=l$. El valor máximo de $\mathcal{M}_z$, que será el máximo maximórum de los momentos flexores, ocurre para la sección cuya abscisa z anula la primera derivada de [10.180]. En consecuencia, derivando la anterior e igualando a cero

$$\frac{d\mathcal{M}_z}{dz} = \frac{P}{l}(l-2z) = 0 \qquad [10.181]$$

de donde

$$z_0 = \frac{l}{2}\,, \qquad [10.182]$$

es decir que el máximo maximórum ocurre para el centro de la luz. Reemplazando este valor de z_0 en la [10.180] tenemos

$$\mathcal{M}_{máx\ máx} = \frac{Pl}{4}\,. \qquad [10.183]$$

Resumiendo, diremos que el diagrama envolvente de los momentos flexores máximos en una viga simplemente apoyada, sujeta a una carga con-

centrada móvil es una parábola de 2º grado, simétrica respecto del centro de la luz y cuya ordenada máxima vale $\frac{1}{4}\,pl$ (fig. 10.36 *b*).

En la figura 10.36 c hemos representado el diagrama de esfuerzos de corte correspondiente a la posición z de P. Al pasar ésta a ocupar la posición z', el diagrama cambia, como es dable observar, pero manteniendo siempre ordenadas de signo negativo a la izquierda de la sección en que está aplicada P, y de signo positivo a la derecha de la misma. Vemos por otra parte que siempre el diagrama se mantiene constante en valor y signo entre el apoyo izquierdo y la vertical de P; para cambiar de signo y de valor, al pasar a la derecha de la misma, manteniéndose otra vez constante hasta el apoyo derecho. En consecuencia deberemos analizar dos diagramas envolventes del esfuerzo de corte: uno pasa máximos negativos y otro pasa máximos positivos.

Para una posición de P tal como la de abscisa z, el esfuerzo de corte negativo está dado directamente por R_A, y el positivo por R_B cambiada de signo, es decir

$$\left.\begin{aligned} Q^{(-)} &= R_A = -P\frac{z}{l} \\ Q^{(+)} &= -R_B = P\frac{l-z}{l} \end{aligned}\right\} \qquad [10.184]$$

Como los valores dados por las [10.184] son los máximos que pueden ocurrir en la sección, las expresiones [10.184] corresponden a las ecuaciones de los diagramas envolventes de $Q^{(-)}_{máx}$ y $Q^{(+)}_{máx}$ respectivamente y representan dos rectas. La primera se anula para $z = 0$ y adquiere su máximo valor.

$$Q^{(-)}_{máx\ máx} = -P \qquad [10.185]$$

para $z = l$. La segunda tiene valor nulo para $z = l$ y máximo para $z = 0$

$$Q^{(+)}_{máx\ máx} = +P\,. \qquad [10.186]$$

Ambas rectas han sido representadas en la figura 10.36 *d*.

b) *Caso de dos cargas concentradas móviles.*

Sea la viga de la figura 10.37 sujeta a la acción de dos cargas concentradas que se desplazan manteniendo constante su distancia mutua.

Supongamos que $P_1 > P_2$ y que esta última actúa a la derecha de la primera. Si trazamos la línea de influencia del momento flexor en una

sección cualquiera, vemos que para obtener un máximo valor de la incógnita es necesario hacer incidir la fuerza mayor sobre la ordenada máxima y la restante sobre el tramo de menor pendiente, figura 10.37 (*a*). Llamando η_1 y η_2 a las ordenadas correspondientes a la posición mencionada tenemos

$$\mathcal{M}_z = (P_1\eta_1 + P_2\eta_2)\frac{1(\text{m})}{a(\text{cm})} \qquad [10.187]$$

siendo $1(\text{m})/a(\text{cm})$ la escala de la línea de influencia.

De la figura tenemos

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{z}{z-\lambda} \qquad [10.188]$$

de donde

$$\eta_2 = \eta_1\frac{z-\lambda}{z}. \qquad [10.189]$$

Por otra parte

$$A'A''\frac{1(\text{m})}{a(\text{cm})} = (l-z) \qquad [10.190]$$

y

$$\frac{\eta_1}{z} = \frac{A'A''}{l}. \qquad [10.191]$$

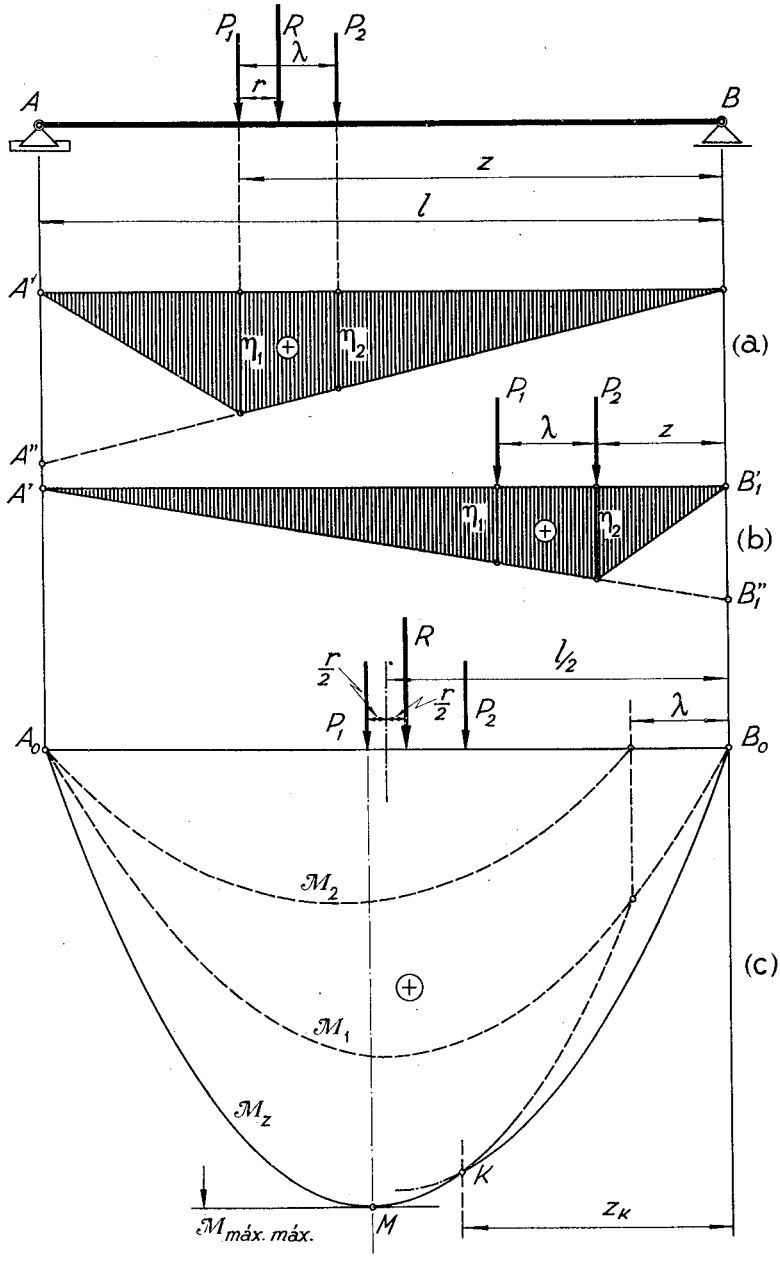
Reemplazando en [10.187]

$$\mathcal{M}_z = \left(P_1 + P_2\frac{z-\lambda}{z}\right)\eta_1\frac{1(\text{m})}{a(\text{cm})} \qquad [10.192]$$

$$\mathcal{M}_z = \left(P_1 + P_2\frac{z-\lambda}{l}\right)\frac{z}{l}(l-z) \qquad [10.193]$$

$$\mathcal{M}_z = P_1\frac{z(l-z)}{l} + P_2\frac{(z-\lambda)(l-z)}{l} \qquad [10.194]$$

La expresión [10.194] corresponde a la suma de dos parábolas. La primera, que se anula para $z=0$ y $z=l$, es simétrica respecto del centro de la luz, en que alcanza un valor máximo igual $P_1(l/4)$ y corresponde a la dada por la [10.180]. La segunda parábola se anula para $z=l$ y $z=\lambda$ y su ordenada máxima, de valor $P_2(1/4)[1-(\lambda/e)^2]$ corresponde a una abscisa $z=\frac{1}{2}(l+\lambda)$.


P1
R
P2
λ
r
A
B
z
l
A'
η1
η2
(a)
P1
P2
λ
z
A"
A'
B'1
η1
η2
(b)
B1"
R
r/2
l/2
r/2
P1
P2
λ
A0
B0
M2
(c)
M1
Mz
K
zK
Mmáx. máx.
M

Llamando R a la resultante de P_1 y P_2, y r a su distancia a la fuerza más próxima (P_1 en este caso, por ser $P_1 > P_2$) resulta

$$\left.\begin{aligned} P_2\lambda &= R.r \\ r &= \frac{P_2\lambda}{R}. \end{aligned}\right\} \qquad [10.195]$$

El valor máximo de $\mathcal{M}_z$ lo obtenemos igualando a cero la derivada de [10.194]:

$$P_1(l - 2z) + P_2(l + \lambda - 2z) = 0 \qquad [10.196]$$

de donde

$$(P_1 + P_2)\, l + P_2\lambda = 2z(P_1 + P_2)\,. \qquad [10.197]$$

Pero $P_1 + P_2 = R$ y $P_2\lambda = R.r$; luego reemplazando

$$Rl + R.r = 2zR \qquad [10.198]$$

de donde

$$z = \frac{l + r}{2}. \qquad [10.199]$$

La expresión [10.199] nos dice que el valor máximo de $\mathcal{M}_z$ expresado por la [10.194] ocurre cuando las fuerzas están ubicadas en una posición tal que la resultante R y la fuerza mayor equidistan del centro de la viga.

Dicho valor máximo, que corresponde al máximo maximórum, lo obtenemos reemplazando en [10.194] el valor de z dado por la [10.199]:

$$\mathcal{M}_{\text{máx máx}} = \left[P_1 + P_2\left(1 - \frac{2\lambda}{l + r}\right)\right]\frac{l^2 - r^2}{4l}. \qquad [10.200]$$

En la figura 10.37 (c) hemos representado las dos parábolas de la expresión [10.184] y su suma. Observemos que para valores $z < \lambda$, la fuerza P_2 sale fuera de la viga. En consecuencia, debemos analizar la posición que corresponde a la fuerza P_2 actuando sobre la sección. Es evidente que, en este caso, la situación será más desfavorable sólo para secciones cercanas al apoyo B. Consideremos, en consecuencia, la línea de influencia de la figura 10.37 (*b*), actuando P_2 en coincidencia con la ordenada máxima.

El valor del momento flexor será, como antes,

$$\mathcal{M}'_z = (P_1\,\eta_1 + P_2\,\eta_2)\,\frac{1(\mathrm{m})}{a(\mathrm{cm})}, \qquad [10.201]$$

pero de la figura tenemos

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2\left(1 - \frac{\lambda}{l-z}\right) \\ B'_1B''_1\,\frac{1(\mathrm{m})}{a(\mathrm{cm})} &= z \\ \eta_2 \cdot \frac{1(\mathrm{m})}{a(\mathrm{cm})} &= \frac{l-z}{l}\cdot z \end{aligned}\right\} \qquad [10.202]$$

de donde, reemplazando y efectuando operaciones, llegamos finalmente a

$$\mathcal{M}'_z = P_1\left[\frac{z(l-\lambda) - z^2}{l}\right] + P_2\,\frac{(l-z)z}{l} \qquad [10.203]$$

expresión que corresponde también a la suma de dos parábolas, y que proporciona los valores máximos del momento flexor en la zona en que sus ordenadas resultan mayores que los obtenidos mediante la [10.194].

Para delimitar la zona de validez de ambas expresiones, las igualamos para determinar así la absica z en que $\mathcal{M}'_z = \mathcal{M}_z$, llegando final mente a

$$z_K = \frac{P_2}{P_1 + P_2}\,l \qquad [10.204]$$

como valor de la abscisa que define el punto K de intersección de ambas curvas. El máximo maximórum de la expresión [10.203] no interesa, por ser inferior al de la [10.194].

En la figura 10.37(c) hemos representado el arco de parábola que interesa, entre K y B_0 resultando finalmente como diagrama envolvente de momentos flexores máximos la curva compuesta A_0MKB_0.

Como caso particular, interesa el que corresponde a dos fuerzas de igual intensidad. Si $P_1 = P_2 = P$, las [10.194] y [10.203] se transforman respectivamente en

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_z &= \frac{P}{l}\,(l-z)(2z-\lambda) \\ \mathcal{M}'_z &= \frac{Pz}{l}\,[2(l-z) - \lambda] \end{aligned}\right\} \qquad [10.205]$$

expresiones que corresponden a dos parábolas simétricas, cuyos máximos ocurren para $z = (l + r)/2$ en la primera, y $z = (l - r)/2$ en la segunda. Teniendo para ambas en cuenta que $r = \lambda/2$:

$$\mathcal{M}_{máx} = \mathcal{M}'_{máx} = \frac{P}{2l}[l - (\lambda/2)]^2 . \qquad [10.206]$$

Consideraremos a continuación el trazado de los diagramas envolventes de esfuerzos de corte, y supondremos como antes $P_1 > P_2$, separadas de una distancia λ.

Trazada la línea de influencia del esfuerzo de corte en una sección genérica ubicada a una distancia z del extremo B de la viga, vemos que el mismo tiene dos signos. En consecuencia debemos proceder al análisis de dos diagramas envolventes: $Q^{(-)}_{máx}$ y $Q^{(+)}_{máx}$.

Como puede observarse en la figura, el máximo esfuerzo de corte negativo en la sección considerada, ocurre cuando la fuerza P_1 incide a una distancia infinitamente próxima a la derecha de la sección, teniéndose

$$Q_z = -(P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2) \frac{1}{a(\text{cm})} . \qquad [10.207]$$

De la figura resulta

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 &= \eta_1 \frac{z - \lambda}{z} \\ \eta_1 \frac{1}{a(\text{cm})} &= \frac{z}{l} \end{aligned}\right\} \qquad [10.208]$$

de donde, reemplazando

$$Q_z = -P_1 \frac{z}{l} - P_2 \frac{z - \lambda}{l} , \qquad [10.209]$$

expresión que corresponde a la suma de dos rectas. La primera de ellas

$$Q'_z = -P_1 \frac{z}{l} \qquad [10.210]$$

se anula para $z = 0$ y su ordenada máxima $Q'_z = -P$, corresponde a $z = l$. La segunda

$$Q''_z = -P_2 \frac{z - \lambda}{l} \qquad [10.211]$$

se anula para $z = \lambda$ y alcanza su valor máximo $Q''_z = -P_2 \frac{l - \lambda}{l}$ para $z = l$.

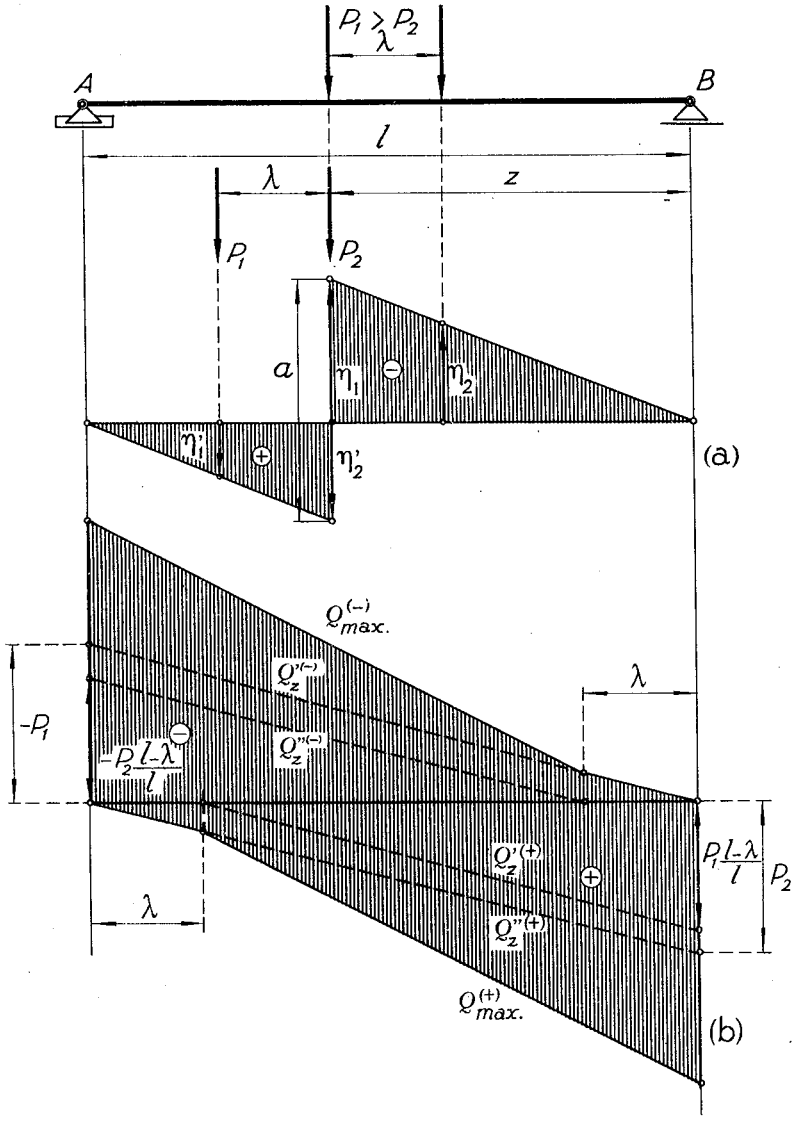


Fig. 10.38.

En la figura 10.38 (*b*) hemos representado las dos rectas, así como también la suma de ambas, que constituye el diagrama envolvente de $Q^{(-)}_{máx}$.

Para obtener el diagrama envolvente de $Q^{(+)}_{máx}$, debemos cargar la parte positiva de la línea de influencia, haciendo incidir la fuerza P_2 a

una distancia infinitamente pequeña a la izquierda de la sección. Tenemos así:

$$Q_z = (P_1\,\eta'_1 + P_2\,\eta'_2)\frac{1}{a(\text{cm})} \qquad [10.212]$$

Pero de la figura resulta

$$\left.\begin{aligned} \eta'_1 &= \eta'_2\,\frac{l-z-\lambda}{l-z} \\ \frac{\eta'_2}{l-z} &= \frac{a(\text{cm})}{l} \end{aligned}\right\} \qquad [10.213]$$

y, en consecuencia, reemplazando en [10.212]

$$Q_z = P_1\frac{l-z-\lambda}{l} + P_2\frac{l-z}{l} \qquad [10.214]$$

La [10.214] corresponde a la suma de dos rectas:

$$\left.\begin{aligned} Q'_z &= P_1\frac{l-z-\lambda}{l} \\ Q''_z &= P_2\frac{l-z}{l} \end{aligned}\right\} \qquad [10.215]$$

La primera se anula para $z = l - \lambda$ y alcanza su valor máximo $P_1\frac{l-\lambda}{l}$ para $z = 0$. La segunda, en cambio, se anula para $z = l$ y es máxima también para $z = 0$.

En la figura 10.38 (*b*) hemos representado ambas rectas, así como también su suma, con la que queda completado el trazado de los diagramas envolventes.

c) *Caso de carga útil uniformemente distribuida.*

Consideremos la viga simplemente apoyada de la figura 10.39 y supongamos que sobre la misma actúa una carga útil de intensidad p.

Trazada la línea de influencia del momento flexor en una sección genérica de abscisa z, vemos que para que $\mathcal{M}_z$ sea máximo, es necesario cargar la totalidad de la línea de influencia con la carga p.

Llamando F al área de la superficie de la línea de influencia resulta

$$\mathcal{M}_z = p.F\,. \qquad [10.216]$$

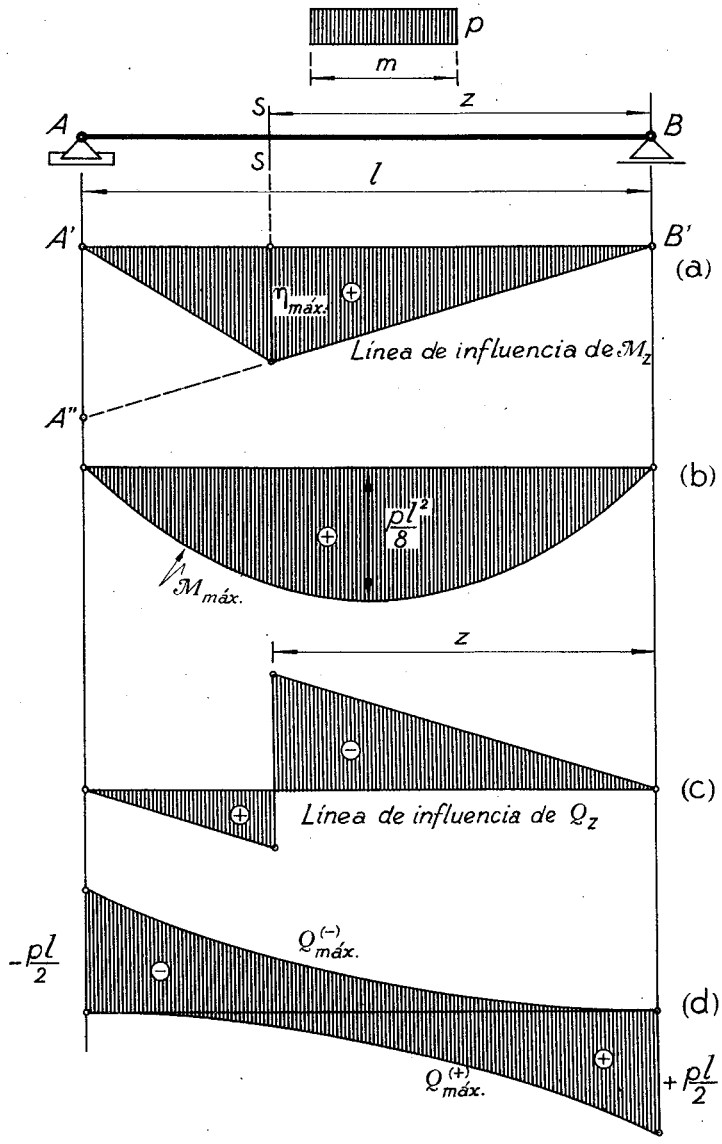


Fig. 10.39.

Pero

$$F = \tfrac{1}{2}\, l \eta_{máx} \qquad [10\ 217]$$

debiendo leerse $\eta_{máx}$ en la escala de la línea de influencia, que resulta ser $(l - z)/A'A''$. Por otra parte, tenemos

$$A'A'' = \eta_{máx} \frac{l}{z} \qquad [10.218]$$

de donde, reemplazando,

$$F = \tfrac{1}{2}\, l.\eta_{máx} \frac{l-z}{A'A''} = \tfrac{1}{2}(l-z)\, z \qquad [10.219]$$

y finalmente

$$\mathcal{M}_z = p \frac{z}{2} (l-z) \qquad [10.220]$$

ecuación de una parábola de segundo grado, que se anula para $z = 0$ y $z = l$ y cuyo valor máximo para $z = (l/2)$ es

$$\mathcal{M}_{máx\ máx} = \frac{pl^2}{8} . \qquad [10.221]$$

Es decir, que el diagrama envolvente de los máximos momentos flexores de una viga simplemente apoyada sujeta a la acción de una carga útil P, coincide con el diagrama de momentos flexores de la misma viga, cargada con dicha carga en la totalidad de su longitud.

Para el trazado del diagrama envolvente de esfuerzos de corte, procedemos a analizar previamente la línea de influencia de dicho esfuerzo característico (fig. 10.39 c). Vemos que la misma tiene dos signos. En consecuencia, habrá dos diagramas envolventes, uno para los máximos positivos y otro para los negativos.

Para la determinación de las ecuaciones correspondientes podemos proceder de dos maneras: cargando la línea de influencia, o bien en la forma que describimos a continuación:

Observando la línea de influencia, vemos que para obtener en la sección considerada $Q^{(-)}_{máx}$, debemos cargar la totalidad de la línea de influencia de signo negativo, es decir, la parte de la viga comprendida entre la sección considerada y el apoyo B. En tal caso, el esfuerzo de corte está dado directamente por la correspondiente reacción R_A:

$$Q_z = -R_A = -\frac{p z^2}{2 l} \qquad [10.222]$$

expresión de una parábola de 2º grado, de ordenada nula, en correspondencia con $z = 0$ y máxima, de valor $-(pl/2)$, para $z = l$. Por otra parte, como es fácil observar, dicha parábola es tangente al eje de referencia en $z = 0$.

Análogamente, el máximo esfuerzo de corte positivo en la sección lo obtenemos cargando únicamente la parte de la línea de influencia de signo positivo, es decir, entre el apoyo A y la sección considerada. En tal caso, el esfuerzo de corte es directamente la reacción R_B cambiada de signo, es decir

$$Q'_z = -R_B = \frac{p(l-z)^2}{2l} . \qquad [10.223]$$

Esta expresión corresponde a una segunda parábola, antimétrica de la anterior respecto del eje de referencia. La misma tiene ordenada nula en correspondencia con $z = l$ y alcanza su máximo valor $+ p\frac{l}{2}$ para $z = 0$. En la figura 10.39 (d) hemos representado ambas parábolas, que constituyen los diagramas envolventes $Q^{(+)}_{máx}$ y $Q^{(-)}_{máx}$.

10.4.3. Diagramas envolventes de momentos flexores y esfuerzos de corte en vigas empotradas.

a) *Caso de una carga concentrada móvil.*

Consideremos la viga empotrada de la figura 10.40, sujeta a la acción de una carga concentrada móvil P, y traemos la línea de influencia del momento flexor en una sección genérica ubicada a una distancia z del empotramiento.

Del análisis de la misma vemos que, para que el momento flexor en s-s sea máximo, es necesario que la fuerza P incida en el extremo de la viga, en correspondencia de la ordenada máxima de la línea de influencia. La expresión del momento flexor será, en consecuencia:

$$\mathcal{M}_z = -P(l-z) \qquad [10.224]$$

ecuación de una recta que representa el diagrama envolvente de $\mathcal{M}_{máx}$, por cuanto nos da el mayor valor que puede alcanzar el momento flexor en cualquier sección, por efecto de P. Dicha recta, de ordenada nula para $z = l$ y máxima igual a $-Pl$, para $z = 0$, ha sido representada en la figura 10.40 (b).

En cuanto al diagrama envolvente de esfuerzos de corte máximos, observemos que para cualquier sección, el esfuerzo de corte está dado directamente por la proyección de la resultante izquierda, que en este caso se reduce a P, la que por ser normal al eje de la viga, se proyecta en verdadera magnitud. Tendremos así:

$$Q_{máx} = C^{te.} = P \qquad [10.225]$$

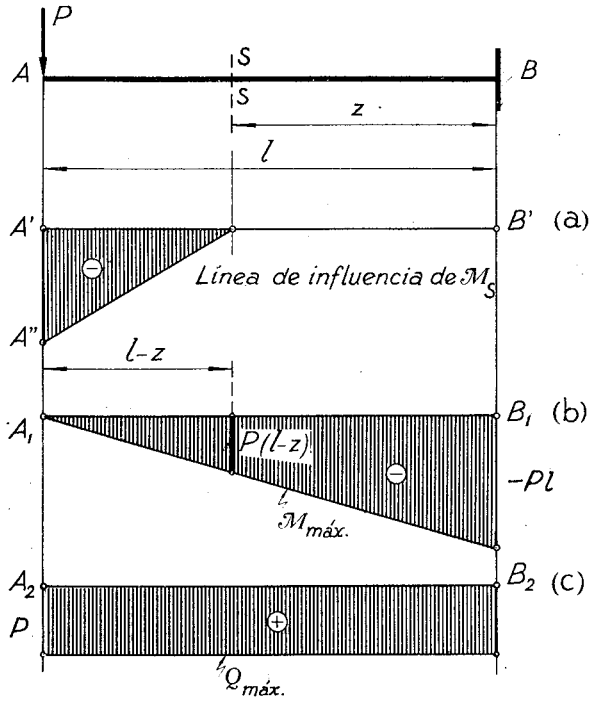


Fig. 10.40.

y el diagrama se reduce a una recta paralela al eje de referencia, que define una ordenada constante igual a P, figura 10.40 (c).

b) *Caso de dos cargas concentradas móviles.*

Supondremos dos cargas $P_1 > P_2$, separadas de λ, que pueden ocupar cualquier posición en la viga de la figura 10.41.

Para una sección s-s ubicada a una distancia z de B, la línea de influencia del momento flexor es igual a la de la figura 10.40, y de su análisis vemos que la posición del conjunto de cargas que conduce a un máximo valor del momento flexor en la sección considerada, es aquella para la cual las fuerzas inciden en correspondencia con las ordenadas máximas de la línea de influencia, es decir, P, ubicada en el extremo de la viga. Para dicha posición de las cargas, el momento flexor en s-s vale:

$$\mathcal{M}_z = -P_1(l - z) - P_2(l - \lambda - z) \qquad [10.226]$$

La [10.226] representa la suma de las ecuaciones de dos rectas:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}'_z &= -P_1(l-z) \\ \mathcal{M}''_z &= -P_2(l-\lambda-z)\ ; \end{aligned}\right\} \qquad [10.227]$$

La primera de ellas tiene ordenada nula, en correspondencia con $z = l$, y alcanza un valor máximo de $-P_1 l$ para $z = 0$.

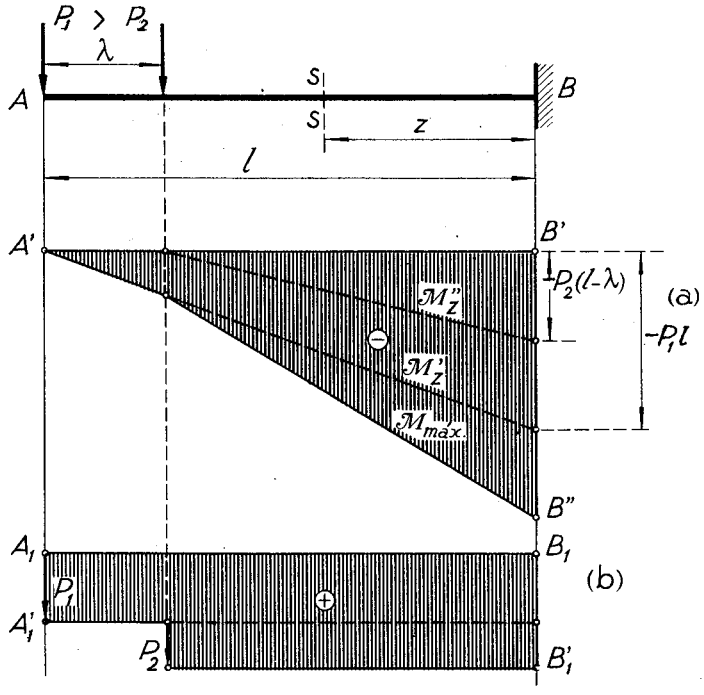


Fig. 10.41.

La segunda también es máxima para $z = 0$, donde vale $-P_2(l-\lambda)$, pero se anula para $z = l - \lambda$. En la figura 10.41 (*a*) hemos representado ambas rectas, así como su suma, que corresponde al diagrama envolvente de momentos flexores.

En lo que respecta al diagrama envolvente de esfuerzos de corte, si no existiese la fuerza P_2, el diagrama correspondiente a P_1 sería el mismo de la figura 10.40. Ahora bien, al sumarse P_2 su efecto sólo influye en las secciones ubicadas a la derecha de su punto de aplicación, porque para ellas P_2 entra a formar parte de la resultante izquierda, cuya proyección sobre el plano de la sección determina en valor y signo

el esfuerzo de corte. En cambio, para aquellas secciones ubicadas entre ambas fuerzas, la resultante izquierda se reduce a P_1.

De ahí que el diagrama envolvente de $Q_{máx}$ se obtenga como suma de los correspondientes a P_1 y P_2, que serán rectas paralelas al eje de referencia, válida la primera en toda la luz de la viga, y la segunda únicamente entre el empotramiento y la sección en que actúa P_2 cuando P_1 lo hace en el extremo. En la figura 10.41 (*b*) se ha representado el diagrama suma, es decir el diagrama envolvente de $Q_{máx}$.

c) *Caso de carga distribuida útil.*

Del análisis de la línea de influencia del momento flexor en *s-s* de la figura 10.40, llegamos a la conclusión de que, para que $\mathcal{M}_z$ sea máximo, es necesario cargar la totalidad de la línea de influencia, es decir, la longitud $(l - z)$ medida desde el extremo A de la viga. En consecuencia, el valor del momento flexor en *s-s* será, si p es la intensidad de la carga:

$$\mathcal{M}_z = -\tfrac{1}{2}\, p(l - z)^2 \,, \qquad [10.228]$$

ecuación del diagrama envolvente de $\mathcal{M}_{máx}$, que será una parábola de 2º grado. Dicha parábola tiene ordenada nula en correspondencia con $z = l$, donde, además, su tangente coincide con el eje de referencia, es decir, es horizontal en este caso. Su valor máximo

$$\mathcal{M}_{máx\,máx} = -\frac{pl^2}{2} \qquad [10.229]$$

corresponde a $z = 0$, es decir en el empotramiento. La curva ha sido representada en la figura 10.42 (*a*). Hacemos notar que el diagrama envolvente coincide con el diagrama de momentos flexores de la viga totalmente cargada.

Para determinar la ecuación que define el diagrama envolvente de $Q_{máx}$, observemos que para la sección *s-s*, Q será máximo cuando lo sea la resultante izquierda de dicha sección y para que ello ocurra es necesario que la carga útil actúe desde el extremo A hasta la sección considerada. En consecuencia, tendremos

$$Q_z = +p(l - z) \qquad [10.230]$$

ecuación de una recta de ordenada nula para $z = l$, es decir, en el extremo A y máxima igual a pl, para $z = 0$, y que corresponde al diagrama envolvente de $Q_{máx}$, representado en la figura 10.42 *b*.

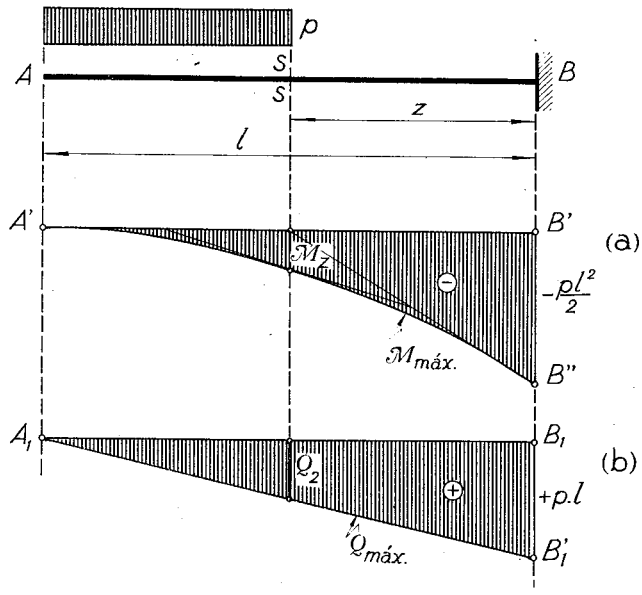


Fig. 10.42.

10.4.4. Diagramas envolventes de $\mathcal{M}_{máx}$ y $Q_{máx}$ para una viga con extremos en voladizo.

Sea la viga de la figura 10.43, que supondremos cargada con una carga permanente uniformemente distribuida, de intensidad g, y una carga útil p.

El trazado de los diagramas envolventes de $\mathcal{M}_{máx}$ y $Q_{máx}$ exige considerar independientemente las dos cargas.

La carga permanente g actúa siempre y sobre toda la extensión de la viga. En consecuencia, conducirá a un único diagrama envolvente, representado en la figura 10.43 (a), y sobre cuyo trazado no entraremos en mayores detalles, pues corresponde directamente al diagrama de momentos flexores de la viga totalmente cargada, tema exhaustivamente tratado en el Capítulo 8. La situación es distinta cuando entramos a considerar la carga útil.

En la figura 10.43 (b) hemos trazado la línea de influencia del momento flexor en una sección cualquiera del tramo de viga entre apoyos y vemos que la misma tiene dos signos. En consecuencia, para obtener un valor máximo del momento flexor positivo en una sección ubicada entre apoyos, es necesario cargar exclusivamente la parte de viga compren-

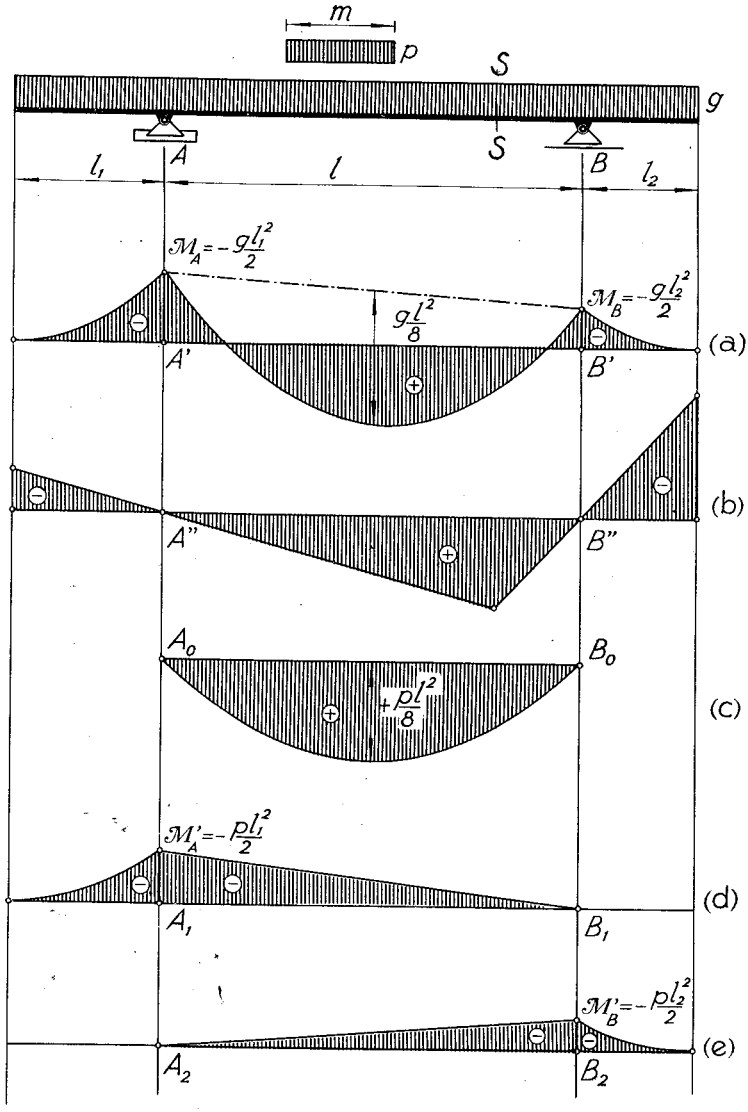


Fig. 10.43.

dida entre los mismos, mientras que si se cargan los extremos en voladizo, se obtendrá el máximo momento negativo en la sección considerada.

En la figura 10.43 (c), (*d*) y (e) hemos representado los diagramas de momentos flexores correspondientes a los casos mencionados, es decir cuando se encuentran cargados el tramo entre apoyos y los dos voladizos, independientemente.

Para trazar los diagramas envolventes correspondientes a los voladizos, podemos considerar cada uno de ellos como una viga empotrada por su sección extrema. En consecuencia, será necesario, como hemos visto antes, cargar la totalidad del tramo en voladizo para obtener el correspondiente diagrama envolvente. Dichos diagramas aparecen en la figura 10.43 (*d*) y (*e*).

Estamos ahora en condiciones de proceder al trazado del diagrama envolvente definitivo, que involucra los efectos de g y p, lo que hemos efectuado en la figura 10.44.

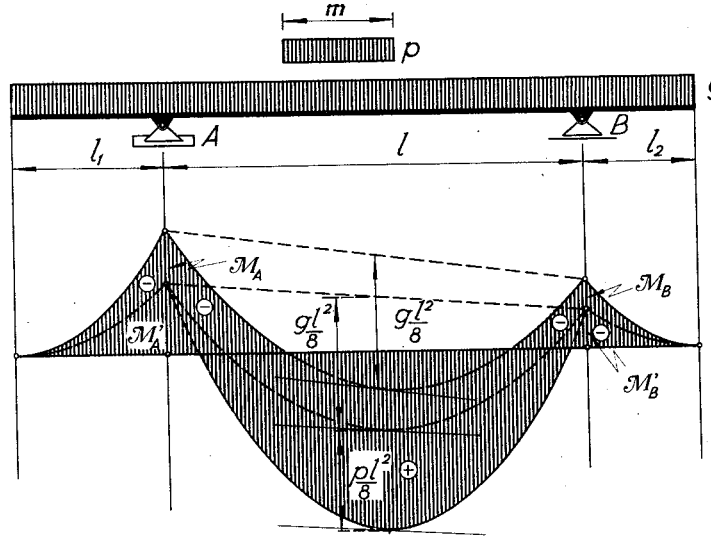


Fig. 10.44.

Para obtener el diagrama envolvente de $\mathcal{M}^{(+)}_{máx}$ en el tramo AB hemos combinado los diagramas (*a*) y (*c*) de la figura 10.43, utilizando únicamente la parte de la parábola ubicada por debajo del eje de referencia.

Combinando los diagramas (*a*), (*d*) y (*e*) obtenemos los envolventes para los voladizos, y los correspondientes a $\mathcal{M}^{(-)}_{máx}$ en el tramo AB.

Pasamos a ocupar ahora el trazado de los diagramas envolventes de $Q_{máx}$.

En primer término debemos considerar el efecto de la carga g. Por tratarse de una carga permanente, el correspondiente diagrama envolvente será directamente el diagrama de esfuerzo de corte de la viga totalmente cargada con g, figura 10.45 (*a*).

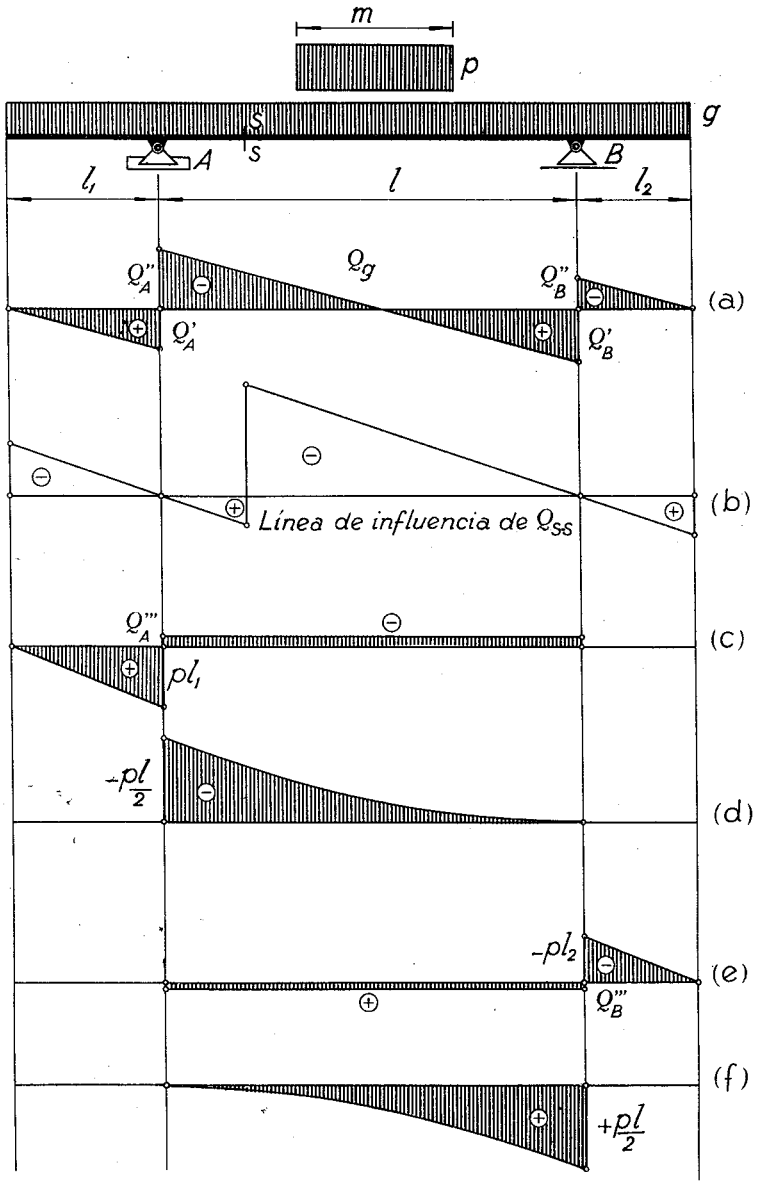

m
p
g
S
s
A
B
l_1
l
l_2
Q''_A
Q_g
Q''_B
(a)
Q'_A
Q'_B
(b)
Línea de influencia de Q_{SS}
Q'''_A
(c)
pl_1
$-\frac{pl}{2}$
(d)
$-pl_2$
(e)
Q'''_B
(f)
$+\frac{pl}{2}$

Fig. 10.45.

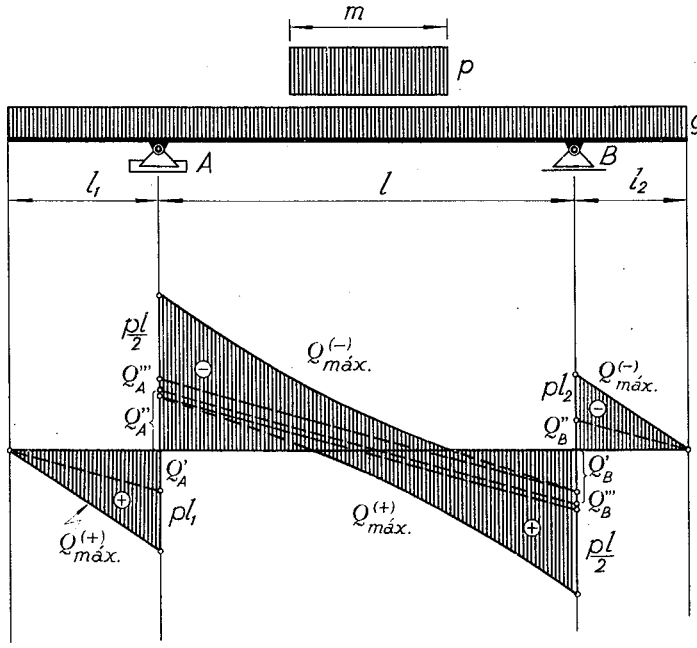


Fig. 10.46.

Tracemos ahora la línea de influencia del esfuerzo de corte en una sección cualquiera del tramo AB, figura 10.46 (b). El análisis de la misma nos dice que debemos considerar dos diagramas envolventes para dicho tramo, de $Q^{(-)}_{máx}$ y de $Q^{(+)}_{máx}$. Para que Q alcance un valor máximo negativo en una sección cualquiera, es necesario cargar las partes negativas de la línea de influencia, es decir, el voladizo izquierdo y la parte negativa entre A y B.

Cargando el voladizo izquierdo, el correspondiente diagrama de esfuerzos de corte es el que muestra la figura 10.45 c.

En cuanto al diagrama envolvente correspondiente a la parte central, cuando no están cargados los voladizos, es la parábola que muestra la figura 10.45 d, deducida al estudiar la viga simplemente apoyada sujeta a la acción de una carga útil.

Para el diagrama envolvente correspondiente a $Q^{(+)}_{máx}$ en el tramo entre apoyos, de acuerdo con lo indicado por la línea de influencia debemos cargar totalmente el voladizo derecho y la parte de ordenadas positivas de la línea de influencia entre A y B. Obtendremos así los diagramas de la figura 10.45 e y f, similares a los anteriores.

En cuanto a los diagramas envolventes de los tramos en voladizo, el del izquierdo será una recta, que corresponde al diagrama de esfuerzos

de corte del voladizo totalmente cargado, ya representado en la figura 10.45 c, ocurriendo lo mismo con el voladizo derecho, cuyo diagrama envolvente aparece en la figura 10.45 e.

Finalmente, el diagrama envolvente resultante es el de la figura 10.46, obtenido por suma de los siguientes diagramas:

a) Para los tramos en voladizo; los diagramas correspondientes de (*a*), (*c*) y (*d*).

b) Para los máximos negativos en el tramo ***AB***, los diagramas correspondientes de (*a*), (*c*) y (*e*).

c) Para los máximos positivos en el tramo ***AB***, los diagramas correspondientes de (*a*), (e) y (*f*).

Los diagramas suma de los casos (*b*) y (c) serán válidos en las zonas en que sus ordenadas sean respectivamente negativas o positivas.

Índice alfabético.

acción y reacción, principio de, 10.
alma llena, sistemas espaciales, 469.
—, sistemas planos de, 389.
ángulos, derechos, 376.
— izquierdos, 376.
anillo de base, condición de rigidez, 371.
apoyo, doble, 268.
— ficticio, 272.
— fijo, 268.
— fijo espacial, 325.
— lineal, 324.
— móvil, 268.
— simple, 268.
— superficial, 323.
— triple, 268.
arco a tres articulaciones, 297.
articulación, 268.
— espacial, 325.
— relativa, 286.
articulaciones relativas, 527.

Baumann, método de, 211.
baricentro, definición, 172.
baricentros, de líneas, 173.
— de líneas, determinación, 177.
— de superficies, 173.
— de superficies, determinación, 182.
biela, 262.
bielas, 269.
Bow, notación, 363.
brazo de palanca, 11.

cadenas, cinemáticas abiertas, 286.
— cinemáticas cerradas, 309.
— cinemáticas cerradas, determinación de polos, 537.
— cinemáticas, desplazamientos, 518.
cinemáticas, diagramas de Williot-Mohr, 522.
— de más de tres chapas, 308.
— de tres chapas, 303.
carga, móvil, 631.
— distribuida móvil, influencia de, 587.
— móvil, sistemas planos, 569.
— permanente, 631.
— útil, 631.
cargas, indirectas, 439.
— indirectas, influencia de, 578.
— mixtas, diagramas de características, 442.
centro, de fuerzas paralelas, 103.
— de fuerzas paralelas en el espacio, 165.
— de momentos, 11.
— de reducción, 148.
cinemática plana, complementos, 483.
circunferencia de Mohr, 228.
coeficiente de influencia, 570.
complementos de cinemática plana, 483.
composición, de fuerzas, 27, 44, 93, 109, 112.
— de par y fuerza, 20.
— de rotaciones infinitésimas, 502.
— de rotaciones y traslaciones, 511.
condición de rigidez, anillo de base, 371.
—, reticulado espacial vinculado, 371.

condición de rigidez, reticulado libre espacial, 369.
—, reticulados planos, 340.
condiciones de equilibrio, sistemas espaciales, 128, 158.
—, sistemas planos, 40, 65, 76.
condiciones de vínculo, 264.
convención de signos en pórticos, 444.
corrimiento relativo, 513.
corrimientos, 483.
—, argumento, 485.
—, diagrama cartesiano, 494.
—, escala, 500.
cuarto principio de la Estática, 10.
cúpula Schwedler, 378.
curva funicular, determinación analítica, 249.
—, ecuación diferencial, 257.
—, tensión, 259.
—, trazado gráfico, 247.

chapas, concepto, 261.
—, desplazamientos, 265.
—, desplazamientos finitos, 486.
—, desplazamientos infinitésimos, 488.
—, desplazamientos relativos, 516.
—, vinculadas, equilibrio, 273.

descomposición de fuerzas, 29.
— de fuerzas, aplicación del polígono funicular, 91.
— de fuerzas paralelas en el plano, 97.
— de fuerzas, solución analítica, 39.
— de rotaciones infinitésimas, 509.
— de una fuerza en seis componentes espaciales, 161.
— de una fuerza en tres componentes, 32.
— de una fuerza en tres componentes concurrentes y no coplanares, 122.
desplazamiento idéntico, 520.
desplazamientos, del punto material, 483.
— finitos de chapas, 486.
— infinitésimos de chapas, 488.
— relativos de chapas, 516.
— virtuales, 544.
determinación, analítica de reacciones de vínculo, 280.
— gráfica de reacciones de vínculo, 277.
diagrama, de características en pórticos, método numérico, 466.
— de Maxwell-Cremona, 359.
— de Williot-Mohr, 491.
— de Williot-Mohr, cadenas cinemáticas, 522.
— envolvente de momentos flexores, 632, 634, 641, 644, 645, 647, 648.
— polar de corrimientos, 491.
diagramas, cartesianos de corrimientos, 494.
— de características, cargas mixtas, 442.
— de características en pórticos, solución gráfico-numérica, 457.
— de características en pórticos, trazado gráfico, 445.
— de características en vigas, trazado, 396.
— de características, relaciones analíticas, 408.
— de corrimientos, cadenas cinemáticas, 524.
— de corrimientos, casos particulares, 533.
— envolventes, concepto, 631.
— envolventes de esfuerzos de corte, 632, 634, 641, 644, 645, 647, 648.
— envolventes en vigas simples, 632.
distancia polar, 61.

eje central, 131.
ejes, conjugados de inercia, 201.
— polares, 47, 131.
— principales de inercia, 201, 202.
elaciones, 494.
empotramiento, 268.
— espacial, 326.
—, reacción, 279.
equilibrio, condiciones analíticas, fuerzas concurrentes en el espacio, 128.

equilibrio, condiciones analíticas, fuerzas gausas, 158.
— de fuerzas concurrentes en el plano, solución gráfica, 33.
— de fuerzas paralelas en el plano, 97.
— de fuerzas paralelas en el plano, solución analítica, 101.
— de sistemas planos concurrentes, solución analítica, 40.
— de sistemas planos no concurrentes, 65.
escala, de corrimientos, 500.
— de Culmann, 209.
— de fuerzas, 2.
— de Mohr, 210.
— de momentos, 62.
— de la circunferencia de Mohr, 230.
esfuerzo de corte, definición, 391.
— línea de influencia, 611, 624.
esfuerzo normal, definición, 391.
—, líneas de influencia, 611, 623.
esfuerzos, característicos, definición, 391.
— característicos, determinación, 391.
— característicos, diagramas, 396.
— característicos, líneas de influencia, 608, 622.
— de corte, diagramas envolventes, 632, 634, 641, 644, 645, 647, 648.
— de corte en pórticos, 454.
— en barras, casos especiales en reticulados espaciales, 384.
— en barras, determinación analítica, 358.
— en barras, líneas de influencia, 595.
— en barras, método de Culmann, 347.
— en barras, método de Ritter, 350.
— en barras, reticulados espaciales, método de Culmann, 382.
— en barras, reticulados espaciales, método de Henneberg, 382.
— en barras, reticulados espaciales, método de Ritter, 382.
— en barras, reticulados espaciales, solución analítica, 380.
esfuerzos, en barras, reticulados planos, método de Henneberg, 366.
— normales en pórticos, 456, 465.
excentricidad, 395.

fuerza, concepto, 1.
—, representación, 2.
—, trabajo de una, 545.
fuerzas, concurrentes en el espacio, composición analítica, 112.
— concurrentes en el espacio, composición gráfica, 109.
— concurrentes en el espacio, equilibrio y descomposición, 111.
— concurrentes en el plano, 27.
— distribuidas, 242.
— distribuidas sobre líneas resultantes, 245.
— no concurrentes en el espacio, reducción, 147.
— no concurrentes en el plano, 44.
— opuestas, trabajo, 548.
— paralelas distribuidas sobre una línea, 243.
— paralelas en el espacio, reducción analítica, 142.
— paralelas en el espacio, resultante, 141.
— paralelas en el plano, determinación analítica de la resultante, 99.
— paralelas en el plano, reducción, 93.
—, polígono de, 28.
—, representación gráfica, 21.
—, signo del vector representativo, 23.
—, traslación, 19.
—, triángulo de, 6.

grado de hiperestaticidad, 273.
grados, de libertad, 262.
— de libertad de una chapa en el plano, 263.
— de libertad del punto material en el espacio, 320.

grados, de libertad del punto material en el plano, 262.
— de libertad del sólido en el espacio, 321.

Henneberg, método de, 366.
—, método de, reticulados espaciales, 382.
hiperestático, sistema, 273.
hipostático, sistema 273.

incógnita, desplazamiento correspondiente, 615.
incógnitas, poner en evidencia, 554.
inercia, momento de, 193.
—, momento de, figuras compuestas, 225.
— polar, momento de, 193, 197.
influencia, carga concentrada, 576.
—, carga distribuida móvil, 587.
—, carga lineal, 574.
—, carga uniforme, 572.
—, cargas indirectas, 578.
—, coeficiente, 570.
—, líneas de, 569.
—, sistema de cargas móviles, 580.
intensidad de carga, 242.
invariante, escalar, 150.
— vectorial, 149.
isostático, sistema, 273.

línea de influencia, definiciones, 569.
—, determinación analítica, 589.
—, esfuerzo de corte, 611, 624.
—, esfuerzo normal, 611, 623.
—, esfuerzos característicos, 608, 622.
— esfuerzos en barras, 595, 619.
—, método cinemático, 614.
—, momento flexor, 608, 622.
—, reacciones de empotramiento, 622.
—, reacciones de vínculo, 590, 616.
—, reglas de signos, 615.

Maxwell-Cremona, diagrama, 359.
método de, Baumann, momento de inercia, 211.
— Culmann, 80.
— Culmann, momento de inercia, 207.
— Culmann, reticulados espaciales, 382.
— Culmann, reticulados planos, 347.
— Henneberg, reticulados espaciales, 382.
— Henneberg, reticulados planos, 366.
— Mohr, momento de inercia, 209.
— Ritter, 82.
— Ritter, reticulados espaciales, 382.
— Ritter, reticulados planos, 366.
momento, centrífugo, 192.
— centrífugo, triángulo, 221.
— de inercia, 193.
— de inercia, figuras compuestas, 225.
— de inercia polar, 193-197.
—, determinación gráfica, 61.
— estático de una fuerza, 10.
— estático de masa, determinación gráfica, 169.
— estático de una masa respecto de un eje, 167.
— estático, representación vectorial, 12.
—, expresión analítica, 24.
— flexor, definición, 391.
— flexor, línea de influencia, 608, 622.
— respecto de ejes, 115.
— respecto de ejes, expresión analítica, 120.
momentos, de inercia de figuras irregulares, 206, 222.
— de inercia, figuras geométricas, 213.
— de inercia, método de Baumann, 211.
— de inercia, método de Culmann, 207.
— de inercia, método de Mohr, 209.
— de 2º orden, 191.
— de 2º orden, ejes oblicuos, 204.
— de 2º orden, fórmulas de giro de ejes, 199.
— de 2º orden, fórmulas de traspaso de ejes, 199.

momentos, flexores, diagramas envolventes, 632, 634, 641, 644, 645, 647, 648.
— flexores en pórticos, 445, 457.
— flexores en vigas, 391.

notación de Bow, 363.

Pappus, teoremas de, 189.
par, de fuerzas, 14, 64.
— de reducción, 149.
—, proyección sobre un eje, 24.
— resultante, 16.
—, trabajo de un, 547.
pares, en el espacio, composición, 135.
— en el espacio, composición analítica, 137.
— en el espacio, condiciones de equilibrio, 139.
— en el espacio, representación vectorial, 136.
— en el plano, propiedades, 14, 15.
— en el plano, representación vectorial, 18.
plano, transformación biunívoca, 495.
polígono, de fuerzas, 28.
— de presiones, 393.
— de rotaciones, 508.
— funicular, casos particulares, 65.
— funicular por tres puntos, 56.
— funicular, propiedades, 47.
— funicular, Ritter y Culmann, 355.
polígonos de Winkler, 584.
polo, cadenas cerradas, 537.
—, casos particulares, 533.
—, circunferencia de Mohr, 229.
—, determinación, 520.
—, polígono funicular, 45.
—, rotaciones, 486.
—, Williot-Mohr, 491.
pórticos, 442.
—, convención de signos, 444.
—, dintel, 442.
—, equilibrio de nudos, 451.
pórticos, pilares, 443.
primer principio de la Estática, 5.
principio, de acción y reacción, 10.
— de los trabajos virtuales, 483, 551.
— de los trabajos virtuales, aplicación al trazado de líneas de influencia, 614.
— de los trabajos virtuales, determinación de incógnitas, 554.
— de los trabajos virtuales, esfuerzos característicos, 559.
— de los trabajos virtuales, esfuerzos en barras, 556.
— de los trabajos virtuales, reacciones de vínculo, 555.
— del paralelogramo, 5.
producto de inercia, 192.
punto, material, corrimiento, 483.
— principal de inercia, 230.

radio de, giro, 193, 219.
— giro polar, 197.
reacciones de, empotramiento, línea de influencia, 627.
— vínculo, 273.
— vínculo, líneas de influencia, 590, 616.
— vínculos espaciales, solución analítica, 330.
— vínculos espaciales, solución gráfica, 333.
reducción de fuerzas espaciales, solución analítica, 155.
— sistemas concurrentes planos, 27.
— sistemas no concurrentes planos, 44.
reducciones de sistemas concurrentes planos, solución analítica, 34.
regla de signos, líneas de influencia, 615.
representación vectorial de pares de fuerzas, 18.
resultante, 5.
— de reducción, 148.
— de un par, 17.
reticulados, espaciales, condiciones de rigidez, 369, 371.

reticulados, espaciales, esfuerzos en barras, 382.
— espaciales, generación, 369.
— planos, 337.
— planos, generación, 338.
— planos, rigidez, 340.
— planos, tipos, 344.
rotación relativa, 517.
rotaciones, 486.
—, composición, 502.
—, descomposición, 509.
— infinitésimas, 494.
—, polígono, 508
—, polo, 486.
rótula, 325.

segundo principio de la Estática, 8.
sistema, hiperestático, 273.
— hipostático, 273.
— isostático, 273.
— móvil de cargas, influencia, 580.
sistemas espaciales de alma llena, 469.
— espaciales de alma llena, diagramas de características, 472.
— espaciales de reticulado, 369.
— espaciales vinculados, 321.
— planos concurrentes, 27.
— planos de alma llena, 389.
— planos de reticulado, 337.
— planos no concurrentes, resultante, 45.
— planos vinculados, 261.
sólido isostáticamente sustentado, 326.
sólidos, en el espacio, grados de libertad, 321.
— en el espacio, vinculación, 323.

teorema, de Steiner, 195.
— de Varignon, 12.
teorema, transmisibilidad de fuerzas, 8.
teoremas de Pappus, 189.
teoría de las líneas de influencia, 569.
tercer principio de la Estática, 8.
torsor de fuerzas, 151.
trabajo, de fuerzas opuestas, 548.
— de un par, 547.
— de una fuerza, 545.
— virtual, 544.
trabajos virtuales, principio, 483, 551.
transmisibilidad de una fuerza, 8.
transmisión indirecta de cargas, 439.
traslaciones, 486.
triángulo de fuerzas, 6.

variación, de distancia, 513.
— de distancia, cadenas cinemáticas, 528.
Varignon, teorema de, 12.
vector momento, 12.
viga, Cantilever, 430.
— con voladizos, 418.
— empotrada, 426.
— Gerber, 430.
— Pratt, 346.
— simple sujeta a pares, 437.
— simplemente apoyada, 397.
— Warren, 346.
vinculación, de chapas en el plano, 271.
— de sólidos en el espacio, 323.
vínculo, 262.
— aparente, 271.
— superabundante, 273.
— superfluo, 273.
vínculos, 264, 268.

Williot-Mohr, cadenas cinemáticas, 522.
—, diagrama, 491.
Winkler, polígonos de, 584.

La EDITORIAL KAPELUSZ S.A. dio término a la presente tirada de la tercera edición de esta obra, que consta de 3.000 ejemplares, en el mes de setiembre de 1976, en La Prensa Médica Argentina, Junín 845, Buenos Aires.

K – 13.435

COLECCION UNIV

Serie: MATEMATIC

ESTABILIDAD II

por Enrique D. Fliess

ANALISIS MATEMATI

por Julio Rey Pastor, Pedro Pi Calleja
y César A. Trejo

MATEMATICA GENE

por César A. Trejo

ALGEBRA Y CALCUL

por Alberto E. Sagastume Berra
y Germán Fernández

TEORIA ESTADISTIC

por Fausto I. Toranzos

EL ENFOQUE CONJU
ENSEÑANZA DE LA M

por César A. Trejo

Serie: COMPUTACION

COMPUTACION EN L

por P. A. Losty

SISTEMAS OPERATIV

por D. W. Barron

LA COMPUTADORA A

por A. Bolt y M. E. Wardle