

S. TIMOSHENKO

Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER

Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por

F. J. MEDINA SALANOVA

Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puentes
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

Prólogo

Desde la publicación de la primera edición de este libro, se ha extendido considerablemente la aplicación de la teoría de placas y láminas al terreno práctico y se han adoptado nuevos métodos. Para ello hemos tenido que hacer varios cambios y adiciones. Las principales adiciones son: 1) un apartado sobre la flexión de placas debida al esfuerzo cortante transversal; 2) un apartado sobre la concentración de tensiones en torno a un agujero circular en una placa flexada; 3) un capítulo sobre la flexión de placas apoyadas sobre cimentación elástica; 4) un capítulo sobre la flexión de placas anisótropas, y 5) un capítulo revisando algunos métodos especiales y aproximados, usados en el cálculo de placas. Hemos ampliado también el capítulo sobre flechas grandes de placas, añadiendo varios casos nuevos de placas de espesor variable y algunas tablas numéricas que facilitan el cálculo de las mismas.

En la parte del libro referente a la teoría de láminas nos hemos limitado a la adición del método de la función de tensiones en la teoría de láminas membrana y algunas adiciones menores en la teoría de flexión de láminas.

La teoría de láminas se ha extendido rápidamente en los últimos años y han aparecido varios libros nuevos sobre este tema. No siéndonos por ello posible desarrollar estos nuevos avances con detalle, nos hemos limitado a una simple referencia a la nueva bibliografía en la que los lectores especialmente interesados por el tema encontrarán la información necesaria.

S. TIMOSHENKO

S. WOINOWSKY-KRIEGER

Prólogo

Desde la publicación de la primera edición de este libro, se ha extendido considerablemente la aplicación de la teoría de placas y láminas al terreno práctico y se han adoptado nuevos métodos. Para ello hemos tenido que hacer varios cambios y adiciones. Las principales adiciones son: 1) un apartado sobre la flexión de placas debida al esfuerzo cortante transversal; 2) un apartado sobre la concentración de tensiones en torno a un agujero circular en una placa flexada; 3) un capítulo sobre la flexión de placas apoyadas sobre cimentación elástica; 4) un capítulo sobre la flexión de placas anisótropas, y 5) un capítulo revisando algunos métodos especiales y aproximados, usados en el cálculo de placas. Hemos ampliado también el capítulo sobre flechas grandes de placas, añadiendo varios casos nuevos de placas de espesor variable y algunas tablas numéricas que facilitan el cálculo de las mismas.

En la parte del libro referente a la teoría de láminas nos hemos limitado a la adición del método de la función de tensiones en la teoría de láminas membrana y algunas adiciones menores en la teoría de flexión de láminas.

La teoría de láminas se ha extendido rápidamente en los últimos años y han aparecido varios libros nuevos sobre este tema. No siéndonos por ello posible desarrollar estos nuevos avances con detalle, nos hemos limitado a una simple referencia a la nueva bibliografía en la que los lectores especialmente interesados por el tema encontrarán la información necesaria.

S. TIMOSHENKO
S. WOINOWSKY-KRIEGER

Índice

Prólogo	7
Notación	13
Introducción	15
CAPÍTULO 1. Flexión de placas largas rectangulares en una superficie cilíndrica	18
1. Ecuación diferencial de la flexión cilíndrica de las placas	18
2. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes simplemente apoyados	20
3. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes empotrados	27
4. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes elásticamente empotrados	32
5. Efecto sobre las tensiones y las flechas de pequeños desplazamientos de los bordes longitudinales en el plano de la placa	35
6. Método de cálculo aproximado del parámetro u	39
7. Placas largas rectangulares uniformemente cargadas con pequeña curvatura cilíndrica inicial	42
8. Flexión cilíndrica de una placa sobre cimentación elástica	45
CAPÍTULO 2. Flexión pura de placas	49
9. Pendientes y curvatura de placas ligeramente flexadas	49
10. Relaciones entre momentos flectores y curvatura en la flexión pura de placas	54
11. Casos particulares de flexión pura	59
12. Energía de deformación en la flexión pura de placas	62
13. Límites de aplicación de las fórmulas deducidas	64
14. Tensiones térmicas en placas con bordes coaccionados	66
CAPÍTULO 3. Flexión simétrica de placas circulares	69
15. Ecuación diferencial de la flexión simétrica de placas circulares bajo carga transversal	69
16. Placa circular uniformemente cargada	73
17. Placa circular con agujero circular en el centro	77
18. Placa circular cargada concéntricamente	82
19. Placa circular cargada en el centro	87
20. Correcciones a la teoría elemental de flexión simétrica de placas circulares	92
CAPÍTULO 4. Pequeñas deformaciones de placas bajo carga transversal	98
21. Ecuación diferencial de la deformada	98
22. Condiciones de borde	102

23. Otra forma de obtención de las condiciones de borde	108
24. Reducción del problema de la flexión de una placa a la deformación de una membrana	112
25. Influencia de las constantes elásticas en el valor de los momentos flectores	117
26. Teoría exacta de placas	118
CAPÍTULO 5. Placas rectangulares simplemente apoyadas	126
27. Placas rectangulares simplemente apoyadas con carga sinusoidal	126
28. Solución de Navier para placas rectangulares simplemente apoyadas	130
29. Otras aplicaciones de la solución de Navier	132
30. Otra solución para placas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas	135
31. Placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una presión hidrostática	145
32. Placa rectangular simplemente apoyada sometida a una carga con forma de prisma triangular	152
33. Placa rectangular simplemente apoyada y parcialmente cargada	156
34. Placa rectangular simplemente apoyada con carga concentrada	162
35. Momentos flectores en una placa rectangular simplemente apoyadas con carga concentrada	165
36. Placas rectangulares de longitud infinita con bordes simplemente apoyados	172
37. Momentos flectores en placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una carga uniformemente repartida en un rectángulo	182
38. Tensiones térmicas en placas rectangulares simplemente apoyadas	185
39. Influencia de las deformaciones por esfuerzos cortantes en la flexión de las placas delgadas	189
40. Placas rectangulares de espesor variable	197
CAPÍTULO 6. Placas rectangulares con diversas condiciones de borde	203
41. Flexión de placas rectangulares por momentos repartidos a lo largo de sus bordes	203
42. Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos empotrados	208
43. Placas rectangulares con tres bordes simplemente apoyados y uno empotrado	216
44. Placas rectangulares empotrados en todo el contorno	221
45. Placas rectangulares con un borde a dos adyacentes simplemente apoyadas y los restantes empotrados	230
46. Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, uno libre y el cuarto empotrado o simplemente apoyado	232
47. Placas rectangulares con tres bordes empotrados y el cuarto borde libre	237
48. Placas rectangulares con los dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos libres o elásticamente apoyados	241
49. Placas rectangulares con los cuatro bordes apoyados elásticamente o apoyados en las esquinas con todos los bordes libres	243
50. Placas rectangulares semiinfinitas sometidas a una presión uniforme	246
51. Placas rectangulares semiinfinitas bajo cargas concentradas	250
CAPÍTULO 7. Placas rectangulares continuas	254
52. Placas continuas simplemente apoyadas	254
53. Estudio aproximado de las placas continuas con vanos iguales	262
54. Flexión de placas apoyadas sobre filas de columnas equidistantes (losas fungiformes)	272
55. Losa fungiforme con nueve vanos y losa con dos bordes libres	280
56. Influencia de la unión rígida con el soporte sobre los momentos de una losa fungiforme	283

CAPÍTULO 8. Placas sobre cimentación elástica	286
57. Flexión simétrica respecto el centro	286
58. Aplicación de las funciones de Bessel al problema de la placa circular	292
59. Placas rectangulares y placas continuas sobre cimentación elástica	296
60. Placa cargada con filas de columnas equidistantes	303
61. Flexión de placas apoyadas sobre un sólido elástico semiinfinito	305
CAPÍTULO 9. Placas de formas diversas	309
62. Ecuaciones de la flexión de placas en coordenadas polares	309
63. Placas circulares bajo carga que varía linealmente	312
64. Placas circulares bajo carga concentrada	317
65. Placas circulares apoyadas en varios puntos del contorno	321
66. Placas en forma de sector	323
67. Placas circulares de espesor no uniforme	327
68. Placas anulares con variación lineal de espesor	331
69. Placas circulares con variación lineal de espesor	333
70. Problemas no lineales en la flexión de placas circulares	336
71. Placas elípticas	339
72. Placas triangulares	342
73. Placas sesgadas	348
74. Distribución de tensiones alrededor de agujeros	350
CAPÍTULO 10. Métodos especiales y aproximados en la teoría de placas	355
75. Singularidades en la flexión de placas	355
76. Empleo de superficies de influencia en el proyecto de placas	359
77. Funciones de influencia y funciones características	365
78. Utilización de integrales infinitas y transformaciones	367
79. Método de variable compleja	372
80. Aplicación del método de la energía de deformación al cálculo de flechas	373
81. Otra forma de aplicar el método de la energía de deformación	378
82. Diversos métodos aproximados	380
83. Aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas a la flexión de placas simplemente apoyadas	383
84. Métodos experimentales	394
CAPÍTULO 11. Flexión de placas anisótropas	397
85. Ecuación diferencial de la placa flexada	397
86. Determinación de las rigideces en varios casos específicos	399
87. Aplicación de la teoría al cálculo de emparrillados	403
88. Flexión de placas rectangulares	405
89. Flexión de placas circulares y elípticas	409
CAPÍTULO 12. Flexión de placas bajo la acción combinada de cargas laterales y fuerzas en el plano medio de la placa	412
90. Ecuación diferencial de la deformada	412
91. Placa rectangular simplemente apoyada en los bordes, bajo la acción combinada de una carga lateral uniforme y tensión uniforme	415
92. Aplicación del método de la energía	417
93. Placas rectangulares simplemente apoyadas bajo la acción combinada de cargas laterales y fuerzas en el plano medio de la placa	421
94. Placas circulares bajo la acción combinada de carga lateral y tracción o compresión	425
95. Flexión de placas con pequeña curvatura inicial	428
CAPÍTULO 13. Placas con grandes flechas	431
96. Flexión de placas circulares debida a momentos uniformemente repartidos en el borde	431

97. Fórmulas aproximadas para placas circulares con carga uniforme y grandes flechas	435
98. Solución exacta de la placa circular uniformemente cargada con borde empujado	439
99. Placa circular simplemente apoyada con carga uniforme	443
100. Placas circulares cargadas en el centro	447
101. Ecuaciones generales de placas con grandes flechas	450
102. Grandes flechas de placas rectangulares uniformemente cargadas	455
103. Grandes flechas de placas rectangulares simplemente apoyadas en sus bordes	460
CAPÍTULO 14. Deformación de láminas sin flexión	463
104. Definiciones y notación	463
105. Láminas de forma de superficie de revolución de carga simétrica respecto a su eje	467
106. Casos particulares de láminas con forma de superficie de revolución	470
107. Láminas de resistencia constante	477
108. Desplazamientos en láminas con forma de superficie de revolución, cargadas simétricamente	480
109. Láminas con forma de superficie de revolución bajo carga no simétrica	483
110. Tensiones producidas por el empuje del viento	484
111. Lámina esférica apoyada en puntos aislados	489
112. Teoría de la membrana en láminas cilíndricas	492
113. Empleo de la función de tensiones para el cálculo de esfuerzos de membrana de las láminas	497
CAPÍTULO 15. Teoría general de láminas cilíndricas	502
114. Lámina cilíndrica circular cargada simétricamente respecto a su eje	502
115. Casos particulares de deformación simétrica de láminas cilíndricas circulares	507
116. Recipientes a presión	518
117. Recipientes cilíndricos con paredes de espesor uniforme	522
118. Recipientes cilíndricos con paredes de espesor variable	525
119. Tensiones térmicas en láminas cilíndricas	535
120. Deformación de una lámina circular cilíndrica sin alargamiento	540
121. Caso general de deformación de una lámina cilíndrica	546
122. Láminas cilíndricas con bordes apoyados	553
123. Deformación de una porción de lámina cilíndrica	555
124. Estudio aproximado de la flexión en láminas cilíndricas	558
125. Utilización de la función de tensiones y deformaciones	561
126. Análisis tensional de cubiertas en lámina cilíndrica	563
CAPÍTULO 16. Láminas con forma de superficie de revolución cargadas simétricamente respecto a su eje	573
127. Ecuaciones de equilibrio	573
128. Reducción de las ecuaciones de equilibrio o dos ecuaciones diferenciales de segundo orden	577
129. Láminas esféricas de espesor constante	580
130. Métodos aproximados de análisis tensional en láminas esféricas	587
131. Láminas esféricas con anillo de borde	595
132. Flexión simétrica de láminas esféricas rebajadas	598
133. Láminas cónicas	603
134. Caso general de láminas con forma de superficie de revolución	607
Índice de autores	611
Índice alfabético	617

Notación

x, y, z	Coordenadas cartesianas rectangulares.
r, θ	Coordenadas polares.
r_x, r_y	Radios de curvatura de la superficie media de una placa en planos paralelos al xz o yz respectivamente.
h	Canto o espesor de una placa o una lámina.
q	Intensidad de una carga repartida.
p	Presión.
P	Carga concentrada.
γ	Peso específico.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensiones normales paralelas a los ejes x, y y z .
σ_n	Tensión normal paralela a la dirección n .
σ	Tensión normal en el sentido del radio en coordenadas polares.
σ_r, σ_θ	Tensiones normales en las direcciones de las tangentes.
τ	Tensión tangencial.
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Tensiones tangenciales en coordenadas cartesianas rectangulares.
u, v, w	Componentes de los desplazamientos.
ϵ	Alargamiento unitario.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Alargamientos unitarios en las direcciones x, y, z .
ϵ_r	Alargamiento unitario radial en coordenadas polares.
$\epsilon_r, \epsilon_\theta$	Alargamientos unitarios en las direcciones de las tangentes.
$\epsilon_x, \epsilon_\theta$	Alargamientos unitarios de una lámina en las direcciones del meridiano y el paralelo respectivamente.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Deformaciones transversales en coordenadas cartesianas rectangulares.
$\gamma_{r\theta}$	Deformación transversal en coordenadas polares.
E	Módulo de elasticidad normal.
G	Módulo de elasticidad transversal.
ν	Coefficiente de Poisson.
V	Energía de deformación.
D	Rigidez a flexión de una placa o lámina.

M_x, M_y	Momentos flectores por unidad de longitud en secciones de una placa perpendiculares a los ejes x e y respectivamente.
M_{xy}	Momento torsor por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular al eje x .
$M_n, M_{n'}$	Momentos flector y torsor respectivamente, por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular a la dirección n .
Q_x, Q_y	Esfuerzos cortantes paralelos al eje z , por unidad de longitud en secciones de una placa perpendiculares a los ejes x e y respectivamente.
Q_n	Esfuerzo cortante paralelo al eje z por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular a la dirección n .
N_x, N_y	Esfuerzos normales por unidad de longitud en secciones de una placa perpendiculares a los ejes x e y respectivamente.
N_{xy}	Esfuerzo cortante en la dirección del eje y por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular al eje x .
$M_r, M_t, M_{r'}$	Momentos flectores radial y tangencial y momento torsor en coordenadas polares.
Q_r, Q_t	Esfuerzos cortantes radial y tangencial.
N_r, N_t	Esfuerzos normales por unidad de longitud en direcciones radial y tangencial.
r_1, r_2	Radio de curvatura de una lámina en forma de superficie de revolución en un plano meridiano y en el plano normal perpendicular al meridiano respectivamente.
χ_r, χ_θ	Cambios de curvatura de una lámina en el plano meridional y en el plano perpendicular al meridiano respectivamente.
χ_θ	Torsión de una lámina.
X, Y, Z	Componentes paralelas a los ejes x, y y z de la intensidad de la carga externa, que actúa sobre una lámina.
$N_r, N_\theta, N_{r\theta}$	Fuerzas de membrana por unidad de longitud de las secciones principales normales de una lámina.
M_θ, M_r	Momentos flectores por unidad de longitud en las secciones meridional y perpendicular al meridiano respectivamente, en una lámina.
χ_r, χ_θ	Cambios de curvatura de una lámina cilíndrica en un plano axial y en un plano perpendicular al eje respectivamente.
N_r, N_x, N_{rx}	Fuerzas de membrana por unidad de longitud en una sección axial y en una sección perpendicular al eje en una lámina cilíndrica.
M_r, M_x	Momentos flectores por unidad de longitud en una sección axial y en una sección perpendicular al eje respectivamente en una lámina cilíndrica.
M_{rx}	Momento torsor por unidad de longitud en una sección axial de una lámina cilíndrica.
Q_r, Q_x	Esfuerzos cortantes paralelos al eje z por unidad de longitud en una sección axial y una sección perpendicular al eje respectivamente en una lámina cilíndrica.
\ln	Logaritmos naturales.
\log	Logaritmos decimales.

Introducción

Las propiedades de la flexión de una placa dependen grandemente de su espesor en comparación con las restantes dimensiones. En el siguiente estudio distinguiremos tres clases de placas: 1) placas delgadas con pequeñas flechas; 2) placas delgadas con grandes flechas; 3) placas gruesas.

Placas delgadas con pequeñas flechas

Si las flechas w de una placa son pequeñas en comparación con su espesor o canto h , puede desarrollarse una teoría suficientemente aproximada para la flexión bajo cargas laterales, haciendo las siguientes hipótesis:

1. No hay deformación en el plano medio de la placa. Este plano permanece *neutro* durante la flexión.
2. Los puntos situados inicialmente en una normal al plano medio de la placa, permanecen después de la flexión en una normal a la superficie media de la placa.
3. Las tensiones normales en la dirección transversal de la placa son despreciables.

Apoyándose en estas hipótesis, todas las tensiones pueden expresarse en función de la flecha w de la placa, que a su vez es función de las coordenadas en el plano de la placa. Esta función tiene que satisfacer una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales, que, junto con las condiciones de contorno, define completamente w . Así la solución de esta ecuación da toda la información necesaria para el cálculo de las tensiones en cualquier punto de la placa.

La segunda hipótesis equivale a despreciar el efecto de los esfuerzos cortantes en la deformación de las placas. Esta hipótesis es ordinariamente aceptable, pero en algunos casos (por ejemplo en los casos de placas con agujeros) el efecto del esfuerzo cortante llega a ser importante y es preciso introducir algunas correcciones en la teoría de placas delgadas (v. ap. 39).

Si además de las cargas laterales, hay fuerzas externas que actúan en el plano medio de la placa, la primera hipótesis ya no es aceptable, y es necesario tener en cuenta el efecto que producen sobre la flexión, las tensiones que actúan en el plano medio de la placa. Esto puede hacerse introduciendo términos adicionales en la ecuación diferencial de las placas antes citada (v. ap. 90).

Placas delgadas con grandes flechas

La primera hipótesis sólo se verifica completamente si la placa se deforma según una superficie desarrollable. En otros casos la flexión de la placa va acompañada de deformación en el plano medio de la placa, pero el cálculo demuestra que las correspondientes tensiones en el plano medio son despreciables si las flechas son pequeñas en comparación con el espesor. Si las flechas no son pequeñas, estas tensiones suplementarias deben ser tenidas en consideración al deducir la ecuación diferencial de las placas. Por este camino obtenemos ecuaciones no lineales y la solución del problema se hace mucho más complicada (v. ap. 96). En el caso de grandes flechas hemos de distinguir también entre bordes inmóviles y bordes libres de moverse en el plano de la placa, los cuales pueden tener una considerable contribución en el valor de las flechas y tensiones de las placas (v. aps. 99, 100). Debido a la curvatura de la deformada del plano medio de la placa, las tracciones suplementarias que predominan, actúan en oposición a las cargas laterales; de este modo la carga es transmitida en parte por la rigidez a flexión y en parte por el efecto de membrana de la placa. En consecuencia, placas muy delgadas con resistencia a flexión despreciable se comportan como membranas excepto tal vez para una estrecha zona de borde donde la flexión puede ocurrir a causa de las condiciones de borde impuestas a la placa.

El caso de una placa deformada según una superficie desarrollable, en particular cilíndrica, debe considerarse como una excepción. Las flechas de una placa tal pueden ser del orden de su espesor sin que necesariamente se produzcan tensiones de membrana y sin afectar al carácter lineal de la teoría de flexión. Las tensiones de membrana surgirían en todo caso en tal placa, si los bordes fueran inmóviles en su plano y las flechas suficientemente grandes (v. ap. 2). Por consiguiente, «en placas con pequeñas flechas» las fuerzas de membrana, originadas por los bordes inmóviles en el plano de la placa, pueden ser prácticamente despreciadas.

Placas gruesas

Las teorías aproximadas de placas delgadas, ya discutidas no son dignas de confianza en el caso de placas de espesor considerable, especialmente en el caso de cargas muy concentradas. En tal caso se aplicará la teoría de

placas gruesas. Esta teoría considera el problema de las placas como un problema de elasticidad tridimensional. El análisis tensional se hace en consecuencia más complicado y hasta ahora sólo ha sido completamente resuelto para unos pocos casos particulares. Con el empleo de este análisis pueden introducirse a la teoría de las placas delgadas las correcciones necesarias en los puntos de aplicación de cargas concentradas.

Las principales hipótesis de la teoría de las placas delgadas forman también la base de la teoría usual de láminas delgadas. Existe sin embargo una diferencia sustancial en el comportamiento de placas y láminas bajo la acción de cargas externas. El equilibrio estático de un elemento de placa bajo carga lateral es sólo posible mediante la actuación de momentos flectores y torsores, ordinariamente acompañados de esfuerzos cortantes, mientras que una lámina es, en general, capaz de transmitir la carga de superficie por tensiones «de membrana», que actúan paralelamente al plano tangente en un punto dado de la superficie media de la lámina y se distribuyen uniformemente en el espesor de la lámina. Esta propiedad de las láminas las hace por regla general mucho más rígidas y estructuras más económicas de lo que sería una placa en las mismas condiciones.

En principio, las fuerzas de membrana son independientes de la flexión y están totalmente definidas por las condiciones de equilibrio estático. Los métodos de determinación de estas fuerzas representan la llamada «teoría de membrana de las láminas». Sin embargo, las reacciones y deformación obtenidas para los bordes de las láminas mediante la teoría de membrana, son ordinariamente incompatibles con las condiciones de contorno reales. Para salvar esta distancia hay que considerar en una zona de borde la flexión de la lámina, que puede modificar ligeramente los valores de las fuerzas de membrana inicialmente calculados. Esta flexión, sin embargo, tiene carácter muy localizado¹ y puede calcularse aplicando las mismas hipótesis que se usan en el caso de flechas pequeñas de placas delgadas. Hay, no obstante, problemas, especialmente los concernientes a la estabilidad elástica de las láminas, en los que la hipótesis de pequeñas flechas no pueden mantenerse y es preciso usar la «teoría de grandes flechas».

Si el espesor de una lámina es comparable al radio de curvatura, o si se consideran tensiones en puntos próximos a los de aplicación de cargas concentradas, debe aplicarse una teoría más rigurosa, similar a la teoría de las placas gruesas.

¹ Hay algunas clases de láminas, especialmente las que tienen curvatura negativa, que presentan numerosas excepciones. En los casos de superficies desarrollables como conos o cilindros, son posibles grandes flechas sin deformación en la superficie media y, en algunos casos, pueden despreciarse las tensiones de membrana pudiendo ser suficiente la sola consideración de las tensiones de flexión.

1

Flexión de placas largas rectangulares en una superficie cilíndrica

1. Ecuación diferencial de la flexión cilíndrica de las placas

Comenzamos la teoría de la flexión de las placas por el problema sencillo de la flexión de una placa larga rectangular sometida a una carga transversal constante, a lo largo de la placa. La superficie flexada de una porción de una placa semejante, tomada a una gran distancia de los extremos¹ puede suponerse cilíndrica, con su eje paralelo a la longitud de la placa. Podemos pues limitarnos al estudio de la flexión de una franja elemental, cortada en la placa según dos planos perpendiculares a la longitud de la placa y de ancho unidad. La flecha de esta franja está dada por una ecuación diferencial semejante a la de la flecha de una viga flexada.

Para obtener esta ecuación, se considera una placa de espesor uniforme h y se toma el plano xy como plano medio de la placa antes de la aplicación de la carga, es decir el plano equidistante de sus dos caras. Se hace coincidir el eje y con uno de los bordes longitudinales de la placa y se orienta el eje de las z hacia abajo como indica la figura 1. Entonces si la

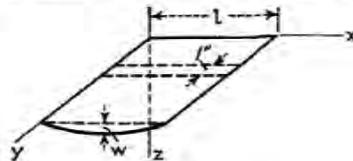


FIG. 1

¹ La relación entre la longitud y el ancho de una placa para que la tensión máxima pueda aproximarse a la de una placa infinitamente larga se estudia más adelante (véase págs. 139 y 147).

anchura de la placa es l , la banda elemental puede considerarse como una barra rectangular de longitud l y de altura h . Calculando las tensiones de flexión en tal barra se supondrá como en la teoría ordinaria de vigas, que las secciones transversales de la barra permanecen planas, durante la flexión, no sufriendo más que un giro con respecto a sus fibras neutras. Si sus extremos no soportan fuerzas normales, la superficie neutra de la barra coincide con la superficie media de la placa y el alargamiento unitario de una fibra paralela al eje x es proporcional a su distancia z a la superficie media. La curvatura de la deformada o línea elástica puede ser considerada igual a $-d^2w/dx^2$ donde w , flecha de la barra en la dirección de las z , se supone pequeña en comparación de l . El alargamiento unitario ϵ_x de una fibra situada a una distancia z de la superficie media es ahora $-zd^2w/dx^2$.

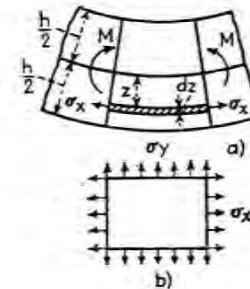


FIG. 2

Según la ley de Hooke, los alargamientos unitarios ϵ_x y ϵ_y , en función de las tensiones normales σ_x y σ_y , que actúan sobre el elemento rayado son

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = 0\end{aligned}\quad (1)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material y ν el coeficiente de Poisson. La deformación lateral en la dirección de las y debe ser nula a fin de mantener la continuidad en la placa durante la flexión, de donde se deduce, según la segunda de las ecuaciones (1), que $\sigma_x = \nu\sigma_y$. Sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones (1), se obtiene

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{(1 - \nu^2)\sigma_x}{E} \\ \sigma_x &= \frac{E\epsilon_x}{1 - \nu^2} = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2}\end{aligned}\quad (2)$$

Si la placa está sometida a la acción de fuerzas de tracción o de compresión actuando en la dirección x y distribuidas uniformemente a lo largo

de los lados longitudinales, la tensión directa correspondiente se suma a la tensión (2).

Conociendo la expresión de la tensión de flexión σ_x , se obtiene por integración el momento flector en la franja elemental:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} \, dz = - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}$$

Con la notación

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D \quad (3)$$

se representa la ecuación de la deformación de la banda elemental bajo la forma siguiente:

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = -M \quad (4)$$

donde la cantidad D , que toma el lugar de la cantidad EI en el caso de las vigas, se llama *rigidez a flexión* de la placa.

Se ha visto que el cálculo de flechas de la placa se reduce a la integración de la ecuación (4), que es de la misma forma que la ecuación diferencial de la flecha de las vigas. Si no hay más que una carga transversal actuando sobre la placa y si los bordes pueden aproximarse uno al otro en el momento de la flexión, la expresión para el momento flector M puede ser asimismo calculada y la deformada obtenida por la integración de la ecuación (4).

En la práctica el problema es más complicado, pues la placa está habitualmente fija en su contorno y sus bordes no están libres. Tal forma de apoyo provoca las reacciones de tracción a lo largo del contorno tan pronto como aparece la flecha. Estas reacciones dependen del valor de la flecha y modifican el valor del momento flector M de la ecuación (4). El problema se reduce al estudio de la flexión de una franja elemental sometida a la acción de una carga transversal y también a una fuerza axial que depende de la flecha de la franja¹. A continuación se considera este problema para el caso particular de una carga uniforme actuando sobre una placa, cuyos bordes están sometidos a diversas condiciones.

2. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes simplemente apoyados

Consideremos una placa larga rectangular cargada uniformemente con los bordes longitudinales libres para girar, pero que no pueden aproximarse

¹ El primero que estudió el problema de esta forma fue I. G. Boobnov; véase la traducción inglesa de su libro en *Trans. Inst. Naval Architects*, vol. 44, pág. 15, 1902, y su *Theory of Structure of Ships*, vol. 2, pág. 545, San Petersburgo, 1914. Véase también la Memoria presentada por Stewart Way al National Meeting of Applied Mechanics, Nueva Haven, Conn., junio 1932; de esta Memoria están tomadas las curvas utilizadas en los apartados 2 y 3.

uno al otro durante la flexión. Una franja elemental cortada en esta placa como muestra la figura 1, se comporta como una barra uniformemente cargada, sometida a la acción de una fuerza axial S (fig. 3). La magnitud de S es tal que impide que los extremos de la barra se desplacen a lo largo

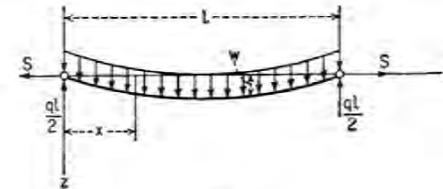


FIG. 3

del eje de las x . Sea q la intensidad de la carga uniforme, el momento flector en toda sección transversal de la franja es

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} - Sw$$

Sustituyendo en (4), se obtiene

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{Sw}{D} = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D} \quad (a)$$

Introduciendo la notación

$$\frac{S l^2}{D 4} = u^2 \quad (5)$$

la solución general de (a) puede escribirse de la forma siguiente:

$$w = C_1 \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^2 x}{8u^2 D} - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D} - \frac{ql^4}{16u^4 D} \quad (b)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinarán a partir de las condiciones de los extremos. Puesto que las flechas de la franja son nulas en los extremos, se tiene

$$w = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } x = l \quad (c)$$

Sustituyendo w en la expresión (b), se obtiene de estas condiciones

$$C_1 = \frac{ql^4}{16u^4 D} \frac{1 - \operatorname{ch} 2u}{\operatorname{sh} 2u} \quad C_2 = \frac{ql^4}{16u^4 D}$$

y la ecuación (b) de la flecha w toma la forma

$$w = \frac{ql^2}{16u^4 D} \left(\frac{1 - \operatorname{ch} 2u}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} - 1 \right) + \frac{ql^2 x}{8u^2 D} - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2u &= \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u & \operatorname{sh} 2u &= 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \\ \operatorname{ch}^2 u &= 1 + \operatorname{sh}^2 u \end{aligned}$$

se puede representar (b) bajo una forma más sencilla

$$w = \frac{ql^4}{16u^4 D} \left(\frac{-\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + \operatorname{ch} u \operatorname{ch} \frac{2ux}{l}}{\operatorname{ch} u} - 1 \right) + \frac{q l^2 x}{8u^2 D} (l - x)$$

o bien
$$w = \frac{ql^4}{16u^4 D} \left[\frac{\operatorname{ch} u \left(1 - \frac{2x}{l} \right)}{\operatorname{ch} u} - 1 \right] + \frac{q l^2 x}{8u^2 D} (l - x) \quad (6)$$

Así, las flechas de la franja elemental dependen de la cantidad u que como se ha visto en la ecuación (5), es una función de la fuerza axial S . Esta fuerza puede determinarse a partir de la condición impuesta a los extremos de la franja (fig. 3) de no desplazarse a lo largo del eje x . Por consiguiente, el alargamiento de la franja debido a las fuerzas S es igual a la diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformación y la cuerda de longitud l .

Esta diferencia para pequeñas flechas puede ser representada por la fórmula¹

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (7)$$

Para calcular el alargamiento de la franja debido a las fuerzas S , se supone que la deformación lateral de la franja en la dirección de las y está impedida y se utiliza la ecuación (2).

$$\lambda = \frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (d)$$

Sustituyendo en la ecuación (6) de w integrando, se obtiene, para el cálculo S la ecuación siguiente:

$$\frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{q l^2}{D^2} \left(\frac{5}{256} \frac{\operatorname{th} u}{u^7} + \frac{1}{256} \frac{\operatorname{th}^2 u}{u^6} - \frac{5}{256u^6} + \frac{1}{384u^4} \right)$$

donde, sustituyendo S por $4u^2 D/l^2$ y D por su valor sacado de la ecuación (3) se obtiene finalmente la ecuación

$$\frac{E^2 h^8}{(1 - \nu^2)^2 q^2 l^6} = \frac{135}{16} \frac{\operatorname{th} u}{u^9} + \frac{27}{16} \frac{\operatorname{th}^2 u}{u^8} - \frac{135}{16u^6} + \frac{9}{8u^4} \quad (8)$$

Para un material, una relación h/l y una carga q dadas, el primer miembro de esta ecuación se calcula fácilmente y el valor de u que satisface

¹ Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte I, 3.^a ed., pág. 178, 1955.

a esta ecuación puede encontrarse por un método aproximado. Para simplificar esta solución, se puede utilizar las curvas de la figura 4. Las abscisas representan los valores de u y las ordenadas las cantidades $\ln(10^4 \sqrt{U_0})$ donde U_0 representa el valor numérico del segundo miembro de la ecuación (8). Se utiliza $\sqrt{U_0}$ porque es más fácil calcularlo a partir de la carga y de las constantes de la placa. Se introduce el factor 10^4 a fin de obtener los logaritmos positivos. En cada caso particular se comenzará por calcular la raíz cuadrada del primer miembro de la ecuación (8), igual a $Eh^4/(1 - \nu^2)q l^6$ y que da $\sqrt{U_0}$. La cantidad $\ln(10^4 \sqrt{U_0})$ dará entonces la

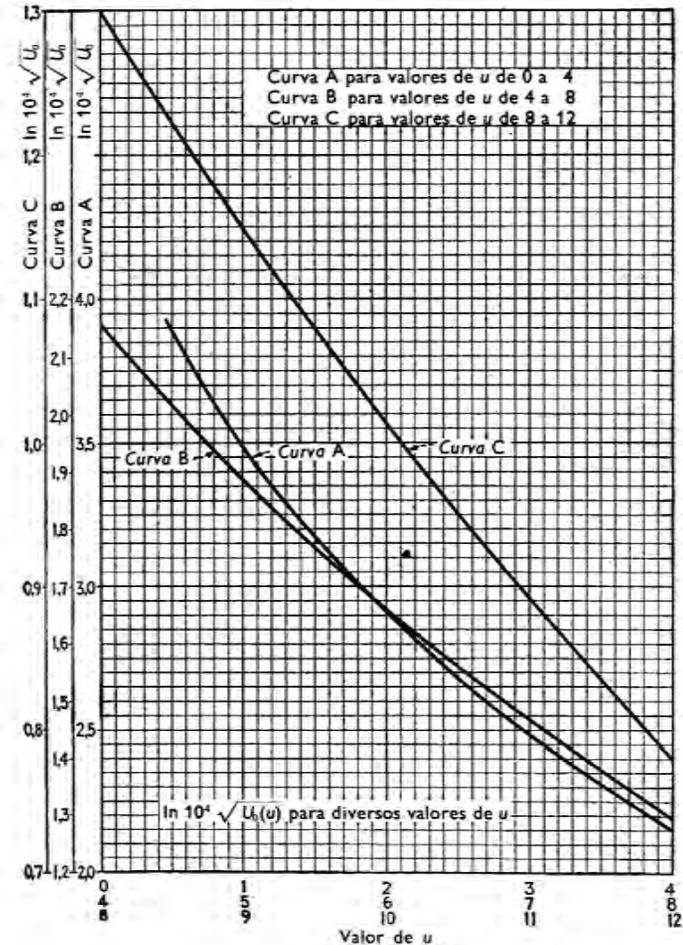


FIG. 4

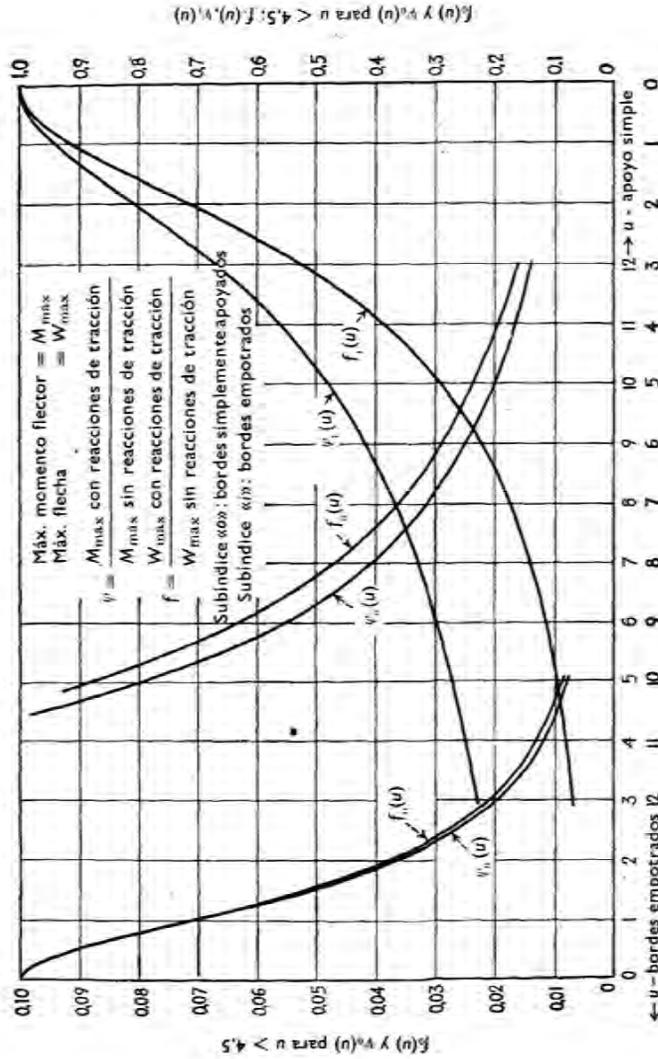


FIG. 5

ordenada utilizada en la figura 4, y el valor correspondiente de u se obtiene asimismo a partir de la curva. Conociendo u se obtiene el valor de la fuerza axial S a partir de (5).

Se comprueba, calculando las tensiones, que la tensión total en toda sección transversal de la franja es igual a la suma de una tensión de flexión proporcional al momento flector y de una tracción igual a S/h es constante a todo lo largo de la longitud de la franja. La tensión máxima se produce en mitad de la franja, donde el momento flector es máximo. A partir de la ecuación (4) se encuentra para el momento flector máximo

$$M_{\max} = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l/2}$$

Sustituyendo la expresión (6) de w , se obtiene

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} \psi_0(u) \tag{9}$$

donde

$$\psi_0 = \frac{1 - \text{sh } u}{u^2} \tag{e}$$

Los valores de ψ_0 están dados por las curvas de la figura 5. Se ve que estos valores disminuyen rápidamente cuando u aumenta, y, para grandes valores de u , el momento flector máximo es varias veces menor que el momento $q l^2/8$, valor que se obtendrá si no hubiera reacciones de tracción en los extremos de la franja.

La tensión de tracción σ_1 y la tensión de flexión máxima σ_2 se expresan por consiguiente fácilmente en función de u , q , y las constantes de la placa

$$\sigma_1 = \frac{S}{h} = \frac{4u^2 D}{h l^2} = \frac{E u^2}{3(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \tag{10}$$

$$\sigma_2 = \frac{6}{h^2} M_{\max} = \frac{3}{4} q \left(\frac{l}{h} \right)^2 \psi_0 \tag{11}$$

La tensión en la placa es

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2$$

Tomemos un ejemplo numérico para mostrar cómo se pueden utilizar las curvas de las figuras 4 y 5 a fin de calcular las tensiones máximas y sea una placa larga de acero de 130 cm de ancho, 13 mm de espesor que soporta una carga uniforme $q = 1,4 \text{ kgf/cm}^2$. Primeramente calculamos $\sqrt{U_0}$:

$$\sqrt{U_0} = \frac{E}{(1 - \nu^2) q} \left(\frac{h}{l} \right)^4 = \frac{2,1 \cdot 10^6}{(1 - 0,3^2) 1,4 \cdot 10^3} \frac{1}{10^3} = 0,01648$$

Entonces, de las tablas

$$\ln(10^4 \sqrt{U_0}) = 2,217$$

De la curva *A* en la figura 4 se deduce $u = 3,795$ y de la figura 5 obtenemos $\psi_0 = 0,1329$.

Se calculan ahora las tensiones utilizando las ecuaciones (10) y (11) hallando

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,795^2}{3(1 - 0,3^2)} \frac{1}{10^4} = 1108 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{3}{4} \cdot 1,4 \cdot 10^4 \cdot 0,1329 = 1395 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2503 \text{ kgf/cm}^2$$

Para calcular la flecha máxima se sustituye $x = l/2$ en la ecuación (6) de la deformada. Así se obtiene

$$w_{\text{máx}} = \frac{5ql^4}{384D} f_0(u) \quad (12)$$

donde

$$f_0(u) = \frac{\text{sh } u - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5u^4}{24}}$$

Para simplificar los cálculos, los valores de $f_0(u)$ están dados por una curva de la figura 5. Si no hay reacciones de tracción en los extremos de la franja, la flecha máxima será igual a $5ql^4/384D$. El factor $f_0(u)$ da la influencia de las reacciones de tracción, la cual disminuye rápidamente cuando u aumenta.

En la figura 5, para el ejemplo numérico precedente hallamos para $u = 3,795$ que el valor de $f_0(u)$ es 0,145. Sustituyendo este valor en (12), se encuentra

$$w_{\text{máx}} = 12 \cdot 0,145 = 1,74 \text{ cm}$$

Se ha visto, en la ecuación (8) que el parámetro de tracción u depende, para una placa dada, de la intensidad de la carga q y de la relación l/h anchura a espesor de la placa. De las ecuaciones (10) y (11) se deduce que las tensiones σ_1 y σ_2 son también funciones de u , q y l/h . Por lo tanto, la tensión máxima en la placa no depende más que de la carga q y de la relación l/h . Esto significa que se puede trazar un haz de curvas que dan la tensión máxima en función de q , correspondiendo cada curva a un valor particular de l/h . Estas curvas están representadas en la figura 6.

Se ve que, debido a la presencia de las tracciones S , que aumenta con la carga, la tensión máxima no es proporcional a la carga q , y para valores grandes de q esta tensión no varía mucho con el espesor de la placa. Tomando la curva señalada con $l/h = 100$ y tomando $q = 1,4 \text{ kgf/cm}^2$, obtenemos en la curva el valor de $\sigma_{\text{máx}}$ calculado ya en el ejemplo numérico.

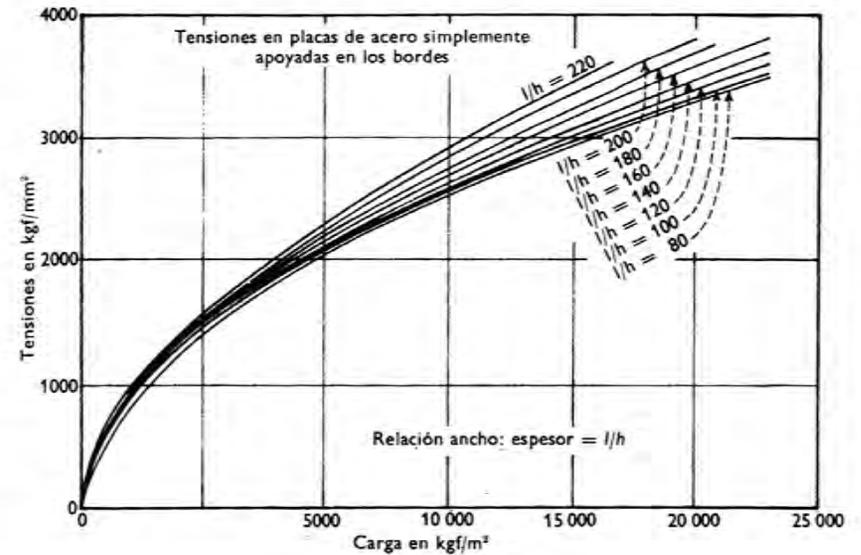


FIG. 6

3. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes empotrados

Se supone que los bordes longitudinales de la placa están fijos de tal manera que no pueden girar. Tomemos una franja elemental de ancho unidad (fig. 1) y llamemos M_0 el momento flector por unidad de longitud que actúa sobre los bordes longitudinales de la placa, las fuerzas que actúan entonces sobre la franja son las indicadas en la figura 7. El momento flector de la franja, en una sección transversal, es

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - Sw + M_0$$

sustituyendo en (4) obtenemos

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{D}w = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D} - \frac{M_0}{D} \quad (a)$$

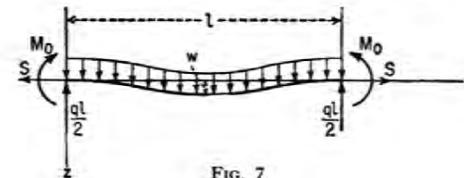


FIG. 7

La solución general de esta ecuación, utilizando la notación (5) toma la forma siguiente:

$$w = C_1 \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^2 x}{8u^2 D} - \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D} - \frac{ql^4}{16u^4 D} + \frac{M_0 l^2}{4u^2 D} \quad (b)$$

Comprobando que la deformación es simétrica con respecto a la mitad de la franja, se determinan las constantes de integración C_1 , C_2 y el momento M_0 a partir de las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 0 & \text{para } x = 0 \text{ y } x = \frac{l}{2} \\ w &= 0 & \text{para } x = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Sustituyendo en la expresión (b) de w se obtiene

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{ql^4}{16u^3 D} & C_2 &= \frac{ql^4}{16u^3 D} \operatorname{cth} u \\ M_0 &= \frac{ql^2}{4u^2} - \frac{ql^2}{4u} \operatorname{cth} u = -\frac{ql^2}{12} \psi_1(u) \end{aligned} \quad (13)$$

donde
$$\psi_1(u) = \frac{3(u - \operatorname{th} u)}{u^2 \operatorname{th} u}$$

La flecha w está dada entonces por la expresión

$$w = -\frac{ql^4}{16u^3 D} \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^4}{16u^3 D} \operatorname{ch} u \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} - \frac{ql^2 x}{8u^2 D} + \frac{ql^2 x^2}{8u^2 D} - \frac{ql^4}{16u^3 D} \operatorname{cth} u$$

La que puede ser simplificada y finalmente puesta en la forma siguiente

$$w = \frac{ql^4}{16u^3 D \operatorname{th} u} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \left[u \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\operatorname{ch} u} - 1 \right\} + \frac{ql^2(l-x)x}{8u^2 D} \quad (14)$$

Para calcular u se procede de la misma manera que en el artículo precedente y se utiliza la ecuación (d) de dicho artículo sustituyendo en la expresión (14) de w e integrando se obtiene

$$\frac{S(1-\nu^2)l}{hE} = \frac{q^2 l^7}{D^2} \left(\frac{3}{256u^3 \operatorname{th} u} - \frac{1}{256u^4 \operatorname{sh}^2 u} + \frac{1}{64u^6} + \frac{1}{384u^4} \right)$$

La ecuación para calcular u se transforma, después de haber sustituido S de (5) y D de (3)

$$\frac{E^2 h^8}{(1-\nu^2)^2 q^2 l} = \frac{81}{16u^7 \operatorname{th} u} - \frac{27}{16u^6 \operatorname{sh}^2 u} + \frac{27}{4u^8} + \frac{9}{8u^6} \quad (15)$$

Para simplificar la solución de esta ecuación, se utiliza la curva de la figura 8 en la que u aparece en abscisas y $\ln(10^4 \sqrt{U_1})$ representa el segundo miembro de la ecuación (15). Para una placa dada se empieza por calcular la raíz cuadrada del primer miembro de la ecuación (15), igual a $Eh^3/[(1-\nu^2)q^2 l^2]$ que nos da $\sqrt{U_1}$ se determina la ordenada de la curva

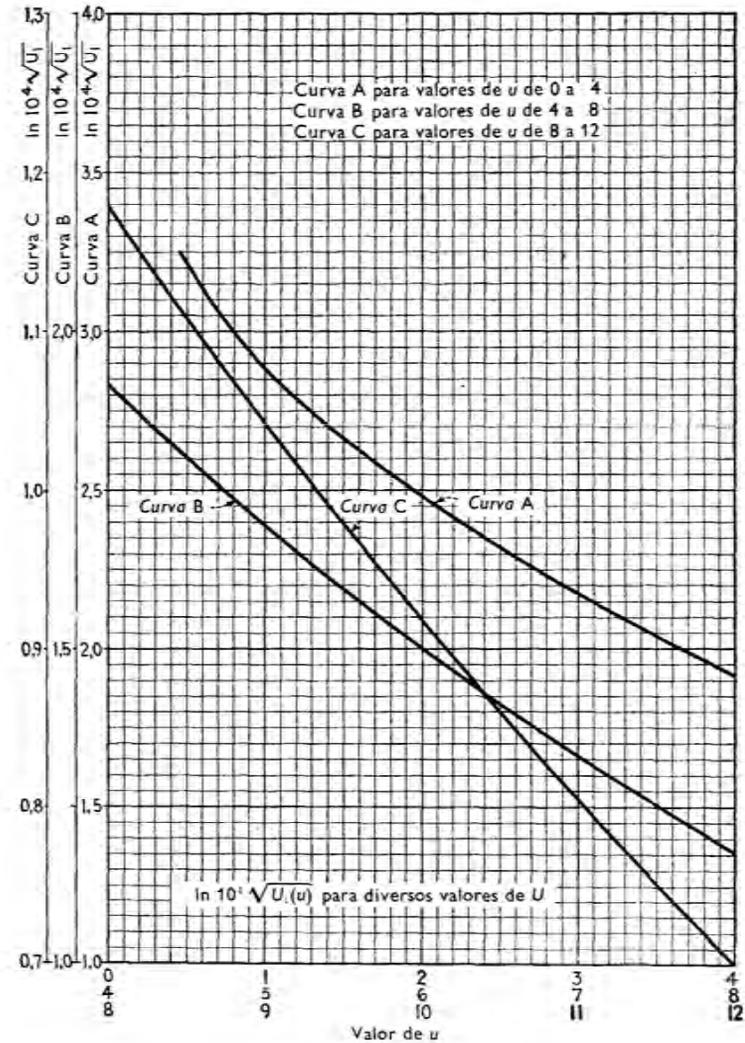


Fig. 8

(fig. 8) que es $(10^4 \sqrt{U_1})$ y la abscisa correspondiente que da el valor buscado de u .

Conociendo u , se puede empezar a calcular las tensiones máximas en la placa. La tensión total en todo punto de la sección transversal de la franja se compone del esfuerzo de tracción constante σ_1 , y de la tensión de flexión. La tensión de flexión máxima σ_2 actúa en los bordes empotrados donde el momento de flexión es máximo. Utilizando las ecuaciones (10) y (13) para calcular σ_1 y M_0 respectivamente, se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{Eu^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad (16)$$

$$\sigma_2 = -\frac{6M_0}{h^2} = \frac{q}{2} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \psi_1(u) \quad (17)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2$$

Para simplificar el cálculo de σ_2 los valores de $\psi_1(u)$ están dados por una de las curvas de la figura 5.

La flecha máxima se sitúa en el centro de la franja y se obtiene sustituyendo $x = l/2$ en (14), de donde se deduce

$$w_{\max} = \frac{ql^4}{384D} f_1(u) \quad (18)$$

donde

$$f_1(u) = \frac{24}{u^4} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\text{sh } u} - \frac{u}{\text{th } u} \right)$$

La función $f_1(u)$ está también dada por una curva de la figura 5.

Ilustraremos por un ejemplo numérico el empleo de las curvas de las figuras 5 y 8.

Una placa larga rectangular de acero, tiene dimensiones $l = 130$ cm, $h = 13$ mm y soporta una carga $q = 0,7$ kgf/cm². En este caso

$$\sqrt{U_1} = \frac{E}{(1-\nu^2)q} \left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{2,1 \cdot 10^6}{(1-0,3^2) \cdot 0,7} \cdot \frac{1}{10^8} = 0,032966$$

$$\ln 10^4 \sqrt{U_1} = 2,5181$$

En la figura 8 hallemos ahora $u = 1,894$; y en la figura 5, $\psi_1 = 0,8212$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (16) y (17) hallamos

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,894^2}{3(1-0,3^2)10^4} = 276 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 10^4 \cdot 0,8212 = 2874 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 3150 \text{ kgf/cm}^2$$

Comparando estos valores de las tensiones con las tensiones máximas obtenidas para una placa de las mismas dimensiones pero sosteniendo una carga doble con bordes simplemente apoyados (v. pág. 25), se puede dedu-

cir que bajo el efecto del empotramiento de los bordes, la tensión de tracción directa decrece considerablemente mientras que la tensión de flexión máxima aumenta sensiblemente, por más que tensión total máxima, para los bordes empotrados es mayor que en el caso de bordes simplemente apoyados.

Si se ha operado como en el artículo precedente, se puede deducir que la tensión máxima, en una placa, no depende más que de q y de l/h y se

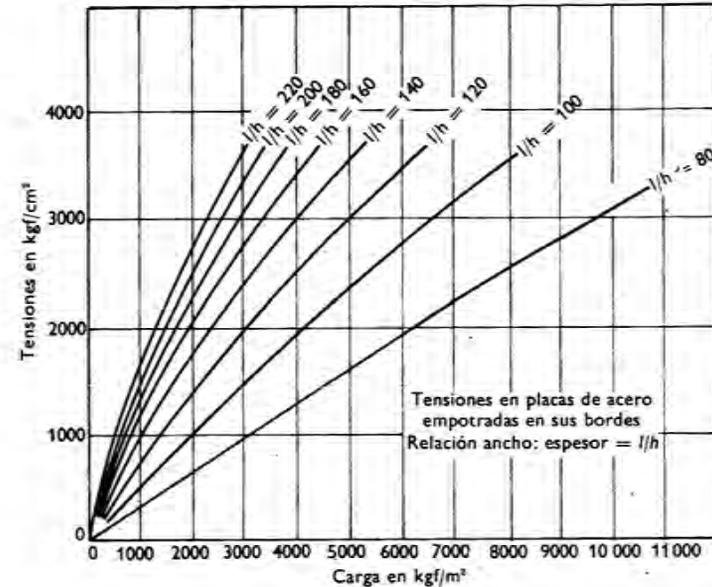


FIG. 9

puede trazar una serie de curvas que dan la tensión máxima en función de q , cada curva de la serie corresponde a un valor particular de l/h . Estas curvas están representadas en la figura 9. Cuando el esfuerzo axial sobre las flechas de la franja es débil, se ve que para pequeños valores de q , la tensión máxima aumenta aproximadamente en la misma proporción que la carga q . Pero para grandes valores de q la relación entre la carga y la tensión máxima ya no es lineal.

La tabla 1 da los valores numéricos de todas las funciones de las figuras 4, 5 y 8. Se puede utilizar este cuadro en lugar de las curvas para el cálculo de tensiones y flechas máximas de placas largas rectangulares uniformemente cargadas.

4. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas, con bordes elásticamente empotrados

Supongamos que, durante la flexión, los bordes longitudinales de una placa giran un ángulo proporcional al momento de flexión de los bordes. En este caso, las fuerzas que actúan sobre la franja elemental serán, de nuevo, del tipo de las de la figura 7 y se obtendrá para las flechas w la expresión (b) del artículo precedente. No obstante las condiciones en los extremos que permiten determinar las constantes de integración y el momento M_0 están modificadas, ya que la pendiente de la deformada en los extremos de la franja no es nula sino proporcional al valor del momento M_0 y se tiene

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{z=0} = -\beta M_0 \quad (a)$$

donde β es función de la rigidez de fijación de los bordes. Si esta fijación es muy flexible, el factor β es grande y las condiciones en los extremos están más cerca del caso de bordes simplemente apoyados. Si la fijación es muy rígida, β disminuye y las condiciones de los extremos se aproximan a las de bordes completamente empotrados. Las dos últimas condiciones en los límites son las mismas que las del artículo precedente. Así se tiene

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{z=0} = -\beta M_0 \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{z=l/2} = 0 \quad (b)$$

$$(w)_{z=0} = 0$$

Aplicando estas condiciones, se encuentran las dos constantes de integración y M_0 a partir de (b) del artículo precedente. A causa de la flexibilidad de los bordes, los momentos M_0 en los extremos serán menores que los dados por la ecuación (13) para los bordes rígidamente empotrados y el resultado final se puede escribir en la forma

$$M_0 = -\gamma \frac{ql^2}{12} \psi_1(u) \quad (19)$$

donde γ es un factor numérico inferior, dado por la fórmula

$$\gamma = \frac{\text{th } u}{\frac{2\beta}{l} Du + \text{th } u}$$

Se ve que el valor de los momentos M_0 en los bordes depende del coeficiente β que define la rigidez de la ecuación. Cuando β es muy pequeño el coeficiente γ tiende hacia 1, y M_0 hacia el valor (13) calculado para los bordes rígidamente empotrados. Cuando β es muy grande, γ y M_0 disminuyen y las condiciones de contorno tienden hacia la de los bordes simplemente apoyados.

TABLA I

u	$\ln 10^4 \sqrt{U_0}$	$\ln 10^4 \sqrt{U_1}$	$\ln 10^4 \sqrt{U_2}$	$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\psi_0(u)$	$\psi_1(u)$	u		
0	∞	∞	∞	1,000	1,000	1,000	1,000	0		
0,5	3,889	3,217	3,801	0,908	0,976	0,905	0,984	0,5		
1,0	3,483	406	331	425	0,711	0,909	0,704	0,939	1,0	
1,5	3,173	310	286	223	3,376	0,532	0,817	0,511	0,876	1,5
2,0	2,911	262	2,663	182	3,040	0,380	0,715	0,367	0,806	2,0
2,5	2,684	227	2,481	161	2,748	0,281	0,617	0,268	0,736	2,5
3,0	2,486	198	2,320	146	2,491	0,213	0,529	0,200	0,672	3,0
3,5	3,311	175	2,174	134	2,263	0,166	0,453	0,153	0,614	3,5
4,0	2,155	156	2,040	124	2,061	0,132	0,388	0,120	0,563	4,0
4,5	2,014	141	1,916	115	1,881	0,107	0,335	0,097	0,519	4,5
5,0	1,886	128	1,801	107	1,718	0,088	0,291	0,079	0,480	5,0
5,5	1,768	118	1,694	100	1,570	0,074	0,254	0,066	0,446	5,5
6,0	1,660	108	1,594	93	1,435	0,063	0,223	0,055	0,417	6,0
6,5	1,560	100	1,501	88	1,311	0,054	0,197	0,047	0,391	6,5
7,0	1,467	93	1,413	82	1,196	0,047	0,175	0,041	0,367	7,0
7,5	1,380	87	1,331	78	1,089	0,041	0,156	0,036	0,347	7,5
8,0	1,298	82	1,253	74	0,989	0,036	0,141	0,031	0,328	8,0
8,5	1,221	77	1,179	70	0,895	0,032	0,127	0,028	0,311	8,5
9,0	1,148	73	1,109	67	0,806	0,029	0,115	0,025	0,296	9,0
9,5	1,079	69	1,042	63	0,723	0,026	0,105	0,022	0,283	9,5
10,0	1,014	65	0,979	61	0,643	0,024	0,096	0,020	0,270	10,0
10,5	0,951	63	0,918	58	0,568	0,021	0,088	0,018	0,259	10,5
11,0	0,892	59	0,860	55	0,496	0,020	0,081	0,017	0,248	11,0
11,5	0,835	57	0,805	54	0,427	0,018	0,075	0,015	0,238	11,5
12,0	0,780	55	0,751	51	0,362	0,016	0,069	0,014	0,229	12,0
			0,700	51	0,299					

En este caso, la deformada puede escribirse de la forma:

$$w = \frac{ql^2}{16u^4D} \frac{\text{th } u - \gamma(\text{th } u - u)}{\text{th } u} \left\{ \frac{\text{ch} \left[u \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\text{ch } u} - 1 \right\} + \frac{ql^2}{8u^2D} x(l-x) \quad (20)$$

Para $\gamma = 1$, esta expresión se reduce a la ecuación (14) que da las flechas de una placa de bordes rígidamente empotrados. Para $\gamma = 0$ se obtiene la ecuación (6) de una placa de bordes simplemente apoyados.

Para calcular el parámetro de tracción u se opera de la misma manera que en los casos precedentes, se determina la tracción S a partir de la condición de que el alargamiento de la franja elemental es igual a la diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformada y la cuerda l .

Por consiguiente

$$\frac{S(1-\nu^2)l}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Sustituyendo la expresión (20) en esta ecuación e integrando, se obtiene

$$\frac{E^2 h^8}{(1-\nu^2)^2 q^2 l^8} = (1-\gamma)U_0 + \gamma U_1 - \gamma(1-\gamma)U_2 \quad (21)$$

donde U_0 y U_1 representan respectivamente los segundos miembros de las ecuaciones (8) y (15), y

$$U_2 = \frac{27}{16} \frac{(u - \text{th } u)^2}{u^9 \text{th}^2 u} (u \text{th}^2 u - u + \text{th } u)$$

Los valores de $\ln(10^4 \sqrt{U_2})$ están dados en la tabla 1. Utilizando esta tabla, la ecuación (21) se resuelve asimismo por aproximaciones sucesivas. Para una placa dada se comienza por calcular el primer miembro de esta ecuación y utilizando las curvas de las figuras 4 y 8, se determinan los valores de u :

1. Para bordes simplemente apoyados.
2. Para bordes completamente empotrados. (Naturalmente para bordes elásticamente empotrados u tendrá un valor intermedio.)

Dando un valor cualquiera dado a u se calcula U_0 , U_1 y U_2 con la ayuda de la tabla 1 y se determina el valor del segundo miembro de (21). Generalmente este valor es diferente del de el primer miembro calculado anteriormente y será necesario hacer otro cálculo dando un nuevo valor a u . Dos cálculos son generalmente suficientes para determinar por interpolación, el valor de u que satisfagan a la ecuación (21). Conociendo u se pueden calcular a partir de (19), los momentos flectores M_0 en los extremos. Se puede también calcular el momento en el centro de la franja y deter-

minar así la tensión máxima. Esta tensión se producirá en los extremos o en el centro según el grado de la rigidez de fijación de los bordes.

5. Efecto sobre las tensiones y las flechas de pequeños desplazamientos de los bordes longitudinales en el plano de la placa

En el estudio precedente se ha supuesto que, durante la flexión, los bordes longitudinales de la placa no se desplazan en el plano de ésta. A partir de esta hipótesis se ha calculado la tracción S para cada caso particular. Supongamos ahora, que los bordes se aproximan una longitud Δ . A causa de este desplazamiento el alargamiento de la franja elemental disminuirá y la ecuación para el cálculo de la tracción S se transformará en

$$\frac{Sl(1-\nu^2)}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \Delta \quad (a)$$

Por otra parte, las ecuaciones (6), (14) y (20) de la deformada quedan invariables por ser independientes de S . Pueden ser diferenciadas y sustituidas bajo el signo de integración de la ecuación (a). Después de haber calculado esta integral y sustituido S por $4u^2D/l^2$, se obtiene para bordes simplemente apoyados

$$\frac{E^2 h^8}{q^2(1-\nu^2)^2 l^8} \frac{u^2 + \frac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = U_0 \quad (22)$$

y para bordes empotrados

$$\frac{E^2 h^8}{q^2(1-\nu^2)^2 l^8} \frac{u^2 + \frac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = U_1 \quad (23)$$

Si Δ se anula, las ecuaciones (22) y (23) deben ser idénticas a (8) y (15) obtenidas anteriormente para bordes fijos.

El caso más sencillo se obtiene colocando barras a compresión entre los lados longitudinales del contorno a fin de impedir que un borde de la placa se aproxime al otro durante la flexión. Las tracciones S en la placa producen el acortamiento de estas barras, el cual provoca un desplazamiento Δ proporcional a S^2 . Si es k el factor de proporcionalidad dependiente de la elasticidad y de la sección transversal de esta barra, se tiene

$$S = k\Delta$$

donde, sustituyendo S por $4u^2D/l^2$ se encuentra:

$$\Delta = \frac{1}{k} \frac{Eu^2 h^2}{3l^2(1-\nu^2)}$$

$$y \quad \frac{u^2 + \frac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = 1 + \frac{Eh}{kl(1-\nu^2)}$$

El soporte del borde se supone tal, que Δ es uniforme a lo largo de los bordes.

Así, el segundo factor del primer miembro de las ecuaciones (22) y (23) es una constante, fácilmente calculable si se conocen las dimensiones y las propiedades elásticas de la estructura conociendo este factor, se pueden resolver las ecuaciones (22) y (23), exactamente como en el caso de bordes fijos.

Generalmente el segundo factor del primer miembro de las ecuaciones (22) y (23) puede depender del valor de la carga que actúa sobre la estructura y la determinación de u se hace entonces por aproximaciones sucesivas. Ilustraremos este procedimiento con un ejemplo que se encuentra al calcular las tensiones en el casco de un navío cuando encuentra una ola. Los palastros del fondo de un navío están sometidos a la presión del agua uniformemente repartida y también a las fuerzas en el plano de los palastros

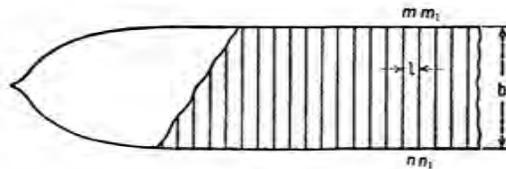


FIG. 10

debidas a la flexión del casco que se comporta con una viga. Sea b la anchura del barco en una sección transversal mn (fig. 10) y l la distancia entre dos pares sucesivos de las cuadernas. Cuando el seno de una ola está en el centro del navío [fig. 11 b)] la flotabilidad disminuye allí y aumenta en los extremos. El efecto de este cambio en la estructura del navío crea un momento de flexión descendente y la distancia normal entre los pares de las cuadernas aumenta. Para calcular exactamente este desplazamiento se debe tener en cuenta no solamente el momento de flexión M sobre el casco sino también la influencia sobre esta flexión de una cierta variación de las tracciones S repartidas a lo largo de los lados mn y m_1n_1 del palastro de

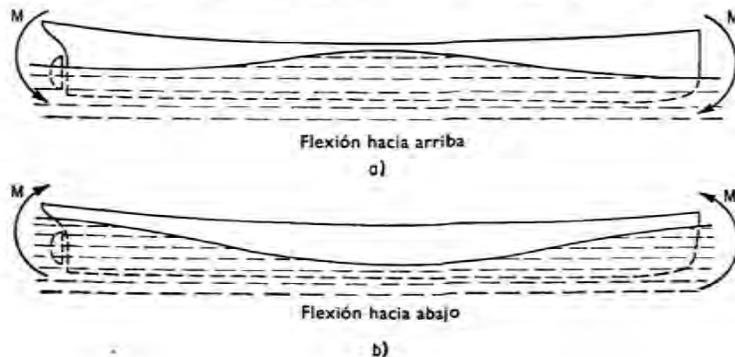


FIG. 11

borde mm_1n_1 (fig. 10) que consideramos como una placa larga rectangular cargada uniformemente por la presión del agua. Puesto que los palastros entre los pares consecutivos están igualmente cargados no hay giro de los bordes longitudinales de estos palastros que se pueden considerar como completamente empotrados a lo largo de sus bordes.

Para determinar Δ que, designa el desplazamiento de mn hacia m_1n_1 en la figura 10 y que es debido al momento de flexión del casco M y las reacciones de tracción S por unidad de longitud a lo largo de los lados mn

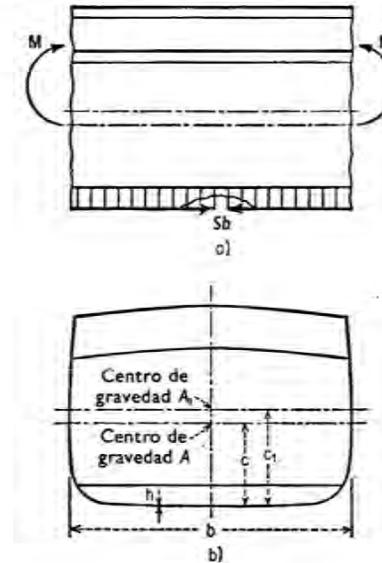


FIG. 12

y m_1n_1 del fondo se supone que el palastro mm_1n_1 está sustituido por las fuerzas uniformemente distribuidas S , de modo que la resultante a lo largo de mn y m_1n_1 sea Sb [fig. 12 a)]. Se puede decir entonces que el desplazamiento Δ , de una cuaderna con relación a otra, es debido al momento de flexión M y a la carga excéntrica Sb aplicada en el casco sin fondo.

Si A , I , c , son respectivamente la sección transversal, el momento central de inercia y la distancia entre el palastro del fondo y el eje neutro de la sección completa del casco, y si A_1 , I_1 , c_1 , son las mismas cantidades para la sección del casco sin palastro de fondo, estas últimas cantidades se pueden calcular a partir de las primeras por las relaciones:

$$\begin{aligned} A_1 &= A - bh \\ c_1 &= \frac{Ac}{A_1} \\ I_1 &= I - bhc^2 - A_1(c_1 - c)^2 \end{aligned} \quad (b)$$

El desplazamiento relativo Δ_1 , producido por las fuerzas excéntricas Sb , está dado por la ecuación

$$\Delta_1 = \frac{l(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{Sb}{A_1} + \frac{Sbc_1^2}{I_1} \right)$$

en la cual debe introducirse $1-\nu^2$ si se ha despreciado la deformación lateral. El desplazamiento debido al momento flector M es:

$$\Delta_2 = -\frac{Mc_1 l}{EI_1}$$

De ahí el desplazamiento total es

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{l(1-\nu^2)}{E} \left[\frac{Sb}{A_1} + \frac{Sbc_1}{I_1} - \frac{Mc_1}{I_1(1-\nu^2)} \right] \quad (c)$$

Sustituyendo en esta expresión S por su valor:

$$S = \frac{4u^2 D}{l^2} = \frac{Eu^2 h^3}{3l^2(1-\nu^2)}$$

se obtiene finalmente

$$\Delta = \frac{u^2 h^3}{3l} \left(\frac{b}{A_1} + \frac{bc_1^2}{I_1} \right) - \frac{Mc_1}{EI_1} \quad (d)$$

Debiendo sustituirse A por su valor en (23) para calcular el parámetro u .

Apliquemos este resultado a un ejemplo numérico. Sea $b = 16$ m, $I = 14,4 \times 10^8$ cm⁴, $A = 12\,560$ cm², $c = 3,90$ m, $h = 2$ cm, $l = 1,20$ m, $q = 0,7$ kgf/cm² y $M = 37\,000$ m/t. De las ecuaciones (b) obtenemos

$$A_1 = 12\,560 - 1600 \cdot 2 = 9360 \text{ cm}^2$$

$$c_1 = \frac{12\,560 \cdot 3,90}{9360} = 5,20 \text{ m}$$

$$I_1 = 14,4 \cdot 10^8 - 1600 \cdot 2 \cdot 390^2 - 9360 (520 - 390)^2 = 8,10^8 \text{ cm}^4$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (d) se determina y se encuentra finalmente

$$\frac{3\Delta l}{h^2} = 1,410u^2 - 11,48$$

La ecuación (23) entonces toma la forma

$$\frac{E^2 h^3}{q^2(1-\nu^2)^2 l^3} \frac{u^2 + 1,410u^2 - 11,48}{u^2} = U_1$$

o bien

$$\frac{1,552Eh^4}{q(1-\nu^2)^2 l^4} \sqrt{\frac{u^2 - 4,763}{u^2}} = \sqrt{U_1}$$

Sustituyendo los valores numéricos y tomando logaritmos de ambos miembros obtenemos

$$3,597 + \ln \sqrt{\frac{u^2 - 4,763}{u^2}} = \ln (10^4 \sqrt{U_1})$$

Utilizando la curva de la figura 8, esta ecuación puede resolverse por aproximaciones sucesivas y obtenemos $u = 2,187$ y de la figura 5 $\frac{1}{3}(u) = 0,78$. La tensión máxima se calcula ahora mediante las ecuaciones (16) y (17) de las cuales tenemos

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,783}{3 \cdot 0,91 \cdot 60^2} = 1022 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} 0,7 \cdot 60^2 \cdot 0,780 = 983 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2005 \text{ kgf/cm}^2.$$

Si se hubiera despreciado la tensión de flexión en la placa, debida a la presión del agua y si se hubiera calculado la tensión del límite del fondo por la fórmula $\sigma = Mc/I$ se habrá obtenido una tensión máxima igual a 1000 kgf/cm².

6. Método de cálculo aproximado del parámetro u

Para calcular el parámetro u en las placas donde los bordes longitudinales no se desplazan en el plano de la placa, se utiliza la ecuación

$$\frac{Sl(1-\nu^2)}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (a)$$

que indica que el alargamiento de la franja elemental producido por S es igual a la diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformada y la cuerda l . En los casos particulares estudiados en los artículos precedentes se han obtenido expresiones exactas para las flechas w y las tablas numéricas y las curvas, para determinar el segundo miembro de la ecuación (a). Si no se dispone de tales tablas, la resolución de (a) se complica y para simplificar el problema debe recurrirse al método aproximado. Se sabe¹ por el estudio de la flexión de las vigas que, en el caso de extremos simplemente apoyados con cargas transversales actuando en la misma dirección, la deformación de una franja elemental debida a la asociación de una carga transversal y de una tracción S (fig. 3), se puede dar con suficiente aproximación por la ecuación

$$w = \frac{w_0}{1+\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (b)$$

¹ Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 52, 1956.

en la que w_0 representa la flecha en el centro de la franja, debida a la carga transversal sola y α está dada por la fórmula

$$\alpha = \frac{S}{S_{cr}} = \frac{Sl^2}{\pi^2 D} \quad (c)$$

Así α representa la relación de la fuerza axial S y la carga crítica de Euler, para la franja elemental.

Sustituyendo la expresión (b) en la ecuación (a) e integrando se obtiene

$$\frac{Sl(1 - \nu^2)}{hE} = \frac{\pi^2 w_0^2}{4l(1 + \alpha)^2}$$

Utilizando entonces la notación (c) y sustituyendo D por su expresión (3), se obtiene finalmente

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = \frac{3w_0^2}{h^2} \quad (24)$$

A partir de esta ecuación puede calcularse α en cada caso particular y u está entonces determinado por la ecuación

$$u^2 = \frac{S l^2}{D A} = \frac{\pi^2 \alpha}{4} \quad (d)$$

Pondremos un ejemplo numérico para aplicar la ecuación aproximada (24). Una placa larga rectangular de acero de bordes simplemente apoyados y en las que las dimensiones son $l = 1,30$ m, $h = 1,3$ cm, soporta una carga uniformemente repartida $q = 1,4$ kgf/cm². En este caso

$$w_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{D}$$

y, después de haber sustituido por los valores numéricos, la ecuación (24) será

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 269,56 \quad (3)$$

Se puede simplificar la solución de la ecuación poniendo

$$1 + \alpha = x \quad (e)$$

Entonces

$$x^3 - x^2 = 269,56$$

es decir que x es tal que la diferencia entre su cubo y su cuadrado tiene un valor conocido. Así x puede determinarse fácilmente mediante una regla de cálculo o una tabla numérica y en nuestro caso se encuentra

$$x = 6,8109 \quad y \quad \alpha = 5,8109$$

Entonces de la ecuación (d) se tiene

$$u = 3,7865$$

y de (e) (v. pág. 9)

$$\psi_0 = 0,13316$$

Para calcular la tensión de fracción y la tensión máxima de flexión se utilizan las ecuaciones (10) y (11). Se encuentra entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1103 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_2 &= 1398 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_{\max} &= \sigma_1 + \sigma_2 = 2501 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

Los cálculos hechos en el apartado 2 (pág. 25) dan para este ejemplo

$$\sigma_{\max} = 2503 \text{ kgf/cm}^2.$$

Se comprueba así que la aproximación de la ecuación (24) es muy buena en este caso. En general, la exactitud depende del valor de u . El error aumenta con u .

Los cálculos muestran que para $u = 1,44$, el error en la tensión máxima es solamente de 0,065 % y para $u = 12,29$ que corresponde a placas muy flexibles, el error es del orden de 0,30 %. Estos valores de u son los encontrados más a menudo en la práctica y se puede decir que la ecuación (24) puede usarse con suficiente precisión en el caso práctico de placas uniformemente cargadas con bordes simplemente apoyados.

Se puede también utilizar cuando la carga no está uniformemente distribuida, como en el caso de presión hidrostática no uniformemente repartida a lo largo de la franja elemental. Si se calcula la fuerza longitudinal con ayuda de la ecuación (24) las flechas se obtienen entonces a partir de (b) y el momento flector en toda sección transversal, es igual a la suma algebraica a la carga transversal y del momento producido por la fuerza longitudinal¹.

En el caso de bordes empotrados la expresión aproximada de la deformada de una franja elemental puede ponerse en la forma

$$w = \frac{w_0}{1 + \alpha/4} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \quad (f)$$

En la que w_0 es la flecha de la viga empotrada bajo carga lateral teniendo α el mismo sentido que anteriormente. Sustituyendo w por su valor en (a) e integrando, se obtiene para la determinación de α la ecuación

$$\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 = \frac{3w_0^2}{h^2} \quad (25)$$

¹ Se pueden obtener valores más precisos para las flechas y para los momentos flectores sustituyendo el valor aproximado de la fuerza longitudinal en (4) e integrando esta ecuación que da (12) y (9).

que puede ser resuelta en cada caso particular por el método de resolución sugerido para (24).

Cuando se conoce α el parámetro u se determina a partir de (d), la tensión máxima se calcula entonces utilizando las ecuaciones (16) y (17) y la flecha máxima mediante la ecuación (18).

Si durante la flexión, un borde se desplaza hacia otro una longitud Δ , debe usarse la ecuación

$$\frac{Sl(1 - \nu^2)}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \Delta \quad (g)$$

con preferencia a la ecuación (a) para los cálculos precedentes. Sustituyendo (b) en esta ecuación, se obtiene para determinar α , en el caso de los bordes simplemente apoyados

$$\alpha(1 + \alpha)^2 \frac{\alpha + 12 \frac{\Delta l}{\pi^2 h^2}}{\alpha} = \frac{3w_0^2}{h^2} \quad (26)$$

Si los bordes están empotrados se utiliza (f). Para determinar α se obtiene entonces

$$\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 \frac{\alpha + 12 \frac{\Delta l}{\pi^2 h^2}}{\alpha} = \frac{3w_0^2}{h^2} \quad (27)$$

Si se conocen las dimensiones de la placa, la carga q y el desplazamiento Δ , las ecuaciones (26) y (27) pueden resolverse fácilmente como en artículos anteriores. Si Δ es proporcional a S , el segundo factor del primer miembro de las ecuaciones (26) y (27) es una constante y puede determinarse como se ha visto en artículos anteriores. Así las ecuaciones pueden resolverse también fácilmente.

7. Placas largas rectangulares uniformemente cargadas, con pequeña curvatura cilíndrica inicial

Se ha visto en los apartados 2 y 3 que las tracciones S contribuyen a la resistencia de las placas neutralizando la flexión producida por las cargas transversales. Esta acción crece con la flecha. Se puede disminuir todavía la tensión máxima dando previamente una curvatura oportuna a la placa.

El efecto de tal curvatura inicial sobre las tensiones y las flechas puede estudiarse¹ utilizando el método de aproximaciones sucesivas del artículo precedente.

¹ Véase el estudio de Timoshenko en *Festschrift zum siebenzigsten Geburtstage August Foppls*, página 74, Berlín, 1923.

Sea una placa larga rectangular de bordes simplemente apoyados (fig. 13) la curvatura inicial está dada por la ecuación

$$w_1 = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (a)$$

Si se aplican las tracciones S en los bordes de la placa, las flechas iniciales (a) se reducirán en la relación $l/l + \alpha$, donde α tiene el mismo valor que en el apartado precedente¹ (pág. 40). La carga transversal asociada a las fuerzas S producirá las flechas que se pueden expresar aproximadamente por la ecuación (b) del apartado anterior. Así la flecha total de la placa indicada en la figura 13 por la línea de trazos es

$$w = \frac{\delta}{1 + \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \frac{w_0}{1 + \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} = \frac{\delta + w_0}{1 + \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (b)$$

Supongamos que los bordes longitudinales de la placa no se desplacen en su plano; la tracción S está determinada a partir de la condición que el alargamiento de la franja elemental debido a las fuerzas S es igual a la

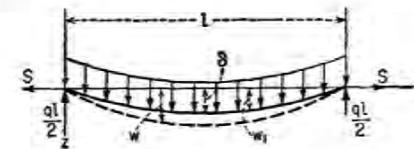


FIG. 13

diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformada de la franja y la longitud inicial de ésta. En el caso de pequeñas flechas esta diferencia se expresa por

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx \quad (c)$$

Sustituyendo las expresiones (a) y (b) de w y w_1 e integrando se tiene

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \left[\left(\frac{\delta + w_0}{1 + \alpha} \right)^2 - \delta^2 \right]$$

Poniendo λ igual al alargamiento $Sl(1 - \nu^2)$ de la banda elemental, se obtiene finalmente

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = \frac{3(\delta + w_0)^2}{h^2} - \frac{3\delta^2(1 + \alpha)^2}{h^2} \quad (28)$$

¹ Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 52, 1956.

Si se hace $\delta = 0$, esta ecuación se reduce a la ecuación (24) de una placa sin curvatura inicial.

Pongamos un ejemplo numérico para montar la influencia de la curvatura inicial sobre la tensión máxima, aplicando la ecuación (28). Sea una placa de acero de longitud 115 cm y de espesor $h = 0,95$ cm, sometida a la sección de una carga uniformemente repartida $q = 0,7$ kgf/cm². Si no hay flecha inicial $\delta = 0$ y la ecuación (28) toma la forma

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 290$$

de donde se deduce

$$\alpha = 5,97 \quad \text{y} \quad u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = 3,83$$

A partir de la ecuación (10) se obtiene

$$\sigma_1 = 790 \text{ kgf/cm}^2$$

y de (11)

$$\sigma_2 = 995 \text{ kgf/cm}^2.$$

La tensión máxima en la placa es

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 1785 \text{ kgf/cm}^2$$

Supongamos ahora que existe una flecha inicial en la placa tal que $\delta = h = 0,95$ cm. En este caso la ecuación (28) da

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 351,6 - 3(1 + \alpha)^2$$

sea

$$1 + \alpha = x$$

se obtiene

$$x^3 + 2x^2 = 351,6$$

de donde se tiene

$$x = 6,45 \quad \alpha = 5,45 \quad u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = 3,67$$

De la ecuación (10) se deduce la tensión de tracción

$$\sigma_1 = 714 \text{ kgf/cm}^2.$$

Para calcular la tensión de flexión no se tiene en cuenta más que la diferencia de las flechas

$$w - w_1 = \frac{w_0}{1 + \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} - \frac{\alpha \delta}{1 + \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad (d)$$

La tensión máxima de flexión correspondiente al primer término del segundo miembro de (d), es la misma que para una placa plana

con $u = 3,67$. De la tabla 1 se tiene $\psi_0 = 0,142$ y de la ecuación (11)

$$\sigma'_2 = 1071 \text{ kgf/cm}^2.$$

El momento flector correspondiente al segundo término de (d) es

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \left(-\frac{\alpha \delta}{1 + \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \right) = -\frac{\alpha \pi^2 \delta D}{(1 + \alpha) l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

Este momento es negativo y la tensión máxima correspondiente

$$\sigma'' = \frac{6}{h^2} \cdot \frac{\alpha \pi^2 \delta D}{(1 + \alpha) l^2} = 665 \text{ kgf/cm}^2$$

debe ser restada de la tensión de flexión σ'_2 , calculada más arriba. Por consiguiente la tensión máxima para una placa que tenía una flecha inicial es

$$\sigma_{\max} = 714 + 1071 - 665 = 1120 \text{ kgf/cm}^2$$

La comparación de este resultado con el obtenido para una placa plana demuestra que la curvatura inicial de la placa permite disminuir la tensión máxima de 1785 a 1120 kgf/cm². Este resultado se ha obtenido suponiendo que la flecha inicial es igual al espesor de la placa. Aumentando la curvatura de una placa, la tensión máxima puede reducirse aún más.

8. Flexión cilíndrica de una placa sobre cimentación elástica

Consideremos el problema de flexión de una placa larga rectangular uniformemente cargada, descansando toda la superficie sobre una cimentación elástica y rigidamente apoyada en los bordes (fig. 14).

Cortando como antes una franja elemental de esta placa, se puede asimilar a una

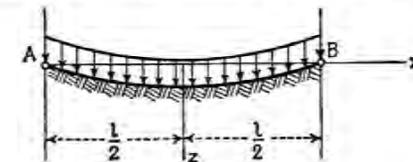


FIG. 14

viga sobre cimentación elástica. Supongamos que la reacción de la cimentación en todo punto es proporcional a la flecha w en este punto, diferenciando la ecuación (4) dos veces¹, se obtiene

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q - kw \quad (29)$$

donde q es la intensidad de la carga que actúa sobre la placa y k la reacción de la cimentación por unidad de superficie para una flecha igual a la unidad. Introduciendo la notación

$$\beta = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4D}} \quad (30)$$

¹ *Ibid.*, pág. 21.

la solución general de (29) se puede escribir,

$$w = \frac{q}{k} - C_1 \operatorname{sen} \frac{2\beta x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\beta x}{l} + C_2 \operatorname{sen} \frac{2\beta x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\beta x}{l} + C_3 \cos \frac{2\beta x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\beta x}{l} + C_4 \cos \frac{2\beta x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\beta x}{l} \quad (a)$$

Las cuatro constantes de integración se determinan a partir de las condiciones en los bordes de la franja. En el caso considerado la flecha es simétrica con relación al centro de la franja. Así, tomando los ejes de coordenadas como indica la figura 14, se llega a¹ que $C_2 = C_3 = 0$. C_1 y C_4 se determinan a partir de las condiciones de la flecha y el momento flector de la franja nulo en los extremos ($x = l/2$). De ahí

$$\begin{aligned} (w)_{x=l/2} &= 0 \\ \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=l/2} &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Sustituyendo w por su expresión (a) y recordando que $C_2 = C_3 = 0$, se obtiene

$$\frac{q}{k} + C_1 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sh} \beta + C_4 \cos \beta \operatorname{ch} \beta = 0 \quad (c)$$

$$C_1 \cos \beta \operatorname{ch} \beta - C_4 \operatorname{sen} \beta \operatorname{ch} \beta = 0$$

de donde se deduce

$$C_1 = -\frac{q}{k} \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sh}^2 \beta + \cos^2 \beta \operatorname{ch}^2 \beta} = -\frac{q}{k} \frac{2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sh} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}$$

$$C_4 = -\frac{q}{k} \frac{\cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sh}^2 \beta + \cos^2 \beta \operatorname{ch}^2 \beta} = -\frac{q}{k} \frac{2 \cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}$$

Sustituyendo los valores de las constantes en (a) y utilizando la ecuación (30), la flecha de la franja viene dada por la expresión

$$w = \frac{ql^4}{64D\beta^4} \left(1 - \frac{2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sh} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} \operatorname{sen} \frac{2\beta x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\beta x}{l} - \frac{2 \cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} \cos \frac{2\beta x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\beta x}{l} \right) \quad (d)$$

La flecha en el centro de la franja se obtiene para $x = 0$

$$(w)_{x=0} = \frac{5ql^4}{384D} \varphi(\beta) \quad (31)$$

donde

$$\varphi(\beta) = \frac{6}{5\beta^4} \left(1 - \frac{2 \cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} \right)$$

Para obtener los giros de los extremos de la placa se deriva (d) respecto a x y se hace $x = -l/2$. Así se obtiene

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=-l/2} = \frac{ql^3}{24D} \varphi_1(\beta) \quad (32)$$

donde

$$\varphi_1(\beta) = \frac{3}{4\beta^3} \frac{\operatorname{sh} 2\beta - \operatorname{sen} 2\beta}{\operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\beta}$$

¹ Se ha visto que los términos con los coeficientes C_2 y C_3 cambian de signo cuando se sustituye x por $-x$.

El momento flector en cualquier sección transversal de la franja se obtiene por la ecuación

$$M = -D \frac{d^2w}{dx^2}$$

Sustituyendo w por su expresión (d), se encuentra para el centro de la franja

$$(M)_{x=0} = \frac{ql^2}{8} \varphi_2(\beta) \quad (33)$$

donde

$$\varphi_2(\beta) = \frac{2}{\beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\beta}$$

Para simplificar el cálculo de las flechas y las tensiones los valores numéricos de las funciones φ , φ_1 y φ_2 están dados en la tabla 2.

TABLA 2

β	φ	φ_1	φ_2	β	φ	φ_1	φ_2
0,1	1,000	1,000	1,000	1,6	0,186	0,200	0,164
0,2	0,999	0,999	0,999	1,7	0,151	0,166	0,129
0,3	0,996	0,995	0,995	1,8	0,124	0,138	0,101
0,4	0,984	0,983	0,983	1,9	0,102	0,116	0,079
0,5	0,961	0,961	0,959	2,0	0,084	0,099	0,062
0,6	0,921	0,923	0,919	2,2	0,058	0,072	0,037
0,7	0,863	0,866	0,859	2,4	0,042	0,055	0,021
0,8	0,787	0,791	0,781	2,6	0,029	0,043	0,011
0,9	0,698	0,702	0,689	2,8	0,022	0,034	0,005
1,0	0,602	0,609	0,591	3,0	0,016	0,028	0,002
1,1	0,508	0,517	0,494	3,2	0,012	0,023	0,000
1,2	0,421	0,431	0,405	3,4	0,010	0,019	-0,001
1,3	0,345	0,357	0,327	3,6	0,007	0,016	-0,002
1,4	0,281	0,294	0,262	3,8	0,006	0,014	-0,002
1,5	0,228	0,242	0,208	4,0	0,005	0,012	-0,002

Para valores pequeños de β es decir para cimentaciones poco resistentes, fácilmente las funciones φ y φ_2 no difieren mucho de la unidad. Así la flecha máxima y las tensiones de flexión son muy parecidas a las de una franja simplemente apoyada sin cimentación elástica. Si β aumenta, la reacción de la cimentación es cada vez más importante.

Se encuentran condiciones iguales a las de la figura 14, cuando una placa larga rectangular de anchura l está cargada sobre una cimentación elástica por cargas uniformemente distribuidas a lo largo de los bordes y de valor P por unidad de longitud (fig. 15). La placa se hunde en la cimentación elástica y flexa, como indica

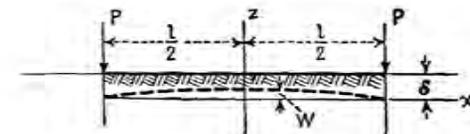


FIG. 15

la línea de trazos. Si δ designa la flecha en los bordes de la placa, la reacción de la cimentación en todo punto es

$$k(\delta - w) = k\delta - kw$$

donde w está dada por la ecuación (d) con $q = k\delta$. El valor de δ se obtiene igualando la carga a la reacción de la cimentación. Por consiguiente

$$P = \frac{k\delta l}{2} - k \int_0^{l/2} w \, dx$$

Se pueden estudiar de la misma forma las placas apoyadas sobre cimentaciones elásticas pero con otras condiciones en los bordes longitudinales.

TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS

CAPÍTULO 2

S. TIMOSHENKO

Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER

Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por

F. J. MEDINA SALANOVA

Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puertos
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

Flexión pura de placas

9. Pendiente y curvatura de placas ligeramente flexadas

Al estudiarse las pequeñas flechas de una placa, hemos tomado el *plano medio* de la placa antes de la flexión como plano xy . Durante la flexión las partículas que se encontraban en el plano xy sufren pequeños desplazamientos w perpendiculares al plano xy y forman la *superficie media* de la placa. Estos desplazamientos de la superficie media se llamarán en lo sucesivo *flechas de la placa*. Si se toma una sección normal de la placa paralela al plano xz [fig. 16 a)], se ve que la pendiente de la superficie media en la dirección de las x es $i_x = \partial w / \partial x$. Igualmente la pendiente en la dirección de las y es $i_y = \partial w / \partial y$. Sea an una dirección cualquiera en el plano xy [fig. 16 b)] y α el ángulo que forma con el eje de las x , la diferencia entre las flechas de dos puntos próximos a y a_1 , según an , es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

y la pendiente correspondiente

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \quad (a)$$

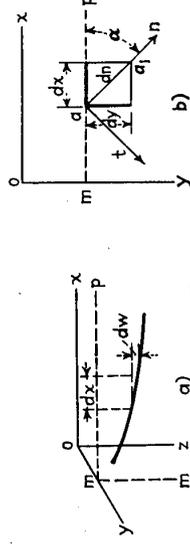


FIG. 16

La dirección a_1 correspondiente a la pendiente máxima se obtiene anulando la derivada respecto a a en la ecuación (a). De este modo se tiene

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial w / \partial y}{\partial w / \partial x} \quad (b)$$

Sustituyendo los valores correspondientes de $\operatorname{sen} \alpha_1$ y $\operatorname{cos} \alpha_1$ en (a), se tiene para la pendiente máxima la expresión

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} \quad (c)$$

Anulando (a) se determina la dirección correspondiente a la pendiente nula. El ángulo correspondiente α_2 está dado por la ecuación

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = - \frac{\partial w / \partial x}{\partial w / \partial y} \quad (d)$$

A partir de las ecuaciones (b) y (d) se concluye

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$$

expresión que demuestra que las direcciones de pendiente nula y pendiente máxima son perpendiculares.

Para determinar la curvatura de la superficie de la placa, hay que tener en cuenta que las flechas son muy pequeñas. En este caso, la pendiente de la superficie en toda dirección puede considerarse igual al ángulo que forma la tangente a la superficie con el plano xy , y su cuadrado es despreciable frente a la unidad. La curvatura de la superficie en un plano paralelo al plano xz (fig. 16), es entonces igual a

$$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (e)$$

Consideramos la curvatura positiva si la superficie es convexa hacia abajo. La ecuación (e) está precedida del signo menos porque la flecha es convexa hacia abajo (v. fig. 16) y por consiguiente la derivada segunda $\partial^2 w / \partial x^2$ es negativa.

De la misma manera, se tiene para la curvatura en un plano paralelo al yz .

$$\frac{1}{r_y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (f)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las utilizadas en el estudio de la curvatura de una viga flexada.

Para la curvatura de la superficie media según una dirección cualquiera (fig. 16) se tiene

$$\frac{1}{r_n} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

Sustituyendo $\partial w / \partial n$ por su valor según (a) y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha$$

se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n} &= - \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha \right) \\ &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \\ &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha - \frac{1}{r_{xy}} \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{1}{r_y} \operatorname{sen}^2 \alpha \end{aligned} \quad (g)$$

Se ve que la curvatura en una dirección n en un punto de la superficie media puede calcularse si se conocen en dicho punto las curvaturas

$$\frac{1}{r_x} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{1}{r_y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

y el valor

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (h)$$

que se denomina *torsión* con respecto a los ejes x e y .

Si en lugar de la dirección an [fig. 16 b)], tomamos la dirección at perpendicular a an , la curvatura en esta nueva dirección se obtendrá en la expresión (g) poniendo $\pi/2 + \alpha$ en lugar de α . Así se obtiene

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{r_{xy}} \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{1}{r_y} \operatorname{cos}^2 \alpha \quad (i)$$

Sumando las expresiones (g) e (i) tenemos

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \quad (34)$$

que pone de manifiesto en que cualquier punto de la superficie media la suma de las curvaturas según las direcciones perpendiculares tales como n y t es independiente del ángulo α . Esta suma se llama *curvatura media* de la superficie en un punto.

La torsión en a con respecto a las direcciones an y at es

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dn} \right)$$

Para calcular la derivada respecto a t , debe notarse que la dirección at es perpendicular a an . Así se obtiene la derivada buscada poniendo $\pi/2 + \alpha$

en lugar de α en la ecuación (a). De este modo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{nt}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) + \cos 2\alpha \frac{1}{r_{xy}} \end{aligned} \quad (j)$$

En el estudio sucesivo interesará determinar en función de α las direcciones en que la curvatura es máxima o mínima y hallar los correspondientes valores de la curvatura. Se obtiene la ecuación necesaria para determinar α , igualando a 0 la derivada respecto a α de la expresión (g) que da

$$\frac{1}{r_x} \sin 2\alpha + \frac{2}{r_{xy}} \cos 2\alpha - \frac{1}{r_y} \sin 2\alpha = 0 \quad (k)$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2}{\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}} \frac{r_{xy}}{1} \quad (35)$$

De esta ecuación se obtienen dos valores de α que difieren en $\pi/2$. Sustituyéndolos en (g) se hallan dos valores de $1/r_n$, correspondientes a las curvaturas máxima y mínima en el punto a . Estas dos curvaturas se denominan *curvaturas principales* de la superficie, y los planos correspondientes *naz* y *taz*, *planos principales de curvatura*.

Teniendo en cuenta que el primer miembro de la ecuación (k) es igual al doble de la expresión (j) se deduce que si las direcciones *an* y *at* (fig. 16) están en los planos principales la torsión correspondiente $1/r_{nt}$ es nula.

Podemos utilizar un círculo similar al círculo de Mohr que representa las tensiones combinadas, para mostrar cómo la curvatura y la torsión de una superficie varían con el ángulo α . Para simplificar el estudio supondremos los planos coordenados xz e yz paralelos a los planos principales de curvatura en el punto a . Entonces

$$\frac{1}{r_{xy}} = 0$$

y de las ecuaciones (g) y (j) se obtiene para un ángulo α

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n} &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \\ \frac{1}{r_{nt}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (36)$$

¹ Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte I, 3.ª ed., pág. 40, 1955.

Tomando las curvaturas como abscisas y las torsiones como ordenadas y construyendo un círculo de diámetro $1/r_x - 1/r_y$ como indica la figura 17 vemos que el punto A definido por el ángulo 2α tiene la abscisa

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \overline{OC} + \overline{CB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \cos 2\alpha \\ &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

y la ordenada

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \sin 2\alpha$$

Comparando estos resultados con las fórmulas (36) se llega a la conclusión de que las ordenadas del punto A definen la curvatura y torsión de la superficie para cualquier valor del ángulo α . Se ve que la torsión máxima, representada por el radio del círculo, se produce cuando $\alpha = \pi/4$, esto es, cuando se consideran dos direcciones perpendiculares, bisectrices de los ángulos formados por los planos principales.

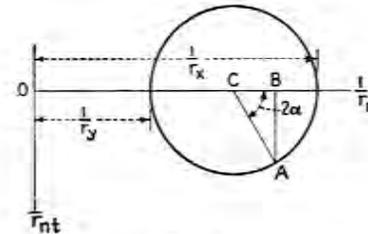


Fig. 17

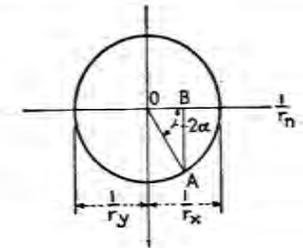


Fig. 18

En nuestro ejemplo la curvatura en cualquier dirección es positiva; de ahí que la superficie está flexada con la convexidad hacia abajo. Si las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ son ambas negativas, la curvatura en cualquier dirección es también negativa, y tenemos una flexión de placa convexa hacia arriba. Las superficies en que las curvaturas en todos los planos tienen el mismo signo se llaman *sinclásticas*. A veces encontramos superficies en que las dos curvaturas principales tienen signos contrarios. Por ejemplo una silla de montar. Tales superficies se llaman *anticlásticas*. El círculo de la figura 18 representa el caso particular de tales superficies en que $1/r_y = -1/r_x$. Se ve que en este caso la curvatura se anula para $\alpha = \pi/4$ y para $\alpha = 3\pi/4$ y la torsión correspondiente vale $\pm 1/r_y$.

10. Relaciones entre momentos flectores y curvatura en la flexión pura de placas

En el caso de flexión pura de barras prismáticas una solución rigurosa para la distribución de tensiones se obtiene haciendo la hipótesis de que las secciones transversales de la barra permanecen planas durante la flexión y únicamente giran alrededor de su fibra neutra de modo que permanecen siempre normales a la deformada. La combinación de tal flexión en dos direcciones perpendiculares nos lleva a la flexión pura de placas. Comencemos con la flexión pura de una placa rectangular debida a momentos uniformemente distribuidos en los bordes, como indica la figura 19. Tomamos el plano xy como plano medio de la placa antes de la flexión y los ejes x e y según dos de los bordes de la placa. El eje z es entonces perpendicular al plano medio y positivo hacia abajo. Sea M_x el momento flector por unidad de longitud que actúa sobre un borde paralelo al eje y y M_y el momento flector por unidad de longitud que actúa sobre un borde paralelo al eje x . Estos momentos los consideraremos positivos cuando están dirigidos como se indica en la figura, esto es, cuando producen compresión en la cara superior de la placa y tracción en la inferior. El espesor de la placa lo representaremos como antes por h y lo consideramos pequeño en comparación con las otras dimensiones.

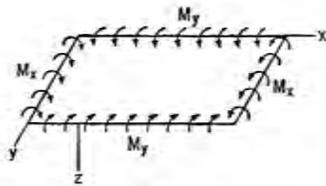


Fig. 19

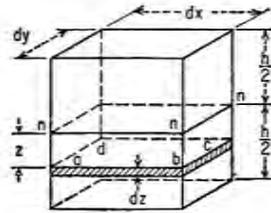


Fig. 20

Consideremos un elemento separado de la placa por dos pares de planos paralelos a los planos xz e yz como indica la figura 20. Puesto que el caso de la figura 19 es el de la combinación de dos flexiones uniformes las condiciones tensionales son idénticas en todos los elementos como indica la figura 20 y se tiene una flexión uniforme de la placa. Haciendo la hipótesis de que durante la flexión de la placa las caras laterales del elemento permanecen planas y giran sobre las fibras neutras nm de tal modo que permanecen normales a la superficie media deformada de la placa, puede concluirse que el plano medio de la placa no sufre variación alguna de dimensiones en esta flexión y la superficie media es además *superficie neutra*¹. Siendo $1/r_x$ y $1/r_y$ como antes, las curvaturas de la superficie neutra

¹ En el apartado 13 se demuestra que esta conclusión es suficientemente aproximada si las flechas son pequeñas en comparación con el espesor h .

en secciones paralelas a los planos xz e yz , respectivamente. Entonces las deformaciones longitudinales en las direcciones x e y de una lámina elemental $abcd$ (fig. 20) a una distancia z de la superficie neutra son, como en el caso de una viga,

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad (a)$$

Utilizando ahora la ley de Hooke [ec. (1)], las tensiones correspondientes en la lámina $abcd$ son

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \end{aligned} \quad (b)$$

Estas tensiones son proporcionales a la distancia z de la lámina $abcd$ a la superficie neutra y dependen de los valores de las curvaturas de la placa flexada.

Las tensiones normales distribuidas sobre las caras laterales del elemento en la figura 20 pueden reducirse a pares de fuerzas, cuyo valor total por unidad de longitud debe ser evidentemente igual a los momentos externos M_x y M_y . De este modo obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dy \, dz &= M_x \, dy \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dx \, dz &= M_y \, dx \end{aligned} \quad (c)$$

Sustituyendo las expresiones (b) de σ_x y σ_y , se obtiene

$$M_x = D \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (37)$$

$$M_y = D \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (38)$$

donde D es la rigidez a flexión de la placa definida por la ecuación (3), y w indica las flechas de la placa en la dirección z .

Consideremos ahora las tensiones que actúan sobre una sección de la lámina $abcd$, paralela al eje z y oblicua respecto a los ejes x e y . Si acd (fig. 21) representa una porción de la lámina cortada por tal sección, la tensión que actúa sobre ac puede ser determinada por medio de las ecuaciones de la estática. Reduciendo esta tensión a una componente normal σ_n y una componente tangencial τ_{nt} , los valores de estas componentes se obtienen proyectando las fuerzas que actúan sobre el elemento acd sobre las direcciones n y t respectivamente que dan las conocidas ecuaciones.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha \\ \tau_{nt} &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (d)$$

en que α es el ángulo entre la normal n y el eje x o entre la dirección t y el eje y [fig. 21 a)]. El ángulo se considera positivo si se mide en el sentido de las agujas del reloj.

Considerando todas las láminas similares a acd en la figura 21 b), a lo largo del espesor de la placa, las tensiones normales σ_n dan el momento flector que actúa sobre la sección ac de la placa, el valor del cual por unidad de longitud según ac es

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z \, dz = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha \quad (39)$$

Las tensiones cortantes τ_{nt} dan el momento torsor que actúa sobre la sección ac de la placa, cuyo valor por unidad de longitud según ac es

$$M_{nt} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z \, dz = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (M_x - M_y) \quad (40)$$

Los signos de M_n y M_{nt} están elegidos de tal modo que los valores positivos de estos momentos están representados por valores en las direc-

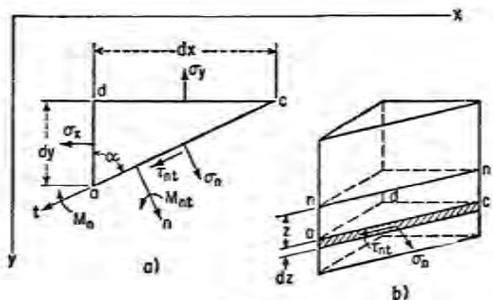


FIG. 21

ciones positivas de n y t [fig. 21 a)] si se utiliza la regla del tornillo a izquierda. Cuando α vale 0 o π la ecuación (39) da $M_n = M_x$. Para $\alpha = \pi/2$ ó $3\pi/2$ se obtiene $M_n = M_y$. Los momentos M_{nt} se anulan para estos valores de α . Así se obtienen las condiciones indicadas en la figura 19.

Las ecuaciones (39) y (40) son similares a las ecuaciones (36) y por medio de ellas pueden calcularse los momentos flector y torsor para cualquier valor de α . Podemos usar también con el mismo objeto el método gráfico y hallar los valores de M_n y M_{nt} mediante el círculo de Mohr que puede ser construido como se indicó en el apartado anterior, tomando M_x como abscisa, y M_y como ordenada. El diámetro del círculo será igual a $M_x - M_y$ como indica la figura 22. Entonces las coordenadas OB y AB de un punto A , definido por el ángulo 2α , dan los momentos M_n y M_{nt} respectivamente.

Representemos ahora M_n y M_{nt} en función de las curvaturas y torsión de la superficie media de la placa, sustituyendo en la ecuación (39) M_x y M_y por sus expresiones (37) y (38) hallamos

$$M_n = D \left(\frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \right) + \nu D \left(\frac{1}{r_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \cos^2 \alpha \right)$$

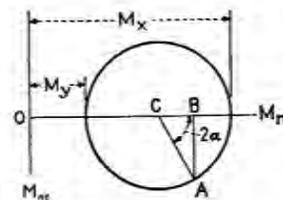


FIG. 22

Utilizando la primera de las ecuaciones (36) del apartado anterior, resulta que las expresiones entre paréntesis representan las curvaturas de la superficie media en las direcciones n y t respectivamente. De ahí que

$$M_n = D \left(\frac{1}{r_n} + \nu \frac{1}{r_t} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (41)$$

Para obtener la expresión correspondiente para el momento torsor M_{nt} , consideremos la deformación de una lámina $abcd$ con los lados ab y ad paralelos a las direcciones n y t y a una distancia z del plano medio (fig. 23). Durante la flexión de la placa los puntos a, b, c y d sufren pequeños desplazamientos. Sean u y v las componentes del desplazamiento del punto a en las direcciones n y t respectivamente. Entonces el desplazamiento de d en la dirección n es $u + (\partial u / \partial t) dt$ y el desplazamiento de b en la dirección t es $v + (\partial v / \partial n) dn$. Debido a estos desplazamientos, se obtiene una deformación tangencial

$$\gamma_{nt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \quad (e)$$

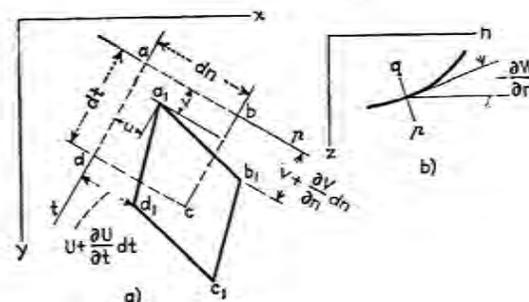


FIG. 23

La correspondiente tensión tangencial es

$$\tau_{nt} = G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \right) \quad (f)$$

De la figura 23 b), que representa la sección de la superficie media por un plano normal a través del eje n , se puede ver que el ángulo de giro en el sentido de las agujas del reloj de un elemento pq , que inicialmente era perpendicular al plano xy respecto a un eje perpendicular al plano nz es igual a $-\partial w/\partial n$. Debido a este giro un punto del elemento a una distancia z de la superficie neutra tiene un desplazamiento en la dirección n que vale

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial n}$$

Considerando la sección normal a través del eje t se puede demostrar que el mismo punto tiene un desplazamiento en la dirección t que vale

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial t}$$

Sustituyendo estos valores de u y v en la expresión (f) se tiene

$$\tau_{nt} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (42)$$

y la expresión (40) del momento flector toma la forma

$$M_{nt} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z \, dz = \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \quad (43)$$

Se ve que el momento torsor para las direcciones perpendiculares dadas n y t es proporcional a la torsión de la superficie media correspondiente a las mismas direcciones. Cuando las direcciones n y t coinciden con los ejes x e y sólo existen los momentos flectores M_x y M_y que actúan sobre las secciones perpendiculares a esos ejes (fig. 19). Por consiguiente la correspondiente torsión es nula, y las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ son las curvaturas principales de la superficie media de la placa. Estas curvaturas pueden calcularse por las ecuaciones (37) y (38) si son dados los momentos flectores M_x y M_y . La curvatura en cualquier otra dirección definida por el ángulo α , puede calcularse por la primera de las ecuaciones (36) o tomarse de la figura 17.

En cuanto a las tensiones en una placa sometida a flexión pura, puede concluirse de la primera de las ecuaciones (d) que la máxima tensión normal actúa sobre secciones paralelas a los planos xz o yz . Los valores de estas tensiones se obtienen en las ecuaciones (b) haciendo $z = h/2$ y utilizando las ecuaciones (37) y (38). De este modo se halla

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6M_x}{h^2} \quad (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_y}{h^2} \quad (44)$$

Si las tensiones son de signo contrario, la máxima tensión tangencial actúa en el plano bisector de los planos xz e yz y vale

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{3(M_x - M_y)}{h^2} \quad (45)$$

Si las tensiones (44) son del mismo signo, la máxima tensión tangencial actúa en el plano bisector de los planos xy y xz o en el bisector de los planos xy e yx y vale $1/2(\sigma_y)_{\max}$ o $1/2(\sigma_x)_{\max}$ según cuál de las dos tensiones principales $(\sigma_y)_{\max}$ o $(\sigma_x)_{\max}$ sea mayor.

II. Casos particulares de flexión pura

En el estudio del apartado anterior se ha comenzado con el caso de una placa rectangular con momentos flectores uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes. Para obtener un caso general de flexión pura de una placa, imaginemos una porción de forma cualquiera separada de la placa considerada en la figura 19 por una superficie cilíndrica o prismática perpendicular a la placa. Las condiciones de flexión de esta porción permanecerán invariables con tal que a lo largo del contorno de la porción aislada de placa estén distribuidos momentos flectores y torsores que cumplan las ecuaciones (39) y (40). Así llegamos al caso de flexión pura de una placa de forma cualquiera y se llega a la conclusión de que se produce siempre si sobre los bordes de la placa actúan momentos flectores M_n y momentos torsores M_{nt} distribuidos en la forma dada por las ecuaciones (39) y (40).

Consideremos como primer ejemplo el caso particular de que

$$M_x = M_y = M$$

De las ecuaciones (39) y (40) puede deducirse que en este caso para una placa de cualquier forma los momentos flectores están uniformemente distribuidos a lo largo del contorno y los momentos torsores se anulan. De las ecuaciones (37) y (38) se deduce que

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_y} = \frac{M}{D(1+\nu)} \quad (46)$$

esto es, la placa se deforma según una superficie esférica, cuya curvatura está dada por la ecuación (46).

En el caso general en que M_x y M_y son diferentes hacemos

$$M_x = M_1 \quad \text{y} \quad M_y = M_2$$

Entonces de las ecuaciones (37) y (38) deducimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{M_1 - \nu M_2}{D(1 - \nu^2)} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M_2 - \nu M_1}{D(1 - \nu^2)} \end{aligned} \quad (a)$$

y además

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (b)$$

Integrando estas ecuaciones hallamos

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1 - \nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1 - \nu^2)} y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3 \quad (c)$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son constantes de integración. Estas constantes definen el plano a partir del cual se miden las flechas w . Si este plano se toma tangente a la superficie media de la placa en el origen, las constantes de integración se anulan y la deformada tiene por ecuación

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1 - \nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1 - \nu^2)} y^2 \quad (d)$$

En el caso particular en que $M_1 = M_2 = M$ de (d) se obtiene

$$w = -\frac{M(x^2 + y^2)}{2D(1 + \nu)} \quad (e)$$

esto es, un paraboloides de revolución en lugar de la superficie esférica dada por la expresión (46). La contradicción de estos resultados proviene del uso de las expresiones aproximadas $\partial^2 w / \partial x^2$ y $\partial^2 w / \partial y^2$ para las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ la obtener la ecuación (e). Estas derivadas segundas de la flecha se usarán también en sucesivos estudios con preferencia a las expresiones exactas de las curvaturas, de acuerdo con las hipótesis del apartado 9. Esto simplifica las ecuaciones fundamentales de la teoría de placas.

Volviendo ahora a la ecuación (d), sea $M_2 = -M_1$. En este caso las curvaturas principales de las ecuaciones (a) son

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_1}{D(1 - \nu)} \quad (f)$$

y obtenemos una superficie antielástica cuya ecuación es

$$w = -\frac{M_1}{2D(1 - \nu)} (x^2 - y^2) \quad (g)$$

Las rectas paralelas al eje x se deforman según parábolas convexas hacia abajo (fig. 24), mientras las rectas paralelas al eje y lo hacen según parábolas convexas hacia arriba. Los puntos de las bisectrices de los ángulos formados por los ejes x e y , verifican $x = y$ o $x = -y$; por lo tanto, las

flechas a lo largo de estas líneas como puede verse en la ecuación (g) son nulas. Todas las rectas paralelas a estas bisectrices permanecen rectas durante la flexión y únicamente giran. Un rectángulo $abcd$ limitado por tales rectas sufrirá una torsión como indica la figura 24. Veamos las seccio-

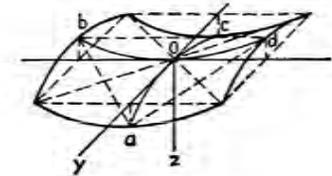


FIG. 24

nes normales a la placa por las rectas ab , bc , cd y ad . De las ecuaciones (39) y (40) se deduce que los momentos flectores a lo largo de dichas secciones son nulos y los momentos torsores valen M_1 en las secciones ad y $-M_1$ en las secciones ab y cd . Así la porción $abcd$ de la placa está en las condiciones de una placa sometida a flexión pura debida a la aplicación de momentos torsores uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes [fig. 25 a)]. Estos momentos torsores son debidos a las tensiones tangenciales horizontales distribuidas de modo continuo sobre el borde [ec. (40)]. Esta distribución de tensiones horizontales puede ser sustituida por esfuerzos cortantes verticales que producen el mismo efecto que dicha distribución de tensiones. Para demostrarlo, divídase el borde ab en rectángulos infinitamente estrechos tales como el $mnpq$ de la figura 25 b). Si Δ es el ancho elemental del rectángulo, el correspondiente par torsor es $M_1 \Delta$ y

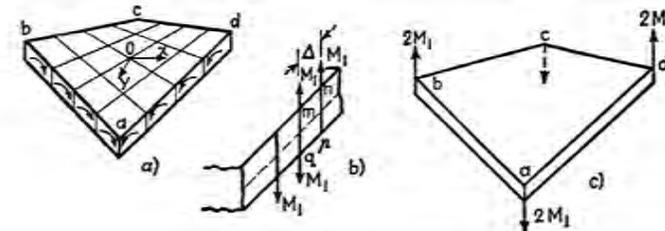


FIG. 25

puede ser debido a dos esfuerzos verticales del valor M_1 y sentidos contrarios que actúan en los lados verticales del rectángulo. Esta sustitución de las fuerzas horizontales distribuidas por un sistema estáticamente equivalente de dos fuerzas verticales, no puede ocasionar modificación sensible en la placa, excepto a distancias comparables con el espesor de la placa¹, que por hipótesis es pequeño.

¹ Esto se deduce del principio de Saint Venant. Véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.^a ed., pág. 33, 1951.

Haciendo lo mismo con todos los rectángulos, deducimos que todas las fuerzas M_1 que actúan según los lados verticales de los rectángulos se compensan entre sí y quedan sólo dos fuerzas M_1 en las esquinas a y d . Haciendo la misma transformación en los restantes bordes de la placa, se deduce que la flexión de una placa según una superficie anticlástica puede producirse por fuerzas concentradas en las esquinas [fig. 25 c)]. Tal experiencia es relativamente sencilla de ejecutar y fue utilizada para la verificación experimental de la teoría de flexión de placas antes estudiadas². En estas experiencias se midieron las flechas de la placa a lo largo de la línea bod (fig. 24) y se halló que estaban de acuerdo con los resultados teóricos deducidos de la ecuación (g). Las únicas discrepancias se encontraron cerca de los bordes, y eran más pronunciadas en el caso de placas relativamente gruesas, como era de esperar del anterior estudio de la transformación de los pares de torsión a lo largo de los bordes.

Como último ejemplo consideremos la flexión de una placa (fig. 19) según una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje y . En tal caso $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ y de las ecuaciones (37) y (38) se deduce

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad M_y = -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (h)$$

Se ve que para producir la flexión de la placa según una superficie cilíndrica debemos aplicar no sólo momentos M_y sino también momentos M_x . Sin estos últimos la placa flexa según una superficie anticlástica³. La primera de las ecuaciones (h) ha sido ya usada en el capítulo 1 al estudiar la flexión de una placa rectangular larga según una superficie cilíndrica. Aunque en tal estudio se tenía una flexión debida a cargas laterales, no había sólo tensiones de flexión, sino también tensiones tangenciales verticales actuando sobre secciones perpendiculares al eje x ; puede deducirse de una comparación con la teoría ordinaria de vigas, que el efecto de los esfuerzos cortantes es despreciable en el caso de placas delgadas y las ecuaciones obtenidas para el caso de flexión pura pueden utilizarse con suficiente aproximación para el caso de cargas laterales.

12. Energía de deformación en la flexión pura de placas

Si una placa flexa sometida a momentos flectores M_x y M_y uniformemente distribuidos (fig. 19) de tal modo que los planos xz e yz son los

¹ Los primeros que indicaron esta transformación del sistema de fuerzas que actúa sobre los bordes fueron Lord Kelvin y P. G. Tait; véase *Treatise on Natural Philosophy*, vol. 1, parte II, pág. 203, 1883.

² Tales experiencias fueron hechas por A. Nádai, *Forschungsarb.*, vols. 170 y 171, Berlín, 1915; véase también su libro *Elastische Platten*, pág. 42, Berlín, 1925.

³ Estamos siempre en la hipótesis de flechas pequeñas o, en otro caso, flexión según una superficie desarrollable. El caso de flexión según una superficie no desarrollable cuando las flechas no son pequeñas se estudiará más adelante (véase pág. 64).

planos principales de la deformada, la energía de deformación almacenada en un elemento tal como el indicado en la figura 20, se determina calculando el trabajo producido por los momentos $M_x dy$ y $M_y dx$ sobre el elemento durante la flexión de la placa. Dado que las caras del elemento permanecen planas, el trabajo producido por los momentos $M_x dy$ se determina tomando la mitad del producto del momento y el ángulo entre las correspondientes caras del elemento después de la flexión. Puesto que $-\partial^2 w / \partial x^2$ representa la curvatura de la placa en el plano xz , el ángulo correspondiente a los momentos $m_x dy$ es $-(\partial^2 w / \partial x^2) dx$, y el trabajo producido por estos momentos es

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$$

Una expresión análoga se obtiene también para el trabajo producido por los momentos $M_y dx$. Por lo tanto el trabajo total, igual a la energía de deformación del elemento, es

$$dV = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Sustituyendo los momentos por sus expresiones (37) y (38) la energía de deformación de los elementos viene dada en la forma siguiente

$$dV = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (a)$$

Siendo, en el caso de flexión pura, constante la curvatura en toda la superficie de la placa, la energía total de deformación de la placa se obtendrá sustituyendo el área elemental $dx dy$ por la superficie A de la placa en la expresión (a). Queda

$$V = \frac{1}{2} DA \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (47)$$

Si las direcciones x e y no coinciden con los planos principales de curvatura, actuarán sobre las caras del elemento (fig. 20) no sólo los momentos flectores $M_x dy$ y $M_y dx$ sino también los momentos torsores $M_{xy} dy$ y $M_{yx} dx$. La energía de deformación debida a los momentos flectores viene dada por la expresión (a). Para determinar la expresión de la energía de deformación debida a los momentos torsores $M_{xy} dy$ hay que notar que el correspondiente ángulo de giro es igual a la derivada de la pendiente $\partial w / \partial y$, respecto x , multiplicada por dx ; de ahí que la energía de deformación debida a $M_{xy} dy$ es

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy$$

que aplicando la ecuación (43) toma la forma

$$\frac{1}{2} D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

La misma cantidad de energía producen los momentos $M_{xy} dx$ de modo que la energía de deformación debida a ambos momentos torsores es

$$D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (b)$$

Puesto que la torsión no afecta al trabajo producido por los momentos flectores, la energía total de deformación de un elemento de placa se obtiene sumando la energía de flexión (a) y la energía de torsión (b). Así obtenemos

$$dV = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

o bien

$$dV = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (48)$$

La energía de deformación de toda la placa se obtiene ahora sustituyendo el área elemental $dx dy$ por la superficie A de la placa. La expresión (48) se utilizará más adelante en casos más complicados de flexión de placas.

13. Límites de aplicación de las fórmulas deducidas

En el estudio de la distribución de tensiones en el caso de flexión pura (ap. 10) se ha supuesto que la superficie media es la superficie neutra de la placa. Esta condición sólo se cumple rigurosamente si la superficie media de la placa flexada es una *superficie desarrollable*. Considerando, por ejemplo, la flexión pura de una placa según una superficie cilíndrica, la única limitación de la aplicación de la teoría será el requisito de que el espesor sea pequeño en comparación con los radios de curvatura. En los problemas de flexión de placas según superficies cilíndricas debida a cargas laterales estudiados en el capítulo anterior, se ha exigido que las flechas fueran pequeñas en comparación con el ancho, puesto que sólo bajo esta condición es bastante aproximada a la expresión adoptada para la curvatura.

Si una placa flexa según una superficie no desarrollable la superficie media sufre deformaciones longitudinales durante la flexión y la teoría de la flexión pura que hemos desarrollado será suficientemente aproximada sólo si las tensiones correspondientes a este alargamiento de la superficie

media son pequeñas en comparación con las máximas tensiones dadas por las ecuaciones (44) o, lo que es lo mismo, si la deformación en la superficie media es pequeña en comparación con la máxima deformación de flexión $h/2r_{\min}$. Este requisito impone una nueva limitación a las flechas de la placa, a saber, que las flechas w de la placa sean pequeñas en comparación con su espesor h .

Para demostrarlo sea la flexión de una placa circular por momentos flectores M uniformemente distribuidos en el contorno. La deformada, para pequeñas flechas, es esférica con radio r definido por la ecuación (46). Sea AOB (fig. 26) una sección diametral de la placa circular flexada, a su radio exterior antes de la flexión y δ la flecha en el centro. Supongamos primero que no hay alargamiento de la superficie media de la placa en dirección radial. En tal caso el arco OB debe ser igual al radio inicial

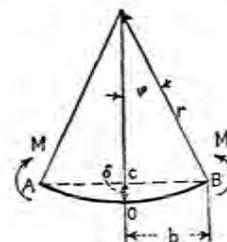


FIG. 26

exterior a . El ángulo φ y el radio b de la placa después de la flexión vienen dados por las relaciones

$$\varphi = \frac{a}{r} \quad b = r \sin \varphi$$

Se ve que la flexión supuesta de la placa implica una deformación de compresión de la superficie media en la dirección de las circunferencias. El valor de esta deformación en el borde es

$$\epsilon = \frac{a - b}{a} = \frac{r\varphi - r \sin \varphi}{r\varphi} \quad (a)$$

Para pequeñas flechas se puede tomar

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$$

valor que sustituido en la ecuación (a) da

$$\epsilon = \frac{\varphi^2}{6} \quad (b)$$

Para representar esta deformación en función de la flecha máxima δ , notemos que

$$\delta = r(1 - \cos \varphi) \approx \frac{r\varphi^2}{2}$$

De donde

$$\varphi^2 = \frac{2\delta}{r}$$

Sustituyendo en la ecuación (b) se obtiene finalmente

$$\epsilon = \frac{\delta}{3r} \quad (49)$$

Esto representa un límite superior para la deformación del borde de la placa en el sentido de la circunferencia. Esto se ha deducido en la hipótesis de que la deformación radial es nula. En las condiciones reales hay deformación radial y la compresión en el sentido de la circunferencia es menor¹ que la dada por la ecuación (49).

De este estudio se deduce que las ecuaciones obtenidas en el apartado 10, en la hipótesis de que la superficie media de la placa flexada es su superficie neutra, son suficientemente aproximadas siempre que la deformación dada por la ecuación (49) sea pequeña en comparación con la máxima deformación de flexión $h/2r$, o lo que es lo mismo, si la flecha δ es pequeña en comparación con el espesor h de la placa. Similar conclusión puede obtenerse para el caso más general de flexión pura de una placa en que las curvaturas principales no son iguales². Generalizando estas conclusiones podemos afirmar que las ecuaciones del apartado 10 pueden aplicarse con suficiente aproximación siempre que las flechas de una placa desde su situación inicial plana o de forma de superficie desarrollable sean pequeñas en comparación con el espesor de la placa.

14. Tensiones térmicas en placas con bordes coaccionados

La ecuación (46) para la flexión de una placa según una superficie esférica puede emplearse para calcular las tensiones térmicas en una placa para ciertos casos de calentamiento no uniforme. Supongamos que la variación de temperatura a través del espesor de la placa sigue una ley lineal y que la temperatura no varía en planos paralelos a las caras de la placa. En tal caso, midiendo la temperatura respecto a las de la superficie media, se puede afirmar que las dilataciones y contracciones son proporcionales a la distancia de la superficie media. Así se tienen exactamente las mismas condiciones que en la flexión pura de una placa según una superficie esférica³. Sea α el coeficiente de dilatación del material que forma la placa,

¹ Este punto se discutirá más adelante (véase ap. 96).

² Véase Kelvin y Tait, *Obra citada*, vol. 1, parte II, pág. 172.

³ Se supone que las flechas son pequeñas en comparación con el espesor de la placa.

y t la diferencia de temperatura entre las caras extremas de la placa. La diferencia entre la máxima dilatación térmica y la dilatación en la superficie media es $\alpha t/2$ y la curvatura resultante del calentamiento no uniforme puede hallarse por la ecuación

$$\frac{\alpha t}{2} = \frac{h}{2r} \quad (a)$$

de la cual se deduce

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha t}{h} \quad (50)$$

Esta flexión de la placa no produce tensiones siempre que los bordes estén libres y las flechas sean pequeñas en comparación con el espesor de la placa.

Supongamos ahora que el plano medio de la placa está libre para dilatarse, pero los bordes tienen impedido el giro. En tal caso el calentamiento no uniforme produce momentos flectores uniformemente distribuidos en los bordes de la placa. El valor de estos momentos es tal que elimine la curvatura producida por el calentamiento no uniforme [ec. (50)] ya que sólo así puede cumplirse la condición de bordes impedidos. Mediante la ecuación (46) de la curvatura producida por momentos flectores, se tiene para determinar el valor M del momento por unidad de longitud del contorno la ecuación¹.

$$\frac{M}{D(1 + \nu)} = \frac{\alpha t}{h}$$

de donde

$$M = \frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h} \quad (b)$$

Las correspondientes tensiones máximas pueden hallarse por las ecuaciones (44) y valen

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6\alpha t D(1 + \nu)}{h^3}$$

Sustituyendo D por su expresión (3) se tiene finalmente

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha t E}{2(1 - \nu)} \quad (51)$$

¹ El efecto de la flexión pura sobre la curvatura de la placa entera es así equivalente y de signo contrario al efecto del gradiente de temperatura. Ahora bien, si la placa permanece perfectamente plana, las condiciones de borde empotrado se satisfacen evidentemente para un contorno dado cualquiera. Igualmente, puesto que en nuestro caso los momentos flectores son iguales en cualquier punto y en cualquier dirección, los momentos de sujeción en cualquier contorno están siempre dados por la ecuación (b).

Se ve que la tensión es proporcional al coeficiente de dilatación α , a la diferencia de temperatura t entre las dos caras de la placa y al módulo de elasticidad E . El espesor de la placa h no interviene en la fórmula (51), pero dado que la diferencia de temperatura ordinariamente aumenta proporcionalmente al espesor de la placa, puede afirmarse que son de esperar mayores tensiones térmicas en placas gruesas que en placas delgadas.

TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS

CAPÍTULO 3

3

Flexión simétrica de placas circulares

S. TIMOSHENKO

Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER

Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por

F. J. MEDINA SALANOVA

Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puertos
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

15. Ecuación diferencial de la flexión simétrica de placas circulares bajo carga transversal¹

Si la carga que actúa sobre una placa circular está simétricamente distribuida respecto al eje perpendicular a esta que pasa por su centro, la deformada del plano medio de la placa flexada es también simétrica.

Las flechas serán idénticas en todos los puntos equidistantes del centro de la placa y es suficiente considerar las flechas en una sección principal que pase por el eje de simetría (fig. 27). Sea O el origen de coordenadas en el centro de la placa no flexada y sean r las distancias radiales de los puntos del plano medio y w sus flechas dirigidas hacia abajo. La pendiente próxima

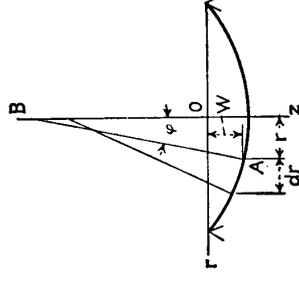


Fig. 27

¹ Las soluciones de estos problemas fueron dadas por Poisson; véase *Memoriales the Académie*, vol. 8, Paris, 1829.

70

TEORIA DE PLACAS Y LAMINAS

de la deformada en cualquier punto A es igual a $-dw/dr$ y la curvatura de la superficie media de la placa en la sección diametral rz es, para pequeñas flechas

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr} \quad (a)$$

donde φ es el ángulo pequeño que forman la normal a la deformada en A y el eje de simetría OB . Por razón de la simetría se deduce que $1/r_n$ es una de las curvaturas principales de la deformada en A . La segunda curvatura principal está situada en la sección que pasa por la normal AB y es perpendicular al plano rz . Viendo que las normales tales como AB , para todos los puntos de la superficie media situados a una distancia r , forman una superficie cónica de vértice B , se puede decir entonces que AB es el radio de la segunda curvatura principal r_t . De donde según la figura 27

$$\frac{1}{r_t} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{\varphi}{r} \quad (b)$$

Conociendo las expresiones (a) y (b) de las curvaturas principales, se pueden obtener los valores correspondientes de los momentos flectores, suponiendo que las relaciones (37) y (38), calculadas para la flexión pura, son también válidas para estos momentos y curvaturas¹. Utilizando estas relaciones se obtiene

$$M_r = -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \quad (52)$$

$$M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (53)$$

donde, como anteriormente, M_r y M_t representan los momentos flectores por unidad de longitud. El momento M_r actúa a lo largo de las secciones circulares de la placa, tales como la sección obtenida por el cono de vértice B , y M_t a lo largo de la sección diametral rz de la placa.

Las ecuaciones (52) y (53) no contienen más que una variable, w o φ , que puede determinarse considerando un elemento en equilibrio de la placa, sea $abcd$ (fig. 28) separado de la placa por dos secciones cilíndricas ab y cd y por dos secciones diametrales ad y bc . El momento que actúa sobre cd es

$$M_r r d\theta \quad (c)$$

¹ Se desprecia, en este caso, la influencia sobre las deformaciones de las tensiones tangenciales que actúan sobre las secciones de la placa perpendiculares a los meridianos tales como la sección por la superficie cónica de vértice B . Su efecto es pequeño en el caso de placas de espesor pequeño con relación al diámetro. Este caso se estudia en el apartado 20. Las tensiones perpendiculares a la superficie de la placa son también despreciables, esto es, justificable en todos los casos en que la carga no está muy concentrada (véase pág. 89).

El momento correspondiente a ab es:

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta \quad (d)$$

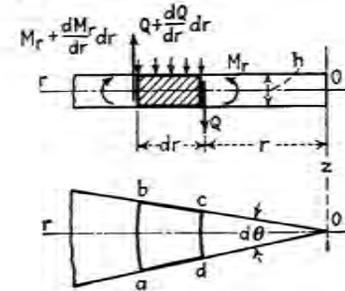


FIG. 28

Los momentos de los lados ad y bc son los dos iguales a $M_t dr$ y dan un momento resultante en el plano rOz , igual a

$$M_t dr d\theta \quad (e)$$

Por razón de simetría se puede llegar a la conclusión de que los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento, se anulan en las secciones diametrales de la placa pero persisten en las secciones cilíndricas tales como cd y ab . Sea O el esfuerzo cortante por unidad de longitud de la sección cilíndrica de radio r , la fuerza total debida al esfuerzo cortante sobre el lado cd del elemento es $Qr d\theta$ y la fuerza correspondiente sobre ab es

$$\left[Q + \left(\frac{dQ}{dr} \right) dr \right] (r + dr) d\theta$$

Despreciando la pequeña diferencia entre los esfuerzos cortantes sobre los lados opuestos del elemento, se puede afirmar que estas fuerzas dan un momento en el plano rz , igual a

$$Qr d\theta dr \quad (f)$$

Sumando con los signos convenientes, los momentos (c), (d), (e), (f) y despreciando el momento producido por la carga exterior, por ser un infinitésimo de orden superior, se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento $abcd$

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta - M_r r d\theta - M_t dr d\theta + Qr d\theta dr = 0$$

de donde se deduce, despreciando los infinitésimos de orden superior

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Qr = 0 \quad (g)$$

Sustituyendo M_r y M_t por sus valores en las ecuaciones (52) y (53) la ecuación (g) deberá ser

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D} \quad (54)$$

o también

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D} \quad (55)$$

El esfuerzo cortante Q se calcula fácilmente, en cada caso particular de placa circular simétricamente cargada, dividiendo la carga distribuida en el círculo de radio r por $2\pi r$; se determina entonces la pendiente φ y la flecha w de la placa mediante las ecuaciones (54) y (55). La integración de estas ecuaciones se simplifica escribiéndolas en la forma

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{Q}{D} \quad (56)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D} \quad (57)$$

Si Q se expresa en función de r , la integración de estas ecuaciones puede hacerse sin dificultad en cada caso particular.

A veces es preferible representar el segundo miembro de la ecuación (57) en función de la intensidad q de la carga repartida sobre la placa. Para ello, se multiplican ambos miembros de la ecuación por $2\pi r$, teniendo en cuenta que

$$Q2\pi r = \int_0^r q2\pi r \, dr$$

se obtiene

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D} \int_0^r q r \, dr$$

Derivando los dos miembros de la ecuación con relación a r y dividiendo por r , se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right] = \frac{q}{D} \quad (58)$$

Si q es una función de r , la integración de esta ecuación no ofrece ninguna dificultad.

16. Placa circular uniformemente cargada

Si una placa circular de radio a soporta una carga de intensidad q uniformemente repartida sobre toda su superficie, el valor del esfuerzo cortante Q , a una distancia r del centro de la placa es determinado por

$$2\pi r Q = \pi r^2 q$$

de donde

$$Q = \frac{qr}{2} \quad (a)$$

Sustituyendo en (57), se obtiene

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{qr}{2D} \quad (b)$$

Una primera integración da

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{qr^2}{4D} + C_1 \quad (c)$$

donde C_1 es una constante de integración que se determina posteriormente a partir de las condiciones en el centro y en el contorno de la placa. Multiplicando los dos miembros de (c) por r e integrando por segunda vez, se obtiene:

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{qr^4}{16D} + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$$

y

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (59)$$

y una nueva integración da

$$w = \frac{qr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3 \quad (60)$$

Calculemos las constantes de integración para diferentes casos particulares.

Placa circular de borde empotrado. En este caso, la pendiente de la superficie flexada en la dirección radial es nula para $r = 0$ y $r = a$.

Por consiguiente, de (59) se deduce

$$\left(\frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \right)_{r=0} = 0$$

$$\left(\frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \right)_{r=a} = 0$$

De la primera de estas ecuaciones, se deduce $C_2 = 0$.

Sustituyendo en la segunda, se obtiene

$$C_1 = -\frac{qa^2}{8D}$$

La ecuación (59) de la pendiente deberá ser con estos valores

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D} (a^2 - r^2) \quad (61)$$

La ecuación (60) da

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qa^2r^2}{32D} + C_3 \quad (d)$$

En el contorno de la placa la flecha es nula. Por consiguiente

$$\frac{qa^4}{64D} - \frac{qa^4}{32D} + C_3 = 0$$

y se obtiene

$$C_3 = \frac{qa^4}{64D}$$

Sustituyendo en (d) se encuentra,

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (62)$$

La flecha máxima se produce en el centro de la placa y según la ecuación (62) es

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64D} \quad (e)$$

Esta flecha es igual a tres octavos de la flecha de una franja uniformemente cargada de extremos empotrados, cuya rigidez a la flexión es D , la anchura, igual a la unidad y la longitud igual al diámetro de la placa circular.

Se calculan los momentos flectores M_r y M_t a partir del valor de la pendiente [v. ec. (61)]; mediante las ecuaciones (52) y (53) se deduce

$$M_r = \frac{q}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)] \quad (63)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)] \quad (64)$$

Haciendo $r = a$ en estas ecuaciones, se encuentran los momentos flectores en el contorno de la placa

$$(M_r)_{r=a} = -\frac{qa^2}{8} \quad (M_t)_{r=a} = -\frac{\nu qa^2}{8} \quad (65)$$

En el centro de la placa, $r = 0$ y

$$M_r = M_t = \frac{qa^2}{16} (1 + \nu) \quad (66)$$

En las ecuaciones (65) y (66) se ve que la tensión máxima se produce en el contorno, donde se tiene

$$(\sigma_r)_{\max} = -\frac{6M_r}{h^2} = \frac{3}{4} \frac{qa^2}{h^2} \quad (f)$$

La figura 29 muestra la variación de las tensiones σ_r y σ_t que actúan sobre la cara inferior de la placa, a lo largo del radio de ésta.

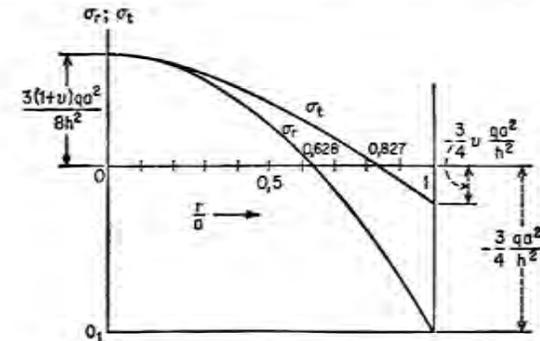


FIG. 29

Placa circular de borde apoyado

En este caso para calcular las flechas se aplica el método de superposición. Se ha visto que en el caso de extremos empotrados se obtienen los momentos flectores negativos $M_r = -qa^2/8$ que actúan a lo largo del contorno [fig. 30 a)]. Si se combina este caso con el de flexión pura indicado en la figura 30 b), se eliminarán los momentos flectores M_r en el contorno obteniendo entonces la flexión de una placa apoyada en el con-

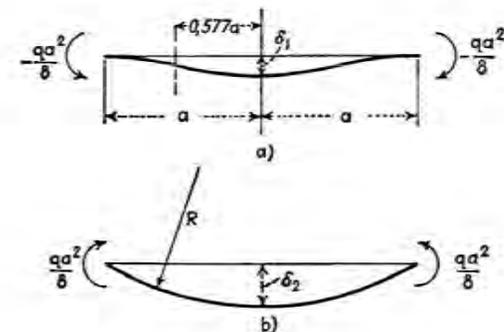


FIG. 30

torno. La deformada en el caso de una flexión pura, debida a los momentos $qa^2/8$ se obtiene a partir de las ecuaciones (46) o (e) de las páginas 59 y 60 y es

$$w = \frac{qa^2}{16D(1+\nu)} (a^2 - r^2)$$

Sumando esta flecha a las flechas (62) de una placa empotrada, se encuentra entonces para una placa de contorno simplemente apoyado

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right) \quad (67)$$

Anulando r en esta expresión, obtenemos la flecha en el centro de la placa

$$w_{\max} = \frac{(5+\nu)qa^4}{64(1+\nu)D} \quad (68)$$

Para $\nu = 0,3$, la flecha es aproximadamente cuatro veces mayor que la de una placa de borde empotrada. Para calcular los momentos flectores en este caso se debe sumar el momento flector constante $qa^2/8$ a los momentos (63) y (64). Por consiguiente, en el caso de borde apoyado

$$M_r = \frac{q}{16} (3+\nu)(a^2 - r^2) \quad (69)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [a^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)] \quad (70)$$

El momento flector máximo se encuentra en el centro de la placa donde

$$M_r = M_t = \frac{3+\nu}{16} qa^2$$

La tensión máxima correspondiente es

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_t)_{\max} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{3(3+\nu)qa^2}{8h^2} \quad (71)$$

Para obtener la tensión máxima a cualquier distancia r del centro, se debe sumar a la tensión calculada para la placa empotrada, el valor constante

$$\frac{6}{h^2} \frac{qa^2}{8}$$

correspondiente a la flexión pura indicada en la figura 30 b). Se obtiene la misma tensión de la figura 29, midiendo las ordenadas a partir del eje horizontal que pasa por O_1 . Puede verse entonces que se obtiene un mejor reparto de tensiones en la placa empotrando el contorno.

17. Placa circular con agujero circular en el centro

Estudiemos ahora la flexión de una placa sometida a los momentos M_1 y M_2 uniformemente repartidas a lo largo de los contornos interior y exterior (fig. 31). En este caso, el esfuerzo cortante Q se anula y la ecuación (52) toma la forma

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0 \quad (57)$$

Integrando dos veces esta ecuación, se tiene

$$-\frac{dw}{dr} = \varphi = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (a)$$

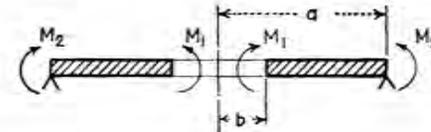


FIG. 31

Una tercera integración nos da la flecha

$$w = -\frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3 \quad (b)$$

Se determinan ahora las constantes de integración mediante las condiciones de contorno. Sustituyendo (a) en (52), hallamos

$$M_r = D \left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \nu \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \right) \right] \quad (c)$$

Este momento debe ser igual a M_1 para $r = b$ y a M_2 para $r = a$. Por consiguiente las ecuaciones que determinan C_1 y C_2 son

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1+\nu) - \frac{C_2}{b^2} (1-\nu) \right] = M_1$$

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1+\nu) - \frac{C_2}{a^2} (1-\nu) \right] = M_2$$

de donde

$$C_1 = \frac{2(a^2 M_2 - b^2 M_1)}{(1+\nu)D(a^2 - b^2)} \quad C_2 = \frac{a^2 b^2 (M_2 - M_1)}{(1-\nu)D(a^2 - b^2)} \quad (d)$$

Para determinar la constante C_3 de la ecuación (b) hay que tener en cuenta las flechas en el contorno de la placa. Supongamos, por ejemplo,

que la placa está apoyada a lo largo del contorno exterior (fig. 31). Entonces $w = 0$ para $r = a$ y a partir de (b) se encuentra

$$C_3 = \frac{C_1 a^2}{4} = \frac{a^2(a^2 M_2 - b^2 M_1)}{2(1 + \nu)D(a^2 - b^2)}$$

En el caso particular en que $M_2 = 0$, se tiene:

$$C_1 = -\frac{2b^2 M_1}{(1 + \nu)D(a^2 - b^2)} \quad C_2 = -\frac{a^2 b^2 M_1}{(1 - \nu)D(a^2 - b^2)}$$

$$C_3 = -\frac{a^2 b^2 M_1}{2(1 + \nu)D(a^2 - b^2)}$$

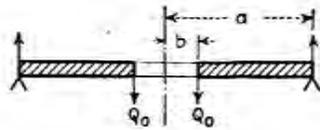


FIG. 32

y las expresiones (a) y (b) de la pendiente y de la flecha toman la forma

$$\frac{dw}{dr} = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1 - \nu)(a^2 - b^2)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{a^2} \right) \quad (72)$$

$$w = -\frac{b^2 M_1}{2(1 + \nu)D(a^2 - b^2)} (a^2 - r^2) + \frac{a^2 b^2 M_1}{(1 - \nu)D(a^2 - b^2)} \ln \frac{r}{a} \quad (73)$$

Consideremos ahora el caso de la flexión de una placa sometida a esfuerzos cortantes Q_0 uniformemente repartidos a lo largo del contorno interior (fig. 32). El esfuerzo cortante por unidad de longitud de una circunferencia de radio r es

$$Q = \frac{Q_0 b}{r} = \frac{P}{2\pi r}$$

donde $P = 2\pi b Q_0$ representa la carga total aplicada al contorno interior de la placa. Sustituyendo en (57) e integrando, se obtiene

$$\frac{dw}{dr} = \frac{Pr}{8\pi D} \left(2 \ln \frac{r}{a} - 1 \right) - \frac{C_1 r}{2} - \frac{C_2}{r} \quad (e)$$

y

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi D} \left(\ln \frac{r}{a} - 1 \right) - \frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3 \quad (f)$$

y se calculan las constantes de integración mediante las condiciones de contorno. Suponiendo que la placa está simplemente apoyada sobre el contorno exterior, se tiene:

$$(w)_{r=a} = 0 \quad -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0 \quad (g)$$

y para el contorno interior

$$-D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = 0 \quad (h)$$

Sustituyendo las expresiones (e) y (f) en las ecuaciones (g) y (h), se encuentra

$$C_1 = \frac{P}{4\pi D} \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} - \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

$$C_2 = -\frac{(1 + \nu)P}{(1 - \nu)4\pi D} \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \quad (i)$$

$$C_3 = \frac{Pa^2}{8\pi D} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1 - \nu}{1 + \nu} - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right)$$

Sustituyendo estos valores de las constantes en las ecuaciones (e) y (f) se halla la pendiente y la flecha en todo punto de la placa de la figura 32. Para la pendiente en el contorno interior que nos será útil para lo siguiente, se encuentra

$$\left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = \frac{Pb}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \right] \quad (j)$$

En el límite, para b infinitamente pequeño, $b^2 \ln(b/a)$ tiende a cero, y las constantes de integración toman los valores

$$C_1 = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{P}{4\pi D} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{Pa^2}{8\pi D} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right)$$

Sustituyendo estos valores en (f) tenemos

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad (k)$$

Valor que coincide con el de la flecha de una placa sin agujero cargada en su centro [v. ec. (89) pág. 87]. Así pues un agujero muy pequeño en el centro no modifica la flecha de la placa.

Combinando las cargas de las figuras 31 y 32, se obtiene la solución en el caso de una placa empotrada a lo largo de su contorno interior y uniformemente cargada sobre el contorno exterior (fig. 33). Puesto que la pendiente es nula sobre el contorno empotrado, se utilizan las expresiones (72) y (j) para determinar la ecuación del momento flector M , sobre el contorno empotrado

$$-\frac{a^2 b^2 M_1}{D(1 - \nu)(a^2 - b^2)} \left(\frac{1}{b} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{b}{a^2} \right) = \frac{Pb}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1 - \nu}{1 + \nu} + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \right]$$

de donde se deduce

$$M_1 = \frac{P}{4\pi \left[(1+\nu) \frac{a^2}{b^2} + 1 - \nu \right]} \left[(1-\nu) \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 2(1+\nu) \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a}{b} \right] \quad (74)$$

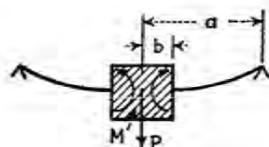


FIG. 33

Conociendo M_1 , se obtienen las flechas de la placa sumando miembro a miembro (73) y (f) que las constantes de integración están dadas por las expresiones (i).

Aplicando el mismo procedimiento de superposición se obtiene la solución del caso de la figura 34, en que la placa está apoyada en su contorno exterior y soporta una carga uniformemente repartida. En este caso, utilizamos la solución encontrada en el apartado anterior para una placa sin agujero. Considerando la sección de esta placa por una superficie cilíndrica de radio b y perpendicular a la placa, consta que a lo largo de esta sección actúa un esfuerzo cortante $Q = \pi q b^2 / 2\pi b = qb/2$ y un momento flector de intensidad [v. ec. (69)].

$$M_r = \frac{q}{16} (3 + \nu)(a^2 - b^2)$$

Por consiguiente para obtener las tensiones y las flechas para el caso de la figura 34, se suman las tensiones y las flechas obtenidas para la placa sin agujero a las tensiones y a las flechas producidas por el momento flector y los esfuerzos cortantes indicados en la figura 35. Estos últimos valores se deducen de las expresiones (72), (73), (e) y (f) teniendo cuidado, en cuanto a los signos de los esfuerzos cortantes y de los momentos.

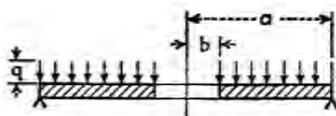


FIG. 34

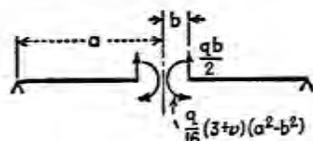


FIG. 35

En la figura 36 se han representado varios casos que tienen una importancia práctica. En todos estos casos la tensión máxima está dada por una fórmula del tipo

$$\sigma_{\max} = k \frac{qa^2}{h^2} \quad \text{o} \quad \sigma_{\max} = \frac{kP}{h^2} \quad (75)$$

según que la carga aplicada esté uniformemente repartida sobre la superficie o concentrada a lo largo del contorno. La tabla 3 da los valores numéricos del factor R , calculados¹ para varios valores de la relación a/b y para el coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

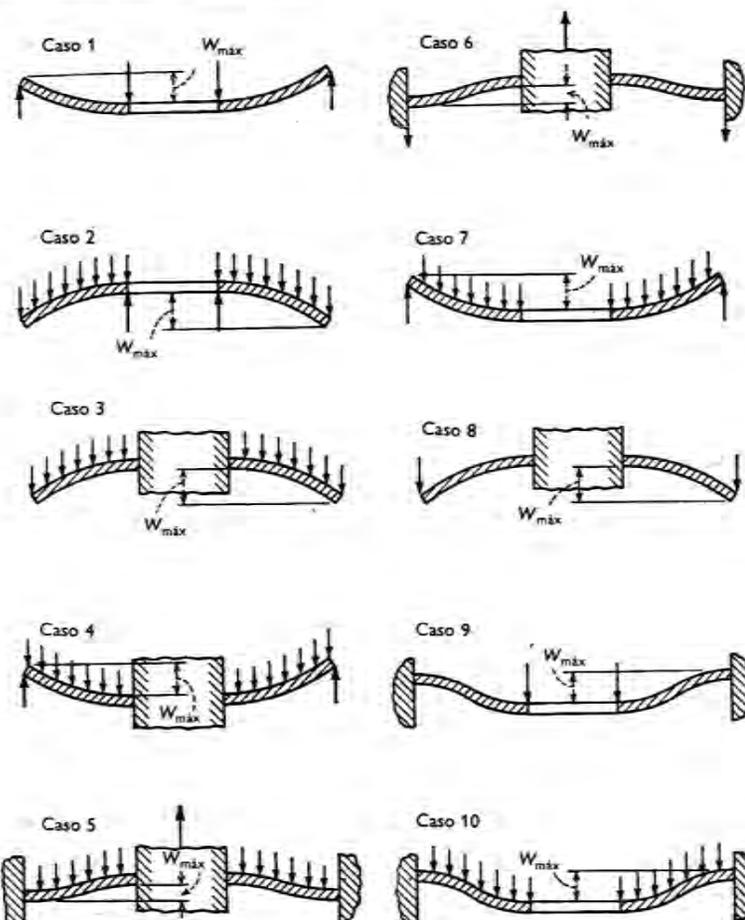


FIG. 36

¹ Los cálculos para los casos 1 al 8, ambos inclusive, fueron efectuados por A. M. Wahl y G. Lobo, *Trans. ASME*, vol. 52, 1930. Se encuentran los datos suplementarios concernientes a las placas circulares simétricamente cargadas con o sin agujero en K. Beyer, *Die Statik im Stahlbetonbau*, 2.ª ed., pág. 52, Berlín, 1948.

TABLA 3

Coeficientes k y k_1 en las ecuaciones (75) y (76) para los diez casos indicados en la figura 36

$a/b =$	1,25		1,5		2		3		4		5	
Caso	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1	k	k_1
1	1,10	0,341	1,26	0,519	1,48	0,672	1,88	0,734	2,17	0,724	2,34	0,704
2	0,66	0,202	1,19	0,491	2,04	0,902	3,34	1,220	4,30	1,300	5,10	1,310
3	0,135	0,00231	0,410	0,0183	1,04	0,0938	2,15	0,293	2,99	0,448	3,69	0,564
4	0,122	0,00343	0,336	0,0313	0,74	0,1250	1,21	0,291	1,45	0,417	1,59	0,492
5	0,090	0,00077	0,273	0,0062	0,71	0,0329	1,54	0,110	2,23	0,179	2,80	0,234
6	0,115	0,00129	0,220	0,0064	0,405	0,0237	0,703	0,062	0,933	0,092	1,13	0,114
7	0,592	0,184	0,976	0,414	1,440	0,664	1,880	0,824	2,08	0,830	2,19	0,813
8	0,227	0,00510	0,428	0,0249	0,753	0,0877	1,205	0,209	1,514	0,293	1,745	0,350
9	0,194	0,00504	0,320	0,0242	0,454	0,0810	0,673	0,172	1,021	0,217	1,305	0,238
10	0,105	0,00199	0,259	0,0139	0,480	0,0575	0,657	0,130	0,710	0,162	0,730	0,175

En los mismos casos, las flechas máximas están dadas por las fórmulas del tipo

$$w_{\max} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad \text{o} \quad w_{\max} = k_1 \frac{Pa^2}{Eh^3} \quad (76)$$

Los coeficientes R_1 se encuentran también en la tabla 3.

Cuando el cociente a/b tiende a uno, los valores de R y R_1 en (75) y (76) puede obtenerse con una exactitud suficiente considerando una franja radial como una viga con las mismas condiciones en los límites y de carga que la placa considerada.

La influencia de los momentos M_1 sobre la flexión es totalmente despreciada.

18. Placa circular cargada concéntricamente

Comencemos por el caso de una placa simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente repartida a lo largo de un círculo de radio b [fig. 37 a)]. Dividiendo la placa en dos partes [fig. 37 b) y c)], se ve que la

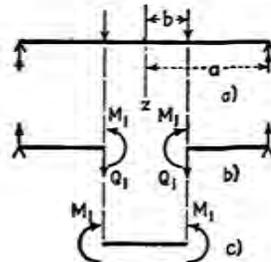


FIG. 37

parte interior de la placa está en las condiciones de flexión pura producida por los momentos M_1 uniformemente repartidos y que la parte exterior está flexada por los momentos M_1 y los esfuerzos cortantes Q_1 . Sea P la carga total aplicada, se encuentra que

$$Q_1 = \frac{P}{2\pi b} \quad (a)$$

El valor de M_1 se determina por la condición de continuidad a lo largo del círculo $r = b$, de donde se deduce que las dos partes de la placa tienen la misma pendiente en esta circunferencia. Las ecuaciones (72) y (j) del apartado 17, dan la pendiente para el contorno interior de la parte exterior de la placa, se tiene

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\nu)(a^2 - b^2)} \left(\frac{1}{b} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{b}{a^2} \right) + \frac{Pb}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \right] \quad (b)$$

La parte interior de la placa está flexada según una superficie esférica cuya curvatura está dada por la ecuación (46). La pendiente correspondiente en el contorno es

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = - \frac{M_1 b}{D(1+\nu)} \quad (c)$$

Iguando (b) y (c) se obtiene

$$M_1 = \frac{(1-\nu)P(a^2 - b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)P \ln \frac{b}{a}}{4\pi} \quad (d)$$

Sustituyendo esta expresión de M_1 en (73), obtenemos las flechas M_1 de la parte exterior de la placa debido a M_1 . Las flechas debidas a las fuerzas Q_1 se obtienen mediante la ecuación (f) del apartado anterior. Sumando estas flechas, se encuentra para la parte exterior de la placa

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - r^2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right] \quad (77)$$

Sustituyendo $r = b$ en esta ecuación, se obtiene la flecha bajo la carga.

$$(w)_{r=b} = \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - b^2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) + 2b^2 \ln \frac{b}{a} \right] \quad (e)$$

Para hallar las flechas de la parte interior de la placa, se suman las flechas (e) a las debidas a la flexión pura de esta parte de la placa.

Se obtiene así

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - b^2) \left(1 + \frac{1-\nu}{2} \frac{a^2 - b^2}{1+\nu} \right) + 2b^2 \ln \frac{b}{a} \right] \\
 &\quad + \frac{b^2 - r^2}{2D(1+\nu)} \left[\frac{(1-\nu)P(a^2 - b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)P \ln \frac{b}{a}}{4\pi} \right] \\
 &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + r^2 - b^2 + (a^2 - r^2) \frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)b^2}{2(1+\nu)a^2} \right] \\
 &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + (a^2 - b^2) \frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)r^2}{2(1+\nu)a^2} \right] \quad (78)
 \end{aligned}$$

Si el contorno exterior de la placa está empotrado, la flecha de la placa se obtiene sumando las flechas (77) y (78) a las flechas producidas por los momentos flectores M_2 uniformemente repartidos a lo largo del contorno exterior de la placa (fig. 38) y de tal valor que la pendiente de la superficie

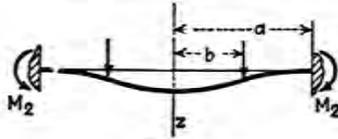


FIG. 38

flexada, en el borde sea nula. De la ecuación (77) se deduce la pendiente en el contorno de una placa simplemente apoyada.

$$\left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = - \frac{P}{4\pi D} \frac{1}{1+\nu} \frac{a^2 - b^2}{a} \quad (f)$$

La pendiente debida a los momentos M_2 es

$$\left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = \frac{M_2 a}{D(1+\nu)} \quad (g)$$

Igualando a cero la suma de las expresiones (f) y (g), se obtiene

$$M_2 = \frac{P}{4\pi} \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Las flechas debidas a este momento son

$$w = \frac{M_2}{D(1+\nu)} \frac{r^2 - a^2}{2} = \frac{P}{8\pi D(1+\nu)} \frac{a^2 - b^2}{a^2} (r^2 - a^2) \quad (h)$$

Sumando estas flechas a las obtenidas en (77) y (78), tenemos entonces las flechas para la parte exterior de la placa de bordes empotrados

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - r^2) \frac{a^2 + b^2}{2a^2} + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right] \quad (79)$$

y para la parte interior

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + r^2 - b^2 + \frac{(a^2 - r^2)(a^2 + b^2)}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2} \right] \quad (80)
 \end{aligned}$$

Conociendo las flechas en el caso de cargas uniformemente repartidas a lo largo de un círculo concéntrico, se puede resolver por el método de superposición todo problema de flexión de placa circular simétricamente cargada respecto al centro.

Consideremos, por ejemplo, el caso en que la carga está uniformemente repartida en la parte de la placa, interior a un círculo de radio c (fig. 39). Para obtener la flecha en todo punto de la placa no cargada ($a > r > c$), se utiliza la ecuación (77). La flecha, producida por una carga elemental repartida sobre un anillo de radio b y de anchura db (v. fig. 39) se obtiene

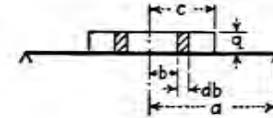


FIG. 39

sustituyendo $P = 2\pi b q db$ en (77), donde q designa la intensidad de la carga uniforme. Integrando respecto a b la expresión así obtenida, se obtiene la flecha

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{q}{4D} \int_0^c \left\{ (a^2 - r^2) \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} + r^2 \ln \frac{r}{a} \right. \\
 &\quad \left. + b^2 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{(1-\nu)(a^2 - r^2)}{2(1+\nu)a^2} \right] \right\} b db \\
 &= \frac{qc^2}{8D} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] \\
 &\quad + \frac{qc^4}{16D} \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right]
 \end{aligned}$$

o bien, sustituyendo la carga total $\pi c^2 q$ por P ,

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right. \\
 &\quad \left. + c^2 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right] \right] \quad (81)
 \end{aligned}$$

Para calcular la flecha en el centro se utiliza la ecuación (78) en donde se sustituye r por 0 y P por $2\pi b q db$, integrando se obtiene

$$(w)_{r=0} = \frac{q}{4D} \int_0^c \left[b^2 \ln \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{2} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \right) \right] b db$$

$$= \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} a^2 + c^2 \ln \frac{c}{a} - \frac{7 + 3\nu}{4(1 + \nu)} c^2 \right] \quad (82)$$

donde $P = \pi c^2 q$

El momento flector máximo se sitúa en el centro y se calcula mediante (d).

Sustituyendo P por $2\pi b q db$ en esta ecuación e integrando, tendremos

$$M_{\max} = q \int_0^c \left(\frac{1 - \nu a^2 - b^2}{4} \frac{1}{a^2} - \frac{1 + \nu}{2} \ln \frac{b}{a} \right) b db$$

$$= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} + 1 - \frac{(1 - \nu)c^2}{4a^2} \right] \quad (83)$$

donde, como antes, P representa la carga total $\pi c^2 q$.

Los momentos flectores M_r y M_t , en cualquier punto de la parte de la placa no cargada, se calculan mediante la ecuación (81). Sustituyendo esta expresión en las fórmulas generales (52) y (53) encontramos

$$M_r = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \ln \frac{a}{r} + \frac{(1 - \nu)Pc^2}{16\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (84)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right] - \frac{(1 - \nu)Pc^2}{16\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} \right) \quad (85)$$

Los valores máximos de estos momentos se producen en el círculo $r = c$, donde:

$$M_r = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \ln \frac{a}{c} + \frac{(1 - \nu)P(a^2 - c^2)}{16\pi a^2} \quad (86)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} + 1 - \nu \right] - \frac{(1 - \nu)P(a^2 + c^2)}{16\pi a^2} \quad (87)$$

Se puede utilizar el mismo método de cálculo de las flechas y de los momentos para toda clase de placa circular simétricamente cargada.

Se calcula asimismo la flecha del centro de cualquier placa cargada no simétricamente siguiendo las consideraciones siguientes.

A causa de la simetría total de la placa y de las condiciones en los límites, la flecha en el centro, debida a una carga única P , no depende más que del valor de esta carga y de su distancia al centro de la placa. Esta flecha queda invariable, si la carga P se desplaza, quedando a la misma distancia del centro. La flecha no cambia si la carga P es sustituida por varias cargas cuya resultante sea P y situadas sobre el círculo descrito anteriormente por P . De aquí se deduce que para calcular la flecha de la

¹ Esta expresión se aplica solamente cuando c es al menos varias veces h . En el apartado 19 se estudiará el caso en que c es muy pequeño.

placa en el centro, se puede sustituir una carga única P por una carga P uniformemente repartida a lo largo de un círculo en el que el radio es igual a la distancia del centro la carga concentrada. Para una carga uniformemente repartida a lo largo de un círculo de radio b , la flecha en el centro de la placa apoyada en el contorno, viene dada por la ecuación (78), y es

$$(w)_{r=0} = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (a^2 - b^2) - b^2 \ln \frac{a}{b} \right] \quad (i)$$

Esta es la fórmula de la flecha en el centro de una placa producida por una carga única P situada a una distancia b del centro. A partir de esta fórmula se puede calcular la flecha en el centro para toda clase de carga utilizando el método de superposición¹.

Las flechas y las tensiones, en una placa circular con o sin orificio, pueden ser eficazmente reducidas reforzando la placa por nervios concéntricos² o radiales. De todas formas, en este último caso la distribución de tensiones no es ya simétrica con respecto al centro de la placa.

19. Placa circular cargada en el centro

Se obtiene la solución del problema de una carga concentrada en el centro de una placa, a partir del estudio del apartado 18, suponiendo que el radio c del círculo, en el cual está repartida la carga, se hace infinitamente pequeño en tanto que la carga total P queda finita. Con esta hipótesis, se encuentra que la flecha máxima en el centro de una placa simplemente apoyada, es, según (82),

$$w_{\max} = \frac{(3 + \nu)Pa^2}{16\pi(1 + \nu)D} \quad (88)$$

La flecha en todo punto de la placa, a una distancia r del centro es, según (81)

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right] \quad (89)$$

El momento flector para los puntos tales que $r > c$ se obtiene suprimiendo los términos en c^2 en las ecuaciones (84) y (85), lo que da

$$M_r = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} \quad (90)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right] \quad (91)$$

¹ Saint Venant indicó este método de cálculo de las flechas en el centro de la placa en su *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traducida por Clebsch, Paris, 1883, pág. 363. Se puede obtener (i) aplicando el teorema de Maxwell a las placas circulares.

² Este caso ha sido estudiado por N. A. Nash, *L. Appl. Mechanics*, vol. 15, pág. 25, 1948. Véase también C. B. Biezeno y R. Grammel, *Technische Dynamik*, 2.^a ed., vol. 1, pág. 497, 1953.

Para obtener las fórmulas correspondientes al caso de una placa circular de borde empotrado, derivamos la ecuación (89) y se encuentra para la pendiente en el contorno de una placa simplemente apoyada, la expresión

$$-\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{Pa}{4(1+\nu)\pi D} \quad (a)$$

Los momentos flectores M_2 uniformemente repartidos a lo largo del empotramiento (fig. 40) crean una flexión de la placa según una superficie esférica en la que el radio está dado por (46) y la pendiente en el contorno es

$$-\frac{M_2 a}{(1+\nu)D} \quad (b)$$

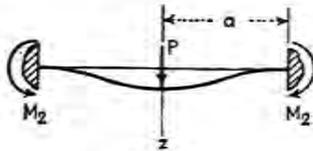


FIG. 40

Utilizando (a) y (b), se encuentra que la condición para que el borde empotrado no gire da

$$(M_r)_{r=a} = M_2 = -\frac{P}{4\pi} \quad (c)$$

Las flechas debidas a los momentos M_2 se obtienen a partir de la ecuación (h) del apartado precedente

$$\frac{P(r^2 - a^2)}{8\pi D(1+\nu)}$$

Sumando estas flechas a las de una placa simplemente apoyada [ec. (89)], se encuentra la expresión de las flechas de una placa empotrada, cargada en su centro

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi D} \ln \frac{r}{a} + \frac{P}{16\pi D} (a^2 - r^2) \quad (92)$$

Sumando (c) a (90) y (91), se obtienen las expresiones del momento de flector en todo punto no muy próximo a la carga.

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right] \quad (93)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right] \quad (94)$$

Cuando r tiende a cero, las ecuaciones (90), (91), (93) y (94) tienden a infinito y por consiguiente no son válidas para el cálculo de momentos de flectores. Por otra parte, las hipótesis que sirven de base a la teoría de la

flexión de placas circulares no son válidas en las proximidades del punto de aplicación de la carga concentrada. Puesto que el radio c del círculo en que $P/\pi c^2$ está repartida, disminuye, la presión P aumenta de tal manera que no se puede despreciar en comparación con las tensiones de flexión, como se había hecho en la teoría elemental. Las tensiones tangenciales despreciadas en la teoría elemental aumentan también considerablemente cuando c tiende a cero, puesto que la superficie cilíndrica $2\pi ch$ sobre la que está repartido el esfuerzo cortante total P , tiende a cero.

Descartando las hipótesis en las que está basada la teoría elemental, se obtiene la distribución de tensiones cerca del punto de aplicación de la carga asimilando la parte de la placa a un cuerpo de tres dimensiones del mismo orden de magnitud. Para ello imaginemos que la parte central cargada está separada del resto de la placa según una superficie cilíndrica, en la que el radio b es varias veces mayor que el espesor h de la placa (v. fig. 41). Se puede suponer que la teoría elemental de la flexión es suficientemente exacta a una distancia b del punto de aplicación de la carga P y que las tensiones correspondientes se calculan por medio de la ecuación (90). El problema de

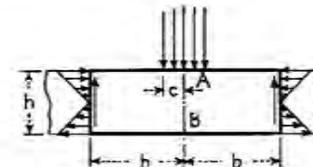


FIG. 41

la distribución de tensiones en el centro se reduce entonces al problema de una distribución simétrica de tensiones en un cilindro de altura h y de radio b , sometido a una carga P repartida sobre un pequeño círculo de radio c , y a las reacciones a lo largo del contorno lateral¹.

La solución de este problema muestra que la tensión de compresión máxima en el centro A de la carga superior de la placa puede expresarse mediante la fórmula² aproximada

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_1 = \frac{P}{\pi c^2} \left[\frac{1+2\nu}{2} - (1+\nu)\alpha \right] \quad (95)$$

donde σ_1 representa el valor de la tensión de compresión debida a flexión obtenida por la teoría aproximada mediante (83), en el caso de una placa simplemente apoyada, y α es un factor numérico que depende de $2c/h$, relación del diámetro del círculo cargado al espesor de la placa. Varios valores de este factor están dados en la tabla 4. La figura 42 muestra la variación de α en función de $2c/h$. Cuando c tiende a cero, la tensión calculada por la ecuación (95) tiende a infinito.

¹ Varios ejemplos de distribución simétrica de tensiones se estudian en S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., pág. 384, 1951. A. Nádai ha estudiado el caso de la figura 41 (véase su libro *Elastische Platten*, pág. 308) y también por S. Woinowsky-Krieger (véase su estudio en *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 305, 1933). Los resultados dados aquí se han tomado de este último trabajo.

² Cuando c es muy pequeño la tensión de compresión $P/\pi c^2$ deberá ser mayor que el valor $\sigma_{m\acute{a}x}$ dado por la ecuación (93) (véase fig. 43).

³ Este valor será negativo en la ecuación (95).

La tracción máxima se produce en *B*, centro de la cara inferior de la placa (fig. 41). Cuando *c* es pequeño, es decir, para una fuerte concentración de carga, esta

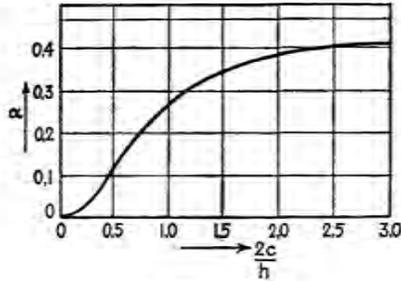


FIG. 42

TABLA 4
Valores del factor α en la ecuación (95)

$2c/h =$	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	2,50
$\alpha =$	0,0106	0,0466	0,1234	0,200	0,263	0,348	0,386	0,398

tracción es prácticamente independiente de la relación $2c/h$. En el caso de una placa simplemente apoyada está dado por la fórmula aproximada¹:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} \left[(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right] \quad (96)$$

donde *a* es el radio exterior.

Para obtener las tensiones de compresión σ_r y σ_t en el centro de la cara superior de una placa empotrada, se resta a la tensión de compresión σ_z [v. ec. (95)], el valor

$$\frac{P}{4\pi} \frac{6}{h^2} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2} \quad (d)$$

teniendo en cuenta los momentos $M_z = -P/4\pi$. La tracción máxima en el centro de la cara inferior de una placa empotrada y para una fuerte concentración de la carga ($c = 0$), se calcula restando la ecuación (d) de la ecuación (95); se encuentra

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} (1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right) \quad (97)$$

La figura 43 muestra la distribución de tensiones a través de una placa circular gruesa ($h/a = 0,4$) empotrada en el contorno. Estas tensiones están calculadas para $c = 0,1a$ y $\nu = 0,3$. En este caso, la tensión de compresión máxima σ_z , perpendicular a la superficie de la placa, es mayor que la tensión de compresión máxima en la flexión [ec. (95)]. La tensión de tracción máxima es menor que la tracción dada por la teoría elemental de la flexión. La línea de puntos, en la figura 43, indica el valor de esta última a través del espesor de la placa. Esta tracción está calculada mediante la ecuación del momento flector.

$$M_{\max} = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} - \frac{(1 - \nu)c^2}{4a^2} \right] \quad (98)$$

obtenida sumando el momento $M_z = -P/4\pi$ a la ecuación (83).

¹ Véase Woinowsky-Krieger, *ob. cit.*

Para calcular las dimensiones de seguridad de una placa circular cargada en su centro, se puede limitar el estudio al cálculo de las tensiones máximas de tracción por flexión en la cara inferior de la placa, con ayuda de las ecuaciones (96) y (97). Aunque las tensiones de compresión sobre la cara superior pueden ser muchas veces mayores

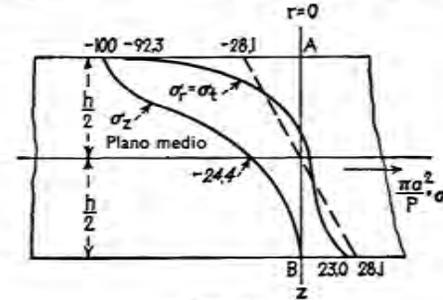


FIG. 43

que las tensiones de tracción en la cara inferior de la placa, en caso de fuertes concentraciones de carga, no representan un peligro directo, a causa de su carácter localizado. Las deformaciones locales de un material dúctil no afectan la deformación general de la placa si las tracciones en la cara inferior no sobrepasan los límites de seguridad. La resistencia a compresión de un material frágil es generalmente varias veces mayor que su resistencia a tracción, de modo que una placa de este material será segura, a condición de que la tracción de la cara inferior permanezca dentro de los límites de seguridad.

Si se quiere una descripción exacta de la deformación de una placa, deberemos tomar en consideración las perturbaciones locales debidas a una carga concentrada, en la proximidad de su punto de aplicación. Esta perturbación está principalmente limitada a un cilindro de radio igual a varias veces *h*, así su influencia sobre la deformación total es importante cuando el espesor de la placa no es muy pequeño con relación a su radio. La figura 44 muestra las flechas de placas circulares de bordes

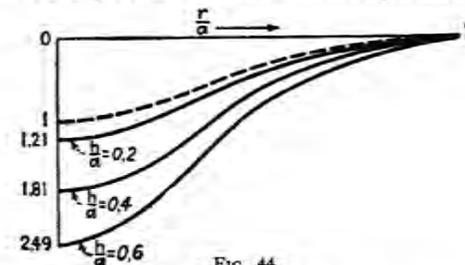


FIG. 44

empotrados soportando una carga concentrada para las que la relación espesor a radio (*h/a*) es: 0,2; 0,4 y 0,6¹. La línea de puntos indica la flecha de la teoría elemental [ec. (92)]. Puede verse la divergencia entre la curva teórica y la curva exacta disminuye rápidamente cuando disminuye *h/a*. En el apartado siguiente se probará que esta diferencia es debida principalmente a la influencia de los esfuerzos cortantes que se desprecian totalmente en la teoría elemental.

¹ Las curvas de la figura 44 resultan de la solución exacta de Woinowsky-Krieger, *ob. cit.*

20. Correcciones a la teoría elemental de flexión simétrica de placas circulares

Las relaciones (37) y (38) entre momentos flectores y curvaturas que se dedujeron para el caso de flexión pura, han servido de base a la solución de diferentes problemas, que hemos estudiado sobre flexión simétrica de placas circulares. No se han tenido en cuenta la influencia que tienen sobre la flexión las tensiones tangenciales y las presiones normales sobre planos paralelos a la superficie de la placa. Por consiguiente sólo son rigurosas las soluciones dadas para una placa anular sometida a momentos uniformemente repartidos a lo largo de los contornos externo e interno (fig. 31). En todos los demás casos estudiados, las fórmulas obtenidas son aproximadas y su exactitud depende de la relación del espesor de la placa a su radio externo. Se obtienen fórmulas más aproximadas mediante el cálculo aproximado¹ de la influencia que sobre las deformaciones ejercen las tensiones tangenciales y las presiones laterales. Consideremos ahora, una placa circular sin orificio, apoyada en su contorno y cargada uniformemente. El esfuerzo cortante Q por unidad de longitud de arco a lo largo del círculo de radio r es

$$Q = 1/2qr$$

La solución exacta relativa a las placas en las que el espesor no se supone pequeño² indica que las tensiones de los esfuerzos cortantes τ_r varían a través del espesor de la placa siguiendo una ley parabólica de la misma manera que en las vigas de sección rectangular estrecha. Por consiguiente, la tensión del esfuerzo cortante máxima, se encuentra en la superficie media de la placa y su valor es:

$$(\tau_r)_{\max} = \frac{3qr}{2h} \quad (a)$$

La deformación debida al esfuerzo cortante es entonces

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{3qr}{2h} \quad (b)$$

donde w_1 es la flecha adicional de la superficie media, debida a la tensión tangencial. Integrando se encuentra el valor de las flechas producidas por las tensiones tangenciales

$$w_1 = \frac{3q}{2h} (a^2 - r^2) \quad (c)$$

¹ Una teoría rigurosa de placas fue iniciada por Saint-Venant en su traducción de la *Théorie de l'élasticité des corps solides*, pág. 337. Un interesante juicio de este trabajo aparece en *History of the Theory of Elasticity* de I. Todhunter y K. Pearson, vol. 2, parte 1, pág. 217. Un nuevo desarrollo de la teoría se debe a J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, página 100, 1900, y a A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.ª ed., pág. 465. Una lista de referencias sobre este asunto ha sido dada por Woinowsky-Krieger, *op. cit.*, página 203. En el apartado 26 se dan algunos ejemplos de la teoría rigurosa.

² Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 351.

y en el centro de la placa

$$(w_1)_{\max} = \frac{3qa^2}{2h} \quad (d)$$

La presión lateral que actúa sobre la placa crea una curvatura positiva convexa hacia abajo, semejante a la que se produce en una viga uniformemente cargada¹.

La presión q por unidad de superficie, da lugar a un alargamiento radial igual a $\nu q/E$ en la parte superior de la placa. El alargamiento es $\nu q/2E$ en la superficie media y es nulo en la parte inferior de la placa. Supongamos la relación lineal, el valor aproximado del radio de curvatura R se obtiene a partir de la ecuación

$$\frac{\nu q}{2E} = \frac{h}{2R}$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{2R} = \frac{\nu q}{2hE}$$

y la flecha negativa es,

$$w_2 = -\frac{1}{2R} (a^2 - r^2) = -\frac{\nu q}{2hE} (a^2 - r^2) \quad (e)$$

Sumando las ecuaciones (c) y (e) a (67), se encuentra una expresión más exacta de la flecha

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right) + \frac{qh^2}{8D} \frac{3 + \nu}{6(1 - \nu^2)} (a^2 - r^2)$$

la cual se convierte en el centro

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} + \frac{4}{3} \frac{3 + \nu}{1 - \nu^2} \frac{h^2}{a^2} \right) \quad (f)$$

El segundo término del segundo miembro de (f) representa la corrección para las tensiones tangenciales y la presión lateral cuando la relación del espesor de la placa al radio es pequeño. El valor de esta corrección dada para la solución exacta es²

$$\frac{qa^4}{64D} \frac{28 + \nu + \nu^2}{5} \frac{h^2}{1 - \nu^2} \frac{1}{a^2} \quad (g)$$

Para $\nu = 0,3$ el valor exacto es un 20% inferior al dado por la ecuación (f).

En una placa circular cargada uniformemente, con borde empotrado, la flecha negativa w_2 , debida a la presión, no se produce y por consiguiente,

¹ Véase *ibid.*, pág. 43.

² Véase Love, *op. cit.*, pág. 481.

sólo debe ser considerada la flecha w_1 , debida al esfuerzo cortante. Sumando esta flecha a (62), se obtiene, más exactamente, el valor de la flecha.

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4h^2}{1-\nu} (a^2 - r^2) \right] \quad (h)$$

Es interesante hacer constar que coincide con la solución exacta¹.

Consideremos a continuación las flechas producidas por las tensiones tangenciales en la placa anular sometida a esfuerzos cortantes uniformemente repartidos a lo largo del borde interior como indica la figura 32. La máxima tensión tangencial a una distancia r del centro, es

$$(\tau_{rz})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{2\pi r h}$$

donde P representa el esfuerzo cortante total. La deformación tangencial correspondiente es²:

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{3}{2} \frac{P}{2\pi r h G} \quad (i)$$

Integrando se obtiene la flecha debida al esfuerzo cortante

$$w_1 = \frac{3}{4} \frac{P}{\pi h G} \ln \frac{a}{r} = \frac{P h^2}{8\pi(1-\nu)D} \ln \frac{a}{r} \quad (j)$$

Para obtener un valor más preciso de la flecha de la placa (fig. 32) se debe sumar (j) a la ecuación (k) de la página 79. Cuando el radio b del agujero es muy pequeño, la ecuación de la flecha total deberá ser

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] + \frac{P h^2}{8\pi(1-\nu)D} \ln \frac{a}{r} \quad (k)$$

La flecha en el contorno del agujero es:

$$w_{\max} = \frac{P a^2}{8\pi D} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu} \frac{h^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \right] \quad (l)$$

El segundo término de esta expresión representa la corrección debida a los esfuerzos cortantes. Siendo infinito cuando b tiende a cero, ya que se supone que P tiene siempre un valor finito. Por consiguiente cuando b tiende a cero, las tensiones y deformaciones tangenciales se harán infinitamente grandes.

El término de (l) que representa la corrección para el esfuerzo cortante no se puede aplicar para una placa sin orificio. En el caso de una placa sin agujero debe esperarse una corrección menor a causa del efecto de cuña debido a la carga concentrada P , aplicada en el centro de la cara superior de la placa. Imaginemos que la parte central de la placa se separa por medio de un cilindro de radio b pequeño, y que su

¹ Véase *ibid.*, pág. 485.

² Si la placa no está agujereada, el segundo miembro de la ecuación (i) debe ser multiplicado por $(1-\nu)/(1+\nu)$, de acuerdo con la ecuación (l), pág. 97.

acción sobre el resto de la placa está sustituida por los esfuerzos cortantes verticales equivalentes a P así como por las fuerzas radiales S que representan el efecto de cuña de la carga, fuerzas repartidas a lo largo del contorno superior del agujero como indica la figura 45. Es evidente que estas últimas crean una tensión de la superficie media así como una deformación de la placa hacia arriba. Se debe entonces reducir el término correctivo de la ecuación (k) para hacerlo aplicable a una placa sin agujero.

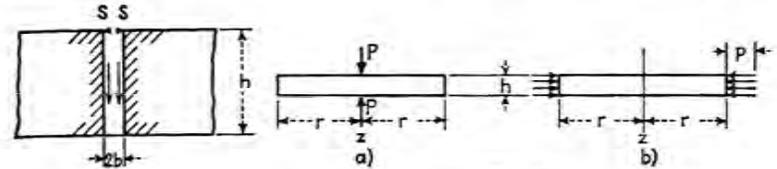


FIG. 45

FIG. 46

Para hacernos idea de la importancia de las fuerzas radiales, S , consideremos la placa en las dos condiciones de carga de la figura 46. En el primer caso la placa está comprimida por dos fuerzas iguales y opuestas P , que actúan a lo largo del eje de simetría z . En el segundo caso la placa está sometida a una presión uniforme, en su plano, bajo el efecto de una presión p uniformemente repartida sobre la superficie cilíndrica del contorno. A causa de la deformación lateral, estas presiones aumentan el espesor de la placa en una cantidad

$$\Delta h = \frac{2\nu p}{E} h$$

Se puede entonces, a partir de esta ecuación, calcular el aumento Δr del radio r de la placa, debido a la acción de las fuerzas P [fig. 46 a)]; para esto, aplicamos el teorema recíproco a las dos condiciones de carga de la figura 46. Se encuentra

$$P \Delta h = 2\pi r h p \Delta r$$

de donde se deduce

$$\Delta r = \frac{P \Delta h}{2\pi r h p} = \frac{2\nu}{E} \frac{P}{2\pi r} \quad (m)$$

Comparemos este aumento del radio al del radio de un cilindro de pared gruesa producido por una presión interna p_i . Si el radio interior b del cilindro es muy pequeño comparado con el radio exterior r , el aumento de r se obtiene mediante la ecuación¹ de Lamé

$$\Delta r = \frac{1+\nu}{E} \frac{p_i b^2}{r} \quad (n)$$

Comparando (m) y (n) se llega a la conclusión de que el alargamiento radial debido a P [fig. 46 a)] tiene el mismo valor que el producido por una presión interna p_i , en una placa que tiene un pequeño orificio cilíndrico en el centro (fig. 45). Estando dado el valor de p_i por la ecuación siguiente:

$$\frac{2\nu P}{E 2\pi r} = \frac{1+\nu}{E} \frac{p_i b^2}{r}$$

de donde

$$p_i = \frac{\nu P}{(1+\nu)\pi b^2} \quad (o)$$

¹ Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.^a ed., pág. 210, 1956.

Volvamos al caso de una fuerza concentrada en el centro de la cara superior de la placa (fig. 45), se llega a la conclusión de que la fuerza S por unidad de longitud de circunferencia del orificio debe ser igual a la presión $p_1 h/2$. Utilizando el valor de p_1 dado en (o), se obtiene

$$S = \frac{\nu P h}{2(1 + \nu) r b^2}$$

Estas fuerzas aplicadas a la cara superior de la placa producen sobre la placa flechas w_1 cuyo valor se calcula sustituyendo

$$M_1 = \frac{S h}{2} = \frac{\nu P h^2}{4(1 + \nu) r b^2}$$

en la ecuación (73) y despreciando b^2 frente a a^2 . De esta forma se obtiene

$$w_1 = - \frac{\nu P h^2}{8\pi(1 + \nu)^2 D} \frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{\nu P h^2}{4(1 - \nu^2) 2D} \ln \frac{a}{r} \quad (p)$$

Sumando (p) a (k) se obtiene la expresión siguiente, más aproximada para la flecha de una placa sin orificio bajo una carga P concentrada en el centro de la cara superior:

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] + \frac{P h^2}{8\pi(1 + \nu) D} \ln \frac{a}{r} - \frac{\nu P h^2}{8\pi(1 + \nu)^2 D} \frac{a^2 - r^2}{a^2} \quad (q)$$

Esta ecuación se puede utilizar para calcular la flecha en todos los puntos de la placa que no están demasiado próximos al punto de aplicación de la carga. Cuando r es del mismo orden de magnitud que el espesor de la placa, la ecuación (q) no es aplicable, y para obtener una solución satisfactoria, la parte central de la placa deberá ser considerada de la forma que se explicó en el apartado anterior. Se obtiene un valor aproximado de la flecha de esta parte central asimilándola a una placa de pequeño radio b , sumando la flecha debida a las perturbaciones locales en la distribución de tensiones, cerca del punto de aplicación de la carga a la flecha dada por la teoría elemental¹. La flecha debida a las perturbaciones locales es afectada muy poco por las condiciones de contorno de la placa y, por consiguiente, puede determinarse aproximadamente por medio de las curvas de la figura 44; la curva en trazos se obtiene a partir de la ecuación (92). Las flechas adicionales debidas a la perturbación local de tensiones son iguales a las diferencias entre las ordenadas de las líneas continuas de la curva de trazos.

Por ejemplo sea una placa en que el radio de la parte interior, es $b = 5h$. La flecha de la parte interior, calculada con ayuda de (92) y tomada como unidad en la figura 44, es

$$\delta_1 = \frac{P b^2}{16\pi D} = \frac{P}{16\pi D} (5h)^2$$

Utilizando la curva $h/a = 0,2$ (fig. 44), la flecha adicional debida a la perturbación de la tensión local es

$$\delta_2 = 0,21\delta_1 = 0,21 \frac{P}{16\pi D} (5h)^2 \quad (r)$$

Si se considera una placa en que $b = 2,5h$, se obtiene, con la curva $h/a = 0,4$

$$\delta_2 = 0,81 \frac{P}{16\pi D} (2,5h)^2 \quad (s)$$

¹ En el caso considerado esta flecha se calcula utilizando el primer término de (q) y sustituyendo b por a .

que difiere muy poco de la dada en (r) para $b = 5h$. Esto no es satisfactorio si se toma $b < 2,5h$ pues, para radios inferiores, las condiciones de contorno de la placa gruesa, llegan a ser importantes y las curvas de la figura 44, calculadas para contorno empotrado, pueden no ser bastante exactas en este caso.

Finalmente para obtener la flecha de la placa bajo la carga se calcula la flecha por medio de la ecuación (q), sustituyendo $r = 0$ en el primer término y $r = b = 2,5h$ en los otros términos. A esta flecha se añade la de la parte central de la placa debida a los esfuerzos cortantes y dada por (s).

En el caso particular de $\nu = 0,3$, las flechas de la placa circular simplemente apoyada se pueden obtener por simple superposición de las curvas trazadas en la figura 44¹, con la flecha

$$\frac{P(a^2 - r^2)}{8\pi D(1 + \nu)}$$

debida a la flexión pura creada por los momentos $P/4\pi$ aplicados a lo largo del contorno de la placa.

Se puede también señalar que para valores pequeños de la relación r/a , la influencia del esfuerzo cortante $P/2\pi r$ sobre la flecha está simplemente representada por el segundo miembro de la ecuación (q). A este término corresponde la pendiente

$$\frac{dw_1}{dr} = - \frac{3}{2} \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{P}{2\pi r h G} \quad (t)$$

Comparando este resultado con (i), se concluye que si se introduce el factor

$$k = \frac{3}{2} \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \quad (u)$$

en (i) en lugar de $k = 3/2$, daría un valor más preciso de la deformación debida a los esfuerzos cortantes en el caso de una placa sin orificios.

Todos los desarrollos precedentes no son aplicables más que a placas circulares flexadas según una superficie de revolución. En los apartados 26 y 39 se dará una teoría más general de la flexión, teniendo en cuenta la influencia de los esfuerzos cortantes sobre la deformación de las placas.

¹ La figura 44 está calculada para $\nu = 0,3$.

TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS

CAPÍTULO 4

S. TIMOSHENKO

Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER

Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por

F. J. MEDINA SALANOVA

Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puertos
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

Pequeñas deformaciones de placas bajo carga transversal

21. Ecuación diferencial de la deformada

Supongamos que la carga que actúa sobre la placa es normal a su superficie y las flechas son pequeñas en comparación con el espesor (v. ap. 13). Respecto al contorno, supongamos que los bordes tienen libertad para moverse en el plano de la placa; en estas condiciones las reacciones en los bordes son normales a la de la placa. Con estas hipótesis pueden

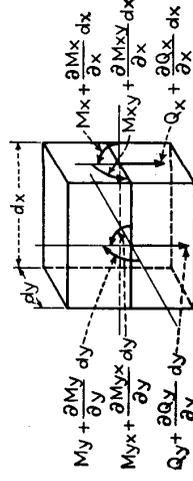


FIG. 47

despreciarse las deformaciones en el plano medio de la placa durante la flexión. Tomando como antes (v. ap. 10) los ejes de coordenadas x e y en el plano medio de la placa y el eje z perpendicular a dicho plano, consideremos un elemento separado de la placa por dos pares de planos paralelos a los planos xz e yz como indica la figura 47. Además de los momentos flectores M_x y M_y y los momentos torsores M_{xy} que se consideraban en la flexión pura (v. ap. 10), hay esfuerzos cortantes verticales¹ que actúan

¹ No habrá esfuerzos cortantes horizontales ni esfuerzos normales en las caras del elemento, puesto que se considera despreciable la deformación en el plano medio de la placa.

en las caras del elemento. Los valores de estos esfuerzos cortantes por unidad de longitud paralela a los ejes y y x se denominan Q_x y Q_y respectivamente y valen

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (a)$$

Puesto que los momentos y esfuerzos cortantes son funciones de las coordenadas x e y y debemos tener en cuenta en el estudio de las condiciones de equilibrio, los pequeños cambios que experimentan cuando x e y sufren incrementos elementales dx y dy .

El plano medio del elemento está representado en las figuras 48 a) y b), y en ellas se indican las direcciones en que los momentos y fuerzas se consideran positivos.

Debe considerarse también la carga distribuida sobre la cara superior de la placa. Se denomina q la intensidad de esta carga, de modo que la carga que actúa sobre el elemento¹ es $q dx dy$.

Proyectando sobre el eje z las fuerzas que actúan sobre el elemento se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0$$

de donde
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (99)$$

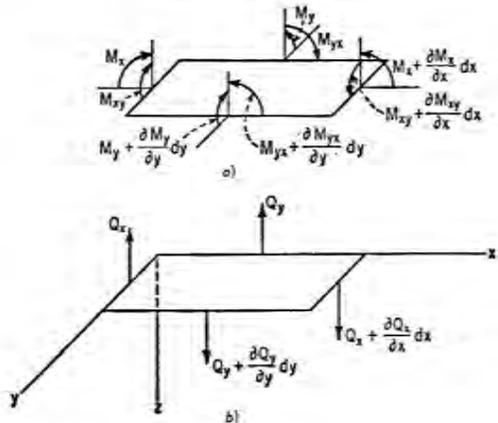


FIG. 48

¹ Puesto que se desprecia la componente tensional σ_z , no hay posibilidad de distinguir entre aplicar la carga en la superficie inferior o superior. De este modo, toda carga transversal concentrada, se considera en la teoría de placas delgadas como una discontinuidad en el valor de los esfuerzos cortantes, que se distribuyen según una ley parabólica a través del espesor de la placa. El peso propio de la placa, por ejemplo, puede incluirse en la carga q sin que ello afecte a la exactitud de los resultados. Si el efecto de la carga superficial tiene interés especial, debe usarse la teoría de placas gruesas (v. ap. 19).

Tomando momentos con respecto al eje x de todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento se obtiene la ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0 \quad (b)$$

El momento de la carga q y el momento debido a la variación de Q_y se desprecian en esta ecuación por ser diferenciales de orden superior a los sumandos conservados. Simplificando, la ecuación (b) toma la forma

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (c)$$

Del mismo modo tomando momentos respecto al eje y se tiene

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (d)$$

Puesto que no hay fuerzas en las direcciones x e y ni momentos respecto al eje z , las tres ecuaciones (99), (c) y (d) determinan totalmente el equilibrio del elemento. Eliminemos los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y de estas ecuaciones, despejándolos en las ecuaciones (c) y (d) y sustituyéndolos en la ecuación (99). Así obtenemos

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (e)$$

Observando que $M_{yz} = -M_{zy}$ por ser $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ se escribe finalmente la ecuación de equilibrio (e) en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (100)$$

Para escribir esta ecuación en función de las flechas w de la placa, se acepta aquí que las ecuaciones (41) y (43), desarrolladas para el caso de flexión pura, pueden usarse también para el caso de placas con carga transversal. Esta hipótesis equivale a despreciar el efecto sobre la flexión de los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y , así como el de la tensión σ_z debida a la carga q . Hemos utilizado ya esta hipótesis en el capítulo anterior y hemos visto que los errores en las flechas obtenidas de esta forma son pequeños, siempre que el grueso de la placa sea pequeño en comparación con las dimensiones de la placa en su plano. En el apartado 39 se verá una teoría aproximada de la flexión de placas elásticas delgadas teniendo en cuenta el efecto de los esfuerzos cortantes sobre la deformación y en el apartado 26 estudiaremos varios ejemplos de soluciones exactas de problemas de flexión de placas.

Utilizando la notación x e y en lugar de n y t que se usó en las ecuaciones (41) y (43) se tiene

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (101)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (102)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (100) obtenemos¹

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (103)$$

Esta última ecuación puede escribirse en la forma simbólica

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad (104)$$

donde

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (105)$$

Se ve, pues, que el problema de la flexión de placas bajo cargas transversales se reduce a la integración de la ecuación (103). Si para un caso particular se conoce una solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones de borde de la placa, los momentos flectores se pueden calcular por las ecuaciones (101) y (102). Las correspondientes tensiones normales y tangenciales se determinan por la ecuación (44) y la expresión

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}$$

Para determinar los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y , se emplean las ecuaciones (c) y (d) de las cuales

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (106)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (107)$$

o usando la forma simbólica

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \quad (108)$$

¹ Esta ecuación fue obtenida por Lagrange en 1811, cuando estaba examinando la Memoria presentada por Sophie Germain a la Academia Francesa de Ciencias. La historia del desarrollo de esta ecuación viene en T. Todhunter y K. Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 1, págs. 147, 247, 348, y vol. 2, parte 1, pág. 263. Véase también la nota de Saint-Venant al artículo 73, en la página 689, de la traducción al francés de la *Théorie de l'élasticité des corps solides* hecha por Clebsch, Paris, 1883.

las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} pueden ahora determinarse admitiendo que se distribuyen en el espesor de la placa según una ley parabólica¹. Entonces

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \quad (\tau_{yz})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}$$

Se ve que las tensiones en una placa pueden calcularse siempre que para una distribución de carga y unas condiciones de contorno se determine por integración de la ecuación (103) la ecuación de la deformada.

22. Condiciones de borde

Comencemos el estudio de las condiciones de borde con el caso de una placa rectangular y supongamos que los ejes x e y se toman paralelos a los lados de la placa.

Borde empotrado

Si el borde de la placa está empotrado, la flecha a lo largo del borde es nula, y el plano tangente a la superficie media de la placa deformada a lo largo del borde, coincide con la posición inicial del plano medio de la placa. En la hipótesis de borde empotrado las condiciones del borde $x = a$ son:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (109)$$

Borde simplemente apoyado

Si el borde $x = a$ de la placa está simplemente apoyado, la flecha w a lo largo del borde debe ser nula. Al mismo tiempo este borde puede girar libremente sobre la línea de borde; por lo tanto no hay momentos flectores M_x a lo largo de este borde. Este tipo de sustentación está representado en la figura 49. La expresión analítica de las condiciones en este caso es

$$(w)_{x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (110)$$

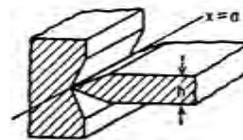


FIG. 49

¹ Se demostrará en el apartado 26 que en ciertos casos esta hipótesis está de acuerdo con la teoría exacta de la flexión de las placas.

Teniendo en cuenta que $\partial^2 w / \partial y^2$ se anula junto con w a lo largo del borde $x = a$, se tiene que la segunda de las condiciones (110) puede ponerse en la forma $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ o también $\Delta w = 0$. Las ecuaciones (110) son por lo tanto equivalentes a

$$(w)_{x=a} = 0 \quad (\Delta w)_{x=a} = 0 \quad (111)$$

que no incluyen el coeficiente de Poisson.

Borde libre

Si un borde de una placa, sea el borde $x = a$ (fig. 50) está totalmente libre, lógicamente a lo largo de él no hay momentos flectores ni torsores ni esfuerzos cortantes, es decir, que

$$(M_x)_{x=a} = 0 \quad (M_{xy})_{x=a} = 0 \quad (Q_x)_{x=a} = 0$$

Las condiciones de borde para borde libre fueron expresadas por Poisson¹ en esta forma. Pero después Kirchhoff² probó que tres condiciones son excesivas, y bastan dos para la completa determinación de las flechas w que satisfacen la ecuación (103). El mostró que las dos condiciones de Poisson relativas al momento torsor M_{xy} y al esfuerzo cortante Q_x deben sustituirse por una condición de borde. El significado de esta reducción del número de condiciones de contorno fue explicado por Kelvin y Tait³. Estos autores señalan que la flexión de la placa no varía si las fuerzas horizontales que

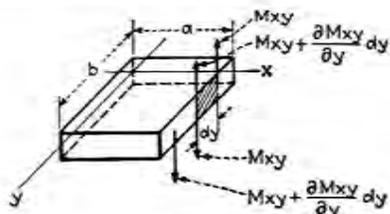


FIG. 50

dan el momento torsor $M_{xy} dy$ que actúa sobre un elemento de longitud dy del borde $x = a$ se sustituyen por dos fuerzas verticales de valor M_{xy} y brazo dy como indica la figura 50. Tal sustitución no cambia el valor de los momentos torsores y produce únicamente cambios en la distribución local de tensiones en el borde de la placa, dejando invariables la situación tensional del resto de la placa. Hemos estudiado ya un caso particular de

¹ Véase el estudio de este punto en Todhunter y Pearson, *op. cit.*, vol. 1, pág. 250 y Saint-Venant, punto citado.

² Véase *J. Crelle*, vol. 40, pág. 51, 1850.

³ Véase *Treatise of Natural Philosophy*, vol. 1, parte II, pág. 188, 1883. Independientemente la misma cuestión fue desarrollada por Boussinesq, *J. Math.*, ser. 2, vol. 16, págs. 125-274, 1871; ser. 3, vol. 5, págs. 329-344, Paris, 1879.

tal transformación del sistema de fuerzas de contorno al considerar la flexión pura de una placa según una superficie anticlástica (v. ap. 11). Siguiendo con la sustitución de momentos torsores a lo largo del borde de la placa y considerando dos elementos de borde adyacentes (fig. 50), tenemos que la distribución de momentos torsores M_{xy} es estáticamente equivalente a la distribución de esfuerzos cortantes de intensidad

$$Q'_x = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}$$

De ahí que la condición conjunta relativa a momento torsor M_{xy} y esfuerzo cortante Q_x a lo largo del borde libre $x = a$ toma la forma

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0 \quad (a)$$

Sustituyendo Q_x y M_{xy} por sus expresiones (106) y (102) obtenemos finalmente para el borde libre $x = a$:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (112)$$

la condición de momentos flectores nulos a lo largo del borde libre exige que

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (113)$$

Las ecuaciones (112) y (113) representan las dos condiciones de borde necesarias en toda la extensión del borde libre de la placa $x = a$.

Transformando los momentos torsores como se ha hecho en el estudio anterior y se indica en la figura 50, obtenemos no sólo los esfuerzos cortantes Q_x distribuidos a lo largo del borde $x = a$ sino también dos fuerzas

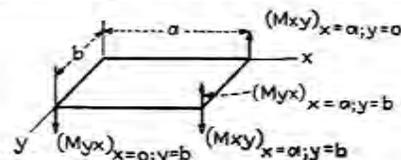


FIG. 51

concentradas en las esquinas como indica la figura 51. Los valores de estas fuerzas son iguales a los del momento torsor M_{xy} en las correspondientes esquinas de la placa.

Haciendo análoga transformación de los momentos torsores M_{xy} en el borde $y = b$ veremos de nuevo que además de los esfuerzos cortantes Q_y uniformemente repartidos, habrá fuerzas concentradas M_{xy} en las esquinas.

⁴ El momento M_{xy} es un momento por unidad de longitud y tiene las dimensiones de una fuerza.

Esto indica que una placa rectangular apoyada en alguna forma por sus bordes y bajo carga transversal producirá ordinariamente no sólo reacciones repartidas en el contorno sino también fuerzas concentradas en las esquinas.

En cuanto a los sentidos de estas reacciones concentradas, puede determinarse si se conoce la forma general de la deformada. Sea, por ejemplo, una placa cuadrada simplemente apoyada en sus bordes sometida a carga uniformemente repartida. La forma general de la deformada se indica en la figura 52 a) por las líneas de puntos que representan las secciones de la

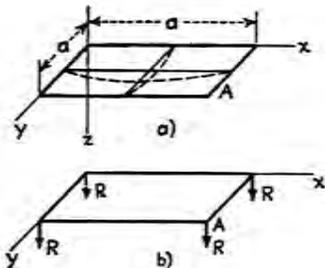


FIG. 52

superficie media de la placa por planos paralelos a los planos coordenados xz e yz . Considerando estas líneas puede verse que junto a la esquina A la derivada $\partial w/\partial x$ que representa la pendiente de la deformada en la dirección x es negativa y disminuye en valor absoluto cuando y aumenta. De ahí que $\partial^2 w/\partial x \partial y$ es positiva en la esquina A . De la ecuación (102) se deduce que M_{xy} es positivo y M_{yz} negativo. De ahí y de los sentidos de M_{xy} y M_{yz} en la figura 48 a) se sigue que ambas fuerzas concentradas indicadas en la figura 51 para el punto $x = a, y = b$ tienen sentido hacia abajo. Por razón de simetría se deduce que las fuerzas tienen los mismos valores y sentido en las otras esquinas de la placa. De ahí que las condiciones son las indicadas en la figura 52 b) en donde

$$R = 2(M_{xy})_{x=0, y=0} = 2D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=0, y=0}$$

Puede verse que cuando una placa cuadrada está uniformemente cargada, las esquinas en general tienen tendencia a levantarse y ello está contrarrestado por las reacciones concentradas en las esquinas como se indica en la figura 52 b).

Borde elásticamente apoyado y elásticamente empotrado

Si el borde $x = a$ de una placa está rigidamente unido a una viga soporte (fig. 53) la flecha en los puntos de este borde no es nula, sino igual a la flecha de la viga. Igualmente el giro del borde es igual a la torsión de la viga. Sean B y C la rigidez de la viga a flexión y a torsión respectiva-

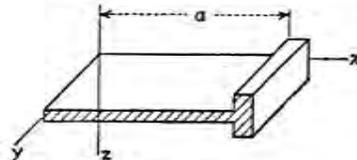


FIG. 53

mente. La carga transmitida de la placa a la viga soporte en la dirección z es, según la ecuación (a)

$$-V_x = - \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a}$$

y la ecuación diferencial de la deformada de la viga será

$$B \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} \quad (114)$$

Esta ecuación da una de las condiciones de borde de la placa para $x = a$.

Para obtener la segunda condición, hay que considerar la torsión de la viga. El ángulo¹ girado por una sección transversal de la viga es $-(\partial w/\partial x)_{x=a}$ y la variación unitaria de este ángulo en el sentido del borde

$$- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a}$$

Por lo tanto el momento torsor de la viga es $-C(\partial^2 w/\partial xy)_{x=a}$. Este momento varía a lo largo del borde ya que la placa rigidamente unida a la viga, transmite a ésta los momentos torsores repartidos de un modo continuo. El valor de estos momentos aplicados por unidad de longitud, es igual y de signo contrario al de los momentos flectores M_x de la placa. De ahí, considerando el equilibrio de un elemento de la viga, respecto al giro en su plano, tenemos

$$-C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = -(M_x)_{x=a}$$

¹ Para el signo del ángulo se aplica la regla del tornillo de la mano derecha.

o bien sustituyendo M_x por su expresión (101)

$$-C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \quad (115)$$

Esta es la segunda condición de borde de la placa para $x = a$.

En el caso de una placa con contorno curvo (fig. 54), tomamos para un punto A del borde los ejes de coordenadas en las direcciones de la tangente t y la normal n como se indica en la figura. Los momentos flectores y torsores en ese punto son

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_n dz \quad M_{nt} = - \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{nt} dz \quad (b)$$

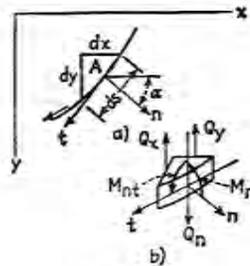


FIG. 54

Empleando para las tensiones σ_n y τ_{nt} las conocidas expresiones¹

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{nt} &= \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

podemos escribir las expresiones (b) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ M_{nt} &= M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (M_x - M_y) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (c)$$

El esfuerzo cortante Q_n en el punto A del contorno se deduce de la ecuación de equilibrio del elemento de placa indicado en la figura 54 b) de donde

$$Q_n ds = Q_x dy - Q_y dx$$

o bien

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \quad (d)$$

Teniendo las expresiones (c) y (d) pueden en cada caso particular escribirse sin dificultad las condiciones de borde.

¹ Las direcciones x e y no son las direcciones principales en el caso de flexión pura; por lo tanto, las expresiones de M_n y M_{nt} difieren de las dadas por las ecuaciones (39) y (40).

Si el borde curvo de la placa está empotrado tenemos

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (e)$$

En caso de borde simplemente apoyado tenemos

$$w = 0 \quad M_n = 0 \quad (f)$$

Sustituyendo M_n por su expresión en la primera de las ecuaciones (c) y utilizando las ecuaciones (101) y (102) pueden expresarse las condiciones de borde (f) en función de w y sus derivadas.

Si el borde de la placa está libre las condiciones de borde son

$$M_n = 0 \quad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = 0 \quad (g)$$

donde el término $-\partial M_{nt}/\partial s$ se obtiene en la forma indicada en la figura 50 y representa la parte de reacción en el borde debida al reparto de momentos torsores M_{nt} a lo largo del mismo. Sustituyendo M_n , M_{nt} y Q_n por sus valores en (c) y (d) y valiéndonos de las ecuaciones (101), (102), (106) y (107) podemos escribir las condiciones de borde en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \nu \Delta w + (1 - \nu) \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) &= 0 \\ \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right. & \\ \left. + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (116)$$

donde como en casos anteriores

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

En el próximo apartado se da otra forma de obtener estas condiciones.

23. Otra forma de obtención de las condiciones de borde

La ecuación diferencial (104) de la deformada de una placa y las condiciones de borde pueden obtenerse mediante el principio de trabajos virtuales junto con la expresión de la energía de deformación de una placa flectada¹. Puesto que en la obtención de la ecuación (104) se despreció por completo el efecto de las tensiones tangenciales sobre la deformación, la expresión correspondiente de la energía de deformación incluirá únicamente términos dependientes de los momentos flectores y

¹ Por este método se obtuvieron por primera vez de modo satisfactorio las condiciones de contorno; véase G. Kirchhoff en *J. Crelle*, vol. 40, 1850, y también su *Vorlesungen über Mathematische Physik, Mechanik*, pág. 450, 1877. Lord Kelvin se tomó gran interés en las deducciones de Kirchhoff y habló de ellas con Helmholtz; véase la biografía de Kelvin por Sylvanus Thompson, vol. 1, pág. 432.

torsores como en el caso de flexión pura estudiado en el apartado 12. Empleando la ecuación (48) obtenemos la energía de deformación para un elemento infinitesimal

$$\delta V = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (a)$$

La energía total de deformación de la placa se obtiene por integración

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (117)$$

estando la integral extendida a toda la superficie de la placa.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, supongamos que se produce una variación infinitamente pequeña δw de las flechas w . Entonces el cambio correspondiente de la energía de deformación debe ser igual al trabajo producido por las fuerzas exteriores en el desplazamiento virtual supuesto. Para calcular este trabajo, debemos tener en cuenta no sólo la carga transversal q repartida sobre la superficie sino también los momentos flectores M_n y las fuerzas $Q_n = (\partial M_n / \partial s)$ repartidas en el contorno de la placa. Por lo tanto la ecuación general dada por el principio de los trabajos virtuales es

$$\delta V = \iint q \delta w dx dy - \int M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int \left(Q_n - \frac{\partial M_n}{\partial s} \right) \delta w ds \quad (b)$$

La primera integral del segundo miembro de esta ecuación representa el trabajo de la carga transversal al producirse el desplazamiento δw . La segunda, extendida a lo largo de la placa, da el trabajo de los momentos flectores debido al giro $\partial(\delta w) / \partial n$ del borde de la placa. El signo menos se debe a los sentidos elegidos para M_n y la norma n indicados en la figura 54. La tercera integral da el trabajo de las fuerzas transversales aplicadas en el borde de la placa.

Para el cálculo de la variación δV de la energía de deformación aplicaremos al primer término de la expresión (117) algunas transformaciones que vamos a explicar con detalle.

Una variación pequeña de este término es

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] dx dy \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right] dx dy \quad (c) \end{aligned}$$

En los primeros dos términos siguientes al último signo igual en la expresión (c) la integral doble pueden sustituirse por integrales simples si recordamos que para toda función F de x e y se cumplen las expresiones

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy &= \int F \cos \alpha ds \\ \iint \frac{\partial F}{\partial y} dx dy &= \int F \sin \alpha ds \end{aligned} \quad (d)$$

En estas expresiones las integrales simples se extienden a todo el contorno y es el ángulo entre la normal y el eje x como se indica en la figura 54. Mediante la primera de las expresiones (d) podemos poner la expresión (e) como sigue

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dy + 2 \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \right) \cos \alpha ds \quad (e)$$

Recorriendo el contorno en el sentido indicado en la figura 54, tenemos

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \frac{dn}{dx} + \frac{\partial \delta w}{\partial s} \frac{ds}{dx} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha$$

Con esta transformación la expresión (e) toma la forma:

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dy \\ &+ 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha \right) \cos \alpha ds - 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \cos \alpha ds \quad (f) \end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \delta w \right| - \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta w ds$$

El primer término del segundo miembro de esta expresión se anula, puesto que estamos integrando sobre el contorno completo de la placa. Así obtenemos

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = - \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta w ds$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (f) obtenemos finalmente la variación del primer término de la expresión de la energía de deformación, tal variación toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds \\ &+ 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos \alpha \right] \delta w ds \quad (g) \end{aligned}$$

Transformando de modo análogo las variaciones de los otros términos de la expresión (117) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta w dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds \\ &- 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \alpha \right] \delta w ds \quad (h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta w dx dy \\ &+ \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \alpha \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \int \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y^2} \cos \alpha \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha \right] \right\} \delta w ds \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy \\ &+ 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \operatorname{sen} \alpha \right\} \delta w ds \quad (j) \end{aligned}$$

Usando estas fórmulas la variación de la energía potencial vendrá dada en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \delta Y &= D \left(\iint \Delta \Delta w \delta w dx dy \right. \\ &+ \int \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) + \nu \Delta w \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds \\ &+ \int \left\{ (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \operatorname{sen} \alpha \right\} \delta w ds \quad (118) \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b) y recordando que δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ son cantidades arbitrariamente pequeñas que satisfacen las condiciones de contorno, deducimos que la ecuación (b) se satisface solamente si se cumplen las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \iint (D \Delta \Delta w - q) \delta w dx dy &= 0 \quad (k) \\ \int \left\{ D \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) + \nu \Delta w \right] \right. \\ &\quad \left. + M_n \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds = 0 \quad (l) \\ \int \left(D \left\{ (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \operatorname{sen} \alpha \right\} - \left(Q_n - \frac{\partial M_n}{\partial s} \right) \right) \delta w ds = 0 \quad (m) \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones se cumple únicamente si en todo punto de la superficie media de la placa tenemos

$$D \Delta \Delta w - q = 0$$

que es la ecuación diferencial (104) de la deformada. Las ecuaciones (l) y (m) dan las condiciones de borde.

Si la placa está empotrada en un borde δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ son nulas en todo el borde y se satisfacen las ecuaciones (l) y (m) en el caso de borde simplemente apoyado $\delta w = 0$ y $M_n = 0$.

Por lo tanto se satisface la ecuación (m) y se satisfará (l) si

$$(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) + \nu \Delta w = 0 \quad (n)$$

En el caso particular de borde recto paralelo al eje y , es $\alpha = 0$ y de (n) obtenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

como debía ser para borde simplemente apoyado.

Si el borde de una placa está totalmente libre, los valores δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ en las ecuaciones (l) y (m) son arbitrarios; además $M_n = 0$ y $Q_n - (\partial M_n / \partial s) = 0$. Por consiguiente, de las ecuaciones (l) y (m) obtenemos para borde libre

$$\begin{aligned} (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \right) + \nu \Delta w &= 0 \\ (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \right] \\ - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \operatorname{sen} \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Estas condiciones están de acuerdo con las ecuaciones (116) que ya se obtuvieron (v. pág. 108). En el caso particular de un borde recto paralelo al eje y , es $\alpha = 0$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (112) y (113) ya obtenidas anteriormente.

En el caso en que haya unos momentos M_n y fuerzas transversales $Q_n - (\partial M_n / \partial s)$ dados repartidos en el contorno de la placa, pueden determinarse de nuevo las correspondientes condiciones de borde a partir de las ecuaciones (l) y (m).

24. Reducción del problema de la flexión de una placa a la deformación de una membrana

Se presentan casos en que es más sencillo sustituir la ecuación diferencial (103) de cuarto orden deducida para una placa por dos ecuaciones de segundo orden que representan las flechas de una membrana¹. Para ello empleamos la forma (104) de esta ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (a)$$

y teniendo en cuenta que sumando las dos expresiones (101) de los momentos flectores tenemos

$$M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (b)$$

¹ Este método de estudio de la flexión de las placas fue introducido por H. Marcus en su libro *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2.ª ed., pág. 12, Berlin, 1932.

Introduciendo una nueva rotación

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (119)$$

Las ecuaciones (a) y (b) pueden escribirse en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= -q \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \quad (120)$$

Ambas ecuaciones son de la misma clase que la que se obtiene para una membrana¹ uniformemente tensada bajo carga transversal.

La solución de estas ecuaciones se simplifica mucho en el caso de placa simplemente apoyada de forma poligonal, en el cual en cada parte recta del contorno tenemos $\partial^2 w / \partial s^2 = 0$ por ser $w = 0$ en el contorno. Teniendo en cuenta que por ser el borde simplemente apoyado $M_n = 0$ deducimos también $\partial^2 w / \partial n^2 = 0$ en el contorno. Por lo tanto [v. ec. (34)] tenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} = 0 \quad (c)$$

en el contorno según la segunda de las ecuaciones (111). Se ve que la solución del problema de la placa se reduce en este caso a la integración sucesiva de las dos ecuaciones (120). Comencemos con la primera y determinemos una solución que satisfaga la condición $M = 0$ en el contorno². Sustituyendo esta solución en la segunda ecuación e integrándola, hallamos las flechas w . Ambos problemas son de la misma clase que el problema de calcular las flechas de una membrana uniformemente tensada, con carga lateral y flecha nula en el contorno. Este último problema es mucho más sencillo que el problema de la placa y puede siempre resolverse con aproximación suficiente utilizando un método de integración aproximado como el de Ritz o el método de diferencias finitas. Se estudiarán más adelante (v. aps. 80 y 82) algunos ejemplos de aplicación de estos últimos métodos. En el estudio de los problemas de torsión³ se dan varias aplicaciones del método Ritz.

Otro caso sencillo de aplicación de las ecuaciones (120) es el de la placa poligonal simplemente apoyada flexada por momentos M_n uniformemente repartidos en el contorno. En este caso las ecuaciones (120) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \quad (121)$$

¹ Véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., pág. 269, 1951.

² Nótese que si la forma de la placa no es poligonal, M generalmente no se anula en el contorno cuando es $M_n = 0$.

³ Véase Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 280.

En el borde recto tenemos de nuevo $\partial^2 w / \partial s^2 = 0$. De donde

$$M_n = -D \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}$$

y en el contorno tenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\frac{M_n}{D} = -\frac{M}{D}$$

Esta condición de contorno y la primera de las ecuaciones (121) se cumplirán dando a M el valor constante $M = M_n$ en todos los puntos de la placa, lo que equivale a que la suma de momentos flectores M_x y M_y es constante en toda la placa. Las flechas se hallarán entonces de la segunda de las ecuaciones (121)⁴ que toma la forma

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_n}{D} \quad (d)$$

Puede deducirse de esto que, en el caso de una placa poligonal simplemente apoyada, flexada por momentos M_n uniformemente distribuidos en el contorno, la deformada de la placa es la misma que para una membrana

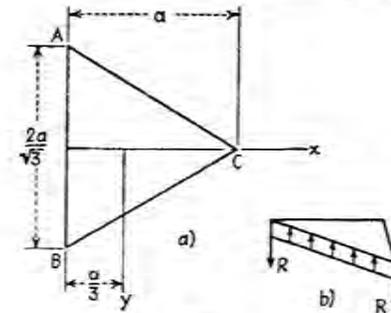


Fig. 55

uniformemente tensada con carga uniformemente distribuida. Hay muchos casos para los cuales las soluciones del problema de la membrana son conocidas. Estas soluciones pueden aplicarse inmediatamente en el estudio de los correspondientes casos de placas. Sea, por ejemplo, el caso de una placa triangular regular simplemente apoyada flexada por momentos M_n uniformemente distribuidos en el contorno. La deformada es la misma que la de la membrana uniformemente tensada y uniformemente cargada. Esta última se puede obtener experimentalmente con facilidad, tendiendo una lámina de agua de jabón sobre un contorno triangular y cargándola uniformemente con aire a presión⁵.

⁴ El primero que lo demostró fue S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 254, 1933.

⁵ Tales experimentos se usan para resolver problemas de torsión; véase Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 289.

La expresión analítica de la deformada es también comparativamente sencilla en este caso. Tomemos el producto de los primeros miembros de las ecuaciones de los tres lados del triángulo

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{a}{3}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) \\ = \frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27} \end{aligned}$$

Esta expresión evidentemente se anula en el contorno. Por lo tanto la condición de contorno $w = 0$ se cumple para la membrana si las flechas tienen la expresión

$$w = N \left[\frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27} \right] \quad (e)$$

Donde N es un factor constante cuyo valor se elige de modo que se cumpla la ecuación (d). De este modo obtenemos la solución buscada

$$w = \frac{M_n}{4aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right] \quad (f)$$

Sustituyendo $x = y = 0$, obtenemos la flecha en el centro del triángulo

$$w_0 = \frac{M_n a^2}{27D} \quad (g)$$

Las expresiones de los momentos flectores y torsores son según las ecuaciones (101) y (102)

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{M_n}{2} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right] \\ M_y &= \frac{M_n}{2} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{3(1 - \nu)M_n y}{2a} \end{aligned} \quad (h)$$

Los esfuerzos cortantes según las ecuaciones (106) y (107) son

$$Q_x = Q_y = 0 \quad (i)$$

En el contorno según la ecuación (d) de el apartado 22, el esfuerzo cortante es $Q_n = 0$ y el momento flector es igual a M_n . El momento torsor en el lado BC (fig. 55) según las ecuaciones (e) del apartado 22 es:

$$M_{nt} = \frac{3(1 - \nu)M_n}{4a} (y - \sqrt{3}x)$$

Las reacciones verticales que actúan en el lado BC (fig. 55) son

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = -\frac{3(1 - \nu)}{2a} M_n \quad (j)$$

Por simetría deducimos que las mismas reacciones uniformemente distribuidas actúan también en los otros bordes de la placa. Estas fuerzas están compensadas por las reacciones en las esquinas de la placa rectangular, cuyo valor puede hallarse como se indica en la página 105 y es

$$R = 2(M_{nt})_{x=0, y=0} = (1 - \nu) \sqrt{3} M_n \quad (j)$$

La distribución de las reacciones en el contorno está indicada en la figura 55 b). Las máximas tensiones de flexión están en las esquinas y actúan en el sentido de los planos bisectores de los ángulos. El valor de los correspondientes momentos flectores es según las ecuaciones (h)

$$(M_\nu)_{\max} = (M_\nu)_{x=0} = \frac{M_n(3 - \nu)}{2} \quad (k)$$

Este método de determinar la flexión de una placa poligonal debida a momentos uniformemente repartidos en el contorno puede aplicarse al cálculo de las tensiones térmicas producidas en tales placas por calentamiento no uniforme. Al estudiar las tensiones térmicas en placas sometidas a tracción se vio en el apartado 14 [ec. (b)] que el calentamiento no uniforme produce momentos flectores uniformemente repartidos en el contorno de la placa, momentos que evitan toda flexión de la placa. El valor de estos momentos es¹

$$M_n = \frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h} \quad (l)$$

Para obtener las tensiones térmicas en el caso de una placa simplemente apoyada basta superponer a las tensiones producidas en la flexión pura debida a los momentos (l) las tensiones que se producen en una placa simplemente apoyada en los bordes por los momentos flectores $-\alpha t d(1 + \nu)/h$ uniformemente repartidos en el contorno. La solución de este último problema puede obtenerse sin gran dificultad, en el caso de una placa de forma poligonal², como ya se explicó.

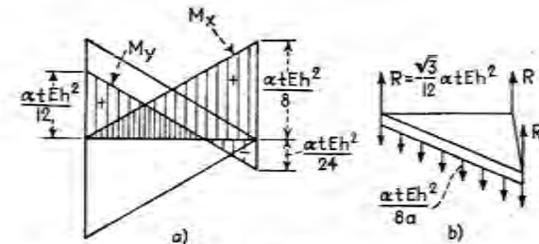


FIG. 56

¹ Se supone que la cara superior de la placa mantiene una temperatura más alta que la cara inferior y la placa así tiene tendencia a flexar con la convexidad hacia arriba.

² Véase el estudio de J. L. Maubetsch, *J. Appl. Mechanics*, vol. 2, pág. 141, 1935.

Tomemos de nuevo como ejemplo una placa triangular regular si los bordes están sujetos, los momentos flectores debidos a un calentamiento no uniforme son

$$M'_x = M'_y = \frac{atD(1 + \nu)}{h} \quad (m)$$

Para hallar los momentos flectores M_x y M_y para una placa simplemente apoyada debemos superponer a los momentos (m) los que se obtienen de las ecuaciones (h) haciendo $M_n = -atD(1 + \nu)/h$.

De esta forma se obtiene finalmente

$$M_x = \frac{atD(1 + \nu)}{h} - \frac{atD(1 + \nu)}{2h} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right] = \frac{atEh^2}{24} \left(1 + \frac{3x}{a} \right)$$

$$M_y = \frac{atD(1 + \nu)}{h} - \frac{atD(1 + \nu)}{2h} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right] = \frac{atEh^2}{24} \left(1 - \frac{3x}{a} \right)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{8} \frac{atEh^2 y}{a}$$

Las reacciones pueden obtenerse de las ecuaciones (i) y (g) sustituyendo $M_n = -atD(1 + \nu)/h$. De ahí deducimos

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = \frac{atEh^2}{8a} \quad R = -\frac{\sqrt{3}}{12} atEh^2$$

Los valores obtenidos para los momentos y reacciones ocasionados por un calentamiento no uniforme están representados en la figura 56 a) y b), respectivamente.

25. Influencia de las constantes elásticas en el valor de los momentos flectores

Se ha visto en las ecuaciones (101) y (102) que los valores de los momentos flectores y torsores están considerablemente influidos por el valor numérico del coeficiente de Poisson. Por otra parte puede demostrarse con facilidad que para casos de carga transversal el valor de Dw es independiente de E y ν esté la placa simplemente apoyada o empotrada y sean sus bordes rectos o no lo sean.

Suponiendo cualquier combinación de estas condiciones de contorno consideremos el siguiente problema. Dados unos momentos M_x y M_y para un valor de ν , calcular los nuevos valores de estos momentos para un valor ν' de la misma constante elástica. Sean M'_x y M'_y los nuevos valores de los momentos flectores. Escribiendo las ecuaciones (101) primero para ν y después para ν' , eliminando entre ellas las curvaturas $\partial^2 w / \partial x^2$ y $\partial^2 w / \partial y^2$ y resolviendo las ecuaciones resultantes, obtenemos para M'_x y M'_y

$$M'_x = \frac{1}{1 - \nu^2} [(1 - \nu\nu')M_x + (\nu' - \nu)M_y]$$

$$M'_y = \frac{1}{1 - \nu^2} [(1 - \nu\nu')M_y + (\nu' - \nu)M_x] \quad (122)$$

Así pueden calcularse M'_x y M'_y si se conocen M_x y M_y .

Si la constante ν está incluida en alguna de las condiciones de contorno, como ocurre en el caso de borde libre [ec. (112)], las ecuaciones (122) ya no son válidas.

Si la placa está elásticamente apoyada o elásticamente empotrada, los momentos dependen también del valor de la rigidez a flexión D de la placa respecto a la rigidez de la coacción.

Las tensiones térmicas, finalmente están afectadas no sólo por los factores mencionados, sino también por el valor absoluto de la rigidez D de la placa.

En la tabla 5 se dan valores medios de ν , para algunos materiales. El último valor de la tabla varía considerablemente según la edad del hormigón, tipo de áridos y otros factores.

TABLA 5
Valores medios del módulo de Poisson ν

Material	ν
Acero	0,30
Aluminio	0,30
Vidrio	0,25
Hormigón	0,15-0,25

26. Teoría exacta de placas

La ecuación diferencial (103) que junto con las condiciones de borde, define las flechas de una placa, se dedujo (v. ap. 21) despreciando el efecto que tienen sobre la flexión la tensión normal σ_x y las tensiones tangenciales τ_{xy} y τ_{yx} . Esto significa que en la deducción de esta ecuación se ha considerado que las capas delgadas en planos paralelos al plano medio están en estado de tensión plana en que sólo las tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} pueden ser distintas de cero. Uno de los casos más sencillos de esta clase es el de flexión pura. La deformada en este caso es una función de segundo grado en x e y [v. ec. (c), ap. 11] que satisface la ecuación (103). Las tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} son proporcionales a z e independientes de x e y .

Hay otros casos de flexión en que se produce rigurosamente una distribución plana de tensiones. Sea por ejemplo una placa circular con un agujero circular en el centro, flexada por momentos M_x uniformemente repartidos en el contorno del agujero (fig. 57). Cada capa delgada de la placa, separada por dos planos próximos paralelos al plano medio está en las mismas condiciones tensionales que un cilindro de pared delgada sometido a compresión o tracción uniforme [fig. 57 b)]. La suma $\sigma_x + \sigma_y$ de las tensiones principales es constante en este caso y puede deducirse que la deformación de la capa en la dirección z es también constante y no interfiere con la deformación de las capas adyacentes. Por lo tanto tenemos de nuevo una distribución plana de tensiones y la ecuación (103) es válida.

Veamos ahora el caso general de la forma de la deformada de una placa cuando la flexión da por resultado una distribución plana de tensiones. Para resolver esta cuestión hay que considerar las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio y las seis condiciones de compatibilidad. Si se desprecian las fuerzas de masa estas ecuaciones son:

¹ El código alemán (DIN 4227) de valores de ν que pueden expresarse aproximadamente por $\nu = \sqrt{f}$, 350, siendo f la resistencia a compresión del hormigón a 28 días en libras por pulgada cuadrada. Véase también J. C. Simmons, *Mag. of Concrete Research*, vol. 8, página 39, 1956.

² Véase Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 60.

³ Véase *ibid.*, págs. 229, 232.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{a}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\Delta_1 \sigma_x = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\Delta_1 \sigma_y = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \tag{b}$$

$$\Delta_1 \sigma_z = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$\Delta_1 \tau_{xy} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}$$

$$\Delta_1 \tau_{xz} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} \tag{c}$$

$$\Delta_1 \tau_{yz} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z}$$

en las cuales

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

y

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Sumando las ecuaciones (b) hallamos que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \Delta_1 \theta = 0 \tag{d}$$

es decir, que la suma de las tensiones normales es una función armónica. En el caso de tensiones planas $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ y de las dos últimas ecuaciones (c) y la última de las (b) se deduce que θ/r_0^2 es una constante que denominaremos β . Según esto la expresión general de θ en el caso de tensiones planas es

$$\theta = \theta_0 + \beta z \tag{e}$$

donde θ_0 es una función armónica plana, es decir, tal que

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} = \Delta \theta_0 = 0$$

Vemos que en el caso de tensiones planas θ se compone de dos partes, θ_0 independiente de z y β proporcional a z . La primera parte no varía en el espesor de la placa. Depende de la deformación de la placa en su propio plano y puede omitirse si interesa únicamente la flexión de las placas. De este modo podemos tomar en adelante

$$\theta = \beta z \tag{f}$$

Las ecuaciones de equilibrio (a) se satisfarán en el caso de distribución plana de tensiones si tomamos

$$\sigma_x = z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tag{g}$$

donde φ es la función de tensiones. Veamos ahora la forma general de esta función.

Sustituyendo las expresiones (g) en la ecuación (f) tenemos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \beta z \tag{h}$$

Además de la primera de las ecuaciones (b) deducimos que

$$\Delta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta_1 \varphi = 0$$

que utilizando la ecuación (h) puede ponerse en la forma siguiente

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{i}$$

De la misma manera que deducimos de la segunda y tercera de las ecuaciones (b)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{j}$$

De las ecuaciones (i) y (j) se sigue que $\partial^2 \varphi / \partial x^2$ es función lineal de x , e y . Esta función puede tomarse igual a cero sin que ello modifique los valores de las tensiones dadas por las expresiones (g). En tal caso, la expresión general de la función de tensiones es

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 z \tag{3}$$

donde φ_0 es una función armónica plana y φ_1 , satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \beta \tag{k}$$

Puesto que no estamos interesados en las deformaciones de la placa en su plano podemos prescindir en este estudio de φ_0 y tomar como expresión general de la función de tensiones

$$\varphi = \varphi_1 z \tag{l}$$

Sustituyéndola en las ecuaciones (g) pueden ahora calcularse las tensiones y determinarse los desplazamientos mediante las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{m}$$

Para los desplazamientos perpendiculares a la placa obtenemos de este modo¹

$$w = -\frac{\beta}{2E} (x^2 + y^2 + \nu z^2) + \frac{1+\nu}{E} \varphi_1$$

y la flecha de la superficie media de la placa es

$$w = -\frac{\beta}{2E} (x^2 + y^2) + \frac{1+\nu}{E} \varphi_1 \tag{n}$$

las tensiones correspondientes son según las ecuaciones (g) y (l)

$$\sigma_x = z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \quad \sigma_y = z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}$$

¹ En la última obra citada se dan varios ejemplos de cálculo de u , v y w mediante las ecuaciones (m).

y los momentos flectores y torsor

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad (o)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}$$

Para las curvaturas y torsión de la placa, de la ecuación (n) hallamos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}$$

de donde mediante las ecuaciones (k) y (o) obtenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{M_x}{D} \quad (p)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{D}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = \frac{M_{xy}}{(1-\nu)D}$$

De este análisis puede deducirse que cuando la flexión de una placa se resuelve en una distribución plana de tensiones, las flechas w [v. ec. (n)] verifican rigurosamente la ecuación (103) e igualmente los momentos flectores y torsor vienen dados por las ecuaciones (101) y (102). Si se toma la solución de la ecuación (k) en la forma de función de segundo grado en x e y , la deformada (n) es también de segundo grado, lo que corresponde a las flechas en flexión pura. En general de la ecuación (k) puede deducirse que la flecha de una placa, en el caso de distribución plana de tensiones es

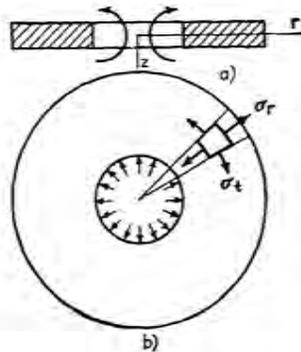


FIG. 57

la misma que la de una membrana uniformemente tensada y uniformemente cargada. La placa indicada en la figura 57 representa un caso particular de tal flexión, caso para el cual la solución de la ecuación (k), en coordenadas polares, es

$$\varphi_1 = Ar^2 + B \ln r + C$$

donde A, B y C son constantes a determinar de modo que se cumplan las condiciones de borde.

Las placas de forma poligonal simplemente apoyadas y flexadas por momentos uniformemente repartidas en el contorno, son otro ejemplo de flexión en que la deformada satisface la ecuación (n) y se cumplen rigurosamente las ecuaciones (101), (102) y (103). Como puede verse por las ecuaciones (k) y (o) en todos estos casos tenemos

$$M_x + M_y = \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) = \frac{\beta h^3}{12}$$

es decir, la suma de los momentos flectores en dos direcciones perpendiculares es constante en toda la placa.

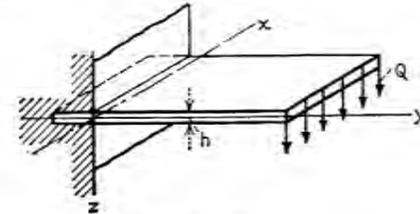


FIG. 58

Consideremos ahora el caso en que la flexión de la placa da por resultados una distribución de tensiones plana generalizada, es decir, tal que la tensión normal σ_z es nula en todos los puntos de la placa y las tensiones transversales τ_{xz} y τ_{yz} son cero en las caras de la placa $x = \pm h/2$. La flexión de una placa rectangular empotrada en un borde y con carga uniformemente repartida en el borde opuesto (fig. 58) es un ejemplo de este tipo de flexión. Por la teoría de flexión de vigas rectangulares sabemos que en este caso $\sigma_z = 0$ en todos los puntos de la placa y τ_{xz} es cero en las caras de la placa y varía a lo largo del espesor de la placa de acuerdo con la ley parabólica

$$\tau_{xz} = \frac{6Q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Utilizando de nuevo las ecuaciones generales (a), (b) y (c) y siguiendo el procedimiento seguido en el caso de distribución plana de tensiones¹ hallamos que la expresión general de la deformada en este caso tiene la forma

$$w = \frac{1}{E} \left[\frac{h^2 \varphi}{4} + (1+\nu) \varphi_1 \right] \quad (q)$$

en que φ es una función armónica de x e y y φ_1 satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \varphi$$

Puede deducirse de nuevo en este caso que se mantiene la ecuación (103) con $q = 0$.

¹ La solución rigurosa de este caso fue dada por Saint-Venant; véase la traducción de Clebsch de *Théorie de l'élasticité des corps solides*, pág. 337. Un estudio riguroso de la teoría de flexión de placas fue dado por J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, pág. 100, 1900. Véase también A. E. H. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, pág. 473, 1927. Los resultados que damos en nuestro estudio anterior están tomados de este último libro.

Las expresiones de los momentos flectores y torsor y de los esfuerzos cortantes en este caso son

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{8 + \nu}{40} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w \\
 M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{8 + \nu}{40} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w \\
 M_{xy} &= D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{8 + \nu}{40} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta w \\
 Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w
 \end{aligned} \tag{123}$$

Por lo tanto las expresiones de los esfuerzos cortantes coinciden con las expresiones (108) dadas por la teoría aproximada, pero las expresiones de los momentos son diferentes; los segundos términos de estas expresiones representan el efecto de los esfuerzos cortantes.

Estos términos correctores pueden obtenerse de un modo elemental utilizando el mismo razonamiento que en el caso de flexión de vigas. Considerando la curvatura en el plano xz , podemos establecer que la curvatura total viene producida por dos factores, los momentos flectores M_x y M_y y el esfuerzo cortante Q_x . La curvatura producida por los momentos flectores se obtiene restando de la curvatura total $-\partial^2 w / \partial x^2$ la parte $-\partial(kQ_x / hG) / \partial x$ producida por el esfuerzo cortante¹. Sustituyendo

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kQ_x}{hG} \right)$$

y $-(\partial^2 w / \partial y^2) + \partial(kQ_y / hG) / \partial y$ en lugar de $-\partial^2 w / \partial x^2$ y $-\partial^2 w / \partial y^2$ en las ecuaciones (101) y empleando las dos últimas ecuaciones del sistema (123) hallamos para los momentos flectores las expresiones

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{kDh^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w \\
 M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{kDh^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones coinciden con las dos primeras ecuaciones del sistema (123) si tomamos

$$\frac{k}{6} = \frac{8 + \nu}{40}$$

Para $\nu = 0,3$ esto da $k = 1,245$.

Por la teoría de flexión de vigas sabemos que la corrección debida al esfuerzo cortante es pequeña y puede despreciarse si el canto h es pequeño en comparación con la luz de la viga. La misma conclusión se mantiene en el caso de placas.

¹ k es un factor numérico que en el caso de vigas depende de la forma de la sección transversal.

Las expresiones exactas de las tensiones son

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2 - \nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w \\
 \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2 - \nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w \\
 \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2 - \nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta w \\
 \tau_{xz} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \quad \tau_{yz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad \sigma_z = 0
 \end{aligned} \tag{r}$$

Los segundos términos de los segundos miembros de las ecuaciones que dan σ_x , σ_y y τ_{xy} son las correcciones debidas al efecto de los esfuerzos cortantes en la flexión. Se ve que las tensiones ya no son proporcionales a la distancia z al plano medio, sino que contienen un término z^3 . Las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} varían de acuerdo con la misma ley parabólica en el caso de vigas rectangulares. En el caso de distribución plana de tensiones, Δw es constante, y las fórmulas (r) coinciden con las dadas por la teoría aproximada.

El problema de una placa uniformemente cargada puede también estudiarse rigurosamente del mismo modo. Así puede demostrarse que la expresión general de las flechas en este caso se obtiene sumando a la expresión (q) el término

$$\frac{1}{64} \frac{q}{D} (x^2 + y^2) \left(x^2 + y^2 - \frac{2h^2}{1 - \nu} \right) \tag{s}$$

que satisface también la ecuación (103) de la teoría aproximada. Las expresiones de los momentos flectores no coinciden con las ecuaciones (101) de la teoría aproximada, sino que contienen términos adicionales de corrección. Si el espesor de la placa es pequeño en comparación con las otras dimensiones, estos términos son pequeños y pueden despreciarse.

En todos los casos anteriores se han estudiado soluciones generales de problemas de flexión de placas sin considerar las condiciones de borde. Hay también soluciones rigurosas de varios problemas teniendo en cuenta las condiciones de borde¹.

Estas soluciones demuestran que si la placa puede considerarse «delgada», la teoría usual es suficientemente aproximada para casos prácticos excepto:

1. En la proximidad de cargas transversales fuertemente concentradas; y
2. En zonas estrechas de borde, especialmente cerca de las esquinas de las placas y en torno a agujeros de un diámetro del mismo orden de magnitud que el propio espesor de la placa.

¹ En estos últimos tiempos la teoría rigurosa de placas ha atraído el interés de los ingenieros y se han publicado varias memorias importantes sobre este tema. Mencionaremos aquí las siguientes: S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, págs. 203 y 305, 1933. B. Galerkin, *Compt. rend.*, vol. 190, pág. 1047; vol. 193, pág. 568; vol. 194, pág. 1440. G. D. Birkhoff, *Phil. Mag.*, vol. 43, pág. 953, 1922. C. A. Garabedian, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 25, página 343, 1923. *Compt. rend.*, vols. 178 (1924), 180 (1925), 186 (1928), 195 (1932). R. Archie Higdon y D. L. Holl, *Duke Math. J.*, vol. 3, pág. 18, 1937. A. C. Stevenson, *Phil. Mag.*, ser. 7, vol. 33, pág. 639, 1942. R. Ohlig, *Ingr.-Arch.*, vol. 13, pág. 155, 1942. I. N. Sneddon, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 42, pág. 260, 1946. L. Leibenson, *Works*, vol. 1, pág. 111, Moscú, 1951. H. Jung, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, pág. 57, 1952. E. Koppe, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 37, pág. 38, 1957. Para tensiones térmicas véase K. Marguerre, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 15, pág. 369, 1935, e I. S. Sokolnikoff y E. S. Sokolnikoff, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 45, pág. 235, 1939.

En el primero de estos casos la tensión normal σ_z y las tensiones tangenciales deben considerarse de la misma importancia en cuanto a su efecto sobre la deformación de la placa. En la determinación de la corrección necesaria sobre las tensiones dadas por la teoría aproximada (v. pág. 90) puede prescindirse de considerar las condiciones de borde. En tales circunstancias la solución más conveniente del problema la proporciona la teoría de placas gruesas.

En el segundo caso el efecto de la tensión normal σ_z sobre la deformación es secundario comparado con el efecto de las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} . Recientemente se han desarrollado varias teorías modificadas de placas delgadas, teniendo en cuenta este último efecto (v. ap. 39). Estas teorías son más aceptables que la teoría más rigurosa de placas gruesas para el análisis de tensiones en las zonas de borde de las placas.

Placas rectangulares simplemente apoyadas

27. Placas rectangulares simplemente apoyadas con carga sinusoidal

Disponiendo los ejes de coordenadas como indica la figura 59, se supone que la expresión de la carga repartida sobre la placa es

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (a)$$

donde q_0 representa la intensidad de la carga en el centro de la placa. En este caso la ecuación diferencial (103) de la deformada será

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (b)$$

Las condiciones en los límites para bordes simplemente apoyados, son

$$\begin{aligned} w = 0 & \quad M_x = 0 & \text{para} & \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = a \\ w = 0 & \quad M_y = 0 & \text{para} & \quad y = 0 \quad \text{y} \quad y = b \end{aligned}$$

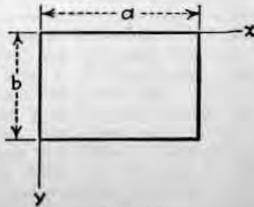


FIG. 59

Usando la ecuación (101) de los momentos flectores y observando que por ser en los bordes $w = 0$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ para los bordes respectivamente paralelos a los ejes x e y , se pueden escribir las condiciones en los límites de la forma:

$$(1) \quad w = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = a \quad (c)$$

$$(3) \quad w = 0 \quad (4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad \text{y} \quad y = b$$

Se comprueba que todas las condiciones en los límites se cumplen si se expresan las flechas mediante

$$w = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (d)$$

donde la constante C debe elegirse de modo que satisfaga (b). Sustituyendo (d) en (b) se encuentra

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C = \frac{q_0}{D}$$

y se llega a que la deformada que satisface a (b) y a las condiciones de contorno (c), es

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (e)$$

Con ayuda de esta expresión y las ecuaciones (101), (102), se encuentra:

$$M_x = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$M_y = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (f)$$

$$M_{xy} = \frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

Se ve que la flecha máxima y los momentos flectores máximos se producen en el centro de la placa. Sustituyendo x por $a/2$ e y por $b/2$ en (e) y (f) se encuentra:

$$w_{\max} = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad (124)$$

$$(M_x)_{\max} = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right)$$

$$(M_y)_{\max} = \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (125)$$

En el caso particular de una placa cuadrada, $a = b$, y las fórmulas precedentes serán

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \quad (M_x)_{\max} = (M_y)_{\max} = \frac{(1 + \nu)q_0 a^2}{4\pi^2} \quad (126)$$

Se calculan los esfuerzos cortantes por las ecuaciones (106) y (107) y se tiene

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ Q_y &= \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \quad (g)$$

Para obtener las reacciones en los bordes apoyados de la placa, se opera como indica el apartado 22. Para el borde $x = a$ se encuentra

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = - \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2 - \nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi y}{b} \quad (h)$$

De la misma manera, para $y = b$.

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=b} = - \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2 - \nu}{a^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (i)$$

Por consiguiente, el reparto de la reacción sigue una ley sinusoidal, el signo menos indica que las reacciones sobre la placa actúan hacia arriba. Por simetría se llega a que las fórmulas (h) e (i) representan también las distribuciones de las reacciones a lo largo de los lados $x = 0$ e $y = 0$. La resultante de las reacciones es:

$$\begin{aligned} \frac{2q_0}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2 - \nu}{b^2} \right) \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} dy \right. \\ \left. + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2 - \nu}{a^2} \right) \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx \right] = \frac{4q_0 ab}{\pi^2} + \frac{8q_0(1 - \nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad (j) \end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{4q_0 ab}{\pi^2} = \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy \quad (k)$$

se llega a la conclusión de que la suma de las reacciones repartidas es mayor que la carga total sobre la placa expresada por (r). Este resultado se explica fácilmente si se tiene en cuenta que como en el apartado 22 se obtienen no solamente las reacciones repartidas sino también las reacciones concentra-

das en los ángulos de la placa. Estas reacciones concentradas son iguales por simetría y su valor como se ve en la figura 51 es

$$R = 2(M_{xy})_{x=a, y=b} = \frac{2q_0(1 - \nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \quad (l)$$

Este signo positivo indica que las reacciones están dirigidas hacia abajo. Su suma es exactamente igual al segundo término de la expresión (j). La figura 60 indica las reacciones repartidas y concentradas que actúan sobre la placa y equilibran la carga definida por la ecuación (a). Se puede ver que los ángulos tienen tendencia a elevarse bajo la acción de la carga aplicada y deben producirse las reacciones concentradas R para evitarlo.

La tensión de flexión máxima se produce en el centro de la placa.

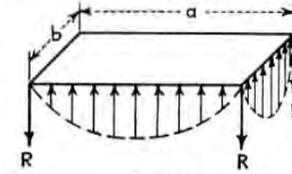


FIG. 60

Suponiendo $a > b$, se encuentra en el centro que $M_y > M_x$. Por consiguiente, la tensión de flexión máxima es

$$(\sigma_y)_{\max} = \frac{6(M_y)_{\max}}{h^2} = \frac{6q_0}{\pi^2 h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

La tensión tangencial máxima aparecerá en los puntos medios de los lados mayores observando que el esfuerzo cortante total $V_y = Q_y - \partial M_{xy} / \partial x$ está repartida a todo el ancho del espesor de la placa siguiendo una ley parabólica y utilizando la ecuación (i), se obtiene

$$(\tau_{yx})_{\max} = \frac{3q_0}{2\pi b h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2 - \nu}{a^2} \right)$$

Si la carga sunisoidal está dada por

$$q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m)$$

donde m y n son números enteros, se opera como anteriormente y se obtiene para la deformada

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (127)$$

de donde se obtiene por derivación, los momentos flectores y torsores.

28. Solución de Navier para placas rectangulares simplemente apoyadas

Se puede utilizar la solución del apartado precedente para calcular las flechas producidas, sobre las placas rectangulares simplemente apoyadas, para toda clase de carga expresada por la ecuación

$$q = f(x,y) \quad (a)$$

Para ello, se representa la función $f(x,y)$ bajo la forma de una serie trigonométrica doble¹:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (128)$$

Para calcular los coeficientes $a_{m,n}$ de esta serie, se multiplica esta ecuación por $\operatorname{sen} (n'\pi y)/b \, dy$ y se integra entre 0 y b .

Advirtiéndose que:

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dy = 0 \quad \text{cuando } n \neq n'$$

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \quad \text{cuando } n = n'$$

Se encuentra que

$$\int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn'} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

Multiplicando los dos miembros de (b) por $\operatorname{sen} (m'\pi x/a) \, dx$ e integrando entre 0 y a , se tiene

$$\int_0^a \int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} a_{m'n'}$$

de donde

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dx dy \quad (129)$$

Verificando la integración (129) se encuentran los coeficientes de la serie (128) para una distribución de carga dada, es decir, para $f(x,y)$ conocido y se representa en este caso la carga dada como la suma de cargas parciales sinusoidales. La flecha dada en cada carga particular ha sido

¹ Navier fue el primero que resolvió así este mismo problema en una Memoria que presentó a la Academia Francesa de Ciencias en 1820. El resumen de esta Memoria fue publicado en *Bull. Soc. Phil.-Math.*, París, 1823. El manuscrito se encuentra en la biblioteca de l'École des Ponts et Chaussées.

estudiada en el apartado anterior y la flecha total se obtiene sumando los términos dados por la ecuación (127). Por consiguiente nos encontramos

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (130)$$

Tomemos el caso de una carga uniformemente repartida sobre la superficie de una placa para ilustrar la aplicación de la solución general (130). En este caso,

$$f(x,y) = q_0$$

donde q_0 es la intensidad de la carga uniformemente repartida. La ecuación (129) nos da:

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (c)$$

donde m y n son números enteros impares. Si m o n , o los dos son pares $a_{mn} = 0$.

Sustituyendo en (130) se encuentra $m = 1, 3, 5, \dots$, y $n = 1, 3, 5, \dots$

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \quad (131)$$

En el caso de una carga uniforme, se tiene una deformada simétrica respecto a los ejes $x = a/2$, $y = b/2$ y todos los términos correspondientes a valores pares de m o n , en (131), desaparecen puesto que no son simétricos respecto a los ejes mencionados. La flecha máxima de la placa está en su centro y se expresa, sustituyendo $x = a/2$; $y = b/2$ en (131) dando,

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \quad (132)$$

Esta es una serie rápidamente convergente; una aproximación suficiente se obtiene tomando el primer término de la serie, que en el caso de una placa cuadrada da

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0,00416 \frac{q_0 a^4}{D}$$

donde, sustituyendo D por su valor y suponiendo $\nu = 0,3$,

$$w_{\max} = 0,0454 \frac{q_0 a^4}{Eh^3}$$

Este resultado tiene un error del orden de 2,5 % (v. tabla 8).

De la expresión (132) se deduce que las flechas de dos placas que tienen el mismo espesor e igual relación a/b , aumenta con la cuarta potencia de la longitud de los lados.

La ecuación general (131) da el valor de los momentos flectores y torsores, utilizando las ecuaciones (101) y (102). La serie obtenida en este caso no converge tan rápidamente como (131) y en un posterior estudio (v. ap. 30), se dará otra forma de solución más apropiada para cálculos numéricos. Puesto que los momentos están expresados por las derivadas segundas de (131), sus valores máximos si se toman q_0 y D iguales son proporcionales al cuadrado de las dimensiones lineales. Puesto que la carga total sobre la placa igual a $q_0 ab$, es también proporcional al cuadrado de las dimensiones lineales de la placa, se llega a que para dos placas de igual espesor y de la misma relación a/b , los momentos flectores máximos y, por consiguiente, las tensiones máximas son iguales si las cargas totales sobre las dos placas son iguales¹.

29. Otras aplicaciones de la solución de Navier

Se ve, por el estudio del apartado anterior, que la flecha de una placa rectangular simplemente apoyada (fig. 59) siempre puede representarse en

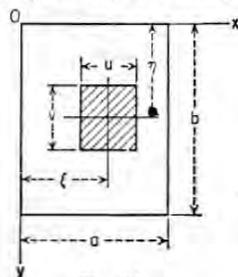


FIG. 61

la forma de una serie trigonométrica doble (130), siendo los coeficientes a_{mn} dados por la ecuación (129).

Apliquemos este resultado al caso de una carga única P uniformemente repartida sobre el área de un rectángulo (v. fig. 61). En virtud de (129), tenemos

$$a_{mn} = \frac{4P}{abuv} \int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta-v/2}^{\eta+v/2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

o sea

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 mn uv} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{2b} \quad (a)$$

¹ Esta conclusión fue establecida por Mariotte en el trabajo *Traité du mouvement des eaux*, publicado en 1686. Véanse trabajos científicos de Mariotte, nueva edición, vol. 2, págs. 467 y 1740.

Si, en particular, $\xi = a/2$, $\eta = b/2$, $u = a$ y $v = b$, la ecuación (a) es idéntica a la (c), obtenida en el apartado 28, para una placa uniformemente cargada.

Otro caso de interés práctico es la carga única concentrada en un punto $x = \xi$, $y = \eta$, de una placa. Utilizando (a) y haciendo tender u y v hacia 0, se tiene

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \quad (b)$$

y con ayuda de (130), se obtiene para la flecha

$$w = \frac{4P}{\pi^4 ab D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (133)$$

La serie converge rápidamente y se puede obtener la flecha en todo punto de la placa, con una aproximación suficiente, no tomando más que los primeros términos de la serie. Calculemos, por ejemplo, la flecha del centro, cuando la carga está aplicada también en el punto medio. Tenemos entonces, $\xi = x = a/2$, $\eta = y = b/2$ y la serie (133) da

$$w_{\max} = \frac{4P}{\pi^4 ab D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (c)$$

donde $m = 1, 3, 5 \dots$ y $n = 1, 3, 5 \dots$. En el caso de una placa cuadrada la ecuación (c) deberá ser

$$w_{\max} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2}$$

tomando los cuatro primeros términos de la serie se encuentra

$$w_{\max} = \frac{0,01121Pa^2}{D}$$

que es aproximadamente 3,5 % menor que el valor exacto (v. tabla 23, pág. 165).

Como la serie (128), representa la intensidad de la carga concentrada, es divergente en el punto $x = \xi$, $y = \eta$, igualmente lo son las series que expresan los momentos flectores y los esfuerzos cortantes en el punto de aplicación de la carga.

Consideremos la expresión

$$w = K(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 ab D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (134)$$

que, en virtud de la ecuación (133) representa la flecha debida a la carga unidad $P = 1$ y que se escribe en resumen $K(x,y,\xi,\eta)$. Siendo las variables x e y , $w = K(x,y,\xi,\eta)$ es la ecuación de la deformada de la placa, sometida a una carga unidad aplicada en un punto fijo $x = \xi$, $y = \eta$. Si ξ y η son las variables, la ecuación (134) define la superficie de influencia para la flecha de la placa en un punto fijo x , y , cuando la posición de la carga unidad móvil está dada por ξ y η . Además para una carga cualquiera de intensidad $f(\xi, \eta)$ repartida sobre un área A conocida, la flecha correspondiente se obtiene fácilmente en todo punto de la placa. En efecto aplicando una carga elemental $f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ al punto $x = \xi$, $y = \eta$ y utilizando el principio de superposición, se llega a la flecha

$$w = \iint_A f(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (135)$$

estando la integral doble extendida a la superficie cargada y $K(x,y,\xi,\eta)$ dada por (134).

A la función $K(x,y,\xi,\eta)$ se le llama a menudo función de Green de la placa. Esta función está asociada a las condiciones en los límites de una placa rectangular simplemente apoyada cuando está dada bajo la forma 134. De todas formas, muchas propiedades de la función de Green son independientes de estas restricciones. Un ejemplo de esto es la propiedad de simetría, expresada por

$$K(x,y,\xi,\eta) = K(\xi,\eta,x,y)$$

que deriva del teorema recíproco de Maxwell¹ y que es fácil de comprobar en el caso particular de la función (139).

Como en el último ejemplo de la aplicación de la solución de Navier, consideremos el caso de una carga P uniformemente repartida sobre el área de un círculo de radio c y de centro el punto de coordenadas $x = \xi$, $y = \eta$. Operemos en coordenadas polares, ρ , θ tomando como origen el centro del área cargada y sustituyendo el área elemental $dx dy$ de (129) por $\rho d\rho d\theta$, obtendremos, en la misma ecuación (129)

$$a_{mn} = \frac{4}{ab\pi c^2} \int_0^c \int_0^{2\pi} \text{sen} \frac{m\pi(\xi + \rho \cos \theta)}{a} \text{sen} \frac{n\pi(\eta + \rho \text{sen} \theta)}{b} \rho d\rho d\theta \quad (d)$$

La solución de la integral (d) da, a condición que el círculo $\rho = c$ quede por entero en los límites de la placa²:

$$a_{mn} = \frac{8P}{abc\gamma_{mn}} J_1(\gamma_{mn}c) \text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \quad (e)$$

donde $\gamma_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$ y $J_1(\gamma_{mn}c)$ es la función de Bessel, de primer orden con el argumento $\gamma_{mn}c$. La flecha buscada se obtiene sustituyendo (e) en (130).

Se ve que la solución de Navier sigue siendo sencilla en los casos relativamente complicados de distribución de carga. Por otra parte la serie doble de esta solución no es cómoda para los cálculos numéricos, especialmente en el caso en que intervienen derivadas de orden elevado de w .

¹ Véase, por ejemplo, S. Timoshenko y D. H. Young, *Theory of Structures*, 1945, pág. 250.

² Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, 1932, pág. 240.

Veremos en el apartado siguiente otra forma de solución de flexión de placas rectangulares.

30. Otra solución para placas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas

Estudiando los problemas de flexión de placas rectangulares que tienen dos bordes opuestos simplemente apoyados, M. Lévy¹ sugirió tomar como solución una serie

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (136)$$

donde Y_m es función sólo de y . Se supone que los lados $x = 0$ y $x = a$ (fig. 62) están simplemente apoyados. Por consiguiente, cada término de la serie (136) satisface las condiciones en los límites $w = 0$ y $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$, en

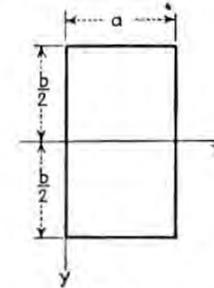


FIG. 62

estos dos lados. Queda por determinar Y_m de modo que satisfaga las condiciones en los lados $y = \pm b/2$ y también a la de la deformada

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (a)$$

Aplicando este método a placas rectangulares uniformemente cargadas y simplemente apoyadas, se puede llegar a otra simplificación poniendo (a) bajo la forma²

$$w = w_1 + w_2 \quad (b)$$

y poniendo

$$w_1 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) \quad (c)$$

¹ Véase *Compt. rend.*, vol. 129, págs. 535-539, 1899. Esta solución fue aplicada en varios casos de flexión de placas rectangulares por E. Estante, *Theses*, Paris, 1900; donde se encuentra la transformación de la serie doble de Navier en serie simple de Lévy.

² Esta forma de solución fue utilizada por A. Nádai, *Forschungsarb.*, núms. 170 y 171, Berlín, 1915; véase también su libro *Elastische Platten*, Berlín, 1925.

esto es w_1 representa la flecha de una franja paralela al eje de las x , cargadas uniformemente. Esto satisface la ecuación (a) y también las condiciones en los bordes, para $x = 0$ y $x = a$.

La expresión w_2 debe satisfacer evidentemente a

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = 0 \quad (137)$$

y debe tomarse de tal manera que la suma (b) satisfaga a todas las condiciones en los bordes de la placa. Tomando w_2 , bajo la forma de la serie (136) en el cual, por simetría, $m = 1, 3, 5 \dots$ y sustituyendo este valor en (137), se tiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} = 0$$

Esta ecuación puede cumplirse para todos los valores de x a condición de que Y_m satisfaga a

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0 \quad (d)$$

La integral general de esta ecuación es de la forma¹

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \text{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \text{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \text{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \text{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (138)$$

Advertiendo que la deformada de la placa es simétrica con relación al eje x (fig. 62), no quedan en (138) más que las funciones pares de q y las constantes de integración C_m y D_m son nulas.

La deformada (b) está entonces expresada por la ecuación

$$w = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \text{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \text{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

que satisface a (a) así como a las condiciones en los límites en los bordes $x = 0$ y $x = a$. Queda ahora calcular las constantes de integración A_m y B_m de tal manera que satisfagan las condiciones de contorno

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

¹ P. F. Papkovitch, *Priklad. Mat. Mekh.*, 1941, sugiere una forma con alguna pequeña diferencia para Y_m más conveniente en ciertas condiciones en los límites.

en los lados $y = \pm b/2$. Se empieza por desarrollar (e) en serie trigonométrica, lo que da¹

$$\frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

donde $m = 1, 3, 5, \dots$ La deformada (e) toma entonces la forma

$$w = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \text{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \text{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

donde $m = 1, 3, 5, \dots$ Sustituyendo en las condiciones de borde (f) y utilizando la notación

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m \quad (h)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones que determinan las constantes A_m y B_m

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \text{ch} \alpha_m + \alpha_m B_m \text{sh} \alpha_m = 0$$

$$(A_m + 2B_m) \text{ch} \alpha_m + \alpha_m B_m \text{sh} \alpha_m = 0$$

de donde

$$A_m = - \frac{2(\alpha_m \text{th} \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \text{ch} \alpha_m} \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \text{ch} \alpha_m} \quad (i)$$

Sustituyendo estos valores en (g) se obtiene la deformada de la placa que satisface a (a) y a las condiciones de los límites y toma la forma

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \text{th} \alpha_m + 2}{2 \text{ch} \alpha_m} \text{ch} \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \text{ch} \alpha_m} \frac{2y}{b} \text{sh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (139)$$

con la cual se puede calcular la flecha en todo punto utilizando las tablas de funciones hiperbólicas².

La flecha máxima se sitúa en el centro de la placa ($x = a/2$), $y = 0$, donde

$$w_{\text{máx}} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \text{th} \alpha_m + 2}{2 \text{ch} \alpha_m} \right) \quad (j)$$

¹ Véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 3.ª ed., parte II, 1956, pág. 50.

² Véanse, por ejemplo, *Tables of Circular and Hyperbolic Sines and Cosines*, 1939, y *Table of Circular and Hyperbolic Tangents and Cotangents*, 1943, Columbia University Press, Nueva York; también British Association for the Advancement of Science, *Mathematical Tables*, 3.ª ed., vol. 1, Cambridge University Press, 1951; finalmente, F. Lössch, *Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen*, Berlin, 1954.

Despreciando el segundo término de paréntesis, esta serie representa la flecha en el centro de una franja uniformemente cargada. Por consiguiente se puede representar (*j*) en la forma

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad (140)$$

La serie de esta expresión converge muy rápidamente¹ y se obtiene una precisión suficiente tomando sólo el primer término.

Consideremos que una placa cuadrada se deduce de (*h*) que

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} \quad \dots$$

y (140) da

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} (0,68562 - 0,00025 + \dots) = 0,00406 \frac{qa^4}{D}$$

Se ve que el segundo término de la serie entre paréntesis es despreciable; no tomando más que el primer término la fórmula de la flecha se obtiene con tres cifras exactas.

Utilizando (140), se representa la flecha máxima de una placa por

$$w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad (141)$$

donde α es un factor numérico dependiente del cociente b/a de los lados de la placa. La tabla 8 (pág. 141) da los valores de α .

Los momentos flectores M_x y M_y se obtienen con la ayuda de (*e*). Sustituyendo la parte algebraica de esta expresión en (101) se encuentra que:

$$M'_x = \frac{qx(a-x)}{2} \quad M'_y = \nu \frac{qx(a-x)}{2} \quad (k)$$

La sustitución de la serie de (*e*) en las mismas ecuaciones da:

$$M'_x = (1-\nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{a} + B_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (l)$$

$$M'_y = -(1-\nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{2}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

¹ Se supone que $b \geq a$, como en la figura 62.

Los momentos flectores totales se obtienen sumando las expresiones (*k*) y (*l*). A lo largo del eje de las x la expresión de los momentos flectores toma la forma

$$(M_x)_{y=0} = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2\nu B_m - (1-\nu)A_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$(M_y)_{y=0} = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2B_m + (1-\nu)A_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Estas dos series convergen rápidamente y los momentos se calculan asimismo y vienen dados por

$$(M_x)_{y=0} = \beta' qa^2 \quad (M_y)_{y=0} = \beta'_1 qa^2 \quad (m)$$

La tabla 6 da los valores numéricos de los factores β' y β'_1 .

TABLA 6
Factores β' y β'_1 para momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga q uniformemente repartida
 $\nu = 0,3, b \geq a$

b/a	$M_x = \beta' qa^2, y = 0$					$M_y = \beta'_1 qa^2, y = 0$				
	$x = 0,1a$	$x = 0,2a$	$x = 0,3a$	$x = 0,4a$	$x = 0,5a$	$x = 0,1a$	$x = 0,2a$	$x = 0,3a$	$x = 0,4a$	$x = 0,5a$
1,0	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479
1,1	0,0234	0,0389	0,0486	0,0541	0,0554	0,0172	0,0311	0,0412	0,0475	0,0493
1,2	0,0256	0,0432	0,0545	0,0607	0,0627	0,0174	0,0315	0,0417	0,0480	0,0501
1,3	0,0277	0,0472	0,0599	0,0671	0,0694	0,0175	0,0316	0,0419	0,0482	0,0503
1,4	0,0297	0,0509	0,0649	0,0730	0,0755	0,0175	0,0315	0,0418	0,0481	0,0502
1,5	0,0314	0,0544	0,0695	0,0783	0,0812	0,0173	0,0312	0,0415	0,0478	0,0498
1,6	0,0330	0,0572	0,0736	0,0831	0,0862	0,0171	0,0309	0,0411	0,0472	0,0492
1,7	0,0344	0,0599	0,0773	0,0874	0,0908	0,0169	0,0306	0,0405	0,0466	0,0486
1,8	0,0357	0,0623	0,0806	0,0913	0,0948	0,0167	0,0301	0,0399	0,0459	0,0479
1,9	0,0368	0,0644	0,0835	0,0948	0,0985	0,0165	0,0297	0,0393	0,0451	0,0471
2,0	0,0378	0,0663	0,0861	0,0978	0,1017	0,0162	0,0292	0,0387	0,0444	0,0464
2,5	0,0413	0,0729	0,0952	0,1085	0,1129	0,0152	0,0272	0,0359	0,0412	0,0430
3,0	0,0431	0,0763	0,1000	0,1142	0,1189	0,0145	0,0258	0,0340	0,0390	0,0406
4,0	0,0445	0,0791	0,1038	0,1185	0,1235	0,0138	0,0246	0,0322	0,0369	0,0384
∞	0,0450	0,0800	0,1050	0,1200	0,1250	0,0135	0,0240	0,0315	0,0360	0,0375

Los momentos flectores que actúan a lo largo de la línea media $x = a/2$ se pueden calcular de la misma manera y se escriben

$$(M_x)_{x=a/2} = \beta'' qa^2 \quad (M_y)_{x=a/2} = \beta''_1 qa^2 \quad (n)$$

La tabla 7 da β'' y β_1'' .

Los valores máximos de estos momentos

$$(M_z)_{\max} = \beta q a^2 \quad (M_y)_{\max} = \beta_1 q a^2 \quad (o)$$

TABLA 7

Factores β'' y β_1'' para momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga q uniformemente repartida
 $\nu = 0,3, b \geq a$

b/a	$M_x = \beta'' q a^2, x = a/2$					$M_y = \beta_1'' q a^2, x = a/2$				
	y = 0,4a	y = 0,3a	y = 0,2a	y = 0,1a	y = 0	y = 0,4a	y = 0,3a	y = 0,2a	y = 0,1a	y = 0
1,0	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479
1,1	0,0197	0,0353	0,0465	0,0532	0,0554	0,0225	0,0363	0,0442	0,0481	0,0493
1,2	0,0225	0,0401	0,0526	0,0600	0,0627	0,0239	0,0379	0,0454	0,0490	0,0501
1,3	0,0252	0,0447	0,0585	0,0667	0,0694	0,0252	0,0391	0,0462	0,0494	0,0503
1,4	0,0275	0,0491	0,0639	0,0727	0,0755	0,0263	0,0402	0,0468	0,0495	0,0502
1,5	0,0302	0,0532	0,0690	0,0781	0,0812	0,0275	0,0410	0,0470	0,0493	0,0498
1,6	0,0324	0,0571	0,0737	0,0832	0,0862	0,0288	0,0417	0,0471	0,0489	0,0492
1,7	0,0348	0,0607	0,0780	0,0877	0,0908	0,0295	0,0423	0,0470	0,0484	0,0486
1,8	0,0371	0,0641	0,0819	0,0917	0,0948	0,0304	0,0428	0,0469	0,0478	0,0479
1,9	0,0392	0,0673	0,0854	0,0953	0,0985	0,0314	0,0433	0,0467	0,0472	0,0471
2,0	0,0413	0,0703	0,0887	0,0986	0,1017	0,0322	0,0436	0,0464	0,0465	0,0464
2,5	0,0505	0,0828	0,1012	0,1102	0,1129	0,0360	0,0446	0,0447	0,0435	0,0430
3,0	0,0586	0,0923	0,1092	0,1168	0,1189	0,0389	0,0447	0,0431	0,0413	0,0406
4,0	0,0723	0,1054	0,1180	0,1224	0,1235	0,0426	0,0436	0,0406	0,0389	0,0384
∞	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375

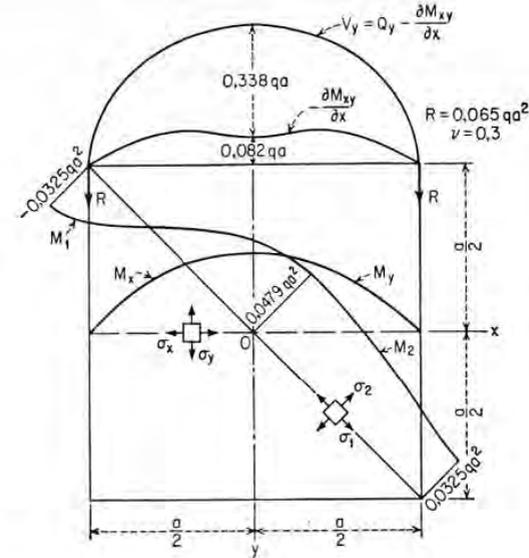


FIG. 63

se producen en el centro de la placa ($x = a/2, y = 0$) y los factores correspondientes β y β_1 figuran en la tabla 8. La distribución de los momentos en el caso particular de una placa cuadrada está indicada en la figura 63.

Se ve en la tabla 8 que, cuando la relación b/a aumenta los momentos y la flecha máxima de la placa tienden rápidamente hacia los valores calculados para una franja uniformemente cargada, o para una placa flexada según una superficie cilíndrica, que corresponden a $b/a = \infty$. Para $b/a = 3$ la diferencia entre la flecha de la franja y la placa es aproximadamente el 6,5 %. Para $b/a = 5$, esta diferencia es inferior al 0,5 %. Las diferencias entre los momentos flectores máximos para las mismas relaciones de b/a son respectivamente, 5 y 1/3 %.

Se concluye de estas comparaciones, que para $b/a > 3$ los cálculos para una placa pueden sustituirse por las de franja, sin error importante.

La expresión (e) puede usarse también para el cálculo de los esfuerzos cortantes y las reacciones en el contorno. Calculando la derivada segunda de esta expresión, encontramos

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q x(a-x)}{2D} + \frac{2\pi^2 q a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

TABLA 8

Factores $\alpha, \beta, \gamma, \delta, n$ para placas rectangulares simplemente apoyadas uniformemente cargadas
 $\nu = 0,3$

b/a	$\bar{w}_{\max} = \alpha \frac{q a^4}{D}$	$(M_x)_{\max} = \beta q a^2$	$(M_y)_{\max} = \beta_1 q a^2$	$(Q_x)_{\max} = \gamma q a$	$(Q_y)_{\max} = \gamma_1 q a$	$(V_x)_{\max} = \delta q a$	$(V_y)_{\max} = \delta_1 q a$	R = n q a^2
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
1,0	0,00406	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,00485	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,00564	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,00638	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,00705	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,00772	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,00830	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,00883	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,00931	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,00974	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,01013	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,01223	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,01282	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,01297	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,01302	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Sustituyendo en (106) y (107), se tiene,

$$Q_x = \frac{qa(2x)}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$Q_y = -2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Para los lados $x = 0$ e $y = -b/2$, se encuentra

$$(Q_x)_{x=0} = \frac{qa}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}$$

$$= \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

$$(Q_y)_{y=-b/2} = 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$= \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

El valor numérico máximo de estas fuerzas se obtiene en el centro de los lados, donde

$$(Q_x)_{x=0,y=0} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} = \gamma qa \quad (p)$$

$$(Q_y)_{x=a/2,y=-b/2} = \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2} \operatorname{th} \alpha_m}{m^2} = \gamma_1 qa$$

La tabla 8 da γ y γ_1 .

Las reacciones a lo largo del lado $x = 0$ son

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

$$+ \frac{2(1-\nu)qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_m}$$

$$\left(\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right)$$

El valor numérico máximo de esta reacción se sitúa en el punto medio del lado $y = 0$, donde se encuentra

$$(V_x)_{z=0,y=0} = qa \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} + \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] = \delta qa \quad (q)$$

donde δ es un factor numérico dependiente de ν y de b/a que se obtiene asimismo, sumando las series convergentes de (q). En la tabla 8, se encuentran los valores numéricos de δ y δ_1 que corresponden al centro de los lados paralelos del eje x . La figura 63 muestra la distribución de las reacciones a lo largo de los lados de una placa cuadrada. Las reacciones debidas a los momentos de torsión M_{xy} aparecen también en esta figura. Estas últimas están equilibradas por las reacciones concentradas en los ángulos de la placa cuyo valor es

$$R = 2(M_{xy})_{z=a,y=b/2} = 2D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{z=a,y=b/2}$$

$$= \frac{4(1-\nu)qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} [(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) \operatorname{sh} \alpha_m - \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m] = nqa^2 \quad (r)$$

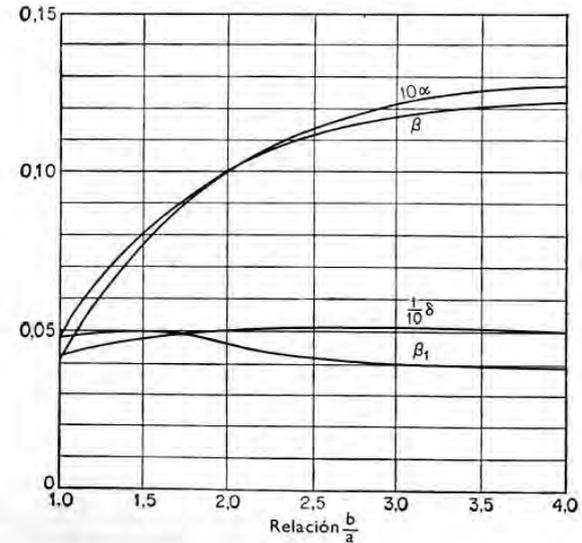


FIG. 64

Estas fuerzas están dirigidas hacia abajo e impiden que se levanten las esquinas de la placa durante la flexión.

La última columna de la tabla 8 da los valores de n . Las curvas de la figura 64 representan los valores a , β , β_1 , δ en función de b/a .

Puesto que estamos en presencia de las fuerzas R que actúan hacia abajo y son importantes, se deberá prever un anclaje de los ángulos de la placa, si no están sólidamente fijados a las vigas de apoyo.

Para determinar los momentos que levantan los ángulos, consideremos un elemento abc de la placa tomado de un ángulo (v. fig. 65) e introduzcamos, con el mismo objeto, nuevas coordenadas 1, 2 formando un ángulo de 45° con x y y . Se puede

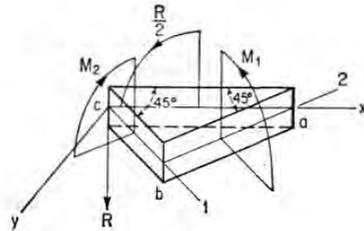


FIG. 65

comprobar ahora que los momentos flectores que actúan sobre ab y cb son $M_1 = -R/2$ y $M_2 = +R/2$ y que los momentos torsores correspondientes son nulos. En efecto, utilizando la ecuación (39) se obtiene para el lado ac que está, para el elemento de borde, dado por $\alpha = -45^\circ$, el momento flector

$$M_n = M_1 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha = 0$$

compatible con las condiciones de borde de una placa simplemente apoyada. El valor del momento torsor aplicado sobre el mismo elemento de borde se obtiene de la misma manera con la ayuda de la ecuación (40). Poniendo $\alpha = -45^\circ$, se encuentra

$$M_{nt} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (M_1 - M_2) = \frac{R}{2}$$

compatible con (7). Así, la parte de la placa próxima a la esquina está flexada en una superficie anticlástica, siendo los momentos $\pm R/2$ en el mismo ángulo del mismo orden de magnitud que los momentos de flexión en centro de la placa (v. tabla 8).

El efecto de la fijación de los ángulos de una placa simplemente apoyada está claramente puesto de manifiesto por la distribución de los momentos flectores M_x y M_y de una placa cuadrada (fig. 63). Si las esquinas de la placa rectangular no están eficazmente aseguradas contra la rotación hacia arriba, la fijación será ineficaz y los momentos flectores en la parte central de la placa aumentan en proporción. Los valores de $(M_x)_{\max}$ y $(M_y)_{\max}$ dados en la tabla 8 deben entonces multiplicarse por un factor $k > 1$. Puede utilizarse la expresión aproximada¹

$$k = \frac{a^4 - \frac{5}{12}a^2b^2 + b^4}{a^4 - \frac{5}{8}a^2b^2 + b^4}$$

¹ Recomendada por las normas alemanas para hormigón armado (1943) y fundada sobre una teoría simplificada de placas delgadas debida a H. Marcus; véase su libro *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, 2.^a ed., Berlín, 1925.

Debe notarse que en el caso de una placa poligonal de bordes simplemente apoyados no hay fuerzas de reacción en los ángulos a condición de que no sean ángulos rectos¹.

Aun en las placas rectangulares de todos modos no hay reacciones de esquina si se tiene en cuenta la deformación debida al esfuerzo cortante. En el caso de reacciones extremadamente concentradas esta deformación debida al esfuerzo cortante evidentemente, ya no es despreciable y la teoría habitual de las placas delgadas que la desprecia debe ser sustituida por una teoría más exacta. Esta última que se estudiará en el apartado 39, conduce realmente a una distribución de las reacciones que no incluyen fuerzas concentradas en las esquinas de la placa (v. fig. 81).

31. Placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una presión hidrostática

Supongamos una placa rectangular simplemente apoyada cargada como indica la figura 66; procediendo como en el caso de una carga uniformemente repartida, se escribe la flecha de la placa bajo la forma²

$$w = w_1 + w_2 \quad (a)$$

en la que

$$w_1 = \frac{q_0}{360D} \left(\frac{3x^5}{a} - 10ax^3 + 7a^3x \right) = \frac{2q_0a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

representa la flecha de una franja bajo una carga triangular. Esta expresión satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} = \frac{q_0 x}{aD} \quad (c)$$

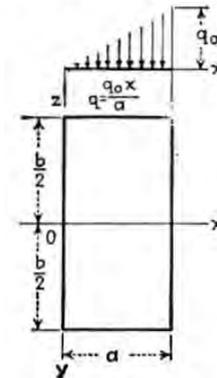


FIG. 66

¹ Para una demostración sencilla, véase H. Marcus, *Die Theorie Elastischer Gewebe*, 2.^a ed., Berlín, 1932, pág. 46.

² Este problema fue estudiado por E. Estante en la obra citada. Las tablas numéricas de flechas y momentos han sido calculadas por B. G. Galerkin, *Bull. Polytech. Inst.*, San Petersburgo, vols. 26 y 27, 1918.

y las condiciones en los límites

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad \text{y } x = a$$

La parte w_2 , viene dada bajo la forma de una serie

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

donde las funciones Y_m tienen la misma forma del apartado anterior y $m = 1, 2, 3 \dots$

Sustituyendo (b) y (d) en (a), se tiene

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

en la que las constantes A_m y B_m deben determinarse por las condiciones

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } y = \pm \frac{b}{2}$$

de estas condiciones se deducen

$$\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0$$

$$(2B_m + A_m) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0$$

En estas ecuaciones se utiliza, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Resolviéndolas, se encuentra

$$A_m = -\frac{(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad B_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad (f)$$

La flecha a lo largo del eje x , es

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Para una placa cuadrada $a = b$ y se encuentra

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \left(0,002055 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} - 0,000177 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} + 0,000025 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} - \dots \right) \quad (g)$$

La flecha en el centro de la placa es

$$(w)_{x=a/2, y=0} = 0,00203 \frac{q_0 a^4}{D} \quad (h)$$

que como debe ser, es la mitad de la flecha de una placa uniformemente cargada (v. pág. 138). Igualando a cero la derivada de la expresión (g), se encuentra que la flecha máxima está en el punto $x = 0,557 a$. Esta flecha máxima que es $0,00206 q_0 a^4/D$, difiere muy poco de la flecha en el centro dada por (h). El punto de la flecha máxima tiende hacia el centro de la placa cuando b/a aumenta. Para $b/a = \infty$, caso de una franja [v. (b)], la flecha máxima se encuentra en el punto $x = 0,5193 a$. Cuando $b/a < 1$, el punto de la flecha máxima se aleja del centro de la placa al mismo tiempo que b/a disminuye. La tabla 9 da las flechas en varios puntos del eje x (fig. 66). Se ve que, cuando b/a aumenta, las flechas tienden hacia los valores calculados para una franja. Para $b/a = 4$, las diferencias de estos valores son del orden de 1,5 %. Se puede siempre calcular la flecha de una placa para la que $b/a > 4$, con una exactitud suficiente, con ayuda de la fórmula (b), de la flecha de una franja sometida a una carga triangular. Los momentos flectores M_x y M_y se encuentran sustituyendo la expresión (e) de las flechas en las ecuaciones (101). A lo largo del eje x ($y = 0$), la expresión de M_x se hace

$$(M_x)_{y=0} = q_0 a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + q_0 a^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 [(1 - \nu) A_m - 2\nu B_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

La primera suma del segundo miembro representa el momento flector de una franja bajo la acción de una carga triangular y es igual a $(q_0)(ax - x^3/a)$. Utilizando las expresiones (f) para las constantes A_m y B_m en la segunda suma, se obtienen

$$(M_x)_{y=0} = \frac{q_0(a^2 x - x^3)}{6a} - \frac{q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} [2 + (1 - \nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (j)$$

La serie así obtenida converge rápidamente y M_x puede tener un valor suficientemente aproximado tomando sólo los primeros términos de la serie. De esta forma el momento flector en todo punto del eje x puede ser representado por la ecuación

$$(M_x)_{y=0} = \beta q_0 a^2 \quad (k)$$

donde β es un factor numérico dependiente de la abscisa x del punto. De la misma manera se obtiene

$$(M_y)_{y=0} = \beta_1 q_0 a^2 \quad (l)$$

TABLA 9

Factores α para el cálculo de flechas de una placa rectangular simplemente apoyada bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$$b > a \\ w = \alpha q_0 a^4 / D, \quad y = 0$$

b/a	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
1,0	0,00131	0,00203	0,00201	0,00162
1,1	0,00158	0,00243	0,00242	0,00192
1,2	0,00186	0,00282	0,00279	0,00221
1,3	0,00212	0,00319	0,00315	0,00248
1,4	0,00235	0,00353	0,00348	0,00273
1,5	0,00257	0,00386	0,00379	0,00296
1,6	0,00277	0,00415	0,00407	0,00317
1,7	0,00296	0,00441	0,00432	0,00335
1,8	0,00313	0,00465	0,00455	0,00353
1,9	0,00328	0,00487	0,00475	0,00368
2,0	0,00342	0,00506	0,00494	0,00382
3,0	0,00416	0,00612	0,00592	0,00456
4,0	0,00437	0,00641	0,00622	0,00477
5,0	0,00441	0,00648	0,00629	0,00483
∞	0,00443	0,00651	0,00632	0,00484

Los valores numéricos de los factores β y β_1 de las fórmulas (k) y (l) están dados en la tabla 10. Se ve que para $b \geq 4a$ los momentos están muy próximos a los de la franja sometida a una carga triangular.

Se utilizan las ecuaciones (106) y (107) para calcular los esfuerzos cortantes. De la primera de estas ecuaciones, utilizando (j) para los puntos sobre el eje x se obtiene

$$(Q_x)_{y=0} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} \\ = \frac{q_0(a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

Las expresiones generales de los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y son

$$Q_x = \frac{q_0(a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (m)$$

$$Q_y = - \frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (n)$$

TABLA 10

Factores β y β_1 para el cálculo de momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$$\nu = 0,3, \quad b > a$$

b/a	$M_x = \beta a^2 q_0, \quad y = 0$				$M_y = \beta_1 a^2 q_0, \quad y = 0$			
	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207
1,1	0,0156	0,0276	0,0302	0,0289	0,0155	0,0247	0,0251	0,0211
1,2	0,0179	0,0313	0,0338	0,0318	0,0158	0,0250	0,0254	0,0213
1,3	0,0200	0,0346	0,0371	0,0344	0,0160	0,0252	0,0255	0,0213
1,4	0,0221	0,0376	0,0402	0,0367	0,0160	0,0253	0,0254	0,0212
1,5	0,0239	0,0406	0,0429	0,0388	0,0159	0,0249	0,0252	0,0210
1,6	0,0256	0,0431	0,0454	0,0407	0,0158	0,0246	0,0249	0,0207
1,7	0,0272	0,0454	0,0476	0,0424	0,0155	0,0243	0,0246	0,0205
1,8	0,0286	0,0474	0,0496	0,0439	0,0153	0,0239	0,0242	0,0202
1,9	0,0298	0,0492	0,0513	0,0452	0,0150	0,0235	0,0238	0,0199
2,0	0,0309	0,0508	0,0529	0,0463	0,0148	0,0232	0,0234	0,0197
3,0	0,0369	0,0594	0,0611	0,0525	0,0128	0,0202	0,0207	0,0176
4,0	0,0385	0,0617	0,0632	0,0541	0,0120	0,0192	0,0196	0,0168
5,0	0,0389	0,0623	0,0638	0,0546	0,0118	0,0187	0,0193	0,0166
∞	0,0391	0,0625	0,0640	0,0547	0,0117	0,0187	0,0192	0,0165

Los valores de las reacciones verticales V_x y V_y a lo largo del contorno se obtiene combinando los esfuerzos cortantes con las derivadas de los momentos torsores. A lo largo de los lados $x = 0$ y $x = a$ estas reacciones pueden ponerse en la forma

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0, x=a} = \pm \delta q_0 a \quad (o)$$

y a lo largo de los lados $y = \pm b/2$ en la forma

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=\pm b/2} = \mp \delta_1 q_0 b \quad (p)$$

donde δ y δ_1 , son factores numéricos dependientes de la relación b/a y de las coordenadas de los puntos tomados sobre el contorno. La tabla 11 da los valores de estos factores.

El valor de las fuerzas concentradas que deben existir para impedir que los ángulos de la placa se eleven durante la flexión, se obtienen a partir de los valores de los momentos torsores M_{xy} en las esquinas. Puesto que la

TABLA 11

Factores δ y δ_1 para el cálculo de las reacciones en placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$
 $\nu = 0,3, b > a$

b/a	Reacciones $\delta q_0 a$				Reacciones $\delta_1 q_0 b$			
	x = 0		x = a		y = ± b/2			
	y = 0	y = 0,25b	y = 0	y = 0,25b	x = 0,25a	x = 0,50a	x = 0,60a	x = 0,75a
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239
1,1	0,136	0,107	0,304	0,267	0,110	0,199	0,221	0,224
1,2	0,144	0,114	0,312	0,276	0,105	0,189	0,208	0,209
1,3	0,150	0,121	0,318	0,284	0,100	0,178	0,196	0,196
1,4	0,155	0,126	0,323	0,292	0,095	0,169	0,185	0,184
1,5	0,159	0,132	0,327	0,297	0,090	0,160	0,175	0,174
1,6	0,162	0,136	0,330	0,302	0,086	0,151	0,166	0,164
1,7	0,164	0,140	0,332	0,306	0,082	0,144	0,157	0,155
1,8	0,166	0,143	0,333	0,310	0,078	0,136	0,149	0,147
1,9	0,167	0,146	0,334	0,313	0,074	0,130	0,142	0,140
2,0	0,168	0,149	0,335	0,316	0,071	0,124	0,135	0,134
3,0	0,169	0,163	0,336	0,331	0,048	0,083	0,091	0,089
4,0	0,168	0,167	0,334	0,334	0,036	0,063	0,068	0,067
5,0	0,167	0,167	0,334	0,335	0,029	0,050	0,055	0,054
∞	0,167	0,167	0,333	0,333	—	—	—	—

carga no es simétrica, las reacciones R_1 en $x = a$ e $y = ± b/2$. Son diferentes de las reacciones R_2 en $x = a$ e $y = ± b/2$. Estas reacciones pueden ponerse en la forma

$$R_1 = n_1 q_0 ab \quad R_2 = n_2 q_0 \bar{a} b \quad (q)$$

La tabla 12 da los valores de n_1 y n_2 .

Puesto que una carga uniforme q_0 se obtiene superponiendo dos cargas triangulares $q = q_0 x/a$ y $q_0(a - x)/a$, se llega a la conclusión de que para los valores correspondientes de b/a , la suma $n_1 + n_2$, de los factores de la

TABLA 12

Factores n_1 y n_2 de las ecuaciones (q) de las reacciones R_1 y R_2 concentradas en las esquinas de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$
 $\nu = 0,3, b > a$

b/a	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	3,0	4,0	5,0
n_1	0,026	0,026	0,026	0,026	0,025	0,024	0,023	0,022	0,021	0,021	0,020	0,014	0,010	0,008
n_2	0,039	0,038	0,037	0,036	0,035	0,033	0,032	0,030	0,029	0,028	0,026	0,018	0,014	0,011

tabla 12, multiplicados por b/a , será igual al valor correspondiente de n (última columna de la tabla 8).

Si las dimensiones relativas de la placa son tales que a , en la figura 66, es mayor que b , se obtendrá entonces una serie más rápidamente convergente representado w_1 y w_2 por las expresiones siguientes

$$w_1 = \frac{q_0 x}{a} \frac{1}{384 D} (16y^4 - 24b^2 y^2 + 5b^4) \quad (r)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} X_{2m-1} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{b} \quad (s)$$

La primera de estas expresiones es la flecha de una franja estrecha paralela al eje y , apoyada en $y = ± b/2$ bajo una carga uniformemente repartida de intensidad $q_0 x/a$. Esta expresión satisface a la ecuación en derivadas parciales (c) y también a las condiciones en los límites $w = 0$ y $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ en $y = ± b/2$. La expresión (s) representa una serie infinita

TABLA 13

Factores a para el cálculo de flechas de una placa rectangular simplemente apoyada bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$
 $b < a$
 $w = a q_0 b^3 / D, y = 0$

a/b	x = 0,25a	x = 0,50a	x = 0,60a	x = 0,75a
∞	0,00325	0,00651	0,00781	0,00976
5,0	0,00325	0,00648	0,00778	0,00965
4,0	0,00325	0,00641	0,00751	0,00832
3,0	0,00321	0,00630	0,00692	0,00707
2,0	0,00288	0,00506	0,00542	0,00492
1,9	0,00281	0,00487	0,00518	0,00465
1,8	0,00270	0,00465	0,00491	0,00434
1,7	0,00261	0,00441	0,00463	0,00404
1,6	0,00249	0,00415	0,00432	0,00372
1,5	0,00234	0,00386	0,00399	0,00339
1,4	0,00218	0,00353	0,00363	0,00304
1,3	0,00199	0,00319	0,00325	0,00269
1,2	0,00179	0,00282	0,00286	0,00234
1,1	0,00153	0,00243	0,00245	0,00199
1,0	0,00131	0,00202	0,00201	0,00162

de la cual cada término satisface también las condiciones en los bordes $y = ± b/2$. Las funciones X_{2m-1} de x se toman de modo que cada una de ellas satisfaga la ecuación homogénea (137) del apartado 30 y así la expresión (a) satisface las condiciones en los límites para los bordes $x = 0$ y $x = a$.

Puesto que el método de determinación de las funciones X_{2m-1} es similar al que se ha utilizado para determinar Y_m , nos limitaremos a dar los valores numéricos finales representados en las tablas 13, 14, 15 y 16. La

notación de estas tablas es la misma que la de las tablas precedentes correspondientes a carga de presión hidrostática.

32. Placa rectangular simplemente apoyada sometida a una carga con forma de prisma triangular

Supongamos que la intensidad de la carga está representada por un triángulo isósceles [v. fig. 67 a)]. Se representa de nuevo la superficie flexada por

$$w = w_1 + w_2 \quad (a)$$

donde w_1 representa la flecha de una franja paralela al eje de las x , simplemente apoyada y w_2 tiene la misma forma del apartado anterior. Para representar la flecha w_1 , en la forma de una serie trigonométrica, se observa

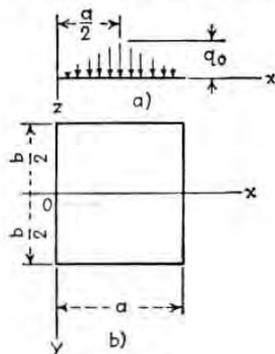


FIG. 67

que la flecha producida por una fuerza concentrada P , aplicada a una distancia ξ del extremo izquierdo de la franja es¹:

$$\frac{2Pa^3}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

Sustituyendo P por $qd\xi$ y utilizando $q = 2q_0\xi/a$ para $\xi < a/2$ y $q = 2q_0(a - \xi)/a$ para $\xi > a/2$, se obtiene la flecha de la franja debida a una carga elemental. La flecha debida a la carga total sobre la franja, se obtiene por integración de la forma siguiente:

$$w_1 = \frac{4q_0a^2}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[\int_0^{a/2} \xi \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} d\xi + \int_{a/2}^a (a - \xi) \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} d\xi \right] \\ = \frac{8q_0a^4}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^6} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

¹ Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 49, 1956.

TABLA 14

Factores β y β_1 para el cálculo de momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0x/a$
 $\nu = 0,3, b < a$

a/b	$M_x = \beta b^2 q_0, y = 0$				$M_y = \beta_1 b^2 q_0, y = 0$			
	x = 0,25a	x = 0,50a	x = 0,60a	x = 0,75a	x = 0,25a	x = 0,50a	x = 0,60a	x = 0,75a
∞	0,0094	0,0187	0,0225	0,0281	0,0312	0,0625	0,0750	0,0937
5,0	0,0094	0,0187	0,0230	0,0309	0,0312	0,0623	0,0742	0,0877
4,0	0,0094	0,0192	0,0237	0,0326	0,0312	0,0617	0,0727	0,0820
3,0	0,0096	0,0202	0,0256	0,0345	0,0309	0,0594	0,0678	0,0715
2,0	0,0108	0,0232	0,0285	0,0348	0,0284	0,0508	0,0554	0,0523
1,9	0,0111	0,0235	0,0288	0,0345	0,0278	0,0492	0,0533	0,0498
1,8	0,0115	0,0239	0,0291	0,0341	0,0269	0,0474	0,0509	0,0470
1,7	0,0117	0,0243	0,0293	0,0337	0,0261	0,0454	0,0485	0,0442
1,6	0,0120	0,0246	0,0294	0,0331	0,0251	0,0431	0,0457	0,0412
1,5	0,0123	0,0249	0,0294	0,0324	0,0239	0,0406	0,0428	0,0381
1,4	0,0126	0,0253	0,0292	0,0315	0,0225	0,0376	0,0396	0,0348
1,3	0,0129	0,0252	0,0290	0,0304	0,0209	0,0346	0,0360	0,0314
1,2	0,0131	0,0250	0,0284	0,0291	0,0192	0,0313	0,0323	0,0279
1,1	0,0134	0,0247	0,0276	0,0276	0,0169	0,0276	0,0285	0,0245
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207

TABLA 15

Factores δ y δ_1 para el cálculo de las reacciones en placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0x/a$
 $\nu = 0,3, b < a$

a/b	Reacciones $\delta q_0 a$				Reacciones $\delta_1 q_0 b$			
	x = 0		x = a		y = $\pm b/2$			
	y = 0	y = b/4	y = 0	y = b/4	x = 0,25a	x = 0,50a	x = 0,60a	x = 0,75a
∞	0,125	0,250	0,300	0,375
5,0	0,008	0,006	0,092	0,076	0,125	0,250	0,301	0,379
4,0	0,013	0,010	0,112	0,093	0,125	0,251	0,301	0,377
3,0	0,023	0,018	0,143	0,119	0,125	0,252	0,304	0,368
2,0	0,050	0,038	0,197	0,166	0,127	0,251	0,296	0,337
1,9	0,055	0,041	0,205	0,172	0,127	0,251	0,294	0,331
1,8	0,060	0,045	0,213	0,179	0,128	0,249	0,291	0,325
1,7	0,066	0,050	0,221	0,187	0,127	0,248	0,288	0,318
1,6	0,073	0,055	0,230	0,195	0,127	0,245	0,284	0,311
1,5	0,080	0,060	0,240	0,204	0,127	0,243	0,279	0,302
1,4	0,088	0,067	0,250	0,213	0,126	0,239	0,273	0,292
1,3	0,097	0,074	0,260	0,223	0,124	0,234	0,266	0,281
1,2	0,106	0,081	0,271	0,233	0,122	0,227	0,257	0,269
1,1	0,116	0,090	0,282	0,244	0,120	0,220	0,247	0,255
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239

Sustituyendo esta ecuación en (a) y utilizando (d) del apartado precedente, se obtiene

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

Esta expresión satisface a la ecuación (203) y también a las condiciones en los bordes para $x = 0$ y $x = a$. Las constantes A_m y B_m se obtienen de las condiciones, a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$, que son las mismas que en el apartado precedente, y se encuentra

$$\frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0 \quad (e)$$

$$(2B_m + A_m) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0$$

donde usando, como antes, la notación

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Resolviendo las ecuaciones (e), se obtiene

$$A_m = - \frac{4(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad (f)$$

$$B_m = \frac{4(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

TABLA 16

Factores n_1 y n_2 de las ecuaciones (g) de las reacciones R_1 y R_2 concentradas en las esquinas de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$$r = 0,3, \quad b < a$$

a/b	5	4	3	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
n_1	0,002	0,004	0,006	0,013	0,014	0,016	0,017	0,018	0,020	0,021	0,023	0,024	0,025	0,026
n_2	0,017	0,020	0,025	0,033	0,034	0,035	0,036	0,037	0,037	0,038	0,039	0,039	0,039	0,039

Para obtener la flecha de la placa a lo largo del eje x , se hace $y = 0$ en (d). Entonces

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

La flecha máxima se sitúa en el centro de la placa, donde

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi^6 m^6} + A_m (-1)^{(m-1)/2} \right]$$

que se puede representar de la forma

$$w_{\max} = \alpha \frac{q_0 a^4}{D}$$

donde α es un factor numérico dependiente del valor de b/a . Varios valores¹ de este factor figuran en la tabla 17.

Usando la expresión (d) y operando como en el apartado 31 se obtienen las expresiones de los momentos flectores M_x y M_y . Los valores máximos de estos momentos están, evidentemente, en este caso, en el centro de la placa y pueden ponerse en la forma

$$(M_x)_{\max} = \beta q_0 a^2 \quad (M_y)_{\max} = \beta_1 q_0 a^2$$

Los valores de los factores numéricos β y β_1 , figuran en la tabla 17.

TABLA 17

Factores α , β , γ , δ , n para placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga de forma de prisma triangular

$$r = 0,3, \quad b > a$$

b/a	$w_{\max} = \alpha \frac{q_0 b^4}{D}$	$(M_x)_{\max} = \beta q_0 a^2$	$(M_y)_{\max} = \beta_1 q_0 a^2$	$(Q_x)_{\max} = \gamma q_0 a$	$(Q_y)_{\max} = \gamma_1 q_0 b$	$(V_x)_{\max} = \delta q_0 a$	$(V_y)_{\max} = \delta_1 q_0 b$	$R = n q_0 ab$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250	0,038
1,1	0,00314	0,0390	0,0326	0,212	0,297	0,161	0,232	0,038
1,2	0,00364	0,0436	0,0330	0,222	0,280	0,173	0,216	0,037
1,3	0,00411	0,0479	0,0332	0,230	0,265	0,184	0,202	0,036
1,4	0,00455	0,0518	0,0331	0,236	0,250	0,193	0,189	0,035
1,5	0,00496	0,0554	0,0329	0,241	0,236	0,202	0,178	0,034
1,6	0,00533	0,0586	0,0325	0,246	0,224	0,208	0,168	0,033
1,7	0,00567	0,0615	0,0321	0,247	0,212	0,214	0,158	0,031
1,8	0,00597	0,0641	0,0316	0,249	0,201	0,220	0,150	0,030
1,9	0,00625	0,0664	0,0311	0,251	0,191	0,224	0,142	0,029
2,0	0,00649	0,0685	0,0306	0,252	0,183	0,228	0,135	0,028
3,0	0,00783	0,0794	0,0270	0,253	0,122	0,245	0,090	0,019
∞	0,00833	0,0833	0,0250	0,250	...	0,250	—	—

Esta tabla da γ , γ_1 , δ , δ_1 y n para calcular: 1) los esfuerzos cortantes $(Q_x)_{\max} = \gamma q_0 a$, $(Q_y)_{\max} = \gamma_1 q_0 b$ en el centro de los lados $x = 0$ e $y = b/2$ de la placa; 2) las reacciones

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{\max} = \delta q_0 a$$

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{\max} = \delta_1 q_0 b$$

¹ Estos cuadros están extractados de la Memoria de Galerkin antes citada.

en los mismos puntos y 3) las reacciones concentradas $R = nq_0ab$ en las esquinas de la placa que impiden que éstas se levanten ya que actúan hacia abajo. Todos estos valores están dados para $b > a$. Cuando $b < a$, se obtiene una convergencia más rápida tomando la posición w_1 de la flecha

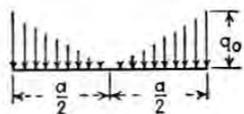


FIG. 68

de la placa, bajo la forma de la flecha de una franja paralela al eje y . Se han omitido los cálculos y no se da más que los resultados numéricos en la tabla 18.

Se obtiene la carga representada en la figura 68, combinando la carga uniforme de intensidad q_0 . Se puede obtener, en este último caso los resultados concernientes a las flechas y a las tensiones combinando los valores de la tabla 8 y los de las tablas 17 y 18.

TABLA 18

Factores a , β , γ , δ , n para placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga de forma de prisma triangular
 $r = 0,3$, $b < a$

a/b	$w_{\text{máx}} = a \frac{q_0 b^4}{D}$ a	$(M_x)_{\text{máx}} = \beta q_0 b^2$ β	$(M_y)_{\text{máx}} = \beta_1 q_0 b^2$ β_1	$(Q_x)_{\text{máx}} = \gamma q_0 a$ γ	$(Q_y)_{\text{máx}} = \gamma_1 q_0 b$ γ_1	$(V_x)_{\text{máx}} = \delta q_0 a$ δ	$(V_y)_{\text{máx}} = \delta_1 q_0 b$ δ_1	$R = nq_0 ab$ n
∞	0,01302	0,0375	0,1250	0,500	0,500	
3,0	0,00868	0,0387	0,0922	0,045	0,442	0,027	0,410	0,010
2,0	0,00686	0,0392	0,0707	0,091	0,412	0,057	0,365	0,023
1,9	0,00656	0,0392	0,0681	0,098	0,407	0,062	0,358	0,024
1,8	0,00624	0,0391	0,0651	0,106	0,402	0,098	0,350	0,026
1,7	0,00588	0,0390	0,0609	0,115	0,396	0,074	0,342	0,028
1,6	0,00549	0,0388	0,0585	0,124	0,389	0,081	0,332	0,029
1,5	0,00508	0,0386	0,0548	0,135	0,381	0,090	0,322	0,031
1,4	0,00464	0,0382	0,0508	0,146	0,371	0,099	0,311	0,033
1,3	0,00418	0,0376	0,0464	0,158	0,360	0,109	0,298	0,035
1,2	0,00367	0,0368	0,0418	0,171	0,347	0,120	0,284	0,036
1,1	0,00316	0,0356	0,0369	0,185	0,332	0,133	0,268	0,037
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250	0,038

33. Placa rectangular simplemente apoyada y parcialmente cargada

Consideraremos un caso de flexión simétrica producido por una carga q uniformemente repartida sobre el rectángulo rayado (fig. 69) de lados u y v .

Se desarrolla en serie, la carga

$$\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \int_{\frac{1}{2}(a-u)}^{\frac{1}{2}(a+u)} q \text{sen} \frac{m\pi \xi}{a} d\xi$$

$$= \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

esta serie representa la carga para la zona $prst$ de la placa.

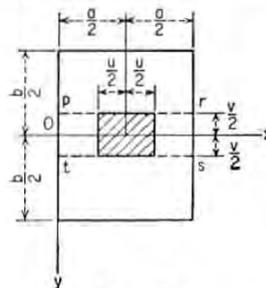


FIG. 69

La flecha, correspondiente a esta zona de la placa, se obtiene mediante la ecuación (103), que toma la forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{4q}{\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

tomemos, de nuevo, la flecha de la forma

$$w = w_1 + w_2 \quad (c)$$

donde w_1 es una solución particular de (b), independiente de la variable y y que satisfice la ecuación

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = \frac{4q}{\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Integrando ésta con respecto a x , se obtiene

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \text{sen} \frac{m\pi u}{2a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

Entonces w_2 debe ser una solución de la ecuación (137) (pág. 136). Eligiendo la forma (136) para esta solución y tomando en (138) las funcio-

nes pares de y para Y_m , por razón de simetría de la superficie flexada con respecto al eje x , se obtiene por (c)

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_m + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

en la que, esta vez es

$$a_m = \frac{4qa^4}{\pi^3 m^5 D} (-1)^{(m-1)/2} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \quad (f)$$

La ecuación (e) representa las flechas de la zona *prst* de la placa.

Consideremos ahora la zona no cargada de la placa, por debajo de la línea *ts* se puede tomar para la deformada

$$w' = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B'_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D'_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

Es necesario ahora elegir las constantes A_m, B_m, \dots, D'_m en las series (e) y (g) de tal manera que satisfagan las condiciones en los bordes para $y = b/2$ y las condiciones de continuidad a lo largo de la recta *ts*. Para representar estas condiciones en una forma más simple introducimos las notaciones

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad \gamma_m = \frac{m\pi v}{4a} \quad (h)$$

Las condiciones geométricas a lo largo de *ts* exigen que

$$w = w' \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w'}{\partial y} \quad \text{para } y = \frac{v}{2} \quad (i)$$

Por otra parte, puesto que no hay fuerzas concentradas a lo largo de *ts*, los momentos flectores M_y y los esfuerzos cortantes Q_y deben ser continuos a lo largo de esta recta. Considerando (i) estas últimas condiciones pueden ponerse en la forma

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w'}{\partial y^3} \quad \text{para } y = \frac{v}{2} \quad (j)$$

Sustituyendo (e) y (g) en (i) y (j) y usando la notación (h) estas ecuaciones toman la forma siguientes:

$$(A_m - A'_m) \operatorname{ch} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - C'_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - D'_m 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m + a_m = 0$$

$$(A_m - A'_m) \operatorname{sh} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (\operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) - C'_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - D'_m (\operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) = 0$$

$$(A_m - A'_m) \operatorname{ch} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (2 \operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) - C'_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - D'_m (2 \operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) = 0 \quad (k)$$

$$(A_m - A'_m) \operatorname{sh} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (3 \operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) - C'_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - D'_m (3 \operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) = 0$$

De estas ecuaciones se deduce

$$A_m - A'_m = a_m (\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - \operatorname{ch} 2\gamma_m)$$

$$B_m - B'_m = \frac{a_m}{2} \operatorname{ch} 2\gamma_m$$

$$C'_m = a_m (\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - \operatorname{sh} 2\gamma_m)$$

$$D'_m = \frac{a_m}{2} \operatorname{sh} 2\gamma_m$$

(l)

A estas cuatro ecuaciones con seis constantes A_m, \dots, D'_m se añaden dos ecuaciones que representan las condiciones en los bordes para $y = b/2$.

Sustituyendo (g) en las condiciones $w' = 0, \partial^2 w' / \partial y^2 = 0$ para $y = b/2$ obtendremos

$$A'_m \operatorname{ch} \alpha_m + B'_m a_m \operatorname{sh} \alpha_m + C'_m \operatorname{sh} \alpha_m + D'_m a_m \operatorname{ch} \alpha_m = 0$$

$$B'_m \operatorname{ch} \alpha_m + D'_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0 \quad (m)$$

Las ecuaciones (m) junto con las ecuaciones (l), determinan las constantes:

$$A_m = - \frac{a_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\gamma_m) + a_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right]$$

$$B_m = \frac{a_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m)$$

Llevando estos valores así como (f) a la ecuación (e), obtiene

$$w = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2a} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\gamma_m) + a_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] + \frac{\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m)}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right\} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (142)$$

Mediante esta ecuación se puede calcular la flecha en todo punto de la zona cargada de la placa.

En el caso particular de que $u = a$ y $v = b$ se obtiene, por las ecuaciones (h), $\gamma_m = \alpha_m/2$. Las expresiones (n) toman la forma

$$A_m = - \frac{a_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left(1 + \frac{a_m}{2} \operatorname{th} \alpha_m \right) \quad B_m = \frac{a_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

y (142) coincide con la ecuación (139) (pág. 137) obtenida para una placa rectangular uniformemente cargada.

La flecha máxima de la placa está en el centro y se obtiene substituyendo $y = 0$ y $x = a/2$ en la fórmula (142) que da

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] \right\} \quad (143)$$

Consideremos como ejemplo particular el caso en que $u = a$ y v es muy pequeño. Este caso representa una distribución uniforme de carga a lo largo del eje x . Considerando γ_m muy pequeño en la ecuación (143) y no conservando más que los términos de primer orden, se obtiene haciendo $qv = q_0$,

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^3}{D\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \quad (144)$$

Para una placa cuadrada esta ecuación da

$$w_{\max} = 0,00674 \frac{q_0 a^3}{D}$$

En el caso general, la flecha máxima puede ponerse en la forma

$$w_{\max} = \alpha \frac{q_0 a^3}{D} \quad \text{para } a < b$$

$$= \alpha \frac{q_0 b^3}{D} \quad \text{para } a > b$$

La tabla 19 da varios valores del coeficiente.

TABLA 19

Flechas de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga uniformemente repartida a lo largo del eje de simetría paralelo a la dimensión a

$$w_{\max} = \alpha q_0 a^3 / D$$

b/a	2	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
a	0,00987	0,00911	0,00882	0,00844	0,00799	0,00742	0,00674
a/b	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0	∞
a	0,00802	0,00926	0,01042	0,01151	0,01251	0,01629	0,02083

Volviendo al caso general en donde v no es necesariamente pequeño y u puede tener un valor cualquiera, las expresiones de los momentos flectores M_x y M_y se calculan por la ecuación (142). Los valores máximos de estos momentos se producen en el centro de la placa y están dados por

$$(M_x)_{\max} = \beta uvq = \beta P \quad (M_y)_{\max} = \beta_1 uvq = \beta_1 P$$

donde $P = uvq$ es la carga total. La tabla 20 da los valores numéricos de β para una placa cuadrada y para diferentes dimensiones del rectángulo

TABLA 20

Coeficientes β para el cálculo de $(M_x)_{\max}$ en placas cuadradas simplemente apoyadas parcialmente cargadas

$$v = 0,3$$

$u/a =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
v/a	Coeficientes en la expresión $(M_x)_{\max} = \beta P$										
0	∞	0,321	0,251	0,209	0,180	0,158	0,141	0,125	0,112	0,102	0,092
0,1	0,378	0,284	0,232	0,197	0,170	0,150	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088
0,2	0,308	0,254	0,214	0,184	0,161	0,142	0,127	0,114	0,103	0,093	0,084
0,3	0,262	0,225	0,195	0,168	0,151	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088	0,080
0,4	0,232	0,203	0,179	0,158	0,141	0,126	0,113	0,102	0,092	0,084	0,076
0,5	0,208	0,185	0,164	0,146	0,131	0,116	0,106	0,096	0,087	0,079	0,071
0,6	0,188	0,168	0,150	0,135	0,121	0,109	0,099	0,090	0,081	0,074	0,067
0,7	0,170	0,153	0,137	0,124	0,112	0,101	0,091	0,083	0,076	0,069	0,062
0,8	0,155	0,140	0,126	0,114	0,103	0,094	0,085	0,077	0,070	0,063	0,057
0,9	0,141	0,127	0,115	0,104	0,094	0,086	0,078	0,070	0,064	0,058	0,053
1,0	0,127	0,115	0,105	0,095	0,086	0,078	0,071	0,064	0,058	0,053	0,048

TABLA 21

Coeficientes β y β_1 para el cálculo de $(M_x)_{\max}$ y $(M_y)_{\max}$ en placas rectangulares parcialmente cargadas, siendo $b = 1,4a$

$$v = 0,3$$

$u/a =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
v/a	Coeficiente β en la expresión $(M_x)_{\max} = \beta P$						Coeficiente β_1 en la expresión $(M_y)_{\max} = \beta_1 P$					
0	∞	0,276	0,208	0,163	0,134	0,110	∞	0,299	0,230	0,183	0,151	0,125
0,2	0,332	0,239	0,186	0,152	0,125	0,103	0,246	0,208	0,175	0,147	0,124	0,102
0,4	0,261	0,207	0,168	0,138	0,115	0,095	0,177	0,157	0,138	0,119	0,101	0,083
0,6	0,219	0,181	0,151	0,126	0,105	0,086	0,138	0,125	0,111	0,097	0,083	0,069
0,8	0,187	0,158	0,134	0,112	0,094	0,078	0,112	0,102	0,091	0,080	0,069	0,058
1,0	0,162	0,139	0,118	0,100	0,084	0,070	0,093	0,085	0,077	0,068	0,058	0,049
1,2	0,141	0,122	0,104	0,089	0,075	0,062	0,079	0,072	0,065	0,058	0,050	0,042
1,4	0,123	0,106	0,091	0,077	0,065	0,054	0,068	0,062	0,056	0,050	0,043	0,036

sometido a la carga. Esta misma tabla da β_1 siendo suficiente para ello permutar u y v . Los factores numéricos, para las placas con las relaciones $b = 1,4a$ y $b = 2a$, están dados en las tablas 21 y 22¹ respectivamente.

¹ Los valores de M_x y M_y para diferentes relaciones a/b , u/a y v/b han sido representadas y calculadas en curvas por G. Pigeaud, *Ann. pont et chaussées*, 1929. Véase también el apartado 37 de este libro.

TABLA 22

Coefficientes β y β_1 para el cálculo de $(M_x)_{\max}$ y $(M_y)_{\max}$ en placas rectangulares parcialmente cargadas, siendo $b = 2a$

$\nu = 0,3$

$u/a =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
v/a	Coeficiente β en la expresión $(M_x)_{\max} = \beta P$						Coeficiente β_1 en la expresión $(M_y)_{\max} = \beta_1 P$					
0,0	∞	0,289	0,220	0,175	0,144	0,118	∞	0,294	0,225	0,179	0,148	0,122
0,2	0,347	0,252	0,199	0,163	0,135	0,111	0,242	0,203	0,170	0,143	0,120	0,099
0,4	0,275	0,221	0,181	0,150	0,125	0,103	0,172	0,152	0,133	0,114	0,097	0,081
0,6	0,233	0,195	0,164	0,138	0,115	0,095	0,133	0,120	0,106	0,093	0,079	0,066
0,8	0,203	0,174	0,148	0,126	0,106	0,088	0,107	0,097	0,087	0,076	0,065	0,054
1,0	0,179	0,155	0,134	0,115	0,097	0,080	0,089	0,081	0,073	0,064	0,055	0,046
1,2	0,161	0,141	0,122	0,105	0,089	0,074	0,074	0,068	0,061	0,054	0,046	0,039
1,4	0,144	0,127	0,111	0,096	0,081	0,068	0,064	0,058	0,052	0,046	0,040	0,033
1,6	0,130	0,115	0,101	0,087	0,074	0,062	0,056	0,051	0,046	0,040	0,035	0,029
1,8	0,118	0,104	0,091	0,079	0,067	0,056	0,049	0,045	0,041	0,036	0,031	0,026
2,0	0,107	0,094	0,083	0,072	0,061	0,051	0,044	0,041	0,037	0,032	0,028	0,023

34. Placa rectangular simplemente apoyada con carga concentrada

Utilizando el método de Navier, hemos obtenido en el apartado 29, una expresión en forma de serie doble, para la flecha de una placa bajo una carga concentrada P en un punto dado $x = \xi$, $y = \eta$ (fig. 70).

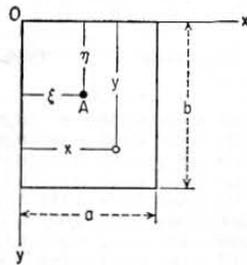


FIG. 70

Para obtener una solución equivalente, pero en forma de serie simple, se empieza por escribir la solución de Navier (133) de la forma siguiente

$$w = \frac{4Pb^3}{\pi^4 a D} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

estando dado el coeficiente S_m por

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \quad (b)$$

Introduciendo las notaciones

$$S'_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(y-\eta)}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \quad S''_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(\eta+y)}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \quad (c)$$

Se puede representar (b) de la forma

$$S_m = \frac{1}{2}(S'_m - S''_m) \quad (d)$$

Para calcular las sumas (c), se utiliza la serie conocida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{a^2 + n^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \frac{\text{ch } a(\pi - z)}{\text{sh } \pi a} \quad (e)$$

válida para $0 \leq z < 2\pi$ y que se considera, en primer lugar, como una función $S(a)$ de a . Derivando respecto a a , el primer miembro de (e), se obtiene

$$\frac{\partial S(a)}{\partial a} = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{(\alpha^2 + n^2)^2} \quad (f)$$

Después de haber derivado también el segundo miembro de (e) y sustituyendo este resultado en (f), se llega a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{(a^2 + n^2)^2} = -\frac{1}{2a} \frac{\partial S(a)}{\partial a} = -\frac{1}{2a^3} + \frac{\pi}{4a^3} \frac{\text{ch } a(\pi - z)}{\text{sh } \pi a} - \frac{\pi(\pi - z) \text{sh } a(\pi - z)}{4a^2 \text{sh } \pi a} + \frac{\pi^2}{4a^2} \frac{\text{ch } a(\pi - z) \text{ch } \pi a}{\text{sh}^2 \pi a} \quad (g)$$

Ahora, para obtener los valores de las sumas (e), se pone en la ecuación (g) primeramente $z = (\pi/b)(y + \eta)$, después $z = (\pi/b)(y - \eta)$ y, luego, $a = mb/a$. Usando estos valores por sustitución en (d) y (a) se llega, finalmente, para la flecha de la placa a la expresión siguiente

$$w = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \beta_m \text{cth } \beta_m - \frac{\beta_m y_1}{b} \text{cth} \frac{\beta_m y_1}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \text{cth} \frac{\beta_m \eta}{b} \right) \frac{\text{sh} \frac{\beta_m \eta}{b} \text{sh} \frac{\beta_m y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \text{sh } \beta_m} \quad (145)$$

en la que

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a} \quad y_1 = b - y \quad y \quad y \geq \eta$$

En el caso de que $y < \eta$ el valor y_1 debe sustituirse en la expresión (145) por y y η por $\eta_1 = b - \eta$. Consideremos más detenidamente el caso particular de una carga P concentrada en un punto A sobre el eje de simetría de la placa, que tomaremos como eje de las x (fig. 71). Con $\eta = b/2$ y la notación

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{\beta_m}{2} \quad (h)$$

la expresión general (145) de la flecha de la placa será

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + a_m \operatorname{th} \alpha_m \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) - \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \right] \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad (146)$$

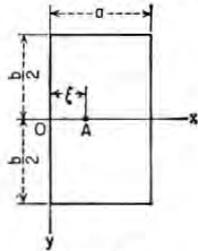


FIG. 71

válida para $y \geq 0$, es decir, por debajo del eje de las x (fig. 71). Haciendo en particular, $y = 0$ se obtiene la flecha de la placa a lo largo del eje de las x en la forma:

$$(w)_{y=0} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \quad (i)$$

Esta serie converge rápidamente, y unos pocos de los primeros términos dan las flechas con aproximación suficiente. En el caso de una carga P aplicada en el centro de la placa, la flecha máxima, que se sitúa en el centro, se obtiene sustituyendo $x = \xi = a/2$ en (i). En este caso llega el resultado siguiente:

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) = a \frac{Pa^2}{D} \quad (147)$$

La tabla 23 da los valores numéricos de a para diferentes valores de b/a .

TABLA 23

Factor a para el cálculo de la flecha (147) de una placa rectangular cargada en su centro

$b/a =$	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
$a =$	0,01160	0,01265	0,01353	0,01484	0,01570	0,01620	0,01651	0,01690	0,01695

Se ve que la flecha máxima tiende rápidamente hacia la de una placa de longitud infinita¹ cuando la longitud de la placa aumenta. La comparación de la flecha máxima de una placa cuadrada cargada con una carga en el centro con la de una placa circular cargada también en el centro e inscrita en el cuadrado (v. pág. 87), muestra que la flecha de la placa circular es mayor que la de la placa cuadrada correspondiente. Este resultado se atribuye a la acción de las reacciones concentradas en los ángulos del cuadrado, las cuales tienen tendencia a crear una flecha convexa hacia arriba.

El cálculo de los momentos flectores está desarrollado en los apartados 35 y 37.

35. Momentos flectores en una placa rectangular simplemente apoyada con carga concentrada

Para determinar los momentos flectores a lo largo del eje central $y = 0$ de la placa cargada como indica la figura 71, se calculan las derivadas segundas de la expresión (146) que toman la forma

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a}}{m} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a}}{m} \left(\operatorname{th} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Sustituyendo estas derivadas en (101), se obtiene para los momentos flectores,

$$(M_x)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a}}{m} \left[(1 + \nu) \operatorname{th} \alpha_m - \frac{(1 - \nu)\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

$$(M_y)_{y=0} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a}}{m} \left[(1 + \nu) \operatorname{th} \alpha_m + \frac{(1 - \nu)\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

¹ M. Bergsträsser ha estudiado experimentalmente la deformación de placas debida a carga concentrada; véase *Forschungsarb.*, vol. 302, Berlin, 1928; véase también la Memoria de N. M. Newmark y H. A. Lepper, *Univ. Illinois Bull.*, vol. 36, núm. 84, 1939.

Cuando b es muy grande en comparación con a , se puede hacer

$$\operatorname{th} a_m \approx 1 \quad \frac{a_m}{\operatorname{ch}^2 a_m} \approx 0$$

Entonces

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

Esta serie no converge con suficiente rapidez para un cálculo cómodo de los momentos en la proximidad del punto de aplicación de la carga P , es entonces necesario obtener otra forma de representación de los momentos, cerca de este punto. Por el estudio de la flexión de una placa circular cargada con una fuerza aplicada en el centro, (v. ap. 19) se sabe que los esfuerzos cortantes y los momentos flectores llegan a ser infinitamente grandes en el punto de aplicación de la carga. Estamos en condiciones similares en el caso de una placa rectangular. La distribución de tensiones en un círculo de radio pequeño cargado en su centro, es sustancialmente la misma que en las proximidades del centro de una placa circular con carga concentrada en dicho centro. La tensión de flexión en un punto de este

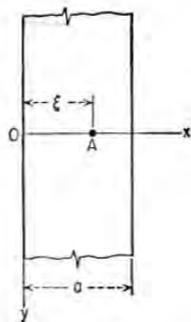


FIG. 72

círculo puede considerarse como compuesta de dos partes: una es la misma que la de una placa circular de radio a , cargada en su centro, y la otra representa la diferencia entre las tensiones de una placa circular y una placa rectangular. Cuando la distancia r entre el punto de aplicación de la carga y el punto considerado, va disminuyendo, la primera componente de las tensiones varía como el $\ln(a/r)$ y llega a ser infinita en el centro, mientras que la segunda, que representa la influencia de la diferencia entre las condiciones en los bordes de las dos placas, permanece finita.

Para obtener las expresiones de los momentos de flexión en las proximidades del punto de aplicación de la carga, empezaremos por el caso más simple de una placa de longitud infinita (fig. 72). La flecha de tal placa

puede calcularse por (146) aumentando la longitud del lado b , y por consiguiente, la cantidad $a_m = m\pi b/2a$, indefinidamente, esto es, haciendo

$$\operatorname{th} a_m \approx 1 \quad \operatorname{ch} a_m \approx \frac{1}{2} e^{a_m}$$

$$\operatorname{sh} \frac{a_m}{b} (b-2y) \approx \operatorname{ch} \frac{a_m}{b} (b-2y) \approx \frac{1}{2} e^{(a_m/b)(b-2y)}$$

Substituyendo en (146), la flecha de la franja simplemente apoyada y con una carga concentrada P en el punto $x = \xi - y = 0$, toma la forma:

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-m\pi y/a} \quad (148)$$

válido para $y \geq 0$, es decir, por debajo del eje de las x (v. fig. 72).

Las expresiones correspondientes de los momentos flectores y torsores se obtienen igualmente mediante las ecuaciones (101) y (102). Tenemos:

$$M_x = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a}\right] e^{-m\pi y/a}$$

$$M_y = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu - (1-\nu) \frac{m\pi y}{a}\right] e^{-m\pi y/a} \quad (149)$$

$$M_{xy} = -\frac{P}{2a} y(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a}$$

Utilizando de nuevo el valor $M = (M_x + M_y)/(1+\nu)$ de la página 112, se obtiene

$$M = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{P}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a} \quad (150)$$

Los momentos (149) pueden expresarse ahora en función de M bajo la forma siguiente

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \left[(1+\nu)M - (1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial y} \right] \\ M_y &= \frac{1}{2} \left[(1+\nu)M + (1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial y} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{1}{2} (1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned} \quad (151)$$

* A. Nádai ha estudiado con detalle este caso importante de la flexión de una placa; véase su libro *Elastische Platten*, págs. 78-109, Berlín, 1925.

Sumando la serie (150) se obtiene¹:

$$M = \frac{P}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x + \xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x - \xi)}{a}} \quad (152)$$

y, utilizando la expresión (151) podemos representar los momentos de una placa de longitud infinita bajo una forma finita. Recordando que es, $\Delta \Delta w = 0$ en todo punto excepto en el punto $(x = \xi, y = 0)$ de aplicación de la carga, se llega a que la función $M = -D \Delta w$ satisface (salvo en el punto mencionado) a la ecuación $\Delta M = 0$. En virtud de la segunda de las ecuaciones (111), las condiciones en los bordes $M = 0$, para los bordes $x = 0$ y $x = a$, también se cumplen para la función M .

Para los puntos del eje x , las ecuaciones (151) dan $M_x = M_y$ y por lo tanto

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = (M)_{y=0} \frac{1 + \nu}{2} \quad (c)$$

Utilizando las ecuaciones (c) y (152) en el caso particular de una carga aplicada en el eje central de la franja $\xi = a/2$ se obtiene

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{P(1 + \nu)}{8\pi} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}} \quad (d)$$

que se había podido obtener también sumando la serie (b).

Volvamos ahora al cálculo de los momentos flectores de los puntos situados cerca del punto de aplicación de la carga pero no necesariamente sobre el eje x . En este caso, $(x - \xi)$ e y son pequeños y, utilizando (152), se puede poner:

$$\cos \frac{\pi(x - \xi)}{a} \approx 1 - \frac{\pi^2(x - \xi)^2}{2a^2} \quad \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \approx 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2}$$

Así se llega al resultado

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \ln \frac{1 - \cos \frac{2\pi\xi}{a}}{1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} - 1 + \frac{\pi^2(x - \xi)^2}{2a^2}} \\ &= \frac{P}{4\pi} \ln \left(\frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} \right)^2 = \frac{P}{2\pi} \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} \quad (153) \end{aligned}$$

¹ Véase, por ejemplo, W. Magnus y F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2.^a ed., pág. 214, Berlín, 1948.

donde

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$$

representa la distancia del punto considerado al punto de aplicación de la carga P . Utilizando entonces (153) y sustituyendo en (151), se obtienen las expresiones siguientes, válidas para los puntos próximos a la carga concentrada

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) \frac{P}{2\pi} \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \frac{(1 - \nu)Py^2}{2\pi r^2} \right] \\ M_y &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) \frac{P}{2\pi} \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} - \frac{(1 - \nu)Py^2}{2\pi r^2} \right] \quad (154) \end{aligned}$$

Es interesante comparar este resultado con el correspondiente a una placa circular simplemente apoyada, cargada en el centro (v. ap. 19). Sea un radio r que forma un ángulo α con el eje x , se encuentra, para las ecuaciones (90) y (91) para una placa circular

$$\begin{aligned} M_x &= M_n \cos^2 \alpha + M_t \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + (1 - \nu) \frac{P}{4\pi} \frac{y^2}{r^2} \\ M_y &= M_n \operatorname{sen}^2 \alpha + M_t \cos^2 \alpha = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + (1 - \nu) \frac{P}{4\pi} \frac{x^2}{r^2} \quad (e) \end{aligned}$$

Los primeros términos de (154) y (e) coinciden si se toma por radio exterior de la placa circular

$$\frac{2a}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}$$

En estas condiciones, los momentos M_x son idénticos en los dos casos. El momento M_y , para una placa rectangular larga se deduce del de la placa circular restando¹ $(1 - \nu)P/4\pi$.

Se puede llegar de ahí a la conclusión de que en una placa rectangular larga la distribución de tensiones en torno al punto de aplicación de la carga se obtiene superponiendo, a las tensiones de una placa circular cargada en el centro y de radio $(2a/\pi) \operatorname{sen} (\pi\xi/a)$, una flexión pura producida por momentos $M_y = -(1 - \nu)P/4\pi$.

Puede suponerse que la misma relación, entre los momentos de placas circulares y placas rectangulares largas, existe también en el caso de una carga P uniformemente repartida sobre la superficie de un círculo de radio pequeño c . En tal caso, para el centro de una placa circular, se obtiene de la expresión (83) despreciando el término en c^2 .

$$M_{\max} = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} + 1 \right]$$

¹ Se recuerda que $x^2 = r^2 - y^2$.

Por consiguiente, para el centro del área circular de una placa rectangular larga se obtiene de las ecuaciones (154)

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] \\ M_y &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] - \frac{(1 - \nu)P}{4\pi} \end{aligned} \quad (155)$$

Se llega a la conclusión, después de esta comparación de una placa circular y de una placa rectangular larga, de que todas las fórmulas correspondientes a las tensiones locales en el punto de aplicación de la carga P , calculadas para una placa circular, utilizando la teoría de las placas gruesas (v. ap. 19) pueden servir en el caso de una placa rectangular larga.

Cuando la placa no es muy larga se utilizarán las ecuaciones (a) en lugar de (b), para el cálculo de los momentos M_x y M_y a lo largo del eje x . Puesto que θ_{a_m} tiende hacia uno rápidamente y χ_{a_m} aumenta exponencialmente con m , las diferencias entre las sumas de las series (a) y la suma de la serie (b) se calculan fácilmente, y los momentos M_x y M_y a lo largo del eje x y cerca del punto de aplicación de la carga pueden ponerse en la forma:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{(1 + \nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} \\ &= \frac{P(1 + \nu)}{4\pi} \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} \\ M_y &= \frac{(1 + \nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \gamma_2 \frac{P}{4\pi} \\ &= \frac{P(1 + \nu)}{4\pi} \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_2 \frac{P}{4\pi} \end{aligned} \quad (156)$$

donde γ_1 y γ_2 son factores numéricos cuyos valores dependen de la relación b/a y de la posición de la carga sobre el eje x . La tabla 24 da varios valores en el caso de una carga central.

TABLA 24
Factores γ_1 y γ_2 de las ecuaciones (156)

b/a	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	∞
γ_1	-0,565	-0,350	-0,211	-0,125	-0,073	-0,042	0
γ_2	+0,135	+0,115	+0,085	+0,057	+0,037	+0,023	0

La distribución de tensiones cerca del punto de aplicación de la carga es también en esencia la misma que en una placa circular cargada en el centro y de radio $(2a/\pi) \operatorname{sen} (\pi\xi/a)$.

Para obtener los momentos de flexión M_x y M_y cerca de la carga, basta con superponer a los momentos de la placa circular la flexión pura creada por los momentos $M'_x = \gamma_1 P/4\pi$ y $M'_y = -(1 - \nu - \gamma_2)P/4\pi$.

Suponiendo que esta solución es válida también cuando la carga P está uniformemente repartida sobre un círculo de radio pequeño c , se tiene para el centro del círculo:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] + \frac{\gamma_1 P}{4\pi} \\ M_y &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] - (1 - \nu - \gamma_2) \frac{P}{4\pi} \end{aligned} \quad (157)$$

Como en el caso de una carga repartida las reacciones concentradas en las esquinas de una placa rectangular actúan hacia abajo y las cargas concentradas producen importantes momentos de sujeción. Las reacciones en las esquinas

$$R = nP \quad (f)$$

debidas a una carga central P están dadas en la tabla 25 por los valores numéricos del factor n , en tanto los momentos de sujeción tienen por valor, $-R/2$ (v. pág. 105). El cálculo de R se efectúa por un método sencillo explicado en el apartado siguiente.

TABLA 25
Factor n para el cálculo de las reacciones R en placas rectangulares simplemente apoyadas cargadas en su centro
 $\nu = 0,3$

$b/a =$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
$n =$	0,1219	0,1162	0,1034	0,0884	0,0735	0,0600	0,0180	0

La figura 73 muestra la distribución de los momentos flectores y de las reacciones, en el caso particular de una placa cuadrada, cargada en el centro.

Las partes de curvas rayadas son válidas para un reparto uniforme de la carga P sobre un círculo de radio $c = 0,05 a$.

36. Placas rectangulares de longitud infinita con bordes simplemente apoyados

En anteriores estudios hemos considerado varios casos de placas de longitud infinita. Las flechas y los momentos en estas placas se obtienen a partir de las soluciones de las placas finitas en las que se hace tender la longitud hacia infinito. En algunos casos es mejor obtener las soluciones

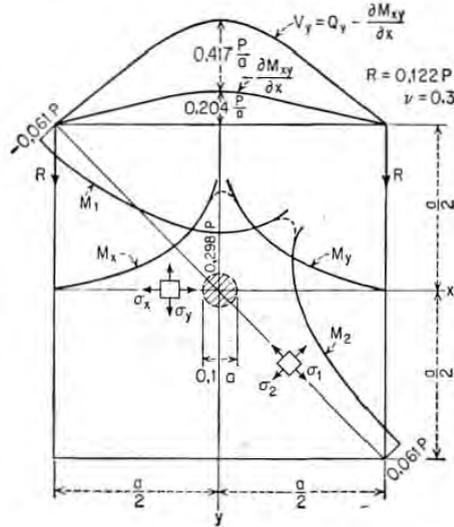


FIG. 73

para una placa de longitud infinita y combinarlas de tal forma que se obtenga la solución para una placa finita. Daremos en este apartado varios ejemplos de este procedimiento de obtener las soluciones.

Estudiaremos primero el caso de una placa de longitud infinita y de anchura a cargada a lo largo del eje x , como indica la figura 74. Puesto que

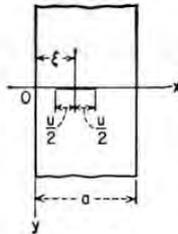


FIG. 74

la deformada es simétrica con relación al eje x , no consideraremos más que la parte de la placa correspondiente a los valores positivos de y .

Estando la carga distribuida sólo a lo largo del eje x , la flecha de w de la placa, satisface la ecuación

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

Escribiremos su solución en la forma

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

que satisface las condiciones de contorno a lo largo de los bordes longitudinales de la placa simplemente apoyados. Para satisfacer a (a), las funciones Y_m deberán ser solución de

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0$$

Tomando la solución de esta ecuación en la forma

$$Y_m = A_m e^{m\pi y/a} + B_m \frac{m\pi y}{a} e^{m\pi y/a} + C_m e^{-m\pi y/a} + D_m \frac{m\pi y}{a} e^{-m\pi y/a} \quad (c)$$

y recordando que las flechas y sus derivadas tienden a cero cuando nos alejamos del eje x , se llega a que las constantes A_m y B_m deben ser nulas. Por consiguiente (b) se escribe

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m + D_m \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

Por razón de simetría, tenemos

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Esta condición se satisface tomando $C_m = D_m$ en (d). De donde

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Las constantes C_m se calculan fácilmente en cada caso particular si se conoce la distribución de la carga a lo largo del eje x .

Por ejemplo, supongamos que la carga está uniformemente repartida a lo largo de todo el ancho de la placa. La intensidad de la carga puede ponerse en la forma siguiente de serie trigonométrica

$$q = \frac{4}{\pi} q_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

en la que q_0 es la carga por unidad de longitud. Puesto que la carga está uniformemente repartida entre las dos mitades de la placa, se ve que

$$(Q_y)_{y=0} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{2}{\pi} q_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

Sustituyendo w por su valor dado en (e), se obtiene

$$\frac{2D\pi^3}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} C_m m^3 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

de donde

$$C_m = \frac{q_0 a^3}{D\pi^4 m^4}$$

donde $m = 1, 3, 5 \dots$

Por consiguiente

$$w = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

La flecha es máxima en el centro de la placa ($x = a/2, y = 0$), donde

$$(w)_{\max} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} = \frac{5\pi q_0 a^3}{1,536 D} \quad (h)$$

Se obtiene el mismo resultado poniendo $\operatorname{th} a_m = 1$ y $\operatorname{ch} a_m = x$ en la ecuación (144) (v. pág. 160).

Como otro ejemplo de aplicación de (e), consideremos una carga de longitud u uniformemente repartida a lo largo de una parte del eje x (fig. 74). Representando esta distribución de carga por una serie trigonométrica, se tiene

$$q = \frac{4q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

donde q_0 es la intensidad de la carga a lo largo de la parte cargada del eje x . La ecuación que permite la determinación de constantes c_m , correspondientes a (f), es

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Sustituyendo w por su valor en (e), se obtiene

$$\frac{2D\pi^3}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} C_m m^3 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

de donde se deduce

$$C_m = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a}$$

La expresión (e) de las flechas toma entonces la forma

$$w = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

El caso particular de una fuerza concentrada aplicada a una distancia ξ del origen se obtiene haciendo tender a cero la anchura u de la parte cargada del eje x . Sustituyendo

$$q_0 u = P \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{a} \approx \frac{m\pi u}{a}$$

en la ecuación (i), se obtiene

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (158)$$

expresión idéntica a la (148) del apartado anterior.

Se pueden obtener diferentes casos de carga integrando la expresión (i) de la flecha de una placa larga sometida a una carga repartida a lo largo de una porción u del eje x . Por ejemplo, consideremos el caso de una carga de intensidad q repartida uniformemente sobre un rectángulo rayado (fig. 75). Tomemos un elemento infinitesimal de carga, de valor $qu d\eta$, a una distancia η del eje x , la flecha correspondiente producida por esta carga en puntos tales que $y > \eta$ se obtiene sustituyendo q_0 por $qu d\eta$ e y por $y - \eta$ en (i). La flecha producida por la carga entera, en puntos tales que $y \geq u/2$, se obtiene por integración:

$$w = \frac{qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \int_{-v/2}^{v/2} \left[1 + \frac{m\pi(y-\eta)}{a} \right] e^{-\frac{m\pi(y-\eta)}{a}} d\eta$$

$$= \frac{qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[\left(\frac{2a}{m\pi} + y - \frac{v}{2} \right) e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}} - \left(\frac{2a}{m\pi} + y + \frac{v}{2} \right) e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}} \right] \quad (j)$$

La flecha en los puntos tales que $y < v/2$ se obtiene mediante un adecuado cambio de los límites de esta integración. Consideremos la flecha a lo largo del eje x (fig. 75). La flecha producida por la mitad superior de la carga se obtiene de la expresión (j), sustituyendo y y $v/2$ por $v/4$.

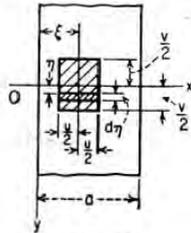


FIG. 75

Multiplicando por 2 el resultado obtenido en este caso, se incluye también la acción de la mitad inferior de la carga y se obtiene finalmente

$$(w)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 - \left(1 + \frac{m\pi v}{4a} \right) e^{-m\pi v/2a} \right] \quad (k)$$

Cuando $v = \infty$, la carga indicada en la figura 75, se extiende en toda la longitud de la placa y la deformada es cilíndrica. La flecha correspondiente es, según la ecuación (k):

$$(w)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (l)$$

Haciendo $\xi = u/2 = a/2$ en esta expresión, se obtiene

$$(w)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

que representa la deformada de una franja uniformemente cargada.

Las expresiones siguientes de los momentos flectores producidos por la carga uniformemente repartida a lo largo de una parte u del eje x , se obtienen fácilmente de la expresión (i) de la flecha w :

$$M_x = \frac{q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \right] e^{-m\pi y/a} \quad (m)$$

$$M_y = \frac{q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \right] e^{-m\pi y/a}$$

Los valores máximos de estos momentos se sitúan sobre x ; donde

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{q_0 a(1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (n)$$

En el caso particular de que $\xi = u/2 = a/2$, es decir, cuando la carga está distribuida a todo lo ancho de la placa

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{q_0 a(1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

El momento máximo está en el centro de la placa, donde

$$(M_x)_{\max} = (M_y)_{\max} = \frac{q_0 a(1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} = 0,0928 q_0 a(1 + \nu)$$

Cuando u es muy pequeño, esto es, en el caso de una carga concentrada, se pone

$$\operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \approx \frac{m\pi u}{2a} \quad \text{y} \quad q_0 u = P$$

Entonces, según la expresión (n), se tiene

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{P(1 + \nu)}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (o)$$

que es idéntica a (b) del apartado anterior y que se expresa también de forma finita (v. pág. 168).

En el caso de una carga q uniformemente distribuida en el área de un rectángulo (fig. 75), los momentos flectores de la parte de placa para la que $y \geq v/2$, se obtiene por integración de las expresiones (m) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \\
 &\quad \int_{-v/2}^{+v/2} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{m\pi(y - \eta)}{a} \right] e^{-\frac{m\pi(y-\eta)}{a}} d\eta \\
 &= \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \\
 &\quad \left\{ \left[\frac{2a}{m\pi} + (1 - \nu) \left(y - \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}} \right. \\
 &\quad \quad \left. - \left[\frac{2a}{m\pi} + (1 - \nu) \left(y + \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}} \right\} \quad (159) \\
 M_y &= \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \\
 &\quad \left\{ \left[\frac{2va}{m\pi} - (1 - \nu) \left(y - \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}} \right. \\
 &\quad \quad \left. - \left[\frac{2va}{m\pi} - (1 - \nu) \left(y + \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}} \right\}
 \end{aligned}$$

Los momentos de la parte de la placa donde $y < v/2$ se calculan de modo similar. Para obtener los momentos a lo largo de x , basta sustituir v por $v/2$ e y por $v/4$ en las fórmulas (159), y multiplicar por 2 el resultado así obtenido.

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
 (M_x)_{y=0} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \\
 &\quad \left\{ 1 - \left[1 + (1 - \nu) \frac{m\pi v}{4a} \right] e^{-\frac{m\pi v}{2a}} \right\} \\
 (M_y)_{y=0} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \\
 &\quad \left\{ \nu - \left[\nu - (1 - \nu) \frac{m\pi v}{4a} \right] e^{-\frac{m\pi v}{2a}} \right\} \quad (160)
 \end{aligned}$$

Si se precisa conocer los valores de los momentos en el centro del área rectangular cargada, se pueden calcular también por medio de las expresiones (167) que serán expuestas en el apartado 37. Cuando v es muy

pequeño, las ecuaciones (160) son iguales a (n), si se sustituye en este caso, qv , por q_0 . Cuando v , es muy grande, la placa flexa según una superficie cilíndrica y las ecuaciones (160) toman la forma

$$\begin{aligned}
 (M_x)_{y=0} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \\
 (M_y)_{y=0} &= \frac{4vqa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}
 \end{aligned}$$

Pueden obtenerse los valores de los momentos flectores y de las flechas, para una placa finita, a partir de los valores correspondientes a una placa de longitud infinita, con ayuda del *metodo de imágenes*¹.

Empezaremos por el caso de una fuerza concentrada P aplicada sobre el eje de simetría x de la placa rectangular, de lados a y b [fig. 76 a)]. Se imagina ahora que la placa se prolonga en las direcciones positiva y negativa de y y que está sometida a una serie de fuerzas P aplicadas a lo largo de mn , situadas a una distancia b una de otra y dirigidas en sentidos contrarios [v. fig. 76 b)], las flechas de esta placa indefinida son evidentemente nulas a lo largo de las líneas A_1B_1 , AB , CD , C_1D_1 Los momentos flectores a

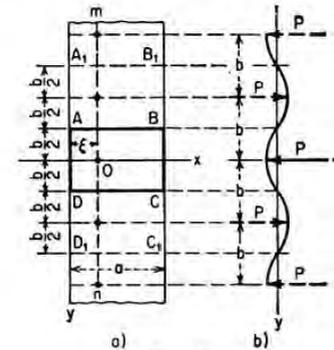


FIG. 76

lo largo de las mismas líneas son nulos, y se puede considerar la placa $ABCD$ como una porción de la placa de longitud infinita, cargada como indica la figura 76 b). Por consiguiente, la flecha y las tensiones producidas en la placa dada en el punto de aplicación O de la fuerza concentrada, se calculan mediante las fórmulas de las placas de longitud infinita. De (158)

¹ Este método fue utilizado por A. Nádai (véase *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 1, 1922) y por M. T. Huber (véase *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 228, 1926).

se deduce que la flecha en el eje x , de la placa de longitud infinita, producida por P , aplicada en O , es

$$w_1 = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Dos fuerzas adyacentes P aplicadas a una distancia b de O [fig. 76 b)] producen en el eje x la flecha

$$w_2 = -\frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} (1 + 2\alpha_m) e^{-2\alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

donde, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Las fuerzas P a una distancia $2b$ de O producen en el eje x la flecha

$$w_3 = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} (1 + 4\alpha_m) e^{-4\alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

y así sucesivamente. La flecha total del eje x es igual a la suma

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \dots \quad (p)$$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{th} \alpha_m = \frac{1 - e^{-2\alpha_m}}{1 + e^{-2\alpha_m}} = 1 - 2e^{-2\alpha_m} + 2e^{-4\alpha_m} \dots$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} = \frac{4}{(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})^2} = \frac{4e^{-2\alpha_m}}{(1 + e^{-2\alpha_m})^2} = 4e^{-2\alpha_m} (1 - 2e^{-2\alpha_m} + 3e^{-4\alpha_m} - 4e^{-6\alpha_m} + \dots)$$

se hace coincidir (p) y (146) del apartado 34.

Apliquemos el método de imágenes al cálculo de la reacción

$$R = -2M_{xy}$$

que actúa en el vértice D de la placa rectangular $ABCD$ (fig. 76) y debida a una carga P aplicada en el centro de la placa. Utilizando (151) y (152), se encuentra que la expresión general del momento de torsión de una placa de longitud infinita, en el caso de una carga única, pasa a ser

$$M_{xy} = -\frac{1}{2}(1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{P(1-\nu)y}{8a} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(x-\xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x-\xi)}{a}} - \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(x+\xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x+\xi)}{a}} \right] \quad (q)$$

Por consiguiente, una carga P concentrada en el punto $x = \xi = a/2, y = 0$ produce en $x = 0$, el momento torsor

$$M_{xy} = -\frac{P(1-\nu)}{4a} \frac{y}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a}} \quad (r)$$

Poniendo, consecutivamente $y = b/2, 3b/2, 5b/2, \dots$ se obtienen los momentos torsores producidos por las cargas $\pm P$ que actúan por encima de la línea DC . Sumando estos momentos se tiene

$$M_{xy} = -\frac{Pb(1-\nu)}{8a} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}} - \frac{3}{\operatorname{ch} \frac{3\pi b}{2a}} + \frac{5}{\operatorname{ch} \frac{5\pi b}{2a}} \dots \right) \quad (s)$$

Para tener en cuenta las cargas que actúan por debajo de DC , se debe doblar el efecto (s) de las cargas que actúan por encima de esta misma línea de modo que se obtenga el efecto de todas las cargas dadas. Así llegamos al resultado final:

$$M_{xy} = -\frac{Pb(1-\nu)}{4a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{m}{\operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a}} \quad (t)$$

En cuanto a la reacción que actúa hacia abajo en el punto D , e igualmente en los otros vértices de la placa se tiene $R = -2M_{xy}$, estando dado M_{xy} por (t).

Se puede utilizar también el método de imágenes, cuando el punto de aplicación de P no está sobre el eje de simetría [fig. 77 a)]. Las flechas y los momentos pueden

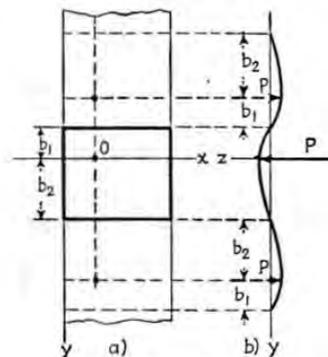


FIG. 77

calcularse introduciendo un sistema de fuerzas auxiliares que indica la figura y utilizando las fórmulas de una placa de longitud infinita. Si la carga está distribuida sobre un rectángulo deben utilizarse, para el cálculo de los momentos flectores debidos a las cargas existentes y a las cargas auxiliares las fórmulas (167) que se expondrán en el apartado 37.

37. Momentos flectores en placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una carga uniformemente repartida en un rectángulo

Consideremos una vez más el caso más importante en la práctica, de la carga representada en la figura 78. Si se procede como en el apartado 33, se encuentra que para pequeños valores de u/a y v/b , las series que dan los momentos flectores en el centro del área cargada convergen lentamente y no son útiles para cálculos numéricos.

Para obtener en este caso unas fórmulas¹ más adecuadas, introducimos en (119) las notaciones siguientes:

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ N &= \frac{M_x - M_y}{1 - \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (161)$$

De donde

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}(1 + \nu)M + \frac{1}{2}(1 - \nu)N \\ M_y &= \frac{1}{2}(1 + \nu)M - \frac{1}{2}(1 - \nu)N \end{aligned} \quad (162)$$

Consideremos primero una *placa circular empotrada* de radio a_0 , cargada en el centro como la figura 78. Los momentos de flexión en el centro de estas placas se obtienen con la ayuda de la fórmula de Michell, para una carga única excéntrica. Si

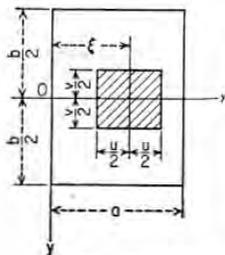


FIG. 78

u y v son pequeños con relación a a_0 , el resultado, calculado por una integración apropiada de (197) (pág. 321) puede ponerse en la forma

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 + 2 \ln \frac{2a_0}{d} - \psi \right) \\ N &= \frac{P}{4\pi} \psi \end{aligned} \quad (a)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi &= k \operatorname{arctg} \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \operatorname{arctg} k \\ \psi &= k \operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \operatorname{arctg} k \\ k &= \frac{v}{u} \quad \text{y} \quad d = \sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (163)$$

¹ Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 21, pág. 331, 1953.

Para una placa circular simplemente apoyada y del mismo radio a_0 se debe añadir a M_x y M_y , el término $P/4\pi$ (v. pág. 87), es decir, añadiendo $P/2\pi(1 + \nu)$ a M y nada a N , de forma que los últimos valores toman la forma

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 + 2 \ln \frac{2a_0}{d} - \psi \right) + \frac{P}{2\pi(1 + \nu)} \\ N &= \frac{P}{4\pi} \psi \end{aligned} \quad (b)$$

Finalmente, para obtener las expresiones correspondientes a una *franja infinita* (fig. 75), se debe hacer $a_0 = 2a/\pi \operatorname{sen}(\pi\xi/a)$ e introducir un momento adicional $M_y = -(1 - \nu)P/4\pi$.

Esta última operación cambia M en $-(1 - \nu)P/4\pi(1 + \nu)$ y N en $+P/4\pi$.

Sustituyendo en (b), se llega al resultado siguiente:

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 \ln \frac{4a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + 3 - \psi \right) \\ N &= \frac{P}{4\pi} (1 + \psi) \end{aligned} \quad (164)$$

Los valores ψ y ψ , dependen de la relación v/u y se encuentran en la tabla 26.

Consideremos ahora, el caso de una *placa rectangular* (fig. 78), no debemos tomar en consideración más que la influencia de las cargas auxiliares¹ $\pm P$ (fig. 77), y sumarlas a los valores (164) de M y N .

El resultado final, para el caso de la figura 78, se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 \ln \frac{4a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \psi \right) \\ N &= \frac{P}{4\pi} (\mu + \psi) \end{aligned} \quad (165)$$

donde ψ , ψ , d , están dados por las expresiones (163) y la tabla 26, y:

$$\begin{aligned} \lambda &= 3 - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi\xi}{a} \\ \mu &= 1 - \frac{2\pi b}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi\xi}{a} \end{aligned} \quad (166)$$

con $\alpha_m = m\pi b/2a$. Los términos λ y μ expresados por series rápidamente convergentes son independientes de las dimensiones u y v (y aun de la forma) del área cargada. La tabla 27 da los valores numéricos.

¹ Se pueden considerar como concentradas si u y v son pequeños.

De las ecuaciones (162) se obtienen los valores de los momentos flectores que actúan en el centro del área cargada (fig. 78).

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{P}{8\pi} \left[\left(2 \ln \frac{4a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi \right) (1 + \nu) + (\mu + \psi)(1 - \nu) \right] \\ M_y &= \frac{P}{8\pi} \left[\left(2 \ln \frac{4a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi \right) (1 + \nu) - (\mu + \psi)(1 - \nu) \right] \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

Las expresiones (165) y (167) son también aplicables al cálculo de momentos de una franja infinita simplemente apoyada, como caso particular.

TABLA 26

Valores de los factores φ y ψ definidos por las ecuaciones (163)
 $k = \nu/u$

k	φ	ψ	k	φ	ψ	k	φ	ψ
0,0	1,000	-1,000	1,0	1,571	0,000	2,5	1,427	0,475
0,05	1,075	-0,923	1,1	1,569	0,054	3,0	1,382	0,549
0,1	1,144	-0,850	1,2	1,564	0,104	4,0	1,311	0,648
0,2	1,262	-0,712	1,3	1,556	0,148	5,0	1,262	0,712
0,3	1,355	-0,588	1,4	1,547	0,189	6,0	1,225	0,757
0,4	1,427	-0,475	1,5	1,537	0,227	7,0	1,197	0,789
0,5	1,481	-0,374	1,6	1,526	0,261	8,0	1,176	0,814
0,6	1,519	-0,282	1,7	1,515	0,293	9,0	1,158	0,834
0,7	1,545	-0,200	1,8	1,504	0,322	10,0	1,144	0,850
0,8	1,560	-0,127	1,9	1,492	0,349	20,0	1,075	0,923
0,9	1,568	-0,060	2,0	1,481	0,374	∞	1,000	1,000

TABLA 27

Valores de los factores λ y μ (ec. 166) para placas rectangulares simplemente apoyadas

a/b	λ para $\xi/a =$					μ para $\xi/a =$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,5	2,792	2,352	1,945	1,686	1,599	0,557	-0,179	-0,647	-0,852	-0,906
0,6	2,861	2,545	2,227	2,011	1,936	0,677	-0,053	-0,439	-0,701	-0,779
0,7	2,904	2,677	2,433	2,259	2,198	0,758	0,240	-0,229	-0,514	-0,605
0,8	2,933	2,768	2,584	2,448	2,399	0,814	0,391	-0,031	-0,310	-0,404
0,9	2,952	2,832	2,694	2,591	2,553	0,856	0,456	0,148	-0,108	-0,198
1,0	2,966	2,879	2,776	2,698	2,669	0,887	0,611	0,304	0,080	0,000
1,2	2,982	2,936	2,880	2,836	2,820	0,931	0,756	0,551	0,393	0,335
1,4	2,990	2,966	2,936	2,912	2,903	0,958	0,849	0,719	0,616	0,578
1,6	2,995	2,982	2,966	2,953	2,948	0,975	0,908	0,828	0,764	0,740
1,8	2,997	2,990	2,982	2,975	2,972	0,985	0,945	0,897	0,858	0,843
2,0	2,999	2,995	2,990	2,987	2,985	0,991	0,968	0,939	0,915	0,906
3,0	3,000	3,000	3,000	2,999	2,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,994
∞	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Extendiendo la integración a las superficies circulares, elípticas y otras, se encuentran asimismo las expresiones de M y N para estas cargas. Tomemos, por ejemplo, un área circular cargada (fig. 79), se obtiene para su centro:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + \lambda - 2 \right) \\ N &= \frac{P}{4\pi} \mu \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

estas expresiones son equivalentes a (157). Comparando (168) y (165) para $k = 1$, se llega a que las áreas cargadas circular y cuadrada producen el mismo momento flector en el centro, si

$$c = \frac{u}{\sqrt{2}} e^{\pi/4-1} = 0,57u \quad \text{o} \quad u = 0,88 \times 2c \quad (c)$$

Se observa que, a medida que la carga se concentra, la exactitud de las fórmulas logarítmicas aproximadas de los momentos flectores [ec. (157 y 167)], aumenta mientras que la convergencia de las series que dan ordinariamente estos momentos

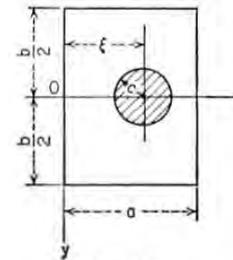


FIG. 79

se hace más lenta. Los cálculos numéricos¹ muestran también que la precisión de estas fórmulas aproximadas es ampliamente suficiente en la práctica.

33. Tensiones térmicas en placas rectangulares simplemente apoyadas

Supongamos que la cara superior de una placa rectangular está a una temperatura más alta que la cara inferior de manera que la placa tiene tendencia a curvarse hacia arriba a causa del calentamiento no uniforme. Debido a la coacción a lo largo de los bordes de la placa, simplemente apoyada, que les impide separarse del plano de los apoyos, el calentamiento no uniforme de la placa provoca ciertas reacciones en la longitud del contorno de ésta y ciertas tensiones de flexión a una distancia de los bordes.

¹ Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, pág. 340, 1932; e *Ingr.-Arch.*, vol. 21, páginas 336 y 337, 1953.

Se utilizará el método descrito en el apartado 24 para calcular estas tensiones¹. Supongamos primero que los bordes están empotrados. En este caso, el calentamiento no uniforme produce los momentos flectores uniformemente repartidos a lo largo del contorno y cuyo valor es (v. pág. 67)

$$M_n = \frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h} \quad (a)$$

donde t es la diferencia de temperatura entre las caras superior e inferior de la placa y a el coeficiente de dilatación térmica.

Para obtener los momentos flectores M_x y M_y de una placa simplemente apoyada (fig. 62), se deben superponer a los momentos uniformemente repartidos, dados por (a), los momentos producidos en una placa rectangular, simplemente apoyada, debidos a $M'_n = -\alpha t D(1 + \nu)/h$ uniformemente repartidos a lo largo de los bordes. Se utilizará (120) para estudiar este último problema.

Puesto que la curvatura en dirección de un borde es nula en el caso de extremos simplemente apoyados, tenemos $M'_i = \nu M'_n$. Por consiguiente en el contorno

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = \frac{M'_n + M'_i}{1 + \nu} = -\frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h} \quad (b)$$

Entonces la primera de las ecuaciones (120) se cumple tomando M constante a lo largo de toda la placa e igual a su valor en el contorno (b).

La segunda de las ecuaciones (120) da entonces

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\alpha t(1 + \nu)}{h} \quad (c)$$

Por consiguiente, la deformada debida a un calentamiento no uniforme es la misma que la de una membrana rectangular uniformemente tensada y uniformemente cargada, y se obtiene hallando la solución (c) que cumple la condición $w = 0$ en el contorno.

Operando, como antes se escribe, la superficie flexada de la forma

$$w = w_1 + w_2 \quad (d)$$

en la que w_1 es la flecha de una cuerda perfectamente flexible cargada uniformemente y estirada axialmente de tal manera que la intensidad de la carga dividida por la fuerza axial es igual a $-\alpha t(1 + \nu)h$.

¹ Véase la memoria de J. L. Maulbetsch, *J. Appl. Mechanics*, vol. 2, pág. 141, 1935; véase también E. Melan y H. Parkus, *Warmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Viena, 1953, que incluye bibliografía sobre tensiones térmicas. Respecto a tensiones debidas a errores de montaje de placas, véase W. Nowacki, *Bull. acad. polon. sci.*, vol. 4, pág. 79, 1956.

En este caso, la deformada es una parábola que puede representarse en forma de una serie trigonométrica

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\alpha t(1 + \nu)}{h} \frac{x(a - x)}{2} \\ &= -\frac{\alpha t(1 + \nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \end{aligned} \quad (e)$$

Esta expresión satisface a (c). La flecha w_2 que debe cumplir

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

puede escribirse de la forma

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

donde Y_m es una función de y solamente. Sustituyendo (g) en (f), se encuentra

$$Y_m'' - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m = 0$$

Entonces

$$Y_m = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \quad (h)$$

A causa de la simetría de la deformada respecto al eje x , se llega a que Y_m es una función par de y . Por consiguiente, la constante A_m en (h) es igual a cero y se obtiene finalmente

$$w = w_1 + w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[-\frac{\alpha t(1 + \nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \quad (i)$$

Esta expresión satisface las condiciones de contorno $w = 0$, en los bordes $x = 0$ y $x = a$. Para cumplir la misma condición en los bordes $y = \pm b/2$ es preciso que

$$B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a} - \frac{\alpha t(1 + \nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} = 0$$

Sustituyendo en (i) B_m por su valor, deducido de esta ecuación, se encuentra

$$w = -\frac{\alpha t(1 + \nu)4a^2}{\pi^3 h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a}} \right) \quad (j)$$

en la que, como antes $a_m = m\pi b/2a$.

Con ayuda de esta expresión w de las flechas, se encuentran los valores correspondientes de los momentos flectores y , combinándolos con (a), se encuentra finalmente:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 &= \frac{4 D \alpha t (1 - \nu^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a}}{m \operatorname{ch} a_m} \\
 M_y &= \frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 &= \frac{\alpha t (1 - \nu^2) D}{h} - \frac{4 D \alpha t (1 - \nu^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a}}{m \operatorname{ch} a_m}
 \end{aligned} \quad (k)$$

La suma de la serie que aparece en estas expresiones se obtiene fácilmente si se escribe de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a}}{m \operatorname{ch} a_m} &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m \pi y}{a}}{m \operatorname{ch} a_m} - \frac{e^{m \pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a}}{m e^{a_m}} \right) \\
 &+ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{m \pi y/a}}{m e^{a_m}} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \quad (l)
 \end{aligned}$$

La primera serie del segundo miembro de esta ecuación converge rápidamente puesto que $\operatorname{ch} (m \pi y/a)$ y a_m tienden rápidamente hacia $e^{m \pi y/a}$ y e^{a_m} cuando m aumenta. La segunda serie se escribe¹:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{m \pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a}}{m e^{a_m}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi b}{2a} - \frac{\pi y}{a} \right)} \quad (m)$$

¹ Véase W. E. Byerly, *Elementary Treatise on Fourier Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics*, pág. 100, Boston, 1893. El resultado puede obtenerse fácilmente mediante la conocida serie

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x \operatorname{sen} \varphi}{1 - x^2} = x \operatorname{sen} \varphi + \frac{x^3}{3} \operatorname{sen} 3\varphi + \frac{x^5}{5} \operatorname{sen} 5\varphi + \dots$$

Los momentos flectores M_y y M_x son máximos en el contorno. Estos valores máximos son:

$$(M_x)_{y=\pm b/2} = (M_y)_{x=0, x=a} = \frac{\alpha t (1 - \nu^2) D}{h} = E h^2 \frac{\alpha t}{12} \quad (n)$$

Se ve que estos momentos se obtienen multiplicando el valor de M_n en (a) por $(1 - \nu)$. Se llega a la misma conclusión si se señala que los momentos M'_n que estaban aplicados a lo largo del contorno crean en la dirección perpendicular los momentos

$$M'_i = \nu M'_n = -\nu \frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h}$$

que superpuestos al momento (a) dan el valor (n).

39. Influencia de las deformaciones por esfuerzos cortantes en la flexión de las placas delgadas

Se ha visto que la teoría habitual de las placas delgadas elásticas, conduce a una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden (103) para la flecha y , por consiguiente, a dos condiciones de contorno que pueden y deben cumplirse en cada borde.

Para una placa de espesor finito, parece natural exigir que se cumplan tres condiciones de contorno mejor que dos. La razón formal que impide satisfacer más de dos condiciones, por la teoría habitual, proviene del orden de la ecuación básica de esta teoría; físicamente esta razón proviene del hecho de que la distorsión de los elementos de la placa, debida a los esfuerzos cortantes Q (pág. 71), Q_x y Q_y (pág. 99), ha sido despreciada al establecer las relaciones entre las tensiones y la flecha de la placa. Esta omisión de la deformación provocada por la componente de la tensión tangencial equivale, evidentemente, a hacer tender a infinito el módulo de elasticidad transversal G_x .

Aceptando esta hipótesis, se sustituye el material real de la placa, supuesta isotrópica, por un material no perfectamente isotrópico. Puesto que se ha supuesto $G_x = \infty$, la placa no responderá a la acción de un par aplicado en su superficie cilíndrica, si el vector del par coincide con la normal a esta superficie. Esto nos permite identificar la variación $\partial M_{xy}/\partial y$ de los pares de torsión debidos a las tensiones tangenciales horizontales que actúan a lo largo de un borde $x = a$ con el efecto de las fuerzas verticales Q_x aplicadas en el mismo borde lo que reduce de tres a dos el número de las condiciones de borde (v. pág. 102). El análisis de las tensiones de las placas elásticas se simplifica enormemente con esta reducción. Por otra parte, atribuyendo propiedades puramente hipotéticas al material de una placa, no se puede esperar una identificación total de la distribución de tensiones teórica con la distribución real. La inexactitud de la teoría habi-

tual de las placas delgadas es de interés práctico en las zonas periféricas de las placas y alrededor de agujeros que tienen un diámetro no muy grande en comparación con el espesor de la placa.

La generalización de la teoría ordinaria en función de la influencia de las deformaciones de los esfuerzos cortantes se debe a E. Reissner¹.

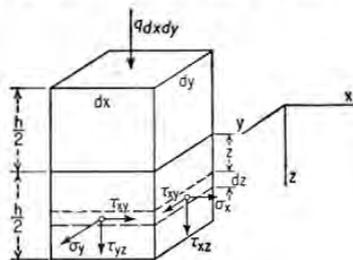


FIG. 80

Consideremos un elemento de placa sometido a una carga transversal externa $q dx dy$ y a un sistema de tensiones (fig. 80). Según la teoría de E. Reissner se supone una ley lineal para la distribución de las tensiones σ_x , σ_y , τ_{xy} a través del espesor de la placa. Por las ecuaciones de equilibrio (a) de la página 119, la distribución de las componentes τ_{xz} y τ_{yz} sigue una ley parabólica. Como para la tensión σ_z se obtiene fácilmente por la tercera de las ecuaciones de equilibrio (a), si se tienen en cuenta las condiciones

$$(\sigma_z)_{z=-h/2} = -q \quad (\sigma_z)_{z=h/2} = 0$$

sobre las caras superior e inferior de la placa, se llega, de esta forma, para las componentes de la tensión en función de sus resultantes y de x , a las expresiones siguientes

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3} \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3} \quad \tau_{xy} = -\frac{12M_{xy} z}{h^3} \quad (a)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \quad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_z = -\frac{3q}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right] \quad (b)$$

Excepto (b) el sistema anterior de ecuaciones es igual a las expresiones correspondientes de la teoría habitual. De la misma manera se pueden

¹ Véase *J. Math. and Phys.*, vol. 23, pág. 184, 1944; *J. Appl. Mechanics*, vol. 12, pág. A-68, 1945; *Quart. Appl. Math.*, vol. 5, pág. 55, 1947. Para estudiar la historia de este problema retrocediendo a la controversia entre M. Lévy y Boussinesq, véase L. Bolle, *Bull. tech. Suisse romande*, octubre 1947.

escribir las condiciones de equilibrio de las resultantes de la tensión (v. págs. 99 y 100):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (c)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (d)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

Suponiendo un material isótropo y los desplazamientos u_0 , v_0 , w_0 pequeños con relación al espesor h , en todo punto de la placa, se pueden utilizar las relaciones generales entre tensiones y deformaciones

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (e)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

donde $G = E/2(1 + \nu)$. No se utiliza la sexta relación

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

por estar en contradicción con la hipótesis de la ley lineal para la distribución de tensiones σ_x , σ_y , τ_{xy} junto a ello introducimos¹ un valor medio w del desplazamiento transversal, a través del espesor de la placa, así como algunos valores medios q_x y q_y del giro de las secciones $x = \text{constantes}$ e $y = \text{constante}$. Se definen estas cantidades igualando el trabajo de los pares resultantes al producir los giros medios y el trabajo de las fuerzas resultantes al producir los desplazamientos medios al trabajo de las tensiones correspondientes al efectuar los desplazamientos reales u_0 , v_0 y w_0 en la misma sección; es decir, haciendo

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x u_0 dz = M_x \varphi_x \quad - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} v_0 dz = M_{xy} \varphi_y$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y v_0 dz = M_y \varphi_y \quad - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} u_0 dz = M_{xy} \varphi_x \quad (f)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} w_0 dz = Q_x w \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} w_0 dz = Q_y w$$

¹ E. Reissner, en un tratado sobre esto, utiliza el principio de mínimo trabajo de Castigliano, para introducir las condiciones de compatibilidad en el análisis. El método desarrollado aquí conduce al mismo resultado y es debido a A. E. Green, *Quart. Appl. Math.*, vol. 7, página 223, 1949; véase también M. Schäfer, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, pág. 161, 1952.

Sustituyendo las tensiones (a) en (f), se obtienen las relaciones siguientes entre los desplazamientos medios y reales

$$\begin{aligned} w &= \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} w_0 \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \\ \varphi_x &= \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{u_0 z}{h} dz \\ \varphi_y &= \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{v_0 z}{h} dz \end{aligned} \quad (g)$$

Utilizando (e) y teniendo en cuenta (b), se pueden también expresar las componentes σ_x , σ_y y τ_{xy} en función de los desplazamientos reales, se tiene¹:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (h)$$

Sustituyendo estos valores en (a) y, multiplicando las ecuaciones obtenidas por $12z dz/h^3$, integrando entre $z = -h/2$ y $z = h/2$, y teniendo en cuenta (g), se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned} M_x &= D \left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} q \right] \\ M_y &= D \left[\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} q \right] \\ M_{xy} &= -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (i)$$

en las que D está definido por la ecuación (3). De la misma manera, sustituyendo τ_{xz} y τ_{yz} por sus expresiones (a) en las dos últimas ecuaciones (e), multiplicando el resultado por $3/2[1 - (2z/h)^2]dz/h$ e integrando entre los límites $z = \pm h/2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_x \\ \varphi_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_y \end{aligned} \quad (j)$$

¹ Los términos en z^3 no aparecerán en las expresiones siguientes de σ_x y σ_y puesto que se anulan con términos iguales, con signos opuestos, contenidos en $\partial u_0/\partial x$ y $\partial v_0/\partial y$.

Ahora, ocho valores desconocidos, M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y , w , q_x y q_y están relacionados por las dos ecuaciones (j), las tres ecuaciones (i) y, finalmente, las tres ecuaciones de equilibrio (c) y (d).

Para simplificar este sistema de ecuaciones en uno más conveniente, se eliminan q_x y q_y entre las ecuaciones (j) e (i), teniendo en cuenta (c), se obtiene:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu} \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu} \\ M_{xy} &= (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (k)$$

La sustitución de estas ecuaciones en (d) da, si se tiene en cuenta (c), el siguiente resultado

$$\begin{aligned} Q_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x} \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \quad (l)$$

donde Δ tiene la misma significación de la expresión (105). En el caso particular que $h = 0$, es decir, para una placa infinitamente delgada, el sistema de cinco ecuaciones (k) y (l) da (101) y (102) para los momentos y las ecuaciones (108) para los esfuerzos cortantes todas ellas de la teoría ordinaria de placas delgadas.

Para obtener la ecuación diferencial más completa de las flechas de una placa, basta sustituir (e) en (c), así se obtiene

$$D\Delta\Delta w = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q \quad (169)$$

Esta ecuación se cumple si se toma w , «flecha media», en el punto (x, y) , en la forma

$$w = w' + w'' \quad (m)$$

donde w' es una solución particular de la ecuación

$$D\Delta\Delta w' = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q \quad (n)$$

y w'' la solución general de la ecuación

$$\Delta\Delta w'' = 0 \quad (o)$$

Además utilizando (169), podemos hacer que como en la teoría ordinaria de placas delgadas, se satisfagan siempre las cuatro condiciones de

contorno. Se puede obtener una ecuación diferencial suplementaria, teniendo en cuenta los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y . La ecuación de equilibrio (c) se cumple, si se expresan estos esfuerzos de la misma forma que las ecuaciones (l):

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ Q_y &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (p)$$

o bien

$$\begin{aligned} Q_x &= Q'_x - D \frac{\partial(\Delta w'')}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ Q_y &= Q'_y - D \frac{\partial(\Delta w'')}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (q)$$

En estas expresiones ψ representa una nueva función de tensión, mientras que Q'_x y Q'_y satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} Q'_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q'_x &= -D \frac{\partial(\Delta w')}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x} \\ Q'_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q'_y &= -D \frac{\partial(\Delta w')}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \quad (r)$$

como puede deducirse de las ecuaciones (l) y (n). Derivando las ecuaciones anteriores, respectivamente respecto a x y a y y sumando los resultados, se llega a la condición de equilibrio

$$\frac{\partial Q'_x}{\partial x} + \frac{\partial Q'_y}{\partial y} + q = 0 \quad (s)$$

Para establecer una ecuación diferencial para la función de tensión ψ se sustituyen las ecuaciones (q) en (l) de donde

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\psi - \frac{h^2}{10} \Delta \psi \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi - \frac{h^2}{10} \Delta \psi \right) = 0 \quad (t)$$

de donde se deduce que las expresiones entre paréntesis son constantes. Igualando estas constantes a cero, obtenemos la relación

$$\Delta \psi - \frac{10}{h^2} \psi = 0 \quad (170)$$

que aún si se supone $h \neq 0$ da una segunda ecuación fundamental de la teoría generalizada de la flexión, junto con (169).

Habiendo establecido dos ecuaciones diferenciales, una de las cuales es de cuarto orden y otra de segundo, se pueden ahora satisfacer tres condiciones, en lugar de dos, en el contorno de la placa. Considerando el caso general de un elemento, del contorno cilíndrico de la placa, dado por las

direcciones de la normal n y de la tangente t (fig. 54), se puede, por ejemplo, situar la posición del elemento por las ecuaciones

$$w = \bar{w} \quad \varphi_n = \bar{\varphi}_n \quad \varphi_t = \bar{\varphi}_t \quad (u)$$

Donde \bar{w} es la flecha media dada, y $\bar{\varphi}_n$ y $\bar{\varphi}_t$ son los giros medios del elemento con respecto a los ejes t y n respectivamente. En el caso particular de un borde empotrado, las condiciones deberán ser $w = 0$, $\varphi_n = 0$ y $\varphi_t = 0$.

En lugar de los desplazamientos puede imponerse en el contorno algunos valores \bar{Q}_n , \bar{M}_n , \bar{M}_{nt} de las resultantes, y las condiciones en los bordes son:

$$Q_n = \bar{Q}_n \quad M_n = \bar{M}_n \quad M_{nt} = \bar{M}_{nt} \quad (v)$$

Por consiguiente, las condiciones a lo largo de un borde libre se expresan por las ecuaciones $Q_n = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$ y para un borde simplemente apoyado, $w = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$. En este último caso, no se producen las reacciones concentradas en las esquinas de la placa que actúan según la teoría ordinaria y están en contradicción evidentemente con la omisión de la deformación debida a los esfuerzos cortantes postulada en esta teoría.

Para ilustrar la teoría simplificada, consideremos una placa rectangular semiinfinita limitada por dos bordes paralelos $y = 0$, $y = a$ y por el borde $x = 0$. Supongamos que la placa no está solicitada por ninguna carga, que las flechas w y los momentos flectores M_y son nulos en los bordes $y = 0$, $y = a$, y que el borde $x = 0$ está sometido a momentos flectores y torsos así como a esfuerzos cortantes dados por

$$\begin{aligned} \bar{M}_x &= M_0 \text{sen} \frac{n\pi y}{a} \\ \bar{M}_{xy} &= H_0 \text{cos} \frac{n\pi y}{a} \\ \bar{Q}_x &= Q_0 \text{sen} \frac{n\pi y}{a} \end{aligned} \quad (w)$$

donde M_0 , H_0 , Q_0 son constantes y n es un número entero. Entonces, como $q = 0$, tenemos $w' = 0$ según la ecuación (n) y $w = w''$ según (m). Se satisfacen la ecuación (o) y la condición de flechas nulas en $x = \infty$, haciendo

$$w = w'' = \text{sen} \frac{n\pi y}{a} \left(A + \frac{n\pi x}{a} B \right) \frac{e^{-n\pi x/a}}{D}$$

Siendo A y B constantes cualesquiera. Supongamos que ψ tiene la forma

$$\psi = X \text{cos} \frac{n\pi y}{a}$$

donde X es una función sólo de x , y sustituyendo en (170), se tiene

$$\psi = C e^{-\pi x/a} \text{cos} \frac{n\pi y}{a}$$

Siendo en esta última expresión

$$\beta = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{10}{h^2}}$$

y C una constante. Por las ecuaciones (r), tenemos $Q'_x = Q'_y = 0$ y las ecuaciones (q) dan

$$Q_x = - \left[2B \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 e^{-n\pi x/a} + C \frac{n\pi}{a} e^{-\beta x} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a}$$

$$Q_y = \left[2B \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 e^{-n\pi x/a} + C\beta e^{-\beta x} \right] \operatorname{cos} \frac{n\pi y}{a}$$

Finalmente, las ecuaciones (k) dan las siguientes expresiones para los momentos que actúan a lo largo del borde $x = 0$,

$$(M_x)_{x=0} = \left[-A(1-\nu) + 2B \left(1 + \frac{n^2\pi^2 h^2}{5a^2} \right) + C \frac{\beta a h^2}{5n\pi} \right] \frac{n^2\pi^2}{a^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a}$$

$$(M_{xy})_{x=0} = \left[-A(1-\nu) + B \left(1 - \nu + \frac{2}{5} \frac{n^2\pi^2 h^2}{a^2} \right) + C \left(\frac{a^2}{n^2\pi^2} + \frac{h^2}{5} \right) \right] \frac{n^2\pi^2}{a^2} \operatorname{cos} \frac{n\pi y}{a}$$

Igualando estas expresiones, así como la expresión de los esfuerzos cortantes

$$(Q_x)_{x=0} = - \left[2B \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 + C \frac{n\pi}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a}$$

a las respectivas ecuaciones (w), obtendremos un sistema de tres ecuaciones que nos permiten calcular las constantes desconocidas A , B y C . De este modo, utilizando la teoría simplificada de las placas, nos consta que las tres condiciones en el borde $x = 0$, se cumplen.

Considerando ahora el borde $y = 0$, se ve que w se anula a lo largo de los bordes así como M_y como puede probarse sustituyendo el valor de Q_y en la segunda de las ecuaciones (k).

Otra teoría de las placas que toma en consideración la deformación debida al esfuerzo cortante transversal ha sido adelantada por A. Kromm¹. Esta teoría no tiene en cuenta la contracción transversal ϵ_z , pero en cambio no restringe a una ley lineal,

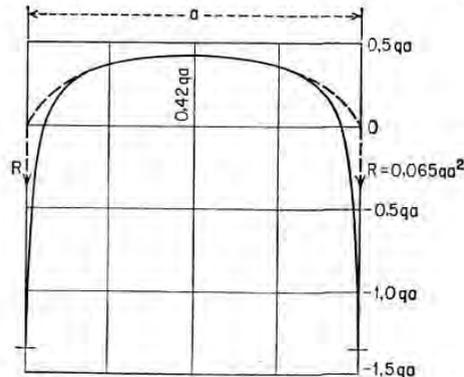


FIG. 81

¹ A. Kromm, *Ingr.-Arch.*, vol. 21, pág. 266, 1953; *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 35, pág. 231, 1955.

la distribución de las tensiones de flexión a través del espesor de la placa. Aplicando esta teoría al caso de una placa cuadrada con $a/h = 20$, uniformemente apoyada, Kromm encuentra para los esfuerzos cortantes a lo largo del borde la distribución que indica la figura 81. Como comparación se indican los resultados de la teoría ordinaria (fig. 63) con las líneas de trazos y las fuerzas R . Se ve que al considerar la deformación transversal debida al esfuerzo cortante, no hay reacción concentrada en el vértice de la placa. Las fuerzas negativas correspondientes están repartidas en una pequeña porción de los límites próxima a la esquina y no ejercen sobre éste más que una presión finita que actúa hacia abajo. Los momentos M_{xy} sobre los cuatro bordes de la placa son nulos en este caso. Puede hallarse aún otra teoría aproximada de la deformación debida al esfuerzo cortante en una memoria de H. Hencky¹.

40. Placas rectangulares de espesor variable²

En la obtención de las ecuaciones diferenciales del equilibrio de las placas, de espesor variable, se supone que no hay variación brusca del espesor, de modo que las expresiones de los momentos flectores y torsores calculados para las placas de espesor constante, son válidos con suficiente aproximación también en este caso.

Entonces

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (a)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación del equilibrio de un elemento [ec. (100), pág. 100]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (b)$$

y teniendo en cuenta que la rigidez a flexión ya no es constante sino que varía en función de x e y , se tiene

$$D\Delta\Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + \Delta D \Delta w - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q \quad (171)$$

donde como anteriormente, se emplea la notación

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Consideremos como ejemplo particular de aplicación de (171) el caso en que la rigidez a la flexión D , es una función lineal de y , expresada de la forma

$$D = D_0 + D_1 y \quad (c)$$

donde D_0 y D_1 son constantes. En este caso (171), toma la forma

$$(D_0 + D_1 y)\Delta\Delta w + 2D_1 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = q$$

o bien

$$\Delta[(D_0 + D_1 y)\Delta w] = q \quad (172)$$

¹ *Ingr.-Arch.*, vol. 16, pág. 72, 1947.

² Este problema fue estudiado por R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 5, pág. 363, 1934; véase también E. Reissner, *J. Math. and Phys.*, vol. 16, pág. 43, 1937.

Consideremos el caso en el que la intensidad de la carga q es proporcional a D . Tomaremos la flecha de la placa (fig. 82) de la forma:

$$w = w_1 + w_2$$

y sea w_1 igual a la flecha de una franja separada de la placa paralela al eje x y soportando una carga de intensidad

$$q = q_0 \left(1 + \frac{D_1}{D_0} y \right) \quad (d)$$

Se puede representar esta flecha por una serie trigonométrica

$$w_1 = \frac{4q_0 \left(1 + \frac{D_1}{D_0} y \right) a^4}{(D_0 + D_1 y) \pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^4 D_0} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

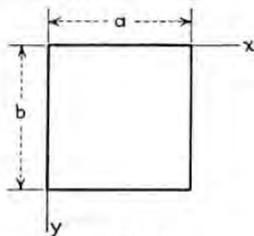


FIG. 82

Se ve asimismo, por sustitución, que esta expresión de w_1 satisface a la ecuación (172). Satisface también las condiciones de contorno $w_1 = 0$ y $\partial^2 w_1 / \partial x^2 = 0$ a lo largo de los bordes apoyados $x = 0$ y $x = a$.

La flecha w_2 cumple entonces la ecuación homogénea

$$\Delta[(D_0 + D_1 y) \Delta w_2] = 0 \quad (f)$$

Poniendo w_2 en forma de serie

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

Sustituyendo esta serie en (f), se encuentra que las funciones Y_m satisfacen a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \left[(D_0 + D_1 y) \left(Y_m'' - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m \right) \right] = 0 \quad (h)$$

Utilizando la notación

$$f_m = (D_0 + D_1 y) \left(Y_m'' - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m \right) \quad \frac{m\pi}{a} = \alpha_m \quad (i)$$

se deduce de (h) que

$$f_m = A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}$$

Entonces de (i) se deduce

$$Y_m'' - \alpha_m^2 Y_m = \frac{A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}}{D_0 + D_1 y} \quad (j)$$

La solución general de esta ecuación es

$$Y_m = C_m e^{\alpha_m y} + D_m e^{-\alpha_m y} + g_m \quad (k)$$

donde g_m es una integral particular de (j). Para calcularla se utiliza el método de Lagrange de variación de constantes, se supone que g_m es de la forma

$$g_m = E_m e^{\alpha_m y} + F_m e^{-\alpha_m y} \quad (l)$$

donde E_m y F_m son funciones de y .

Se las puede hallar con ayuda de las siguientes ecuaciones¹:

$$\begin{aligned} E_m' e^{\alpha_m y} + F_m' e^{-\alpha_m y} &= 0 \\ E_m' e^{\alpha_m y} - F_m' e^{-\alpha_m y} &= \frac{A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}}{\alpha_m (D_0 + D_1 y)} \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} E_m' &= \frac{A_m + B_m e^{-2\alpha_m y}}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} \\ F_m' &= -\frac{A_m e^{2\alpha_m y} + B_m}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} \end{aligned}$$

Integrando estas ecuaciones, se tiene:

$$\begin{aligned} E_m &= \int \frac{A_m + B_m e^{-2\alpha_m y}}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} dy = \frac{A_m}{2\alpha_m D_1} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) \\ &\quad + \frac{B_m}{2\alpha_m D_1} e^{\frac{2\alpha_m D_0}{D_1}} \int \frac{e^{-\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} d[2\alpha_m (D_0 + D_1 y)]}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} \\ F_m &= - \int \frac{A_m e^{2\alpha_m y} + B_m}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} dy = -\frac{B_m}{2\alpha_m D_1} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) \\ &\quad - \frac{A_m}{2\alpha_m D_1} e^{-\frac{2\alpha_m D_0}{D_1}} \int \frac{e^{\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} d[2\alpha_m (D_0 + D_1 y)]}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (l) y utilizando la notación²

$$E_i(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^u}{u} du \quad E_i(-u) = \int_{\infty}^{-u} \frac{e^{-u}}{u} du$$

se representa y_m de la forma siguiente

$$\begin{aligned} Y_m &= A_m' \left\{ \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - e^{-\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} E_i \left[\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \right\} e^{\alpha_m y} \\ &\quad - B_m' \left\{ e^{-\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - E_i \left[\frac{-2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \right\} e^{-\alpha_m y} \\ &\quad + C_m e^{\alpha_m y} + D_m e^{-\alpha_m y} \quad (m) \end{aligned}$$

¹ E_m' y F_m' son derivadas con relación a y de E_m y F_m .

² La integral $E_i(u)$ es la llamada *integral exponencial* y es una función tabulada; véase, por ejemplo, Jahneke-Emde, *Tables of Functions*, 4.^a ed., págs. 1 y 6, Dover Publications, 1945, o bien *Tables of Sine, Cosine and Exponential Integrals*, National Bureau of Standards, Nueva York, 1940.

Las cuatro constantes de integración A'_m, B'_m, C'_m, D'_m se obtienen por las condiciones de contorno a lo largo de los bordes $y = 0$ e $y = b$. En el caso de bordes simplemente apoyados, estas condiciones son

$$(w)_{y=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0$$

$$(w)_{y=b} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b} = 0$$

La figura 83 indica los resultados numéricos para una placa cuadrada simplemente apoyada tomando solamente los dos primeros términos de la serie (g)¹. Las flechas y los momentos M_x y M_y a lo largo de $x = a/2$ para una placa de espesor variable, están indicados por las líneas continuas, las de trazos indican los mismos valores calculados para una placa de rigidez a flexión constante $D = 1/2(D_0 + D_1b)$. En el cálculo se ha supuesto que $D_1b = 7D_0$ y $\nu = 0,16$.

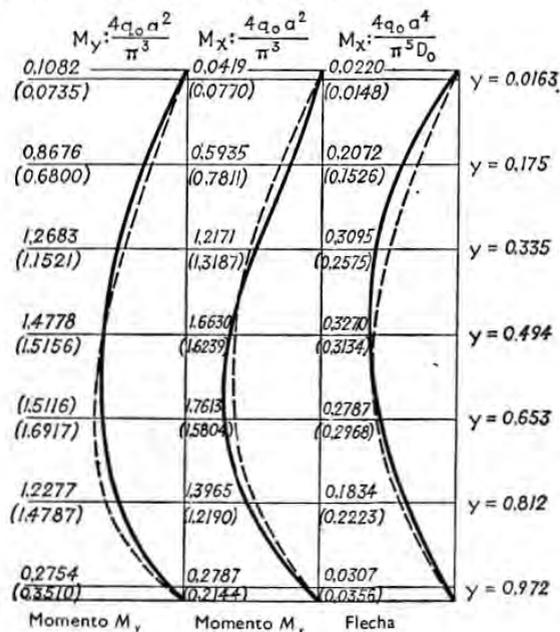


FIG. 83

Finalmente, consideremos el caso en el que el espesor de la placa es una función lineal sólo de y y la intensidad de la carga es una función cualquiera de y (fig. 82). Llamando h_0 al espesor de la placa a lo largo de $y = b/2$, la rigidez a la flexión correspondiente será

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)} \quad (n)$$

¹ Estos resultados han sido tomados de R. Gran Olsson, *op. cit.*

en todo punto de la placa será

$$D = D_0 \frac{h^3}{h_0^3} \quad y \quad h = \left[1 + \lambda \left(\frac{2y}{b} - 1\right)\right] h_0 \quad (o)$$

donde λ es una constante cualquiera. De aquí se deduce $h = (1 - \lambda)h_0$ para $y = 0$ y $h = (1 + \lambda)h_0$ para $y = b$.

El método¹ siguiente consistente en introducir λ como parámetro, es el más eficaz para resolver este problema. Considerando la flecha w como función de las variables x, y y λ puede ponerse $w(x, y, \lambda)$ en forma de serie potencial

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \lambda^m \quad (p)$$

donde m es un número entero y los coeficientes w_m son funciones de x e y .

Sustituyendo (o) y (p) en (171) y anulando los coeficientes de las potencias sucesivas de λ , se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales

$$\Delta \Delta w_0 = \frac{q}{D_0}$$

$$\Delta \Delta w_1 = -3 \left[\frac{4}{b} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1\right) \Delta \Delta w_0 \right]$$

$$\Delta \Delta w_2 = -3 \left[\frac{4}{b} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_1 + \left(\frac{2y}{b} - 1\right) \Delta \Delta w_1 \right]$$

$$-3 \left\{ \frac{8}{b^2} \left[\Delta w_0 - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] + \frac{8}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1\right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)^2 \Delta \Delta w_0 \right\}$$

.....

Se suponen los bordes $x = 0$ y $x = a$ simplemente apoyados, y reduciremos el problema al caso de una carga hidrostática

$$q = \frac{q_0 y}{b} \quad (r)$$

Utilizando el método de M. Lévy, se expresa la solución de las ecuaciones (q) en la forma

$$w_0 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{0n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad (s)$$

$$w_1 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{1n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \dots \quad (t)$$

$$w_m = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad (u)$$

¹ Véase H. Favre y B. Gilg, *Z. angew. Math. u. Phys.*, vol. 3, pág. 354, 1952.

siendo los coeficientes Y_{mn} ($m = 0, 1, 2, \dots$) funciones de y . Se puede, finalmente, representar la carga (r) de una forma análoga, haciendo

$$q = \frac{4q_0y}{\pi b} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \quad (v)$$

La sustitución de las expresiones (s) y (v) en la primera de las ecuaciones (q) nos permite determinar las funciones Y_{mn} , siendo las condiciones de contorno $Y_{0n} = 0$, $Y'_{0n} = 0$ para $y = 0$ e $y = b$, si los bordes están simplemente apoyados. La sustitución de las expresiones (s) y (t) en la segunda de las ecuaciones (q) da la función Y_{1n} . De forma análoga se encuentra cualquier función w_m sustituyendo w_0, w_1, \dots, w_{m-1} en la ecuación del sistema (q) que contiene w_m en el primer miembro. El procedimiento es el mismo si los bordes $y = 0, b$ están empotrados o libres en lugar de simplemente apoyados.

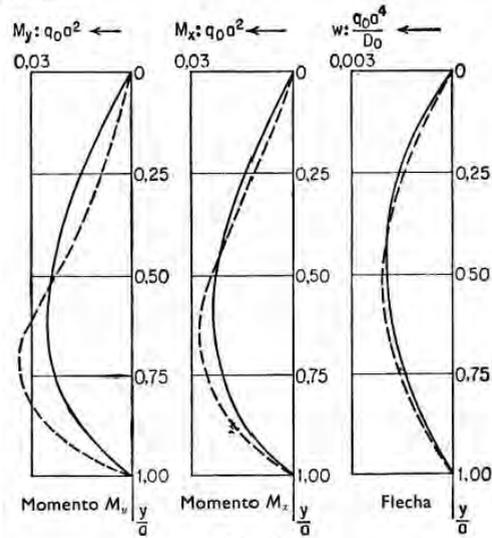


FIG. 84

La figura 84 presenta los resultados numéricos obtenidos por H. Favre y B. Gilg¹ para las flechas y los momentos flexores a lo largo del eje $x = a/2$ de una placa simplemente apoyada con $\lambda = 0,2$ y $r = 0,25$ y sometida a una presión hidrostática (r). Las líneas continuas de la figura corresponden a los resultados obtenidos tomando tres términos de la serie (p), mientras que las curvas de trazos resultan de las primeras aproximaciones.

¹ *Ibid.*

Placas rectangulares con diversas condiciones de borde

41. Flexión de placas rectangulares por momentos repartidos a lo largo de sus bordes

Consideremos una placa rectangular apoyada a lo largo de sus bordes y flexada por momentos repartidos a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ (fig. 85). Las flechas w deben satisfacer la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (a)$$

y a las siguientes condiciones de borde

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } x = a \quad (b)$$

$$w = 0 \quad \text{para } y = \pm \frac{b}{2} \quad (c)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b/2} = f_1(x) \quad -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=-b/2} = f_2(x) \quad (d)$$

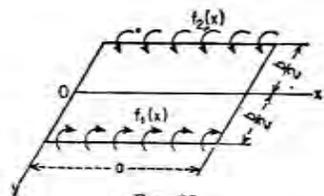


FIG. 85

donde f_1 y f_2 representan las distribuciones de momentos flectores a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$.

Ponemos la solución de (a) en forma de la serie:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

donde cada término satisface las condiciones de contorno (b). Las funciones Y_m como anteriormente, son de la forma

$$Y_m = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \quad (f)$$

que satisfacen a (a).

Para simplificar el estudio comencemos por dos casos particulares:

1. El caso simétrico en el que $(M_y)_{y=b/2} = (M_y)_{y=-b/2}$.

2. El caso antisimétrico en el que $(M_y)_{y=b/2} = -(M_y)_{y=-b/2}$.

El caso general puede obtenerse por combinación de estos dos casos particulares. En el caso simétrico, Y_m es una función par de y y es necesario poner $A_m = D_m = 0$ en (f). Obtendremos entonces, a partir de (e)

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

Para satisfacer las condiciones de contorno (c), ponemos

$$B_m \operatorname{ch} \alpha_m + C_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0$$

donde, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Por consiguiente

$$B_m = -C_m \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m$$

y la flecha en el caso simétrico es

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (h)$$

Se utilizan las condiciones de contorno (d) para determinar las constantes C_m . Representando la distribución de los momentos flectores a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$, por una serie trigonométrica, tenemos en el caso de simetría

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

donde los coeficientes E_m se calculan de la forma habitual para cada caso particular. Por ejemplo, en el caso de una distribución uniforme de los momentos flectores tenemos (v. pág. 173)

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{4M_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (j)$$

Sustituyendo (h) e (i) en (d), se obtiene

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} C_m \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

de donde

$$C_m = -\frac{a^2 E_m}{2Dm^2 \pi^2 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

y

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (173)$$

En el caso particular de momentos M_0 uniformemente repartidos, se obtiene utilizando (j)

$$w = \frac{2M_0 a^2}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

La flecha a lo largo del eje de simetría ($y=0$) es

$$(w)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (k)$$

Cuando a es muy grande en comparación con b , se pone $\operatorname{th} \alpha_m \approx \alpha_m$ y $\operatorname{ch} \alpha_m \approx 1$. Se obtiene entonces, utilizando (j),

$$(w)_{y=0} = \frac{M_0 b^2}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{8} \frac{M_0 b^2}{D}$$

Esta es la flecha en el centro de una franja de anchura b , flexada por dos momentos iguales y opuestos aplicados en sus extremos.

Cuando a es pequeño en comparación con b , $\operatorname{ch} \alpha_m$ es grande y la flecha de la placa a lo largo del eje x es muy pequeña.

Para cualquier relación dada entre las longitudes de los lados de un rectángulo, la flecha en el centro de la placa, según la expresión (k), es

$$(w)_{x=0,2-a/2} = \frac{M_0 ab}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{1}{m^2} \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m}$$

Conociendo la expresión (173) de las flechas, se puede obtener la pendiente de la deformada en el contorno por derivación y se calculan los momentos flectores mediante la derivada segunda de w .

La tabla 28 da algunos valores de las flechas y de los momentos flectores calculados de este modo. Se ve, por ejemplo, que la flecha de una franja de anchura a es poco más o menos 3,5 veces la de una placa cuadrada de lado a . Mientras que la sección transversal en el centro de una franja

TABLA 28

Flechas y momentos flectores en el centro de placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a momentos uniformemente repartidos en los bordes $y = \pm b/2$ (fig. 85)

b/a	w	M_x	M_y
0,00	$0,1250 M_0 b^2 / D$	$0,300 M_0$	$1,000 M_0$
0,50	$0,0964 M_0 b^2 / D$	$0,387 M_0$	$0,770 M_0$
0,75	$0,0620 M_0 b^2 / D$	$0,424 M_0$	$0,476 M_0$
1,00	$0,0368 M_0 a^2 / D$	$0,394 M_0$	$0,256 M_0$
1,50	$0,0280 M_0 a^2 / D$	$0,264 M_0$	$0,046 M_0$
2,00	$0,0174 M_0 a^2 / D$	$0,153 M_0$	$-0,010 M_0$

transmite íntegramente el momento M_0 aplicado a los extremos, el momento flector M_y en el centro de la placa decrece rápidamente con respecto a M_0 , cuando la relación b/a aumenta. Esto es debido a un efecto de amortiguamiento de los bordes $x=0$ y $x=a$ no sometidos a los momentos

Consideremos el caso de antisimetría en que

$$f_1(x) = -f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

En este caso, la deformada es una función impar de y , y se debe poner $B_m = C_m = 0$ en (f). Por consiguiente,

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

De las condiciones en los límites (c), se sigue que

$$A_m \operatorname{sh} \alpha_m + D_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m = 0$$

de donde
$$D_m = -\frac{1}{a_m} \operatorname{th} a_m A_m$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{a_m} \operatorname{th} a_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Las constantes A_m se calculan mediante las condiciones (d) de donde resulta que

$$\frac{2\pi^2 D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{m^2}{a_m} \operatorname{sh} a_m \operatorname{th} a_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Por consiguiente
$$A_m = \frac{a^2}{2\pi^2 D} E_m \frac{a_m}{m^2 \operatorname{sh} a_m \operatorname{th} a_m}$$

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{m^2 \operatorname{sh} a_m} \left(a_m \operatorname{cth} a_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (174)$$

Podemos obtener la deformada para el caso general, representado por las condiciones en los límites (d), a partir de (173) y (174) de los casos simétricos y antisimétricos. Con este objeto, dividimos las distribuciones de los momentos dados, en una distribución de momentos simétrica M'_y y en una distribución antisimétrica M''_y , como sigue

$$\begin{aligned} (M'_y)_{y=b/2} &= (M'_y)_{y=-b/2} = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x)] \\ (M''_y)_{y=b/2} &= -(M''_y)_{y=-b/2} = \frac{1}{2}[f_1(x) - f_2(x)] \end{aligned}$$

Estos momentos pueden estar representados por dos series trigonométricas

$$(M'_y)_{y=b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E'_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (l)$$

$$(M''_y)_{y=b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E''_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

y la flecha total se obtiene utilizando (173), (174) y superponiendo las flechas debidas a cada una de las dos distribuciones de momentos (l). Por consiguiente,

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{E'_m}{\operatorname{ch} a_m} \left(a_m \operatorname{th} a_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \frac{E''_m}{\operatorname{sh} a_m} \left(a_m \operatorname{cth} a_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \quad (175)$$

Si los momentos flectores $M_y = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} (m\pi x/l)$ no están repartidos más que sobre el lado $y = b/2$, tenemos $f_2(x) = 0$, $E_m = E'_m = 1/2 E_m$ y la flecha, en este caso, deberá ser

$$w = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} a_m} \left(a_m \operatorname{th} a_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} a_m} \left(a_m \operatorname{cth} a_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \quad (176)$$

Las ecuaciones (173) a (176) de este apartado se aplicarán al estudio de placas que cumplen diversas condiciones de borde.

Los momentos M_0 repartidos a lo largo de un solo lado, $y = b/2$, producen en el centro de la placa, la mitad de las flechas y de los momentos flectores de la tabla 28. En el caso de acción simultánea de momentos, a lo largo de todo el contorno de la placa, las flechas y los momentos se calculan por superposición adecuada de los resultados obtenidos más arriba para una carga parcial¹.

42. Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos empotrados

Supongamos que los bordes $x = 0$ y $x = a$ de una placa rectangular (fig. 86) están simplemente apoyados y que los otros dos están empotrados. Se puede obtener la flecha de la placa sometida a una carga transversal cualquiera, resolviendo el problema como si los cuatro bordes estuvieran

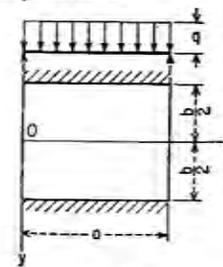


Fig. 86

simplemente apoyados y, aplicando después los momentos flectores a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ cuyo valor sea tal que eliminen el giro de

¹ La flexión debida a momentos aplicados en los bordes ha sido estudiada también por H. Bay, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, pág. 4, 1937, y por U. Wegner, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 36, página 340, 1956.

estos, producido por la acción de la carga transversal. De esta forma se pueden resolver varios problemas, asociando las soluciones del capítulo 5 a la solución del apartado precedente

Placas uniformemente cargadas¹

Supongamos que los bordes de la placa están simplemente apoyados, la flecha es [v. ec. (139) pág. 137]

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{a_m \operatorname{th} a_m + 2}{2 \operatorname{ch} a_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \operatorname{ch} a_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (a)$$

y la pendiente de la deformada a lo largo del borde $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} [a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)] \quad (b)$$

Para eliminar esta pendiente y así satisfacer las condiciones en los bordes se reparten, a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ los momentos M_y dados por la serie

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

y se determinan los coeficientes E_m de manera que la pendiente, debida a estos momentos, sea igual y opuesta a la de la ecuación (b). Utilizando² (173) para la flecha producida por los momentos, se encuentra que la pendiente correspondiente a lo largo del borde $y = b/2$ es

$$\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m} E_m [\operatorname{th} a_m (a_m \operatorname{th} a_m - 1) - a_m] \quad (d)$$

Igualando este valor cambiado de signo a la expresión (b), se encuentra que

$$E_m = \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)}{a_m - \operatorname{th} a_m (a_m \operatorname{th} a_m - 1)} \quad (e)$$

¹ En un estudio de F. Czerny se encuentran numerosos datos numéricos relativos a placas rectangulares sometidas a una carga uniforme y en las que los bordes están simplemente apoyados o empotrados o bien combinados de varias formas; véase *Bautech.-Arch.*, vol. 11, pág. 33, Berlin, 1955.

² Se deduce por razón de simetría de la deformada debida a una carga uniforme, que sólo deben tomarse para m en (173) los números impares 1, 3, 5, ...

Por consiguiente, los momentos flectores a lo largo e los bordes empotrados son

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)}{a_m - \operatorname{th} a_m (a_m \operatorname{th} a_m - 1)} \quad (f)$$

El valor máximo de este momento se sitúa en el centro de los lados, en los que $x = a/2$. La serie (f) converge rápidamente y el momento máximo se calcula así en cada caso particular. Por ejemplo, los tres primeros términos de la serie (f) dan $-0,070qa^2$ como momento máximo en una placa

TABLA 29

Constantes $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma$ para placa rectangular con dos bordes simplemente apoyados y dos bordes empotrados (fig. 86)

$\nu = 0,3$

$b < a$

b/a	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $w_{\max} = \alpha \frac{qb^4}{D}$ α	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 qb^2$ β_1	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 qb^2$ β_2	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \gamma qb^2$ γ
∞	0,00260	0,0125	0,0417	-0,0833
2,0	0,00260	0,0142	0,0420	-0,0842
1,5	0,00247	0,0179	0,0406	-0,0822
1,4	0,00240	0,0192	0,0399	-0,0810
1,3	0,00234	0,0203	0,0388	-0,0794
1,2	0,00223	0,0215	0,0375	-0,0771
1,1	0,00209	0,0230	0,0355	-0,0739

$b > a$

$\frac{b}{a}$	$w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$ α	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 qa^2$ β_1	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 qa^2$ β_2	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_x = \gamma qa^2$ γ
1,0	0,00192	0,0244	0,0332	-0,0697
1,1	0,00251	0,0307	0,0371	-0,0787
1,2	0,00319	0,0376	0,0400	-0,0868
1,3	0,00388	0,0446	0,0426	-0,0938
1,4	0,00460	0,0514	0,0448	-0,0998
1,5	0,00531	0,0585	0,0460	-0,1049
1,6	0,00603	0,0650	0,0469	-0,1090
1,7	0,00668	0,0712	0,0475	-0,1122
1,8	0,00732	0,0768	0,0477	-0,1152
1,9	0,00790	0,0821	0,0476	-0,1174
2,0	0,00844	0,0869	0,0474	-0,1191
3,0	0,01168	0,1144	0,0419	-0,1246
∞	0,01302	0,1250	0,0375	-0,1250

cuadrada. En el caso general, este momento puede representarse por la fórmula γqa^2 , donde γ es un factor numérico cuyo valor depende de la relación a/b de los lados de la placa. La tabla 29 da varios valores de este coeficiente.

Sustituyendo los valores (e) de los coeficientes E_m en (173), se obtiene la deformada debida a los momentos M_y repartidos a lo largo de los bordes.

$$w_1 = -\frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^5 \operatorname{ch} a_m} \left(\frac{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} a_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (\alpha_m \operatorname{th} a_m - 1)} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} a_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right) \quad (g)$$

Se obtiene la flecha en el centro sustituyendo x por $a/2$ e $y = 0$ en (g). Entonces

$$(w_1)_{\max} = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \frac{\alpha_m \operatorname{th} a_m}{\operatorname{ch} a_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} a_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (\alpha_m \operatorname{th} a_m - 1)}$$

que es rápidamente convergente y la flecha se obtiene con una gran exactitud no considerando más que algunos términos de esta serie. En el caso de una placa cuadrada, por ejemplo, el primer término da, él solo, la flecha con tres cifras exactas, y se tiene

$$w_1 = 0,00214 \frac{qa^4}{D}$$

Restando esta flecha de la flecha en el centro, producida por la carga uniforme (tabla 8, pág. 141), obtenemos finalmente para la flecha de una placa cuadrada uniformemente cargada con dos de sus lados simplemente apoyados y los otros dos empotrados, el valor

$$w = 0,00192 \frac{qa^4}{D}$$

Se puede representar generalmente, la flecha en el centro, por la fórmula

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$$

La tabla 29 da varios valores numéricos de α .

Sustituyendo la expresión (g) de las flechas en las fórmulas conocidas (101), de los momentos flectores se obtiene

$$M_x = -\frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} a_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} a_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (\alpha_m \operatorname{th} a_m - 1)} \left\{ (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - [2\nu + (1-\nu)\alpha_m \operatorname{th} a_m] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right\} \quad (h)$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} a_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} a_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (\alpha_m \operatorname{th} a_m - 1)} \left\{ (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + [2 - (1-\nu)\alpha_m \operatorname{th} a_m] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right\} \quad (i)$$

En el centro de la placa, estos momentos toman los valores

$$M_x = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \operatorname{ch} a_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} a_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (\alpha_m \operatorname{th} a_m - 1)} [2\nu + (1-\nu)\alpha_m \operatorname{th} a_m]$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \operatorname{ch} a_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} a_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} a_m (\alpha_m \operatorname{th} a_m - 1)} [2 - (1-\nu)\alpha_m \operatorname{th} a_m]$$

Estas series convergen tan rápidamente que se tiene un valor suficientemente exacto de los momentos, tomando sólo los dos primeros términos de las series. Superponiendo estos momentos a los de una placa simplemente apoyada (tabla 8), se obtienen entonces los valores finales de los momentos en el centro de la placa, que pueden ponerse en la forma

$$M_x = \beta_1 qa^2 \quad M_y = \beta_2 qa^2 \quad (j)$$

donde β_1 y β_2 son factores numéricos que dependen de la relación b/a . Varios valores de estos coeficientes están dados en la tabla 29.

Para el caso de una placa cuadrada, hallamos que los momentos en el centro, son

$$M_x = 0,0244qa^2 \quad \text{y} \quad M_y = 0,0332qa^2$$

Estos son más pequeños que los momentos $M_x = M_y = 0,0479qa^2$ en el centro de una placa cuadrada simplemente apoyada. Pero, como se ha visto, los momentos M_y , en el centro de los bordes empotrados, son mayores que $0,0479qa^2$. Por consiguiente a causa de la tensión de los dos bordes, el valor de la tensión máxima en la placa aumenta cuando los lados empotrados de una placa rectangular son los mayores ($b < a$), los momentos flectores en el centro de estos lados y las flechas en el centro de la placa tienden a los valores correspondientes de una franja de bordes empotrados cuando b/a disminuye.

Placas sometidas a una presión hidrostática (fig. 87)

La deformada de una placa rectangular, simplemente apoyada sometida a la acción de una presión hidrostática [v. fig. 66 a), pág. 145], es

$$w = \frac{q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \left(2 - \frac{2 + a_m \operatorname{th} a_m}{\operatorname{ch} a_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{\operatorname{ch} a_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (k)$$

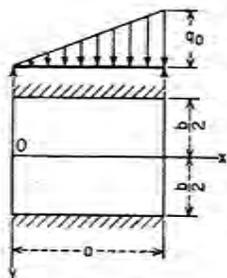


FIG. 87

La pendiente de la deformada en el borde $y = b/2$, es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} [a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (l)$$

Esta pendiente se elimina repartiendo a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ los momentos M_y dados por la serie (c), determinando los coeficientes E_m

de esta serie, de tal forma que la pendiente, debida a los momentos, sea igual y opuesta a la de la expresión (e). Obtenemos entonces

$$E_m = \frac{2q_0 a^2 (-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \frac{a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)}{a_m - \operatorname{th} a_m (a_m \operatorname{th} a_m - 1)}$$

Sustituyendo estos valores en (c), la expresión de los momentos flectores a lo largo de los bordes empotrados es

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{2q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)}{a_m - \operatorname{th} a_m (a_m \operatorname{th} a_m - 1)} \quad (m)$$

Los términos de la serie (m) cuando m es par, se anulan en el centro de los bordes empotrados donde $x = a/2$, y el valor de la serie es igual a la mitad del correspondiente a una placa uniformemente cargada [v. ec. (f)].

TABLA 30

Momentos flectores en placas rectangulares con dos bordes simplemente apoyados y dos bordes empotrados (fig. 87)
 $v = 0,3$

b/a	$x = a/2, y = 0$		$x = 3a/4, y = 0$		$x = a/2, y = b/2$		$x = 3a/4, y = b/2$	
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_y	M_y	M_y	M_y
0,50	0,007 $q_0 b^2$	0,021 $q_0 b^2$	0,018 $q_0 b^2$	0,029 $q_0 b^2$	-0,042 $q_0 b^2$	-0,062 $q_0 b^2$	-0,045 $q_0 b^2$	-0,045 $q_0 b^2$
0,75	0,011 $q_0 b^2$	0,020 $q_0 b^2$	0,018 $q_0 b^2$	0,021 $q_0 b^2$	-0,040 $q_0 b^2$	-0,045 $q_0 b^2$	-0,045 $q_0 b^2$	-0,045 $q_0 b^2$
1,00	0,013 $q_0 a^2$	0,017 $q_0 a^2$	0,017 $q_0 a^2$	0,015 $q_0 a^2$	-0,035 $q_0 a^2$	-0,035 $q_0 a^2$	-0,035 $q_0 a^2$	-0,035 $q_0 a^2$
1,25	0,021 $q_0 a^2$	0,021 $q_0 a^2$	0,024 $q_0 a^2$	0,019 $q_0 a^2$	-0,045 $q_0 a^2$	-0,043 $q_0 a^2$	-0,043 $q_0 a^2$	-0,043 $q_0 a^2$
1,50	0,030 $q_0 a^2$	0,023 $q_0 a^2$	0,031 $q_0 a^2$	0,020 $q_0 a^2$	-0,051 $q_0 a^2$	-0,048 $q_0 a^2$	-0,048 $q_0 a^2$	-0,048 $q_0 a^2$
2,00	0,043 $q_0 a^2$	0,024 $q_0 a^2$	0,042 $q_0 a^2$	0,020 $q_0 a^2$	-0,060 $q_0 a^2$	-0,053 $q_0 a^2$	-0,053 $q_0 a^2$	-0,053 $q_0 a^2$
∞	0,063 $q_0 a^2$	0,019 $q_0 a^2$	0,055 $q_0 a^2$	0,017 $q_0 a^2$	-0,063 $q_0 a^2$	-0,055 $q_0 a^2$	-0,055 $q_0 a^2$	-0,055 $q_0 a^2$

La serie converge rápidamente y puede calcularse fácilmente el valor de los momentos flectores en todo punto del borde. La tabla 30 da varios valores de este momento así como los momentos flectores a lo largo de la línea media de la placa $y = 0$.

Placa cargada con una fuerza concentrada¹

En este caso, la flecha de la placa se calcula de nuevo superponiendo a la flecha de una placa simplemente apoyada (ap. 4) la flecha producida por los momentos repartidos a lo largo de los bordes empotrados. En el caso de

¹ Véase S. Timoshenko, *Bauingenieur*, pág. 51, 1922.

una placa cargada en el centro, en la que se suponen los bordes $y = \pm b/2$ empotrados, se obtiene la expresión de la flecha en el centro:

$$w_{\max} = \frac{Pb^2}{2\pi^2 D} \left[\frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\text{th } \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right) - \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\text{th}^2 \alpha_m}{\text{sh } \alpha_m \text{ ch } \alpha_m + \alpha_m} \right] \quad (n)$$

La primera suma entre corchetes corresponde a la flecha de una placa simplemente apoyada [v. ec. (147) pág. 164] y la segunda representa la flecha debida a la acción de los momentos a lo largo de bordes empotrados. Para las relaciones $b/a = 2, 1, 1/2$ y $1/3$, los valores correspondientes de la expresión entre corchetes, de la ecuación (n), son 0,238; 0,436; 0,448 y 0,449.

Para obtener la tensión máxima, bajo la carga, se deben superponer a las tensiones de una placa simplemente apoyada, las tensiones debidas a los momentos siguientes

$$m_x = -P \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{b}{4a} \frac{\text{th } \alpha_m}{\text{sh } \alpha_m \text{ ch } \alpha_m + \alpha_m} [2\nu + (1-\nu)\alpha_m \text{ th } \alpha_m] \quad (o)$$

$$m_y = -P \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{b}{4a} \frac{\text{th } \alpha_m}{\text{sh } \alpha_m \text{ ch } \alpha_m + \alpha_m} [2 - (1-\nu)\alpha_m \text{ th } \alpha_m]$$

Sea, para los momentos adicionales

$$m_x = \beta_1 P \quad m_y = \beta_2 P \quad (p)$$

la tabla 31 da los valores de los factores numéricos β_1 y β_2 para diferentes valores de b/a . Cuando la carga central P está repartida sobre un pequeño

TABLA 31

Corrección de momentos flectores en $x = a/2, y = 0$ debida a los momentos de empotramiento en los bordes $y = \pm b/2$ en el caso de carga central P (fig. 71)

$\nu = 0,3$

b/a	$m_x = \beta_1 P$		$m_y = \beta_2 P$	
	β_1	β_2	β_1	β_2
0,0	-0,0484	-0,0742	1,0	-0,0505
0,5	-0,0504	-0,0708	1,2	-0,0420
0,6	-0,0524	-0,0656	1,4	-0,0319
0,7	-0,0540	-0,0580	1,6	-0,0227
0,8	-0,0544	-0,0489	1,8	-0,0155
0,9	-0,0532	-0,0396	2,0	-0,0101

círculo o un rectángulo, es suficiente sumar los momentos (p) a los momentos flectores obtenidos, para una placa simplemente apoyada, mediante las expresiones logarítmicas (157) y (167). El momento M_y en el centro de los bordes empotrados, de una placa cuadrada es

$$M_y = -0,166P$$

Los cálculos demuestran que este momento varía poco cuando la longitud de los lados empotrados aumenta. Es igual a $-0,168P$ cuando $b/a = 0,5$ y baja a $-0,155P$ cuando $B/a = 1,2^1$.

Debe notarse que el momento de empotramiento con el valor máximo de $-P/\pi = -0,3183P$, es debido a una carga concentrada junto al borde empotrado de la placa y no a una carga central (v. ap. 51). En el caso de varias cargas móviles se utilizará la superficie de influencia para el momento de empotramiento a fin de obtener su valor máximo con seguridad (v. ap. 76).

43. Placas rectangulares con tres bordes simplemente apoyados y uno empotrado

Consideremos una placa rectangular empotrada a lo largo de un lado $y = b/2$ y simplemente apoyada sobre los otros tres (fig. 88). La flecha de la placa sometida a una carga transversal cualquiera se obtiene combinando la solución de una placa simplemente apoyada con la ecuación (176) en la que los momentos flectores están repartidos a lo largo de un lado de la placa.

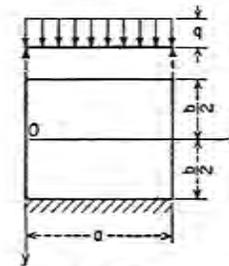


FIG. 88

Placas uniformemente cargadas

La pendiente en el borde $y = b/2$ debida a una carga uniformemente repartida, es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{2qa^2}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \text{sen } \frac{m\pi x}{a} [a_m - \text{th } \alpha_m (1 + a_m \text{ th } \alpha_m)] \quad (a)$$

¹ Respecto a detalles numéricos relativos a placas con bordes opuestos empotrados, véase A. Pucher, *Ingr.-Arch.*, vol. 14, pág. 246, 1943-1944.

Los momentos $M_y = \Sigma E_m \text{ sen } (m\pi x/a)$ repartidos sobre el lado $y = b/2$ producen la pendiente¹ [v. ec. (176)].

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{a}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{ sen } \frac{m\pi x}{a} E_m (\alpha_m \text{ th }^2 \alpha_m - \text{ th } \alpha_m + \alpha_m \text{ cth }^2 \alpha_m - \text{ cth } \alpha_m - 2\alpha_m) \quad (b)$$

Estas dos pendientes, a causa de la condición de empotramiento, son de igual valor y de signo contrario. Por consiguiente

$$E_m = -\frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \text{ th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{ th } \alpha_m)}{\alpha_m \text{ th }^2 \alpha_m - \text{ th } \alpha_m + \alpha_m \text{ cth }^2 \alpha_m - \text{ cth } \alpha_m - 2\alpha_m} \quad (c)$$

y la expresión de los momentos flectores en el lado $y = b/2$ es

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{8qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \text{ sen } \frac{m\pi x}{a} \frac{\alpha_m - \text{ th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{ th } \alpha_m)}{2\alpha_m - \text{ th } \alpha_m (\alpha_m \text{ th } \alpha_m - 1) - \text{ cth } \alpha_m (\alpha_m \text{ cth } \alpha_m - 1)} \quad (d)$$

Tomemos por ejemplo, una placa cuadrada; el valor del momento flector en el centro del borde empotrado vale según (d)

$$(M_y)_{y=b/2, x=a/2} = -0,084qa^2$$

Este momento es en valor absoluto mayor que el momento $-0,070 qa^2$ encontrado en el apartado anterior para una placa cuadrada que tiene dos bordes empotrados. La tabla 32 da varios valores del momento en el centro del lado empotrado, correspondiente a los diferentes valores de a/b .

Sustituyendo el valor (c) de la constante E_m en (176) se obtiene la deformada debida a los momentos de empotramiento, de donde se deduce que la flecha en el centro de la placa es

$$(w_1)_{x=a/2, y=0} = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \frac{E_m \alpha_m \text{ th } \alpha_m}{\text{ ch } \alpha_m} \quad (e)$$

Para una placa cuadrada, los dos primeros términos de la serie dan

$$(w_1)_{x=a/2, y=0} = 0,00127 \frac{qa^4}{D}$$

Restando esta flecha de la flecha de una placa cuadrada simplemente apoyada (tabla 8), se encuentra que la flecha en el centro de una placa cuadrada uniformemente cargada, que tiene un borde empotrado, es

$$(w)_{x=a/2, y=0} = 0,00279 \frac{qa^4}{D}$$

¹ En este caso simétrico sólo deben tomarse valores pares de m .

TABLA 32
Flechas y momentos flectores en placa rectangular con un borde empotrado y los otros tres simplemente apoyados (fig. 88)
 $\nu = 0,3$

b/a	$(w)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=0}$
∞	0,0130qa ⁴ /D	-0,125qa ²	0,125qa ²	0,037qa ²
2,0	0,0093qa ⁴ /D	-0,122qa ²	0,094qa ²	0,047qa ²
1,5	0,0064qa ⁴ /D	-0,112qa ²	0,069qa ²	0,048qa ²
1,4	0,0058qa ⁴ /D	-0,109qa ²	0,063qa ²	0,047qa ²
1,3	0,0050qa ⁴ /D	-0,104qa ²	0,056qa ²	0,045qa ²
1,2	0,0043qa ⁴ /D	-0,098qa ²	0,049qa ²	0,044qa ²
1,1	0,0035qa ⁴ /D	-0,092qa ²	0,041qa ²	0,042qa ²
1,0	0,0028qa ⁴ /D	-0,084qa ²	0,034qa ²	0,039qa ²
1/1,1	0,0032qb ⁴ /D	-0,092qb ²	0,033qb ²	0,043qb ²
1/1,2	0,0035qb ⁴ /D	-0,098qb ²	0,032qb ²	0,047qb ²
1/1,3	0,0038qb ⁴ /D	-0,103qb ²	0,031qb ²	0,050qb ²
1/1,4	0,0040qb ⁴ /D	-0,108qb ²	0,030qb ²	0,052qb ²
1/1,5	0,0042qb ⁴ /D	-0,111qb ²	0,028qb ²	0,054qb ²
0,5	0,0049qb ⁴ /D	-0,122qb ²	0,023qb ²	0,060qb ²
0,0	0,0052qb ⁴ /D	-0,125qb ²	0,019qb ²	0,062qb ²

La tabla 32 da los valores de la flecha y los momentos flectores para diversos valores de la relación a/b .

Placas sometidas a una presión hidrostática

Si la placa está sometida a una presión hidrostática, como en la figura 89, la pendiente en el borde $y = b/2$, en el caso de bordes simplemente apoyados, es (v. pág. 213)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{q_0 a^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} (\alpha_m - \text{ th } \alpha_m - \alpha_m \text{ th }^2 \alpha_m) \text{ sen } \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

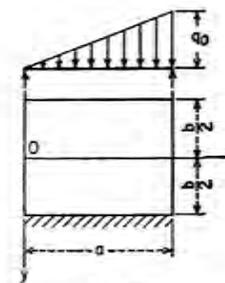


FIG. 89

La pendiente debida a los momentos flectores repartidos a lo largo del borde $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{a}{4\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} E_m (a_m \operatorname{th}^2 a_m - \operatorname{th} a_m + a_m \operatorname{cth}^2 a_m - \operatorname{cth} a_m - 2a_m) \quad (g)$$

Por la condición de empotramiento a lo largo de este borde, se encuentra, igualando (g) a (f) precedida del signo menos

$$E_m = - \frac{4qa^2 (-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \frac{a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)}{a_m \operatorname{th}^2 a_m - \operatorname{th} a_m + a_m \operatorname{cth}^2 a_m - \operatorname{cth} a_m - 2a_m}$$

Por consiguiente, la expresión del momento flector M_y sobre el borde $y = b/2$ es

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \frac{a_m - \operatorname{th} a_m (1 + a_m \operatorname{th} a_m)}{2a_m - \operatorname{th} a_m (a_m \operatorname{th} a_m - 1) - \operatorname{cth} a_m (a_m \operatorname{cth} a_m - 1)} \quad (h)$$

Esta serie converge rápidamente y se puede calcular con facilidad el valor del momento en todo punto del borde empotrado. Tomando, por ejemplo, una placa cuadrada y poniendo $x = a/2$, se obtiene, para el momento en el centro del borde empotrado, el valor

$$(M_y)_{y=b/2, x=a/2} = -0,042q_0a^2$$

igual a la mitad del valor del momento de una placa cuadrada uniformemente cargada (v. tabla 32). La tabla 33 da los valores del momento $(M_y)_{y=b/2}$ para varios puntos del borde empotrado y para diferentes valores de la relación b/a . Se ve que cuando b/a disminuye el valor de M_y a lo largo del borde empotrado tiende rápidamente hacia $-q_0b^2x/8a$, que es el momento en el extremo empotrado de una franja de longitud b sometida a una carga uniformemente repartida q_0x/a .

TABLA 33

Valores del momento M_y en el borde empotrado $y = b/2$ de placas rectangulares bajo carga hidrostática $q = q_0x/a$ (fig. 89)

b/a	$x = a/4$	$x = a/2$	$x = 3/4a$
∞	$-0,039q_0a^2$	$-0,062q_0a^2$	$-0,055q_0a^2$
2	$-0,038q_0a^2$	$-0,061q_0a^2$	$-0,053q_0a^2$
$\frac{3}{2}$	$-0,034q_0a^2$	$-0,056q_0a^2$	$-0,050q_0a^2$
1	$-0,025q_0a^2$	$-0,042q_0a^2$	$-0,040q_0a^2$
$\frac{2}{3}$	$-0,030q_0b^2$	$-0,056q_0b^2$	$-0,060q_0b^2$
$\frac{1}{2}$	$-0,031q_0b^2$	$-0,061q_0b^2$	$-0,073q_0b^2$
0	$-0,031q_0b^2$	$-0,062q_0b^2$	$-0,094q_0b^2$

Consideremos como anteriormente, una placa bajo carga hidrostática pero, esta vez con el borde $x = a$ empotrado (fig. 90).

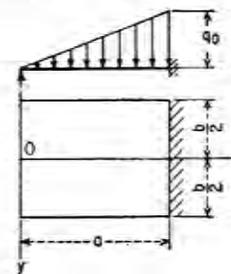


FIG. 90

Aplicando a este caso el método de M. Lévy, se escribe la deformada de la placa en la forma

$$w = \frac{q_0x}{384D} (16y^4 - 24b^2y^2 + 5b^4) + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} X_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (i)$$

donde

$$X_m = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + B_m \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} + D_m \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b}$$

La expresión (i) satisface la ecuación diferencial de la placa flexada y las condiciones en los bordes $y = \pm b/2$. Desarrollando en serie el polinomio entre paréntesis de (i)

$$\frac{1,536b^4}{\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{1}{m^5} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

se obtienen los coeficientes A_m, B_m, \dots a partir de las condiciones de los otros dos lados, es decir:

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0 \quad (w)_{x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0 \quad (j)$$

Sustituyendo en (i) los coeficientes por su valor, tenemos la solución completa. La tabla 34 da las flechas y los momentos flectores obtenidos mediante esta última ecuación.

TABLA 34

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares empotradas en $x = a$ bajo carga hidrostática (fig. 90)

$$\nu = 0,3$$

b/a	$(w)_{x=a/2, y=0}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=0}$	$(M_x)_{x=a, y=0}$
∞	$0,0024q_0a^4/D$	$0,029q_0a^2$	$0,009q_0a^2$	$-0,067q_0a^2$
2,0	$0,0023q_0a^4/D$	$0,029q_0a^2$	$0,011q_0a^2$	$-0,063q_0a^2$
1,5	$0,0019q_0a^4/D$	$0,026q_0a^2$	$0,013q_0a^2$	$-0,061q_0a^2$
1,0	$0,0013q_0a^4/D$	$0,019q_0a^2$	$0,016q_0a^2$	$-0,048q_0a^2$
$\frac{1}{2}$	$0,0030q_0b^4/D$	$0,028q_0b^2$	$0,034q_0b^2$	$-0,071q_0b^2$
0,5	$0,0045q_0b^4/D$	$0,024q_0b^2$	$0,046q_0b^2$	$-0,084q_0b^2$
0,0	$0,0065q_0b^4/D$	$0,019q_0b^2$	$0,062q_0b^2$	$-0,125q_0b^2$

44. Placas rectangulares empotradas en todo el contorno¹

Para estudiar este problema, se utilizará el mismo método utilizado para los casos precedentes. Comenzaremos por resolver el problema para una placa rectangular simplemente apoyada y superponemos a la flecha de esta placa, la flecha de la placa, debida a los momentos repartidos a lo largo de los bordes (v. ap. 41). Estos momentos son tales que cumplen la condición $\partial w/\partial n = 0$ en el contorno de la placa empotrada. El método puede aplicarse a toda clase de carga transversal.

Placas uniformemente cargadas

Para simplificar nuestro estudio, comenzaremos por el caso de una carga uniformemente repartida. Las flechas y los momentos en este caso

¹ Respecto a literatura matemática sobre este problema, véase *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, vol. 4, apart. 25 (Tedone-Timpe), págs. 165 y 186. Otras referencias sobre este punto pueden verse en el estudio de A. E. H. Love, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 29, página 189. Los primeros resultados numéricos para el cálculo de tensiones y flechas en placas rectangulares empotradas fueron expuestos por B. M. Koyalovich en su tesis doctoral, San Petersburgo, 1902. I. G. Boobnov, realizó nuevos progresos, calculando tablas para el cálculo de flechas y momentos en placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes empotrados: véanse sus obras *Theory of Structures of Ships*, vol. 2, pág. 465, San Petersburgo, 1914, y *Collected Papers on Theory of Plates*, pág. 144, Moscú, 1953. H. Hencky trató el mismo problema en su estudio "Der Spannungszustand in rechteckigen Platten", München, 1913. I. A. Wojtaszak, *J. Appl. Mechanics*, vol. 4, pág. 173, 1937, utilizó el método de Hencky. Los resultados numéricos obtenidos de esta forma por Wojtaszak en el caso de una placa uniformemente cargada coinciden con los dados por la tabla de Boobnov. Otras soluciones del mismo problema para varios tipos de carga se deben a H. Leitz, *Z. Math. Phys.*, vol. 64, página 262, 1917; A. Nádaí, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 14, 1922; A. Weinstein y D. H. Rock, *Quart. Appl. Math.*, vol. 2, pág. 262, 1944; P. Funk y E. Berger, *Federhofer-Girkmann-Festschrift*, pág. 199, Viena, 1950; G. A. Grinberg, *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 76, pág. 661, 1951; K. Girkmann y E. Tungl, *Osterr. Bauzeitung*, vol. 8, pág. 47, 1953; B. C. Laws, realizó un estudio experimental del problema, vease *Phil. Mag.*, vol. 24, pág. 1072, 1937. En el estudio que sigue utilizaremos el método desarrollado por S. Timoshenko, *Proc. Fifth Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 1938; el método es más general que la mayoría de los métodos mencionados antes y puede aplicarse a cualquier tipo de carga, incluso cargas concentradas.

son simétricos con respecto a los ejes de coordenadas indicados en la figura 91. La flecha, para una placa simplemente apoyada, según la ecuación (139) (v. pág. 137) con relación a las nuevas coordenadas es

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{a_m \operatorname{th} a_m + 2}{2 \operatorname{ch} a_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \operatorname{ch} a_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (a)$$

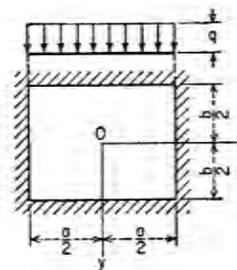


FIG. 91

donde $a_m = m\pi b/2a$. El giro del borde $y = b/2$ es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} &= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad [a_m - \operatorname{th} a_m(1 + a_m \operatorname{th} a_m)] \\ &= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{a_m}{\operatorname{ch}^2 a_m} - \operatorname{th} a_m \right) \quad (b) \end{aligned}$$

Consideremos ahora la flecha de la placa debida a los momentos repartidos en los bordes $y = \pm b/2$. Por razón de simetría, se llega a que los momentos pueden escribirse en la forma

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

La flecha correspondiente w , se obtiene mediante (173) sustituyendo x por $x + a/2$ y tomando $m = 1, 3, 5, \dots$ Entonces

$$w_1 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \operatorname{ch} a_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - a_m \operatorname{th} a_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (d)$$

El giro en el borde $y = b/2$, correspondiente a esta flecha, es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\operatorname{th} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \quad (e)$$

En lo que sigue, necesitaremos también el giro en los bordes paralelos al eje y . Derivando (d) con respecto a x y haciendo $x = a/2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} &= \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{1}{m \operatorname{ch} \alpha_m} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right. \\ &\quad \left. - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) = -\frac{1}{4D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \\ &\quad \left(b \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - 2y \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (f) \end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis es una función par de y , que se anula en los bordes $y = \pm b/2$. Esta función puede escribirse en forma de la serie

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} A_i \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (g)$$

en la que los coeficientes A_i se calculan utilizando la fórmula

$$A_i = \frac{2}{b} \int_{b/2}^{b/2} \left(b \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - 2y \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{i\pi y}{b} dy$$

de donde
$$A_i = \frac{16ia(-1)^{(i-1)/2} b^2}{m^2 \pi^2} \frac{1}{a^2 \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \operatorname{ch}^2 \alpha_m$$

Sustituyendo en (g) y (f) se obtiene

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{4b^2}{\pi^2 Da} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (h)$$

Se obtienen, de la misma manera, las expresiones de las flechas w_2 y de los giros en los bordes, para el caso en que los momentos M_x están repartidos a lo largo de $x = \pm a/2$, suponiendo una distribución simétrica y tomando

$$(M_x)_{x=\pm a/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} F_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (i)$$

se encuentra en este caso, utilizando (e) y (h)

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} F_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\operatorname{th} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} \right) \quad (j)$$

en donde $\beta_m = m\pi a/2b$ y

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{4a^2}{\pi^2 Db} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} \quad (k)$$

Cuando actúan los momentos (c) e (i) simultáneamente, se obtienen los giros de los bordes por el método de superposición. Tomando, por ejemplo, el borde $y = b/2$, se encuentra

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} &= -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \\ &\quad \left(\operatorname{th} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \\ &\quad - \frac{4a^2}{\pi^2 Db} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} \quad (l) \end{aligned}$$

Teniendo (h) y (l), se pueden obtener ya las ecuaciones para calcular las constantes E_m y F_m de las series (c) e (i) que representan los momentos que actúan a lo largo de los bordes de una placa empotrada. En el caso de una placa empotrada los bordes no giran. Por consiguiente, para los bordes $y = \pm b/2$, se obtiene

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0 \quad (m)$$

De igual forma para $x = \pm a/2$, se encuentra

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = 0 \quad (n)$$

Si se lleva (b) y (l) a la ecuación (m) y se agrupan¹ los términos que contienen $\cos(i\pi x/a)$, como factor común teniendo en cuenta que la ecuación (m) es válida cualquiera que sea x , se llega a que el coeficiente que multiplica a $\cos(i\pi x/a)$ es nulo para todo valor de i . Así, se obtiene un

¹ Se supone que el orden de suma en (l) es permutable.

sistema de ecuaciones lineales, infinito, para el cálculo de los coeficientes E_i y F_i

$$\frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^3} \left(\frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} - \text{th } \alpha_i \right) - \frac{E_i}{i} \left(\text{th } \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} \right) - \frac{8ia}{\pi b} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} = 0 \quad (o)$$

Con ayuda de (n) se obtiene un sistema semejante. Las constantes $E_1, E_3, \dots, F_1, F_3, \dots$, se determinan en cada caso particular por estos dos sistemas de ecuaciones utilizando el método de aproximaciones sucesivas.

Para ilustrar este método consideremos una placa cuadrada, en este caso la distribución de los momentos flectores es la misma en todos los lados del cuadrado. Por consiguiente $E_i = F_i$ y los dos sistemas de ecuaciones son idénticos. Las ecuaciones son de la forma

$$\frac{E_i}{i} \left(\text{th } \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} \right) + \frac{8i}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^3} \left(\frac{\alpha_i}{\text{ch}^2 \alpha_i} - \text{th } \alpha_i \right)$$

Sustituyendo los coeficientes por los valores numéricos en estas ecuaciones y considerando sólo los cuatro primeros coeficientes, se obtiene el sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas E_1, E_3, E_5 y E_7 .

$$\begin{aligned} 1,8033E_1 + 0,0764E_3 + 0,0188E_5 + 0,0071E_7 &= 0,6677K \\ 0,0764E_1 + 0,4045E_3 + 0,0330E_5 + 0,0159E_7 &= 0,01232K \\ 0,0188E_1 + 0,0330E_3 + 0,2255E_5 + 0,0163E_7 &= 0,00160K \\ 0,0071E_1 + 0,0159E_3 + 0,0163E_5 + 0,1558E_7 &= 0,00042K \end{aligned} \quad (p)$$

donde $K = -4qa^2/\pi^3$. Se observa que los términos de la diagonal tienen los coeficientes mayores. Por consiguiente, se obtienen las primeras aproximaciones de las constantes E_1, \dots, E_7 no teniendo en cuenta, en los primeros miembros de las ecuaciones (p), más que los términos situados a la izquierda de la línea señalada. De este modo se encuentra en la primera ecuación $E_1 = 0,3700K$. Sustituyendo en la segunda, tendremos $E_3 = -0,0395K$. Sustituyendo los valores de E_1 y E_3 en la tercera ecuación, se encuentra $E_5 = -0,0180K$. Por último la última ecuación, nos da $E_7 = -0,0083K$. Sustituyendo estas primeras aproximaciones de los coeficientes, en los términos situados a la derecha de la línea señalada, se calculan así las segundas aproximaciones que son $E_1 = 0,3722K, E_3 = -0,0380K, E_5 = -0,0178K, E_7 = 0,0085K$. Repitiendo de nuevo los cálculos, se obtendrá una tercera aproximación y así sucesivamente.

Sustituyendo en (c) E_1, E_3, \dots por su valor, se obtienen los momentos flectores a lo largo de los bordes empotrados de la placa. El máximo valor absoluto de estos momentos se sitúa en el centro de los lados del cuadrado. Con las cuatro ecuaciones (p), este valor es

$$|M_y|_{y=b/2, x=0} = |E_1 - E_3 + E_5 - E_7| = 0,0517qa^2$$

La comparación de este resultado con el de la tabla de Boobvov, calculado con un número mayor de ecuaciones semejantes a (p), muestra que el error en el momento flector máximo, es inferior a 1 %, cuando no se toman más que cuatro ecuaciones (p). Se obtiene, para el momento, una serie de signos alternados, y el valor del error depende del valor del último coeficiente E_1, E_3, \dots calculado.

Sustituyendo los valores de E_1, E_3, \dots en la expresión (d) se obtiene la flecha de la placa debida a los momentos repartidos a lo largo de los bordes $y = -b/2$.

En el centro de la placa ($x = y = 0$) esta flecha es

$$(w_1)_{x=y=0} = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m (-1)^{(m-1)/2} \frac{\alpha_m \text{th } \alpha_m}{m^2 \text{ch } \alpha_m} = -0,00140 \frac{qa^4}{D}$$

Multiplicando por dos, este resultado, para tener en cuenta la acción de los momentos repartidos sobre los lados $x = \pm a/2$ y sumándolo a la flecha de una placa simplemente apoyada (tabla 8), se obtiene la flecha en el centro de una placa cuadrada uniformemente cargada y de bordes empotrados

$$(w)_{\text{máx}} = (0,00406 - 0,00280) \frac{qa^4}{D} = 0,00126 \frac{qa^4}{D} \quad (q)$$

Tabla 35

Flechas y momentos flectores en placa rectangular uniformemente cargada con bordes empotrados (fig. 91)

$r = 0,3$

b/a	$(w)_{x=y=0}$	$(M_x)_{x=0, y=b/2}$	$(M_y)_{x=0, y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=0}$
1,0	0,00126 qa^4/D	-0,0513 qa^2	-0,0513 qa^2	0,0231 qa^2	0,0231 qa^2
1,1	0,00150 qa^4/D	-0,0581 qa^2	-0,0538 qa^2	0,0264 qa^2	0,0231 qa^2
1,2	0,00172 qa^4/D	-0,0639 qa^2	0,0554 qa^2	0,0299 qa^2	0,0228 qa^2
1,3	0,00191 qa^4/D	0,0687 qa^2	0,0563 qa^2	0,0327 qa^2	0,0222 qa^2
1,4	0,00207 qa^4/D	-0,0726 qa^2	-0,0568 qa^2	0,0349 qa^2	0,0212 qa^2
1,5	0,00220 qa^4/D	-0,0757 qa^2	-0,0570 qa^2	0,0368 qa^2	0,0203 qa^2
1,6	0,00230 qa^4/D	-0,0780 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0381 qa^2	0,0193 qa^2
1,7	0,00238 qa^4/D	-0,0799 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0392 qa^2	0,0182 qa^2
1,8	0,00245 qa^4/D	-0,0812 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0401 qa^2	0,0174 qa^2
1,9	0,00249 qa^4/D	-0,0822 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0407 qa^2	0,0165 qa^2
2,0	0,00254 qa^4/D	0,0829 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0412 qa^2	0,0158 qa^2
∞	0,00260 qa^4/D	-0,0833 qa^2	0,0571 qa^2	0,0417 qa^2	0,0125 qa^2

Se pueden efectuar cálculos semejantes para cualquier relación de los lados de una placa rectangular. Los resultados de estos cálculos están dados en la tabla 35¹.

Placas bajo presión hidrostática

Se representa la intensidad de la carga, repartida como indica la figura 92, por

$$q_0 = \frac{q_0}{2} + \frac{q_0 x}{2a}$$

se ve que la influencia del término $q_0/2$ sobre las flechas de la placa está ya dada por la solución anterior. Así, queda considerar la presión $q_0 x/2a$.

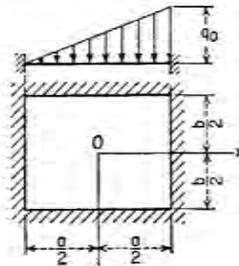


FIG. 92

La deformada de una placa simplemente apoyada que soporta una carga semejante se obtiene asimismo combinando la expresión (k) (pág. 213) con la expresión (a) (pág. 209). Poniendo $q = -q_0/2$ en esta última ecuación y sustituyendo x por $x + a/2$ en las dos expresiones, de acuerdo con las nuevas coordenadas, obtenemos la deformada.

$$w = \frac{2q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2+1}}{m^5} \left(2 - \frac{2 + a_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (r)$$

simétrica respecto al eje x y antisimétrica respecto a y . Por consiguiente, para eliminar la pendiente a lo largo del contorno de la placa se deben aplicar en los bordes los momentos siguientes:

$$(M_x)_{x=\pm a/2} = \pm \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (s)$$

$$(M_y)_{y=\pm b/a} = \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{m/2-1} F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

¹ Esta tabla fue calculada por T. H. Evans, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 6, pág. A-7, 1939.

Operando como en el caso de una carga uniformemente repartida, se calculan los coeficientes E_m y F_m por un sistema de ecuaciones lineales. Las flechas debidas a la acción simultánea de la carga $q_0 x/2a$ y de los momentos (s) deben finalmente sumarse a las flechas de la placa empotrada sometidas a una carga uniforme $q_0/2$. La tabla 36¹ da los resultados obtenidos por este método.

TABLA 36

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares con bordes empotrados, bajo carga hidrostática (fig. 92)

$$\nu = 0,3$$

$\frac{b}{a}$	$x=0, y=0$		$x=a/2, y=0$	$x=-a/2, y=0$	$x=0, y=\pm b/2$	
	$w = \alpha \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$	$M_y = \beta_2 q_0 a^2$	$M_x = \gamma_1 q_0 a^2$	$M_x = \gamma_2 q_0 a^2$	$M_y = \delta q_0 a^2$
	α	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ
0,5	0,000080	0,00198	0,00515	-0,0115	-0,0028	-0,0104
2,5	0,000217	0,00451	0,00817	-0,0187	-0,0066	-0,0168
1,0	0,00063	0,0115	0,0115	-0,0334	-0,0179	-0,0257
1,5	0,00110	0,0184	0,0102	-0,0462	-0,0295	-0,0285
∞	0,00130	0,0208	0,0063	-0,0500	-0,0333	

Placas cargadas en el centro

Consideremos como tercer ejemplo la flexión de una placa rectangular de bordes empotrados sometida a una carga P concentrada en el centro (fig. 93). Volvamos ahora al caso de una placa simplemente apoyada.

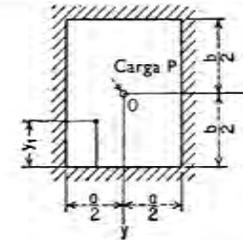


FIG. 93

Sustituyendo en la ecuación (116) ξ por $a/2$ y x por $x + a/2$, se obtiene la deformada (válida para $y \geq 0$)

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \cos \frac{m\pi x}{a} \left[\left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right]$$

¹ Véase Dana Young, *J. Appl. Mechanics*, vol. 7, pág. A-139, 1940. Tablas más extensas calculadas por diferencias finitas se deben a E. G. Odley, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 14, página A-289, 1947.

El ángulo de giro en el borde $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \frac{\operatorname{th} \frac{a_m}{2} \operatorname{th} \frac{a_m}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a_m}{2}} \quad (t)$$

Para calcular los momentos flectores a lo largo de los bordes empotrados se procede como en el caso de una carga uniforme y se obtiene el mismo sistema de ecuaciones (m) y (n). Las expresiones de w_1 y w_2 son las mismas que en el caso anterior, y será suficiente cambiar el primer término de estas ecuaciones sustituyendo $(\partial w / \partial y)_{y=b/2}$ de (m), por la expresión (t), y lo mismo para $(\partial w / \partial x)_{x=a/2}$ en la ecuación (n).

En el caso particular de una placa cuadrada, limitándonos a cuatro ecuaciones, encontramos que el primer miembro de las ecuaciones es el mismo que en las ecuaciones (p). Los segundos miembros se obtienen por la expresión (t) y se encuentra

$$\begin{aligned} 1,8033E_1 + 0,0764E_2 + 0,0188E_3 + 0,0071E_7 &= -0,1828P \\ 0,0764E_1 + 0,4045E_2 + 0,0330E_3 + 0,0159E_7 &= +0,00299P \\ 0,0188E_1 + 0,0330E_2 + 0,2255E_3 + 0,0163E_7 &= -0,000081P \\ 0,0071E_1 + 0,0159E_2 + 0,0163E_3 + 0,1558E_7 &= +0,000005P \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones por aproximaciones sucesivas como antes, se encuentra

$$\begin{aligned} E_1 &= -0,1025P & E_2 &= 0,0263P \\ E_3 &= 0,0042P & E_7 &= 0,0015P \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (c), se obtiene el momento flector para el centro del lado $y = b/2$. Un cálculo¹ más preciso da

$$(M_y)_{y=b/2, x=0} = -0,1257P$$

Comparando este resultado al de una placa cuadrada uniformemente cargada, se llega a que la carga uniforme produce en el centro de los lados momentos menores de la mitad que los momentos debidos a esta misma carga concentrada en el centro.

Conociendo los momentos a lo largo de los bordes empotrados, se calculan las flechas correspondientes mediante (d). Superponiendo estas flechas a las de una placa simplemente apoyada, se obtienen las flechas de la placa de bordes empotrados. Por el mismo método de superposición se encuentran otros datos relativos a la deformación de placas de bordes empotrados sometidos a una carga concentrada en el centro². Así, si la

¹ En este cálculo se utilizaron siete ecuaciones en lugar de las cuatro tomadas antes.

² Cálculos efectuados por Dana Young, *J. Appl. Mechanics*, vol. 6, pág. A-114, 1939. Para obtener los momentos con cuatro cifras exactas, es necesario utilizar siete coeficientes E y otros siete F en las ecuaciones (m) y (n). H. Marcus dio otras soluciones del problema, véase *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2ª ed., pág. 155, Berlin, 1932; igualmente J. Barta, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 17, pág. 184, 1937; G. Pickett, *J. Appl. Mechanics*, vol. 6, pág. A-168, 1939; C. J. Thorne y J. V. Atanasoff, *Iowa State Coll. J. Sci.*, vol. 14, pág. 333, 1940. R. G. Sturm y R. L. Moore han estudiado este caso experimentalmente, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 4, página A-75, 1937.

carga P está repartida uniformemente sobre el área de un pequeño círculo o de un rectángulo, los momentos flectores en el centro del área cargada $x = y = 0$, se obtienen por combinación de los resultados válidos para las placas simplemente apoyadas [v. ec. (157) y (167)] con momentos adicionales

$$m_x = \beta_1 P \quad m_y = \beta_2 P$$

dados en la tabla 37 con los valores relativos a la flecha máxima de la placa así como el momento de empotramiento máximo en valor absoluto. Este último puede como máximo alcanzar el valor $-P_{l, \tau} = -0,3183P$, mencionado en la página 216, en el caso de una carga móvil.

TABLA 37

Momentos flectores en los puntos medios de los lados mayores y flechas y momentos adicionales en el centro de placas rectangulares bajo carga concentrada en el centro (fig. 93)

$\nu = 0,3$

b/a	$(w)_{x=y=0} = a \frac{Pa^2}{D}$	$(M_x)_{x=0, y=b/2} = \gamma P$	Momentos adicionales	
			$(m_x)_{x=y=0} = \beta_1 P$	$(m_y)_{x=y=0} = \beta_2 P$
	α	γ	β_1	β_2
1,0	0,00560	-0,1257	-0,0536	-0,0536
1,2	0,00647	-0,1490	-0,0579	-0,0526
1,4	0,00691	-0,1604	-0,0618	-0,0517
1,6	0,00712	-0,1651	-0,0653	-0,0510
1,8	0,00720	-0,1667	-0,0683	-0,0504
2,0	0,00722	-0,1674	-0,0710	-0,0500
∞	0,00725	-0,168	-0,0742	-0,0484

45. Placas rectangulares con un borde o dos adyacentes simplemente apoyados y los restantes empotrados

Comencemos por el caso de una placa simplemente apoyada sobre el borde $y = 0$ y empotrada en los otros lados (fig. 94). Cualquiera que sea la forma en la que la carga está distribuida sobre la placa $ss'tt'$, se considera ésta como igual a la mitad de una placa $rr'tt'$ que tiene todos sus bordes empotrados y soporta una carga antisimétrica con relación a la línea ss . De este modo las flechas y los momentos flectores son nulos a lo largo de esta línea. El problema se reduce entonces al problema ya resuelto en el apartado 44. La tabla 38¹ da algunos valores numéricos relativos a dos casos de distribución de carga. En la página 270 se da una tabla más completa de los momentos flectores en relación con un método de proyecto de losas. La

¹ Estos resultados se deben a Dana Young, *J. Appl. Mechanics*, vol. 7, pág. A-139, 1940, y a C. P. Siess y N. M. Newmark, *Univ. Illinois Bull.*, vol. 47, pág. 98, 1950. Y. S. Yflyand utilizó un método completamente distinto para tratar este problema; véase *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 72, pág. 655, 1950.

placa rectangular *rsut* (fig. 95), en la que dos lados adyacentes $x = 0$ e $y = 0$ están simplemente apoyados, y los otros dos están empotrados, puede estar considerada en cierto modo, como parte integrante de la placa limitada por $x = \pm a$, $y = \pm b$, y empotrada en todo su contorno.

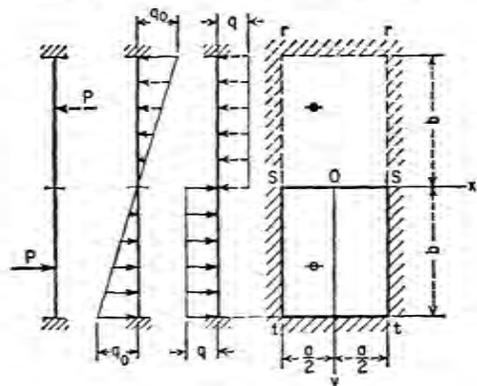


FIG. 94

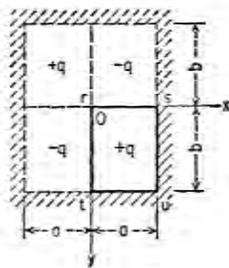


FIG. 95

Consideremos una carga uniformemente repartida sobre el área *rsut* de la placa dada¹. Una carga constante de signo alternado en forma de tablero de damas e intensidad repartida sobre el área $2a \cdot 2b$, como indica la figura 95, crea entonces las condiciones de un borde simplemente apoyado a lo largo de las líneas $x = 0$, $y = 0$. Por consiguiente, el problema de flexión de una placa que tiene dos bordes adyacentes simplemente apoyados y los otros dos empotrados, se transforma en el problema ya resuelto del apartado 44, de una placa empotrada en todo su contorno. Los resulta-

TABLA 38

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares con un borde simplemente apoyado y los otros tres empotrados (fig. 94)

Carga	b/a	$(w)_{x=0, y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2, y=b/2}$	$(M_y)_{x=a, y=b}$
Presión uniforme q	0,5	$0,00449qb^4/D$	$-0,0786qb^2$	$-0,1148qb^2$
	0,75	$0,00286qb^4/D$	$-0,0730qb^2$	$-0,0838qb^2$
	1,0	$0,00157qb^4/D$	$-0,0601qb^2$	$-0,0551qb^2$
	$\frac{1}{3}$	$0,00215qa^4/D$	$-0,0750qa^2$	$-0,0571qa^2$
	2,0	$0,00257qa^4/D$	$-0,0837qa^2$	$-0,0571qa^2$
Presión hidrostática qy/b	0,5	$0,00202qb^4/D$	$-0,0368qb^2$	$-0,0623qb^2$
	0,75	$0,00132qb^4/D$	$-0,0344qb^2$	$-0,0484qb^2$
	1,0	$0,00074qb^4/D$	$-0,0287qb^2$	$-0,0347qb^2$

¹ Para el estudio de este caso Siess en Newmark (trabajo citado) han aplicado una modificación del método de Timoshenko. Para la utilización del método de la energía véase W. B. Stiles, *J. Appl. Mechanics*, vol. 14, pág. A-35, 1947. Véase también M. K. Huang y H. D. Conway, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 451, 1952.

dos muestran que el momento máximo en valor absoluto, se sitúa en el centro del lado mayor de la placa. Los valores de este momento de empotramiento son $-0,1180qb^2$ para $b/a = 0,5$ y $-0,0694qb^2$ para $b/a = 1,0$. El momento flector máximo en el centro de la placa cuadrada, vale $0,034qa^2$ (para $\nu = 0,3$) y la flecha correspondiente es $0,0023qa^4/D$. En la página 269 se dan otros datos numéricos relativos a los momentos flectores en este caso.

46. Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, uno libre y el cuarto empotrado o simplemente apoyado¹

Supongamos los bordes $x = 0$ y $x = a$ (fig. 96) simplemente apoyados, el borde $y = b$ libre y el borde $y = 0$ empotrado. En este caso, las condiciones de borde son

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad \text{y } x = a \quad (a)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{para } y = 0 \quad (b)$$

y a lo largo del borde libre [v. ec. (112), (113), pág. 104].

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0 \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} = 0 \quad (c)$$

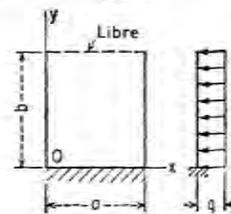


FIG. 96

En el caso particular de una carga uniformemente repartida se opera como en el apartado 30 y se supone que la flecha está compuesta de dos partes

$$w = w_1 + w_2$$

donde w_1 representa la flecha de una franja uniformemente cargada y simplemente apoyada de anchura a que puede escribirse en forma de serie

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

¹ Este caso fue estudiado por Boobnov; véase la traducción inglesa de su obra en *Trans. Inst. Naval Arch.*, vol. 44, pág. 15, 1902, y su *Theory of Structure of Ships*, vol. 2, pág. 545, San Petersburgo, 1914. Fue estudiado también por K. Goriupp, *Ingr.-Arch.*, vol. 16, pág. 77, 1947, y por V. Bogunovic, «On the Bending of a Rectangular Plate with One Edge Free», Belgrado, 1953.

y w_2 viene dada por

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

donde

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (f)$$

Las series (d) y (e) satisfacen las condiciones de contorno (a), y se determinan las cuatro constantes de (f) de tal manera que cumplan las condiciones (b) y (c). Entonces de (b) obtenemos

$$A_m = -\frac{4}{\pi^3 m^3} \quad C_m = -D_m \quad (g)$$

De las dos condiciones restantes (c) hallamos

$$B_m = \frac{4}{\pi^3 m^3} \quad (h)$$

$$\frac{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + 2\nu \operatorname{ch} \beta_m - \nu(1-\nu)\beta_m \operatorname{sh} \beta_m - (1-\nu^2)}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2}$$

$$C_m = \frac{4}{\pi^3 m^3} \quad (h)$$

$$\frac{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m + \nu(1+\nu) \operatorname{sh} \beta_m - \nu(1-\nu)\beta_m \operatorname{ch} \beta_m - (1-\nu)^2 \beta_m}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2}$$

donde $\beta_m = m\pi b/a$.

Sustituyendo las constantes (g) y (h) en (f) y utilizando las series (e) y (d), se obtiene la expresión de la deformada. La flecha máxima se produce, en este caso, en el centro del borde libre. Si b es muy grande en comparación con a , es decir si el borde libre está lejos del borde empotrado, la flecha del borde libre es la misma que la de una franja de longitud a , uniformemente cargada y simplemente apoyada, multiplicada por el factor constante $(3-\nu)(1+\nu)/(3+\nu)$. Resultando de la presencia de este factor que la flecha máxima es un 6,4 % mayor que la de la franja, para $\nu = 0,3$. Esto se explica fácilmente si se tiene en cuenta que junto al borde libre la placa está flexada según una superficie anticlástica.

Consideremos otro caso extremo, en el que a es muy grande en comparación con b , la flecha máxima de la placa es evidentemente la misma que la de una franja de longitud b uniformemente cargada, empotrada en un

extremo y libre en otro. La tabla 39 da varios valores de la flecha máxima calculados¹ para diferentes relaciones b/a . Da también los valores máximos de los momentos flectores que se calculan igualmente a partir de la expresión de la deformada. Los cálculos muestran que $(M_x)_{\max}$ se produce en el centro del borde libre. El máximo valor absoluto del momento M_y se sitúa en el centro del borde empotrado.

TABLA 39

Flechas y momentos flectores en placa uniformemente cargada con dos bordes opuestos simplemente apoyados, el tercer borde libre y el cuarto empotrado (fig. 96)

$\nu = 0,3$

b/a	w_{\max}	$x = a/2, y = b$	$x = a/2, y = 0$
		M_x	M_y
0	$0,125qb^4/D$	0	$-0,500qb^2$
$\frac{1}{4}$	$0,094qb^4/D$	$0,0078qa^2$	$-0,428qb^2$
$\frac{1}{2}$	$0,0582qb^4/D$	$0,0293qa^2$	$-0,319qb^2$
$\frac{3}{4}$	$0,0335qb^4/D$	$0,0558qa^2$	$-0,227qb^2$
1	$0,0113qb^4/D$	$0,0972qa^2$	$-0,119qb^2$
$\frac{3}{2}$	$0,0141qa^4/D$	$0,123qa^2$	$-0,124qa^2$
2	$0,0150qa^4/D$	$0,131qa^2$	$-0,125qa^2$
3	$0,0152qa^4/D$	$0,133qa^2$	$-0,125qa^2$
∞	$0,0152qa^4/D$	$0,133qa^2$	$-0,125qa^2$

Se trata de la misma manera, el caso de una carga hidrostática repartida según la ley $q_0(1-y/b)$. Pondremos la flecha en la forma

$$w = \frac{4q_0(1-y/b)a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

donde Y_m es de la forma de (f), con q_0 como constante en lugar de q . Operando, como anteriormente, se obtienen las cuatro constantes A_m, B_m, \dots, D_m a partir de las condiciones en los límites (a), (b) y (c).

Si la placa está flexada por una carga repartida en el borde libre, en lugar de serlo, por una carga repartida sobre la superficie, se debe modificar la segunda de las condiciones (c) sustituyendo el cero del segundo miembro por la intensidad de la carga repartida en el borde libre. Se ha estudiado² (fig. 97), el caso particular de una fuerza concentrada aplicada en el borde

¹ Esta tabla se debe a Boobnov, *op. cit.*

² Véase C. W. Mac Gregor, *Mech. Eng.*, vol. 57, pág. 225, 1935; D. L. Holl, *J. Appl. Mechanics*, vol. 4, pág. 8, 1937; T. J. Jaramillo, *J. Appl. Mechanics*, vol. 17, pág. 67, 1950; y K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 4.^a ed., pág. 233, Viena, 1956. El caso de una placa cantilever con tres bordes libres y carga uniformemente repartida fue estudiado por W. A. Nash, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 33, 1952. Véase también el estudio de este tipo de placa hecho por W. T. Koiter y J. B. Aiblas con resultados numéricos en *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Amsterdam*, vol. 60, pág. 173, 1957.

libre de una placa muy larga. La flecha a lo largo de este borde está dada por la fórmula

$$(w)_{y=b} = \alpha \frac{Pb^2}{D}$$

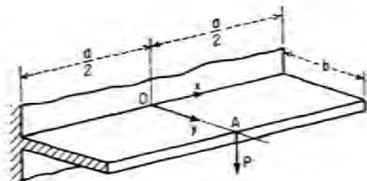


FIG. 97

El factor α disminuye rápidamente cuando la distancia del punto A de aplicación de la carga aumenta. La tabla 40 expone varios valores de α . La tabla 41 da los valores absolutos máximos del momento de empotramiento

TABLA 40

$x =$	0	$b/4$	$b/2$	b	$2b$
$\alpha =$	0,168	0,150	0,121	0,068	0,016

TABLA 41

Momentos flectores $M = \beta P$, para $x = 0$, $y = 0$, debidos a carga concentrada P en $x = 0$, $y = b$, estando los bordes $x = 0$, $a/2$ simplemente apoyados (fig. 97)

$$\nu = 0,3$$

$b/a =$	4	2	1,5	1	$\frac{2}{3}$	0,5	$\frac{1}{2}$	0,25	0
$\beta =$	-0,000039	-0,0117	-0,0455	-0,163	-0,366	-0,436	-0,498	-0,507	-0,509

debido a una carga que actúa en el centro del borde libre de una placa de longitud finita¹ a .

El caso de una placa rectangular uniformemente cargada simplemente apoyada sobre tres bordes y libre en $y = b$ (fig. 98), se trata de la misma manera que el caso anterior en que el borde $q = 0$ estaba empotrado.

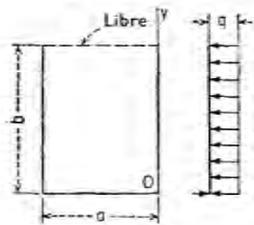


FIG. 98

Basta sustituir la segunda de las condiciones de borde (b) por

$$\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{y=0} = 0$$

Omitiendo las deducciones damos solamente el resultado numérico final obtenido para este caso. La flecha máxima se produce en el centro del borde libre así como el momento flector máximo M_x . Estos valores de las flechas w_{\max} y $(M_x)_{\max}$ están dados en la segunda y tercera columnas de la tabla 42¹. Las dos últimas dan los momentos flectores en el centro de la placa.

TABLA 42

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares uniformemente cargadas con tres bordes simplemente apoyados y el cuarto borde libre (fig. 98)

$$\nu = 0,3$$

b/a	$x = a/2, y = b$		$x = a/2, y = b/2$	
	w_{\max}	$(M_x)_{\max}$	M_x	M_y
$\frac{1}{2}$	0,00710 qa^4/D	0,060 qa^2	0,039 qa^2	0,022 qa^2
$\frac{2}{3}$	0,00968 qa^4/D	0,083 qa^2	0,055 qa^2	0,030 qa^2
1/1,4	0,01023 qa^4/D	0,088 qa^2	0,059 qa^2	0,032 qa^2
1/1,3	0,01092 qa^4/D	0,094 qa^2	0,064 qa^2	0,034 qa^2
1/1,2	0,01158 qa^4/D	0,100 qa^2	0,069 qa^2	0,036 qa^2
1/1,1	0,01232 qa^4/D	0,107 qa^2	0,074 qa^2	0,037 qa^2
1,0	0,01286 qa^4/D	0,112 qa^2	0,080 qa^2	0,039 qa^2
1,1	0,01341 qa^4/D	0,117 qa^2	0,085 qa^2	0,040 qa^2
1,2	0,01384 qa^4/D	0,121 qa^2	0,090 qa^2	0,041 qa^2
1,3	0,01417 qa^4/D	0,124 qa^2	0,094 qa^2	0,042 qa^2
1,4	0,01442 qa^4/D	0,126 qa^2	0,098 qa^2	0,042 qa^2
1,5	0,01462 qa^4/D	0,128 qa^2	0,101 qa^2	0,042 qa^2
2,0	0,01507 qa^4/D	0,132 qa^2	0,113 qa^2	0,041 qa^2
3,0	0,01520 qa^4/D	0,133 qa^2	0,122 qa^2	0,039 qa^2
∞	0,01522 qa^4/D	0,133 qa^2	0,125 qa^2	0,037 qa^2

TABLA 43

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares con tres bordes simplemente apoyados y el cuarto borde libre, bajo carga hidrostática (fig. 99)

b/a	$x = a/2, y = b$		$x = a/2, y = b/2$		
	w	M_x	w	M_x	M_y
$\frac{1}{2}$	0,00230 $q_b a^4/D$	0,0197 $q_b a^2$	0,00135 $q_b a^4/D$	0,0145 $q_b a^2$	0,0120 $q_b a^2$
$\frac{2}{3}$	0,00304 $q_b a^4/D$	0,0265 $q_b a^2$	0,00207 $q_b a^4/D$	0,0220 $q_b a^2$	0,0156 $q_b a^2$
1,0	0,00368 $q_b a^4/D$	0,0325 $q_b a^2$	0,00313 $q_b a^4/D$	0,0331 $q_b a^2$	0,0214 $q_b a^2$
1,5	0,00347 $q_b a^4/D$	0,0308 $q_b a^2$	0,00445 $q_b a^4/D$	0,0453 $q_b a^2$	0,0231 $q_b a^2$
2,0	0,00291 $q_b a^4/D$	0,0258 $q_b a^2$	0,00533 $q_b a^4/D$	0,0529 $q_b a^2$	0,0222 $q_b a^2$
∞	0	0	0,00651 $q_b a^4/D$	0,0625 $q_b a^2$	0,0187 $q_b a^2$

¹ Esta tabla y la tabla 43 fueron calculadas por B. G. Galerkin; véase *Bull. Polytech. Inst.*, volumen 26, pág. 124, San Petersburgo, 1915.

¹ Esta tabla es debida a V. Bogunovic, *op. cit.* Véase también apartado 78.

La tabla 43, contiene en forma similar los valores de las flechas y de los momentos flectores producidos en el centro del borde libre y en el centro de la placa por una carga hidrostática.

47. Placas rectangulares con tres bordes empotrados y el cuarto borde libre

Placas, con tales condiciones en los bordes presentan un interés particular como partes integrantes de depósitos rectangulares o muros de contención. Por consiguiente, se considerará en este caso, en primer lugar, las cargas uniformemente repartidas e hidrostáticas.

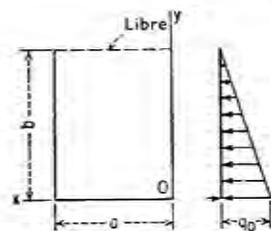


Fig. 99

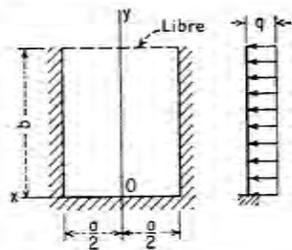


Fig. 100

Supongamos el contorno de la placa empotrada en $y = 0$, $x = \pm a/2$ y libre en $y = b$ (fig. 100). Supongamos primero una carga de intensidad q , uniformemente repartida, la ecuación de las flechas puede ponerse en la forma

$$w = w_1 + w_2 + w_3 \quad (a)$$

Siendo

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

y

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m (-1)^{(m-1)/2} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

contenidas en (a) idénticas a (d) y (e) del apartado anterior, si se considera la nueva posición del origen.

Las flechas adicionales w_3 , debidas a las coacciones adicionales en los bordes $x = \pm a/2$, se escriben de la forma¹

¹ Este método de solución se debe fundamentalmente a Goriupp, *op. cit.*, pág. 153, 1948. Véase también W. J. Van der Eb, *Ingenieur*, vol. 26, pág. 31, 1950.

TABLA 44
 $\gamma = 1/6$

Flechas, momentos flectores y reacciones de placas rectangulares uniformemente cargadas con tres bordes empotrados y el cuarto libre (fig. 100)

$\frac{b}{a}$	$x = 0, y = b$		$x = 0, y = b/2$		$x = a/2, y = b$		$x = a/2, y = b/2$		$x = 0, y = 0$	
	$\frac{\alpha}{a} \frac{qa^4}{D}$	β_1	$\frac{\alpha}{a} \frac{qa^4}{D}$	β_2	M_x	V_x	M_x	V_x	M_x	V_x
0,6	0,00271	0,0336	0,00129	0,0168	-0,0745	0,750	-0,0365	0,297	-0,0554	0,416
0,7	0,00292	0,0371	0,00159	0,0212	-0,0782	0,717	-0,0439	0,346	-0,0545	0,413
0,8	0,00308	0,0401	0,00185	0,0252	-0,0812	0,685	-0,0505	0,385	-0,0535	0,410
0,9	0,00323	0,0425	0,00209	0,0287	-0,0836	0,656	-0,0563	0,414	-0,0523	0,406
1,0	0,00333	0,0444	0,00230	0,0317	-0,0853	0,628	-0,0614	0,435	-0,0510	0,401
1,25	0,00345	0,0467	0,00269	0,0374	-0,0867	0,570	-0,0708	0,475	-0,0470	0,388
1,5	0,00335	0,0454	0,00290	0,0402	-0,0842	0,527	-0,0755	0,491	-0,0418	0,373

$$w_3 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^x \left(F_m \gamma_n \operatorname{th} \gamma_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} - F_m \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2b} + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^y \left(G_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + H_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + I_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

donde $F_m \dots I_m$ son las constantes y $\gamma_n = n\pi a/4b$.

Puesto que $w_3 = 0$ para $y = 0$ y $x = \pm a/2$, las condiciones en los bordes que deben cumplir también las flechas (d) son:

$$\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \quad \left[\frac{\partial^3 w_3}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad \left[\frac{\partial (w_1 + w_2 + w_3)}{\partial x} \right]_{x=\pm a/2} = 0 \quad (e)$$

Desarrollemos ahora todas las funciones no circulares de x , contenidas en (a), en serie de la forma $\sum A_m \cos(m\pi x/a)$ y todas las funciones similares de y , en serie de la forma $\sum B_n \operatorname{sen}(n\pi y/2b)$. Se obtienen entonces a partir de las condiciones (e) una serie de ecuaciones lineales para F_m, G_m, \dots, I_m . Resolviendo las ecuaciones se pueden expresar las constantes desconocidas por los valores conocidos $A_m \dots D_m$ (v. pág. 233).

En el caso de una presión hidrostática (v. fig. 101), se superpone la solución (i) del apartado anterior a la solución (d) y se opera como se ha indicado anteriormente.

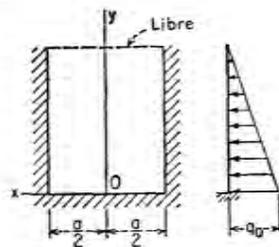


FIG. 101

Cualquiera que sea la carga, el problema puede tratarse por el método de diferencias finitas (v. ap. 83). Los valores de las tablas 44 y 45 están esencialmente calculados por este método!

TABLA 45
Flechas, momentos flectores y reacciones de placas rectangulares con tres bordes empotrados y el cuarto libre, bajo carga hidrostática (fig. 101)
 $\nu = 1/6$

b/a	$x = 0, y = b$		$x = 0, y = b/2$		$x = a/2, y = b$		$x = a/2, y = b/2$		$x = 0, y = 0$		
	$w = \frac{qa^4}{D} a_1$	$M_x = -\beta_1 qa^2$	$w = \frac{qa^4}{D} a_2$	$M_x = -\beta_2 qa^2$	$V_x = \gamma_1 qa$	$M_x = -\beta_3 qa^2$	$V_x = \gamma_2 qa$	$M_x = -\beta_4 qa^2$	$V_x = \gamma_3 qa$	$M_x = -\beta_5 qa^2$	$V_x = \gamma_4 qa$
0,6	0,00069	0,0089	0,00044	0,0062	0,003	-0,0179	0,003	-0,0131	0,136	-0,0242	0,248
0,7	0,00069	0,0093	0,00058	0,0074	0,081	-0,0172	0,081	0,0170	0,158	0,0261	0,262
0,8	0,00068	0,0096	0,00072	0,0083	0,069	-0,0164	0,069	0,0206	0,177	-0,0278	0,275
0,9	0,00067	0,0096	0,00085	0,0118	0,057	-0,0156	0,057	0,0239	0,194	-0,0290	0,286
1,0	0,00065	0,0095	0,00097	0,0135	0,045	-0,0146	0,045	-0,0269	0,209	-0,0299	0,295
1,25	0,00056	0,0085	0,00121	0,0169	0,018	-0,0119	0,018	-0,0327	0,234	-0,0306	0,309
1,5	0,00042	0,0065	0,00138	0,0191	-	-0,0087	-	-0,0364	0,245	-0,0291	0,311

1 Véase A. Smotrov, «Solution for Plates Loaded According to the Law of Trapezoid», Moscú, 1936.

48. Placas rectangulares con los dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos libres o elásticamente apoyados

Sea el caso en que los bordes $x = 0, x = a$ (fig. 102) están simplemente apoyados y los otros apoyados sobre vigas elásticas. Supongamos que la carga está uniformemente repartida y que las vigas son idénticas la deformada de la placa es simétrica con relación al eje x y se han de tener en



FIG. 102

cuenta solamente las condiciones a lo largo de $y = b/2$. Supongamos que las vigas resisten a la flexión en planos verticales y no a la torsión, las condiciones de contorno en el borde $y = b/2$ son, utilizando (114)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b/2} &= 0 \\ D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b/2} &= \left(EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{y=b/2} \end{aligned} \quad (a)$$

donde EI es la rigidez a la flexión de las vigas de apoyo. Operando como en el apartado 46, puede ponerse la deformada en la forma

$$w = w_1 + w_2 \quad (b)$$

donde

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

y

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

Por razón de simetría, se deduce que hay que poner $C_m = D_m = 0$ en la expresión (f) del apartado 46, y tomar

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \quad (e)$$

Las otras dos constantes A_m, B_m se obtienen por las condiciones de contorno (a), de donde, utilizando las notaciones

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m \quad \frac{EI}{aD} = \lambda$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A_m(1-\nu) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m[2 \operatorname{ch} \alpha_m + (1-\nu)\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m] &= \frac{4\nu}{m^5 \pi^5} \\ -A_m[(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_m + m\pi\lambda \operatorname{ch} \alpha_m] + B_m[(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_m \\ - (1-\nu)\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - m\pi\lambda \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m] &= \frac{4\lambda}{m^4 \pi^4} \end{aligned}$$

Resolviendo, estas ecuaciones encontramos

$$A_m = \frac{4}{m^5 \pi^5} \frac{\nu(1+\nu) \operatorname{sh} \alpha_m - \nu(1-\nu)\alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - m\pi\lambda(2 \operatorname{ch} \alpha_m + \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m)}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - (1-\nu)^2 \alpha_m + 2m\pi\lambda \operatorname{ch}^2 \alpha_m} \quad (f)$$

$$B_m = \frac{4}{m^5 \pi^5} \frac{\nu(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_m + m\pi\lambda \operatorname{ch} \alpha_m}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - (1-\nu)^2 \alpha_m + 2m\pi\lambda \operatorname{ch}^2 \alpha_m} \quad (g)$$

La deformada de la placa se obtiene sustituyendo los valores de las constantes en

$$w = w_1 + w_2 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (h)$$

Si las vigas de apoyo son absolutamente rígidas, $\lambda = \infty$ en (f) y (g), y $A_m B_m$ tienen el mismo valor que en el apartado 30, para una placa en la que los cuatro lados están apoyados sobre soportes rígidos.

Sustituyendo λ por 0 en (f) y (g), se encuentran los valores de las constantes de la serie (h) en el caso en que dos lados de la placa están simplemente apoyados y los otros dos libres.

La flecha y los momentos flectores máximos se sitúan en el centro de la placa salvo para valores muy pequeños de λ . La tabla 46¹ da varios valores de estas cantidades en función de los valores de λ .

¹ La tabla ha sido calculada por K. A. Calisey, *Mem. Inst. Engrs. Ways Commun.*, San Petersburgo, 1914. Más recientemente ha estudiado el problema E. Müller, *Ingr.-Arch.*, vol. 2, página 606, 1932. En este trabajo se calculan tablas para casos no simétricos. V. P. Jensen, en *Univ. Illinois Bull.*, 81, 1938, estudió varios casos de placas rectangulares y continuas apoyadas en vigas flexibles.

TABLA 46

Flechas y momentos flectores en el centro de placa cuadrada uniformemente cargada con dos bordes simplemente apoyados y los otros dos apoyados en vigas elásticas (fig. 102)

$$\nu = 0,3$$

$\lambda = EI/aD$	w_{\max}	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$
∞	$0,00406qa^4/D$	$0,0479qa^2$	$0,0479qa^2$
100	$0,00409qa^4/D$	$0,0481qa^2$	$0,0477qa^2$
30	$0,00416qa^4/D$	$0,0486qa^2$	$0,0473qa^2$
10	$0,00434qa^4/D$	$0,0500qa^2$	$0,0465qa^2$
6	$0,00454qa^4/D$	$0,0514qa^2$	$0,0455qa^2$
4	$0,00472qa^4/D$	$0,0528qa^2$	$0,0447qa^2$
2	$0,00529qa^4/D$	$0,0571qa^2$	$0,0419qa^2$
1	$0,00624qa^4/D$	$0,0643qa^2$	$0,0376qa^2$
0,5	$0,00756qa^4/D$	$0,0744qa^2$	$0,0315qa^2$
0	$0,01309qa^4/D$	$0,1225qa^2$	$0,0271qa^2$

El caso particular $\lambda = 0$ de una placa con los dos bordes opuestos simplemente apoyados, y los otros dos libres, merece alguna consideración. Como muestra la tabla 47¹ las flechas y los momentos máximos de una placa tal, cargada uniformemente,

TABLA 47

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares uniformemente cargadas con los bordes $x = 0, x = a$ simplemente apoyados y los otros dos libres (fig. 102)

$$\nu = 0,3$$

b/a	$x = a/2, y = 0$			$x = a/2, y = \pm b/2$	
	$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$M_y = \beta_1' qa^2$	$w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_2 qa^2$
	α_1	β_1	β_1'	α_2	β_2
0,5	0,01377	0,1235	0,0102	0,01443	0,1259
1,0	0,01309	0,1225	0,0271	0,01509	0,1318
2,0	0,01289	0,1235	0,0364	0,01521	0,1329
∞	0,01302	0,1250	0,0375	0,01522	0,1330

difieren poco de las flechas y de los momentos de una placa flexada según una superficie cilíndrica.

49. Placas rectangulares con los cuatro bordes apoyados elásticamente o apoyadas en las esquinas con todos los bordes libres

Consideremos una placa sometida a una presión uniforme y apoyada sobre cuatro vigas flexibles a todo lo largo del contorno. Las vigas se supone que tienen soportes rígidos en los ángulos de la placa y las vigas paralelas entre sí tienen la misma rigidez a flexión (fig. 103).

¹ Estos resultados se deben a D. L. Holl, *Iowa State Coll. Eng. Exp. Sta. Bull.*, 129, 1936. Para el caso de carga concentrada, véase también R. Ohlig, *Ingr.-Arch.*, vol. 16, pág. 51, 1947. Ambos autores estudiaron también el efecto de empotramiento de los bordes de apoyo.

Poniendo las flechas de la forma

$$w = \frac{q}{384D(\gamma + \delta)} [\gamma(16x^4 - 24a^2x^2 + 5a^4) + \delta(16y^4 - 24b^2y^2 + 5b^4)] + \sum A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum C_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum D_n x \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (a)$$

donde δ/γ y A_n, \dots, D_n son constantes cualesquiera y $n = 1, 3, 5, \dots$, se satisface la ecuación diferencial $\Delta \Delta w = q/D$ de la placa y también las condiciones de simetría¹.

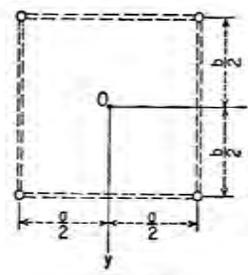


FIG. 103

Desarrollemos las funciones algebraicas e hiperbólicas de (a) en serie de cosenos. Entonces, utilizando para $x = a/2$ e $y = b/2$, las condiciones de borde similares a las (a) del apartado anterior, se obtiene un sistema de ecuaciones para las constantes A_n, \dots, D_n de la expresión (a).

Sustituyamos, en particular, $\delta/\gamma = 0$ y $E_0 I_0 = \infty$, se llega a la solución del problema ya estudiado en el apartado 48.

Consideremos ahora, la flexión de una placa cuadrada ($a = b$) apoyada en cuatro vigas idénticas. Tenemos entonces, por simetría $\delta/\gamma = 1$; $A_n = B_n$; y $C_n = D_n$. Los coeficientes desconocidos A_n se eliminan, igualando a cero los momentos en los bordes. Tomemos cuatro términos ($n = 1, 3, 5$ y 7) de la serie (a), se obtienen cuatro ecuaciones lineales para C_1, C_3, C_5 y C_7 . La tabla 48 da los resultados numéricos de los cálculos llevado a cabo por este método.

En el caso particular en que $EI = 0$, tenemos una placa cuadrada que soporta una carga uniformemente repartida y apoyada únicamente sobre los vértices. El valor de ν tiene poca influencia en las flechas y momentos en el centro de la placa, su influencia sobre los momentos de los bordes es más importante. Tomemos, por ejemplo, $\nu = 0,3$ los valores dados por la última línea de la tabla 48, donde $\nu = 0,25$ serían ahora 0,0249; 0,1090 y 0,1404, respectivamente².

¹ Este método de resolución se debe a B. G. Galerkin; véase su *Collected Papers*, vol. 2, página 15, Moscú, 1953. Las condiciones de contorno en consideración son fácilmente realizables y apropiadas para la verificación experimental de la teoría. Véase N. Dimitrov, *Bouingenieur*, vol. 32, pág. 359, 1957.

² Véase H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2.^a ed., pág. 173, Berlín, 1932; diversos casos de placas sujetas en puntos aislados han sido estudiados por A. Nádai, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 1, 1922, y también por C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, vol. 15, pág. 73, 1948.

TABLA 48

Flechas y momentos flectores en placa cuadrada con los cuatro lados elásticamente apoyados (fig. 103)

$$\nu = 0,25$$

$\gamma = \frac{EJ}{aD}$	$x = 0, y = 0$		$x = 0, y = b/2$
	$w = a \frac{qa^2}{D}$	$M_x = M_y = \beta_1 qa^2$	$M_x = \beta_2 qa^2$
	α	β_1	β_2
∞	0,00406	0,0460	0,0000
100	0,00412	0,0462	
50	0,00418	0,0463	
25	0,00429	0,0467	0,0002
10	0,00464	0,0477	0,0024
5	0,00519	0,0494	0,0065
4	0,00546	0,0502	0,0085
3	0,00588	0,0515	0,0117
2	0,00668	0,0539	0,0177
1	0,00873	0,0601	0,0332
0,5	0,01174	0,0691	0,0559
0	0,0257	0,1109	0,1527

El problema de la flexión de una placa cuadrada, cargada en el centro y fija en los vértices ha sido también objeto de estudio¹. Si la carga P está uniformemente repartida sobre una pequeña superficie rectangular o circular, se puede deducir una expresión para los momentos que actúan en el centro del área cargada. Tomemos, por ejemplo, un área cargada cuadrada de lado u , tales momentos para $\nu = 0,3$ toman la forma

$$M_x = M_y = \left(0,1034 \ln \frac{a}{u} + 0,129 \right) P \quad (b)$$

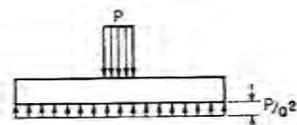
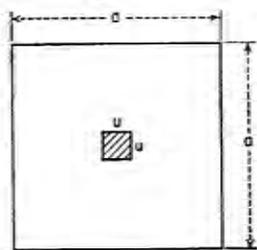


FIG. 104a

¹ Véase Marcus, *ibid.*

² Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 23, pág. 349, 1955.

A partir de esta ecuación y de la de una placa cuadrada uniformemente cargada apoyada en los vértices, el problema de la figura 104 a) puede resolverse por el método de superposición. Se ve que si una placa cuadrada de borde libre está sostenida por reacciones uniformemente repartidas, los momentos flectores en el centro se obtienen restando el valor $M_x = M_y = 0,1090qa^2$ de la expresión (b), dada aquí, para una placa cuadrada uniformemente cargada y simplemente apoyada en sus vértices (con $\nu = 0,3$). Se obtiene entonces,

$$M_x = M_y = \left(0,1034 \ln \frac{a}{u} + 0,020 \right) P \quad (c)$$

válida para $\nu = 0,3$. La figura 104 b) indica el reparto de los momentos flectores a lo largo de la línea media de una placa de cimentación, para $u/a = 0,1$ y $u/a = 0,2$. Se puede suponer un reparto uniforme de la presión para una placa de cimentación muy rígida apoyada sobre terreno blando. En el capítulo 8, se admitirán hipótesis más generales respecto a la ley de distribución de esta presión.

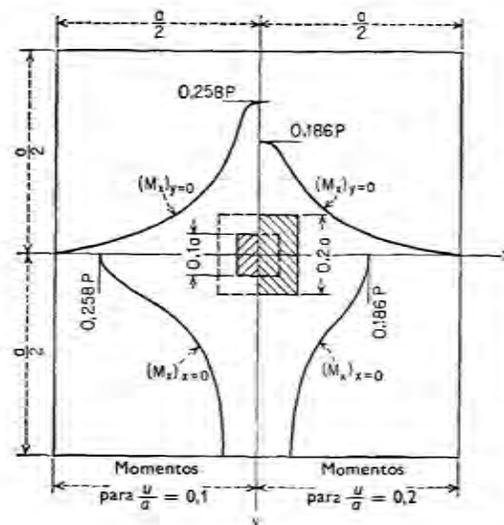


FIG. 104b

50. Placas rectangulares semiinfinitas sometidas a una presión uniforme

La deformada y la distribución de tensiones junto al lado menor de una placa rectangular larga, son prácticamente las mismas que las de los extremos de las placas semiinfinitas (v. fig. 105). Es sobre todo por esta razón por lo que la teoría sencilla de estas últimas placas merece algunas consideraciones. Sea una carga uniformemente repartida sobre el área de toda la placa y estén los bordes $x = 0, x = a$ simplemente apoyados¹.

¹ Las soluciones de este problema expuestas aquí se deben a A. Nádai, véase su obra *Elastische Platten*, pág. 72, Berlín, 1925.

La superficie de la placa puede ponerse en la forma

$$w = w_1 + w_2 \quad (a)$$

donde

$$w_1 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^2x) = \frac{4qa^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

es la solución particular de $\Delta \Delta w = q/D$, siendo q la intensidad de la carga y

$$w_2 = \frac{4qa^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(A_m + B_m \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

es una solución de $\Delta \Delta w = 0$, que da flechas nulas $y = \infty$. Los coeficientes A_m y B_m , de los que aún podemos disponer deben determinarse de forma que satisfagan las condiciones de la placa a lo largo de $y = 0$. Consideremos los tres casos siguientes:

El borde $y = 0$ está simplemente apoyado [fig. 105 a)]

Las condiciones particulares que tiene que cumplir son $w = 0$ y $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$, para $y = 0$. Sustituyendo las series quedan $w = w_1 + w_2$ en estas condiciones se

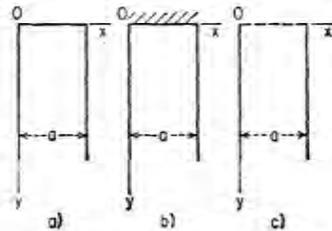


FIG. 105

tienen los valores $A_m = -1/m^2$ y $B_m = A_m/2$ para los coeficientes. Así llegamos a la deformada

$$w = w_1 - \frac{4qa^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(1 + \frac{m\pi y}{2a} \right) \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

donde w_1 está dado por (b).

Los momentos flectores M_x , de la placa, tienen un interés particular. A lo largo de la línea media $x = a/2$ de la placa, tenemos, derivando

$$M_x = \frac{\nu qa^2}{8} + \frac{4qa^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(1 - \nu) \frac{m\pi y}{2a} - \nu \right] \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^2} (-1)^{(m-1)/2} \quad (e)$$

Utilizando la condición $\partial M_x / \partial y = 0$ y teniendo en cuenta el primer término de la serie rápidamente convergente, se llega a que M_x es máximo en

$$y = \frac{a}{\pi} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

La tabla 49 da los valores máximos de los momentos flectores y de las reacciones de los bordes V_y , así como las fuerzas R que actúan hacia abajo, en las esquinas de la placa.

Debe notarse que el valor $0,0364qa^2$ supera en un 45 % el valor $0,0250qa^2$ de los momentos máximos M_x , de una placa de longitud infinita, para un mismo valor del coeficiente de Poisson en ambos casos.

Tabla 49
Máximos momentos flectores y reacciones en una placa seminfinita uniformemente cargada con todos los bordes simplemente apoyados (fig. 105a)

ν	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(V_y)_{\max}$	R
0,2	$0,1250qa^2, x = \frac{a}{2}, y = \infty$	$0,0364qa^2, x = \frac{a}{2}, y = 0,48a$	$0,520qa, x = \frac{a}{2}, y = 0$	$0,1085qa^2$
0,3	$0,1250qa^2, x = \frac{a}{2}, y = \infty$	$0,0445qa^2, x = \frac{a}{2}, y = 0,59a$	$0,502qa, x = \frac{a}{2}, y = 0$	$0,0949qa^2$

El borde $y = 0$ está empotrado [fig. 105 b)]

Siguiendo el procedimiento general mencionado más arriba, pero utilizando esta vez las condiciones de bordes $w = 0$, $\partial w / \partial y = 0$ para $y = 0$, se obtiene en lugar de (d) la expresión

$$w = w_1 - \frac{4qa^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

donde w_1 está de nuevo dada por la ecuación (b). El momento flector correspondiente

$$M_x = \frac{\nu qa^2}{8} + \frac{4qa^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} - 1 - \nu \right] \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

es máximo en $x = a/2$ e $y = 2a/\pi(1 - \nu)$. Supongamos $\nu = 0,3$ se encuentra $y = 0,91a$ y $(M_x)_{\max} = 0,0427qa^2$, mientras que para $\nu = 0,2$, se obtienen respectivamente $y = 0,80a$ y $0,0387qa^2$. Se ve también que la variación de los momentos de empotramiento a lo largo del lado $y = 0$, obedece a la sencilla ley

$$(M_x)_{y=0} = -\frac{q}{2}(ax - x^2)$$

Teniendo en cuenta que para valores grandes de y , la deformada de la placa puede suponerse cilíndrica, tenemos

$$M_x = \frac{q}{2}(ax - x^2) \quad M_y = \nu \frac{q}{2}(ax - x^2)$$

De este modo el reparto de los momentos de borde (g) es idéntico al de los momentos M_x a través de la placa en $y = \infty$, pero de signo opuesto.

El borde $y = 0$ está libre [fig. 105 c)]

Si las condiciones impuestas para $y = 0$ son

$$\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

entonces, utilizando las expresiones (a), (b) y (c), se llega a la deformada

$$w = w_1 + \frac{4\nu qa^4}{(3+\nu)\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} - \frac{mxy}{a} \right) \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (h)$$

La flecha y el momento flector M_x son máximos en el centro del borde libre y se demuestra que

$$(w)_{y=0} = \frac{3-\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} w_1$$

y

$$(M_x)_{y=0} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{3+\nu} (M_x)_1$$

siendo w_1 y $(M_x)_1$ las flechas y los momentos de una placa infinita simplemente apoyada. Tenemos entonces

$$(M_x)_{\max} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{3+\nu} \frac{qa^2}{8}$$

Como último ejemplo que nos lleva a una solución de forma diferente, se considera una placa semiinfinita uniformemente cargada en la que el borde $y=0$ está simplemente apoyado y los bordes $x = \pm a/2$ empotrados (fig. 106). La resolución

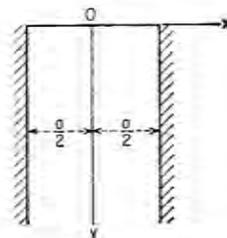


FIG. 106

se efectúa haciendo $b = \infty$ en una expresión convenientemente escogida, de las flechas de una placa rectangular simplemente apoyada en los bordes $y=0, b$ y empotrada sobre $x = \pm a/2$. El resultado de esta deducción que omitimos aquí, es

$$w = \frac{4qa^4}{\pi D} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} - \frac{\left(\operatorname{sh} \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{\beta x}{a} - \frac{\beta x}{a} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta x}{a}}{\operatorname{sh} \beta + \beta} \right] \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta y}{a}}{\beta^3} d\beta \quad (i)$$

Diferenciando (i) y recordando que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta y}{a} d\beta}{\beta} = \frac{\pi}{2} \quad \text{para } y > 0$$

se obtiene

$$\Delta \Delta w = \frac{2q}{\pi D} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta y}{a} d\beta}{\beta} = \frac{q}{D}$$

Así se satisface la ecuación diferencial de la flexión de placas. Se demuestra también que la solución (i) cumple también las condiciones de borde correspondiente a $y=0$ y $x = \pm a/2$.

Las expresiones de los momentos flectores de la placa incluyen integrales infinitas que se pueden calcular. Los momentos M_x son de interés. Supongamos, por ejemplo, $\nu = 0,2$ se obtiene $(M_x)_{\max} = 0,0174qa^2$ en $y = 0,3a$ mientras que el momento $M_y = \nu qa^2/24$ de una placa infinita no pasa de $0,00833qa^2$ para el mismo valor de ν .

Hay que tener en cuenta que las propiedades de las placas semiinfinitas pueden servir de base para calcular las flechas y los momentos flectores de placas rectangulares finitas de bordes simplemente apoyados o empotrados en cualquier combinación dada¹.

51. Placas rectangulares semiinfinitas bajo cargas concentradas

Supongamos los bordes $x=0$ y $x=a$ de la placa, simplemente apoyados, y consideramos respecto al tercer lado, los dos casos siguientes: 1) borde $y=0$ simplemente apoyado; 2) borde $y=0$ empotrado.

Borde $y=0$ simplemente apoyado (fig. 107)

Suponiendo que la carga dada P está aplicada en $x = \xi, y = \eta$ (fig. 107), consideramos primero una placa infinita apoyada sobre los bordes $x=0$ y $x=a$. Con objeto de utilizar el método de imágenes (v. pág. 179) se supone una segunda carga $-P$ que actúa en el punto $x = \xi, y = -\eta$ de la placa infinita. La línea $y=0$ es

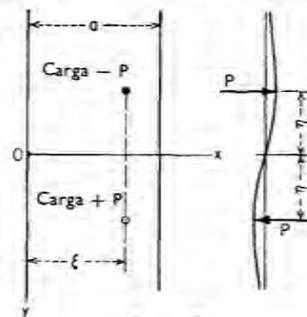


FIG. 107

entonces una línea nodal de la deformada. Así la flexión de la placa semiinfinita se obtiene superponiendo las flechas [v. ec. (148), pág. 167] producidas en la placa infinita por las dos cargas concentradas. En este caso, se llega a la deformada

$$w_1 = \frac{Pa^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m\pi}{a}(\eta-y)}}{m^3} \left[1 + \frac{m\pi}{a}(\eta-y) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} - \frac{Pa^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m\pi}{a}(\eta+y)}}{m^3} \left[1 + \frac{m\pi}{a}(\eta+y) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

¹ Para esta aproximación de la teoría de las placas rectangulares, véase W. Koepcke, *Ingr.-Arch.*, vol. 18, pág. 106, 1950.

o, reagrupando términos

$$w_1 = \frac{Pa^2}{\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^3} \left[\left(1 + \frac{m\pi\eta}{a}\right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

expresión válida para $0 \leq y \leq \eta$ que da $w_1 = 0$, $\partial^2 w_1 / \partial y^2 = 0$ en $y = 0$. Las flechas en la región $y > \eta$ se obtienen de la misma manera.

Si se reparte la carga única sobre una superficie pequeña, los momentos M_x en el centro de este área y las flechas correspondientes resultan ser más pequeñas que las de una placa infinita sin borde transversal en $y = 0$. Pero el momento M_y es de nuevo una excepción. Escribamos este momento de la forma $M_y = M_{y0} + m_y$ donde M_{y0} es el momento de la placa infinita. El término adicional m_y , que representa la influencia de la carga $-P$ de la figura 107, se calcula fácilmente por medio de la segunda de las ecuaciones (151) (v. pág. 161). Supongamos por ejemplo, $\nu = 0,3$ se obtiene $m_y = 0,0065P$, como máximo valor del término adicional correspondiente a una posición de la carga dada por $x = a/2$, $y = 0,453a$.

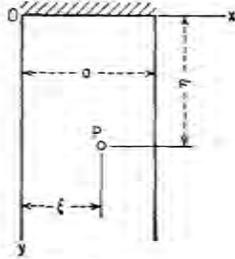


FIG. 108

Borde $y = 0$ empotrados (fig. 108)

Se comienza por calcular la pendiente de la deformada (a) en $y = 0$, por derivación obtenemos

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{P\eta}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta/a}}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

Sometemos la placa semiinfinita, simplemente apoyada, a momentos repartidos a lo largo del borde $y = 0$, de acuerdo con la ley

$$(M_y)_{y=0} = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Las flechas correspondientes que se anulan en $y = \infty$, toman la forma

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m y) e^{-m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

Los coeficientes A_m , B_m de esta expresión se obtienen fácilmente de las condiciones

$$(w_2)_{y=\infty} = 0 \quad -D \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right)_{y=0} = f(x) \quad (d)$$

Esto da $A_m = 0$, $B_m = E_m a / 2m \pi D$ y, finalmente

$$w_2 = \frac{ay}{2\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m e^{-m\pi y/a}}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Puesto que se debe anular la pendiente (b), la condición en el borde es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (f)$$

Sustituyendo (b) y (e) en la ecuación (f), queda

$$E_m = -\frac{2P\eta}{a} e^{-m\pi\eta/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a}$$

y la expresión (e) deberá ser en consecuencia

$$w_2 = -\frac{Py\eta}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m\pi}{a}(y+\eta)}}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (g)$$

La deformada de la placa semiinfinita empotrada en $y = 0$ está dada por

$$w = w_1 + w_2 \quad (h)$$

donde w_1 representa (a). Como ocurre con la serie (g) se puede escribir ésta de forma finita. Basta para ello expresar las funciones en seno contenidas en (g), bajo la forma de funciones exponenciales

$$e^{\pm i m \pi \xi / a} \quad \text{y} \quad e^{\pm i m \pi x / a}$$

y tener en cuenta el desarrollo

$$\ln(1 \pm e^x) = \pm e^x - \frac{e^{2x}}{2} \pm \frac{e^{3x}}{3} - \dots$$

De esta manera, la expresión (g) toma la forma más sencilla

$$w_2 = \frac{Py\eta}{4\pi D} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a}(y+\eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x-\xi)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a}(y+\eta) - \cos \frac{\pi}{a}(x+\xi)} \quad (i)$$

El valor de los momentos de empotramiento en $y = 0$ se obtiene fácilmente derivando (i) y el resultado es

$$(M_y)_{y=0} = -\frac{P\eta}{2a} \operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{a} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x-\xi)} - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a}(x+\xi)} \right) \quad (j)$$

Cuando la carga concentrada tiende hacia el borde empotrado $y = 0$ el valor dado para (j) en general tiende a cero. No obstante, si $\xi = x$ y $\eta \rightarrow 0$ simultáneamente, entonces (j) da

$$(M_y)_{y=0} = -\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{P\eta}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi\eta}{2a} \frac{1 - \cos \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} \right) = -\frac{P}{\pi} \quad (k)$$

Finalmente, si $\eta = 0$, el momento M_y es nulo.

Por último consideremos una carga P (fig. 109) uniformemente repartida sobre un segmento de línea recta de longitud u . El momento debido a esta carga en el centro del borde empotrado se obtiene fácilmente con ayuda de la expresión (j). Sustituyen-

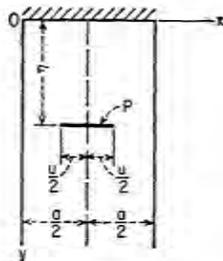


FIG. 109

do $x = a/2$ y P por $Pd\xi/u$ en esta expresión e integrando, obtenemos para el momento buscado:

$$\begin{aligned} (M_x)_{x=a/2, y=0} &= -\frac{2P\eta}{au} \operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{a} \int_{(a-u)/2}^{(a+u)/2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a} d\xi}{\operatorname{ch} \frac{2\pi\eta}{a} + \cos \frac{2\pi\xi}{a}} \\ &= -\frac{2P\eta}{\pi u} \operatorname{aretg} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi u}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{a}} \end{aligned}$$

La tabla 50 da la posición de la carga que crea el momento de empotramiento mayor en valor absoluto y el valor de este momento para diversos valores de la relación u/a .

TABLA 50

Máximos momentos de empotramiento en $x = a/2$ debidos a una carga repartida en un segmento de longitud u (fig. 109)

u/a	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ξ/a	0	0,147	0,203	0,272	0,312	0,321	0,343
M_y/P	-0,318	-0,296	-0,275	-0,237	-0,204	-0,172	-0,143

Placas rectangulares continuas

52. Placas continuas simplemente apoyadas

Las losas de forjado utilizadas en los edificios y apoyadas en los muros exteriores, tienen a menudo apoyos intermedios tales como las vigas, medianerías o columnas.

En el primer caso tenemos las placas continuas propiamente dichas; en el caso de columnas sin vigas intermedias tenemos el caso de *techos fungiformes*. La losa de forjado está ordinariamente subdividida por sus soportes en varios vanos. En este capítulo, no se tendrá en consideración más que las placas continuas con los vanos de forma rectangular.

Comencemos por un caso que admite una solución rigurosa deducida de los métodos ya utilizados en el capítulo anterior. Una placa rectangular de anchura b y de longitud $a_1 + a_2 + a_3$ apoyada a lo largo de sus bordes y también a lo largo de las líneas intermedias ss y tt (v. fig. 110) forma una

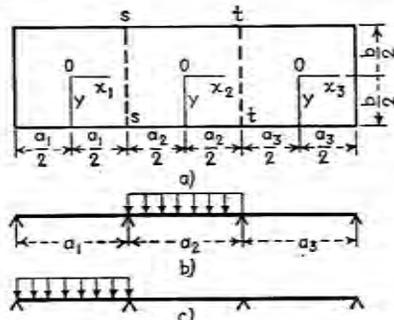


FIG. 110

placa continua, simplemente apoyada de tres vanos. Se supone que los soportes intermedios no ceden a la presión en la dirección transversal y no presentan ninguna resistencia al giro de la placa en torno a los ejes ss y tt . Con estas hipótesis la flexión de cada vano de la placa se calcula fácilmente combinando las soluciones conocidas para placas rectangulares cargadas transversalmente, simplemente apoyadas con las de las placas rectangulares flexadas con los momentos repartidos a lo largo de los bordes.

Comencemos por el caso simétrico en que

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

y el vano central está uniformemente cargado, mientras que los otros dos no lo están [fig. 110 b)]. Asimilando este vano central a una placa rectangular simplemente apoyada y utilizando la expresión (b) del apartado 44 (v. pág. 222) se llega a que la pendiente de la deformada en el borde $x_2 = a/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = \frac{2qb^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} - \text{th} \beta_m \right) \quad (a)$$

donde $\beta_m = m\pi a/2b$. A causa de la continuidad de la placa aparecen momentos flectores repartidos a lo largo de los bordes $x_2 = \pm a/2$. Por razón de simetría estos momentos pueden ponerse en la forma

$$(M_z)_{x_2=\pm a/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (b)$$

Las flechas w_1 debidas a estos momentos se obtienen mediante la ecuación (173) y la pendiente correspondiente en el borde $x_2 = a/2$ [ec. (e), pág. 223] es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\text{th} \beta_m + \frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} \right) \quad (c)$$

A partir de la condición de continuidad se llega a que la suma de las expresiones (a) y (c) que presentan la pendiente de la placa a lo largo de $x_2 = a/2$, debe ser igual a la pendiente a lo largo de la misma línea de la deformada de la placa en el vano adyacente. Considerando esta última como una placa rectangular simplemente apoyada, flexada por los momen-

tos (b) repartidos a lo largo del borde $x_3 = a/2$, se encuentra la flecha correspondiente a w_2 de la placa utilizando (176) (v. pag. 208) de donde se deduce

$$w_2 = \frac{b^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \beta_m} \left(\beta_m \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi x_3}{b} \right) - \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_m} \left(\beta_m \operatorname{cth} \beta_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi x_3}{b} \right) \right] \quad (d)$$

La pendiente correspondiente en el borde $x_3 = a/2$ es

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right)_{x_3=a/2} = \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m} (-1)^{(m-1)/2} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \left(\operatorname{th} \beta_m + \operatorname{cth} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2 \beta_m} \right) \quad (e)$$

La ecuación para el cálculo de los coeficientes E_m es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_{x_2=a/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right)_{x_2=a/2} = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=a/2}$$

Puesto que la ecuación es válida para cualquier valor de y , se obtiene para cada valor de m la ecuación siguiente:

$$\frac{2qb^3}{\pi^4 D} \frac{1}{m^4} \left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \operatorname{th} \beta_m \right) - \frac{b}{2\pi D} \frac{E_m}{m} \left(\operatorname{th} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} \right) = \frac{b}{4\pi D} \frac{E_m}{m} \left(\operatorname{th} \beta_m + \operatorname{cth} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2 \beta_m} \right) \quad (f)$$

de donde:

$$E_m = \frac{8qb^2}{\pi^3 m^3} \frac{\beta_m - \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch}^2 \beta_m}{3 \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch}^2 \beta_m + \operatorname{cth} \beta_m \operatorname{ch}^2 \beta_m + 3\beta_m - \beta_m \operatorname{cth}^2 \beta_m} \quad (g)$$

Se ve que E_m decrece rápidamente y tiende hacia $-2qb^2/\pi^3 m^3$ cuando m crece. Conociendo los coeficientes E_m calculados mediante (g) se obtienen los valores de los momentos flectores M_x a lo largo de tt mediante la ecuación (b). El valor de este momento en $y = 0$, es decir, en el centro del ancho de la placa, es

$$(M_x)_{x_2=\pm a/2, y=0} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m (-1)^{(m-1)/2}$$

Tomemos por ejemplo $b = a$, tendremos $\beta_m = m\pi/2$ y (g) da

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0,1555 \quad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0,0092 \quad E_5 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0,0020$$

$$(M_x)_{x_2=\pm a/2, y=0} = -0,0381qa^2$$

Los momentos flectores en el centro del vano medio se obtienen fácilmente combinando los momentos flectores de una placa simplemente apoyada sometida a una carga uniforme, con los momentos correspondientes a las flechas w_1 . Sea $a = b$ y $\nu = 0,2$ valor oportuno en el caso del hormigón, se obtiene para los primeros de estos momentos, los valores

$$(M_x)_0 = (M_y)_0 = 0,0479 \times \frac{1,2}{1,3} qa^2 = 0,0442qa^2$$

(v. tabla 8, pág. 141) y para los segundos momentos

$$(M_x)_1 = -0,0067qa^2 \quad \text{y} \quad (M_y)_1 = -0,0125qa^2$$

Además

$$(M_x)_{x_2=0, y=0} = 0,0375qa^2 \quad (M_y)_{x_2=0, y=0} = 0,0317qa^2$$

Si un vano lateral está uniformemente cargado [v. fig. 110 c)] la deformada no es simétrica respecto al eje vertical de simetría de la placa, y las distribuciones de momentos flectores a lo largo de las fibras ss y tt son diferentes. Sean

$$(M_x)_{x_1=a_1/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \quad (h)$$

$$(M_x)_{x_1=a_2/2} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} F_m \cos \frac{m\pi y}{b}$$

Para obtener los coeficientes E_m y F_m , se obtienen dos sistemas de ecuaciones a partir de las condiciones de continuidad de la deformada a lo largo de ss y tt . Considerando el vano cargado y utilizando (a) y (e) hallamos que la pendiente de la deformada en los puntos de apoyo ss para $a_1 = a_2 = a_3 = a$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_{x_1=a/2} = \frac{2qb^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \operatorname{th} \beta_m \right) - \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{m} (-1)^{(m-1)/2} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \left(\operatorname{th} \beta_m + \operatorname{cth} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2 \beta_m} \right) \quad (i)$$

Considerando ahora el vano central como una placa rectangular flexada por los momentos M_x repartidos a lo largo de ss y tt y dados por las series (h) se encuentra, utilizando la ecuación (175) (v. pág. 207)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[(E_m + F_m) \left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} + \text{th} \beta_m \right) + (E_m - F_m) \left(\text{cth} \beta_m - \frac{\beta_m}{\text{sh}^2 \beta_m} \right) \right] \quad (j)$$

De las expresiones (i) y (j) se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente, que permite calcular los coeficientes E_m y F_m .

$$A_m \frac{8qb^2}{\pi^2 m^3} + E_m(B_m + C_m) = -B_m(E_m + F_m) - C_m(E_m - F_m) \quad (k)$$

donde se utiliza la notación siguiente:

$$A_m = \frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} - \text{th} \beta_m \quad B_m = -\left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} + \text{th} \beta_m \right) \quad (l)$$

$$C_m = \frac{\beta_m}{\text{sh}^2 \beta_m} - \text{cth} \beta_m$$

La pendiente de la deformada del vano central en el lado derecho se obtiene utilizando (j)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = -\frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[(E_m + F_m) \left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} + \text{th} \beta_m \right) + (F_m - E_m) \left(\text{cth} \beta_m - \frac{\beta_m}{\text{sh}^2 \beta_m} \right) \right]$$

Esta pendiente debe ser igual a la de la parte adyacente, no cargada, obtenida mediante la expresión (c) sustituyendo E_m por F_m . En este caso, se encuentra el pequeño sistema de ecuaciones que, utilizando las notaciones (l) se escribe

$$B_m(E_m + F_m) + C_m(F_m - E_m) = -(B_m + C_m)F_m \quad (m)$$

Para esta ecuación se obtiene

$$F_m = E_m \frac{C_m - B_m}{2(B_m + C_m)} \quad (n)$$

Remplazando en (k) tendremos

$$E_m = A_m \frac{8qa^2}{\pi^2 m^3} \frac{2(B_m + C_m)}{(C_m - B_m)^2 - 4(B_m + C_m)^2} \quad (o)$$

Sustituyendo en cada caso particular A_m, B_m, C_m , por sus valores numéricos obtenidos en (l) se encuentran E_m y F_m y entonces mediante (h) se

obtienen los momentos flectores a lo largo de ss y tt . Tomemos, por ejemplo, $b = a$. Entonces $\beta_m = m\pi/2$ y se encuentra a partir de (l)

$$A_1 = -0,6677 \quad B_1 = -1,1667 \quad C_1 = -0,7936$$

$$A_3 = -0,9983 \quad B_3 = -1,0013 \quad C_3 = -0,9987$$

Para m mayor que 3, se puede tomar con suficiente aproximación

$$A_m = B_m = C_m = -1$$

Sustituyendo estos valores en (o) se obtienen

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^2} 0,1720 \quad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^2 3^2} 0,2496 \quad E_5 = -\frac{8qa^2}{\pi^2 5^2} 0,2500$$

El momento en el centro del apoyo ss es

$$(M_x)_{x_2=a/2, y=0} = E_1 - E_3 + E_5 - \dots = -0,0424qa^2$$

y para el centro del apoyo tt

$$(M_x)_{x_2=a/2, y=0} = F_1 - F_3 + F_5 - \dots = 0,0042qa^2$$

Conociendo los momentos flectores a lo largo de las líneas de apoyo, se obtienen las flechas de la placa en cada parte superponiendo las flechas debidas a la carga transversal a las flechas debidas a los momentos en los apoyos.

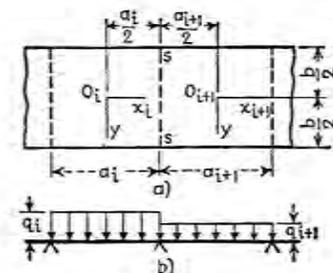


Fig. 111

Los momentos flectores en los vanos de la placa continua se obtienen de la misma manera. Calculando, por ejemplo, los momentos en el centro del vano medio y para $\nu = 0,2$ se llega a los valores

$$(M_x)_{x_2=0, y=0} = -0,0039qa^2$$

$$(M_y)_{x_2=0, y=0} = -0,0051qa^2$$

Se pueden generalizar fácilmente las ecuaciones obtenidas para tres vanos al caso de varios vanos. De este modo se obtiene¹ una ecuación semejante a la ecuación de los tres momentos de las vigas continuas. Consideremos dos vanos adyacentes i e $i+1$ de longitudes a_i y a_{i+1} (fig. 111). Repre-

¹ B. G. Galerkin ha estudiado este problema de un modo algo diferente, véase su *Collected Papers*, vol. 2, pág. 410, Moscú, 1953.

sentando los valores correspondientes de las funciones (I) por A_m^i, B_m^i, C_m^i y $A_m^{i+1}, B_m^{i+1}, C_m^{i+1}$. Los momentos flectores a lo largo de tres líneas consecutivas de apoyo, se expresan por

$$M_x^{i-1} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m^{i-1} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

$$M_x^i = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m^i \cos \frac{m\pi y}{b}$$

$$M_x^{i+1} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m^{i+1} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

Considerando el vano $i+1$ y utilizando (a) y (j) se encuentra

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x_{i+1}} \right)_{x_{i+1} = -(a_{i+1})/2} &= -\frac{2q_{i+1}b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} A_m^{i+1} \\ &- \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} [(E_m^i + E_m^{i+1})B_m^{i+1} \\ &- (E_m^{i+1} + E_m^i)C_m^{i+1}] \quad (p) \end{aligned}$$

De la misma manera para el vano se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)_{x_i = a_i/2} &= \frac{2q_i b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} A_m^i \\ &+ \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} [(E_m^{i-1} + E_m^i)B_m^i \\ &+ (E_m^i - E_m^{i-1})C_m^i] \quad (q) \end{aligned}$$

Y por la condición de continuidad se llega a que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_{i+1}} \right)_{x_{i+1} = -(a_{i+1})/2} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)_{x_i = a_i/2}$$

Sustituyendo (p) y (q) en esta ecuación y observando que se debe cumplir para todo valor de y , se obtiene, para calcular E_m^{i-1}, E_m^i y E_m^{i+1} la ecuación

$$\begin{aligned} E_m^{i-1}(B_m^i - C_m^i) + E_m^i(B_m^i + C_m^i + B_m^{i+1} + C_m^{i+1}) \\ + E_m^{i+1}(B_m^{i+1} - C_m^{i+1}) = -\frac{8b^3}{\pi^3 m^3} (q_{i+1}A_m^{i+1} + q_i A_m^i) \quad (177) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (k) y (m) obtenidas anteriormente, son casos particulares de esta ecuación. Podemos escribir tantas ecuaciones (177) como soportes intermedios se tengan, y no tiene ninguna dificultad calcular los momentos en estos apoyos intermedios si los extremos de la placa están simplemente apoyados.

El primer miembro de (177) es válido no sólo para cargas uniformes sino también para cualquier clase de carga simétrica respecto a los ejes x e y en cada vano. De todas formas, el segundo miembro de (177) tiene un valor diferente para cada clase de carga, como en la ecuación de los tres momentos de las vigas.

El problema de las placas continuas, que soportan cargas concentradas, puede tratarse de modo parecido. En el caso particular de un número infinito de vanos iguales con una carga única aplicada en un punto cualquiera de un solo vano, se obtiene la flecha de la placa resolviendo una ecuación en diferencias finitas para los coeficientes incógnitas E_m^i como funciones del índice i .

Si los apoyos intermedios son elásticos, el valor de los coeficientes E_m viene dado por ecuaciones de cinco términos, semejantes a las ecuaciones de cinco momentos de la teoría de vigas continuas³. Se puede tener en consideración en la flexión de las placas continuas, la rigidez a la torsión de las vigas de apoyo que tienden a reducir los giros de la placa a lo largo del apoyo³.

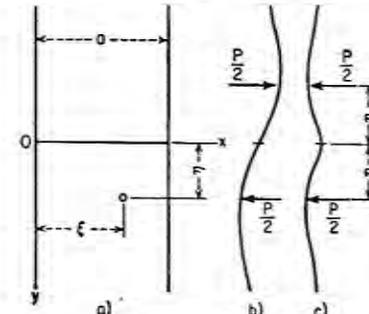


FIG. 112

Consideremos, como ejemplo más sencillo de una placa continua bajo carga concentrada, una placa de longitud infinita simplemente apoyada a lo largo de los bordes $x=0, x=a$, continua sobre el apoyo $y=0$ y sometida a una carga concentrada P en un punto cualquiera $x=\xi, y=\eta$ [fig. 112 a)]. La carga y las condiciones de contorno se cumplen superponiendo los casos de las figuras 112 b) y c). En el caso de la figura 112 b) cada vano de la placa está simplemente apoyado a lo largo de $y=0$

¹ Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 9, 1938, pág. 396.

² V. P. Jensen, ha estudiado el caso de las placas continuas apoyadas sobre las vigas elásticas, véase *Univ. Illinois Bull.*, 81, 1938; igualmente N. M. Newmark, *Univ. Illinois Bull.*, 84, 1938.

³ Véase K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 4.ª ed., Viena, 1956, pág. 274.

y se encuentra la superficie elástica por la expresión $|w|/2$ donde el signo está escogido según que y sea mayor o menor que cero; w_1 representa las flechas (a) del apartado 5 y $|y - \eta|$. En el caso de la figura 112 c) cada vano está empotrado a lo largo del borde $y = 0$ y las flechas correspondientes son $w/2$ siendo dado w por (h) en el apartado 51. Tenemos, por lo tanto

$$w = w_1 + \frac{w_2}{2} \text{ para } y \geq y > 0$$

$$= \frac{w_2}{2} \text{ para } y < 0$$

y los momentos a lo largo de $y = 0$ serán la mitad de los momentos de empotramiento de una placa semiinfinita que tiene un lado empotrado, estos últimos momentos están dados por (j) del apartado 51.

53. Estudio aproximado de las placas continuas con vanos iguales¹

La disposición de una losa de entramado implica una continuidad no solamente en una dirección, como se supone en el apartado 52, sino en dos direcciones perpendiculares. La figura 113 muestra una losa continua de este género. Los vanos y el espesor de la placa son iguales para todos los vanos rectangulares. Cada vano soporta un peso muerto q_0 y eventualmente

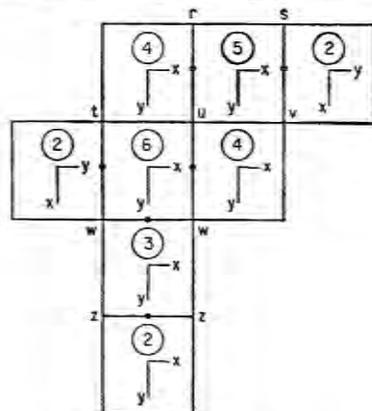


FIG. 113

una sobrecarga p , estas dos cargas están repartidas uniformemente sobre el área del tablero el mayor valor de la carga será $q = q_0 + p$.

Comencemos por calcular los momentos flectores en los apoyos intermedios de la placa del entramado. Los cálculos prueban que estos momen-

¹ El método que sigue se debe esencialmente a A. Marcus, véase su obra *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, Berlin, 1929. De todas formas, los coeficientes de las tablas 51 a 56 están basados en las soluciones consideradas en el capítulo 6 y sobre el valor del coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ mientras que Marcus utiliza en el mismo caso, una teoría simplificada de las placas rectangulares y supone $\nu = 0$.

tos dependen principalmente de la carga de los dos tableros adyacentes y la influencia de la carga de los tableros alejados, es despreciable. Es posible entonces calcular los momentos en los apoyos suponiendo la carga q uni-

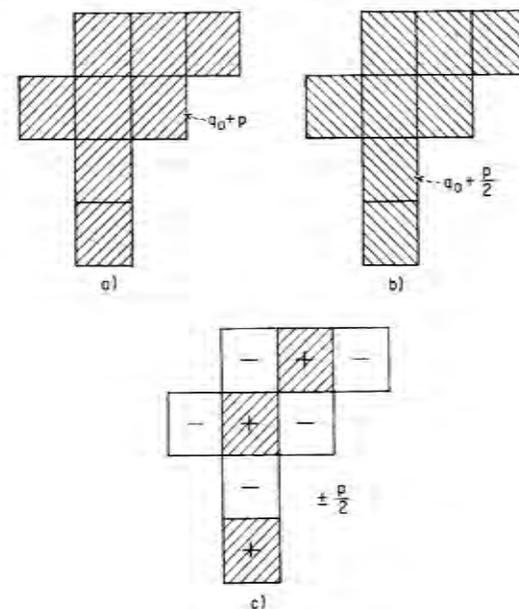


FIG. 114

formemente repartida sobre toda la losa [fig. 114 a)]. Despreciaremos primeramente los giros de la placa a lo largo de los soportes intermedios, cada vano de la figura 114 a) estará en las mismas condiciones que una placa rectangular empotrada en los apoyos intermedios y simplemente apoyada en el contorno exterior de la losa.

Los máximos momentos flectores de placas en tales condiciones de contorno han sido tabulados (v. tablas 51 a 56). En los encabezamientos de estas tablas se han indicado las seis combinaciones posibles de bordes apoyados y empotrados de una placa rectangular.

Se deben situar los ejes x e y de cada tablero de la losa (fig. 113) de acuerdo con las figuras 116 a 121; la luz a se medirá en la dirección del eje x y b en la dirección del eje y . Los seis casos de las figuras 116 a 121 están numerados de 1 a 6 y los índices correspondientes están ligados a los coeficientes de las tablas 51 a 56.

Para aclarar la utilización de las tablas, calcularemos el momento flector en el centro del apoyo tw (fig. 113). Para ello calculamos el momento de

empotramiento de los dos vanos adyacentes al apoyo. Para el tablero 2 se utilizará la fórmula

$$\bar{M}_{2y} = \delta_2 q l^2 \quad (a)$$

y la tabla 52, siendo l la menor de las luces a y b del vano. De la misma manera se obtiene el momento de empotramiento del vano 6 por la expresión

$$\bar{M}_{6z} = \gamma_6 q l^2 \quad (b)$$

utilizando la tabla 56. El momento buscado está dado entonces con una exactitud suficiente por

$$M_{6z} = \frac{1}{2}(\bar{M}_{2y} + \bar{M}_{6z}) \quad (c)$$

y se obtienen de la misma manera los momentos en los otros apoyos intermedios.

Debe notarse que la ecuación (c) no expresa sino un procedimiento del modo más sencillo de distribución de momentos, es decir, un cálculo en el que se desprecian los momentos transmitidos de los otros apoyos, así como la diferencia en los valores de la rigidez de los dos tableros adyacentes. Tal método simplificado está mucho más justificado en el caso de una placa continua que en el de una viga continua.

Consideremos ahora los momentos flectores en el centro del vano 6 (fig. 113) por ejemplo. Se obtiene el reparto de carga más desfavorable para estos momentos superponiendo las cargas de las figuras 114 b y c.

Utilizando la tabla 56, se obtiene la contribución de la carga uniformemente repartida $q_0 + p/2$, a los valores de los momentos, lo que da

$$M'_{6z} = \alpha_6 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) l^2 \quad M'_{6y} = \beta_6 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) l^2 \quad (d)$$

siendo l la menor de las dos dimensiones del vano 6.

Consideremos la influencia de las cargas alternadas [v. fig. 114 c)]. Las condiciones en los bordes de cada vano son las mismas que para una placa simplemente apoyada y los momentos en el centro se calculan fácilmente por medio de la tabla 51 para el caso 1. La carga $+p/2$ actuando sobre el tablero 6, da

$$M''_{6z} = \frac{\alpha_1 p}{2} l^2 \quad M''_{6y} = \frac{\beta_1 p}{2} l^2 \quad (e)$$

y los momentos máximos en el centro del vano 6 son

$$\begin{aligned} M_{6z} &= M'_{6z} + M''_{6z} \\ M_{6y} &= M'_{6y} + M''_{6y} \end{aligned} \quad (f)$$

Para calcular los máximos momentos negativos es suficiente cambiar el signo de la carga en la figura 114 c). Utilizando (d) y (e) tenemos entonces

$$\begin{aligned} M_{6z} &= M'_{6z} - M''_{6z} \\ M_{6y} &= M'_{6y} - M''_{6y} \end{aligned} \quad (g)$$

Como segundo ejemplo de aplicación del método aproximado, calcularemos los momentos flectores de la placa continua de la figura 115, que en el apartado 52 hemos estudiado por un método exacto.

Primeramente se escoge la dirección de los ejes x, y , de acuerdo con las figuras 117 y 118. Supongamos entonces una carga $q = q_0 + p$ uniformemente repartida en toda la placa [fig. 115 b)] y utilizando los coeficientes de las tablas 52 y 53 en los casos 2 y 3, con $b/a = 1$, se obtiene en el centro del apoyo ss el momento

$$M_{ss} = -\frac{0.0840 + 0.0697}{2} (q_0 + p) a^2 = -0.0769 (q_0 + p) a^2 \quad (h)$$

por el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior [ec. (c)]. Utilizando la solución rigurosa, el momento máximo en valor absoluto en ss lo produce la distribución de carga indicada en la figura 115 c). Superponiendo el momento flector obtenido en la página 256, a los calculados en la página 259, el valor máximo exacto del momento M_{ss} resulta ser:

$$M_{ss} = -[0.0381(q_0 + p) + 0.0424(q_0 + p) - 0.0042q_0] a^2$$

o bien

$$M_{ss} = -(0.0805q_0 + 0.0763p) a^2 \quad (i)$$

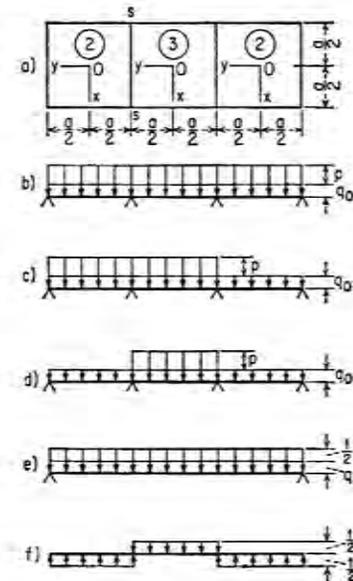


FIG. 115

Pongamos, por ejemplo, $q_0 = q/3$, $p = 2q/3$, (i) da $-0.077qa^2$ comparable al valor $0.0769qa^2$ dado por el método aproximado.

Finalmente, calculamos el máximo momento flector en el centro del vano central, la distribución más desfavorable es la de la figura 115 d).

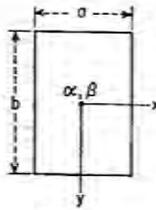


FIG. 116

TABLA 51

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 1
 $\nu = 0,2$, $l = \text{el menor de los valores } a \text{ y } b$

b/a	Centro de la placa		Factor	
	$M_x = \alpha_1 q l^2$ α_1	$M_y = \beta_1 q l^2$ β_1		
0,0	0,0250*	0,1250	$q b^2$	
0,5	0,0367	0,0999		
0,6	0,0406	0,0868		
0,7	0,0436	0,0742		
0,8	0,0446	0,0627		
0,9	0,0449	0,0526		
1,0	0,0442	0,0442		$q a^2$
1,1	0,0517	0,0449		
1,2	0,0592	0,0449		
1,3	0,0660	0,0444		
1,4	0,0723	0,0439		
1,5	0,0784	0,0426		
1,6	0,0836	0,0414		
1,7	0,0885	0,0402		
1,8	0,0927	0,0391		
1,9	0,0966	0,0378		
2,0	0,0999	0,0367		
∞	0,1250	0,0250**		

* $M_{\max} = 0,0364 q b^2$ a 0,486 del borde corto.
 ** $M_{\max} = 0,0364 q a^2$ a 0,48a del borde corto.

Combinando la carga de acuerdo con las figuras 115 e) y f) y utilizando los coeficientes α y β de las tablas 53 y 51, llegamos para estos momentos a las expresiones siguientes

$$M_x = \left[0,0216 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) + 0,0442 \frac{p}{2} \right] a^2 = (0,0216 q_0 + 0,0329 p) a^2 \quad (j)$$

$$M_y = \left[0,0316 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) + 0,0442 \frac{p}{2} \right] a^2 = (0,0316 q_0 + 0,0379 p) a^2$$

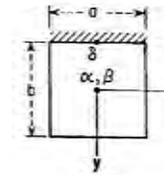


FIG. 117

TABLA 52

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 2
 $\nu = 0,2$, $l = \text{el menor de los valores } a \text{ y } b$

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo	Factor	
	$M_x = \alpha_2 q l^2$ α_2	$M_y = \beta_2 q l^2$ β_2	$\bar{M}_y = \delta_2 q l^2$ δ_2		
0	0,0125	0,0625	-0,1250	$q b^2$	
0,5	0,0177	0,0595	-0,1210		
0,6	0,0214	0,0562	-0,1156		
0,7	0,0249	0,0514	-0,1086		
0,8	0,0272	0,0465	-0,1009		
0,9	0,0294	0,0415	-0,0922		
1,0	0,0307	0,0367	-0,0840		$q a^2$
1,1	0,0378	0,0391	-0,0916		
1,2	0,0451	0,0404	-0,0983		
1,3	0,0525	0,0415	-0,1040		
1,4	0,0594	0,0418	-0,1084		
1,5	0,0661	0,0418	-0,1121		
1,6	0,0722	0,0414	-0,1148		
1,7	0,0780	0,0408	-0,1172		
1,8	0,0831	0,0399	-0,1189		
1,9	0,0879	0,0390	-0,1204		
2,0	0,0921	0,0382	-0,1216		
∞	0,1250	0,0250*	-0,1250		

* $M_{\max} = 0,0387 q a^2$ a 0,80a del borde empotrado.

Es interesante comprobar estos valores aproximados utilizando los resultados de las páginas 257 y 259. Repartiendo de nuevo la carga como indica la figura 115 d) y permutando los índices x e y en los resultados mencionados, tenemos

$$M_x = 0,0317(q_0 + p)a^2 - (0,0051 + 0,0051)q_0 a^2 = (0,0215 q_0 + 0,0317 p) a^2 \quad (k)$$

$$M_y = 0,0375(q_0 + p)a^2 - (0,0039 + 0,0039)q_0 a^2 = (0,0297 q_0 + 0,0375 p) a^2$$

Tomemos de nuevo $q_0 = q/3$ y $p = 2q/3$, obtenemos para los momentos los valores exactos $0,0283 q a^2$ y $0,0349 q a^2$. Las ecuaciones (j) darán para los mismos momentos, los valores aproximados $0,0291 a^2$ y $0,0358 q a^2$.

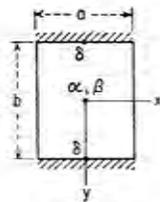


FIG. 118

TABLA 53

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 3
 $\nu = 0,2$, $l =$ el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo	Factor	
	$M_x = \alpha_3 ql^2$ α_3	$M_y = \beta_3 ql^2$ β_3	$M_z = \delta_3 ql^2$ δ_3		
0,0	0,0083*	0,0417	-0,0833	qb^2	
0,5	0,0100	0,0418	-0,0842		
0,6	0,0121	0,0410	-0,0834		
0,7	0,0152	0,0393	-0,0814		
0,8	0,0173	0,0371	-0,0783		
0,9	0,0196	0,0344	-0,0743		
1,0	0,0216	0,0316	-0,0697		qa^2
1,1	0,0276	0,0349	-0,0787		
1,2	0,0344	0,0372	-0,0868		
1,3	0,0414	0,0391	-0,0938		
1,4	0,0482	0,0405	-0,0998		
1,5	0,0554	0,0411	-0,1049		
1,6	0,0620	0,0413	-0,1090	qa^2	
1,7	0,0683	0,0412	-0,1122		
1,8	0,0741	0,0408	-0,1152		
1,9	0,0795	0,0401	-0,1174		
2,0	0,0846	0,0394	-0,1191		
∞	0,1250	0,0250**	-0,1250		

* $M_{\max} = 0,0174qb^2$ a $0,30b$ del borde apoyado.

** $M_{\max} = 0,0387qa^2$ a $0,80a$ del borde empotrado.

El mayor error del método aproximado proviene del hecho de que los máximos momentos positivos no se producen siempre en el centro del vano. Esto está lejos de ser verdad especialmente en el caso de vanos rectangulares claramente alargados. Si b es mucho mayor que a por ejemplo, el momento máximo M_y se produce en el borde menor de la placa rectangular.

Se han indicado en notas al pie de las tablas algunos valores de estos momentos máximos y deben considerarse como los valores menores posibles de las columnas correspondientes, sin tener en cuenta la relación real b/a .

Finalmente se señalará que ni M_x ni M_y son el momento flector máximo en el

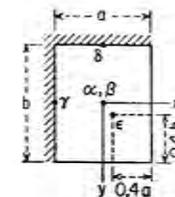


FIG. 119

TABLA 54

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 4*
 $\nu = 0,2$, $l =$ el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo		En $x = 0,1a$ $y = 0,1b$	Factor
	$M_x = \alpha_4 ql^2$ α_4	$M_y = \beta_4 ql^2$ β_4	$M_z = \gamma_4 ql^2$ γ_4	$M_w = \delta_4 ql^2$ δ_4	$M_{\max} = \epsilon_4 ql^2$ ϵ_4	
0,5	0,0191	0,0574	-0,0787	-0,1180	0,0662	qb^2
0,6	0,0228	0,0522	-0,0781	-0,1093	0,0570	
0,7	0,0257	0,0460	-0,0767	-0,0991	0,0501	
0,8	0,0275	0,0396	-0,0746	-0,0882	0,0430	
0,9	0,0282	0,0336	-0,0715	-0,0775	0,0363	
1,0	0,0281	0,0281	-0,0678	-0,0678	0,0305	
1,1	0,0330	0,0283	-0,0766	-0,0709	0,0358	
1,2	0,0376	0,0279	-0,0845	-0,0736	0,0407	
1,3	0,0416	0,0270	-0,0915	-0,0754	0,0452	
1,4	0,0451	0,0260	-0,0975	-0,0765	0,0491	
1,5	0,0481	0,0248	-0,1028	-0,0772	0,0524	
1,6	0,0507	0,0236	-0,1068	-0,0778	0,0553	
1,7	0,0529	0,0224	-0,1104	-0,0782	0,0586	
1,8	0,0546	0,0213	-0,1134	-0,0785	0,0608	
1,9	0,0561	0,0202	-0,1159	-0,0786	0,0636	
2,0	0,0574	0,0191	-0,1180	-0,0787	0,0662	

* Los autores agradecen al National Research Council de Canadá las facilidades que se les han dado para el cálculo de esta tabla.

centro de la placa en el caso no simétrico 4. De todas formas la tabla 54 muestra que la diferencia entre M_{\max} y los mayores valores de M_x y M_y , no sobrepasa el 10 % de los últimos valores y que el método general de la página 263 y 264 está plenamente justificado en el cuarto caso.

La tabla 54 contiene los valores de los momentos máximos M_{\max} que actúan en $x = 0,1a$, $y = 0,1b$ y permiten el dimensionamiento de vanos aislados sin continuidad (fig. 119); para placas rectangulares la dirección e σ_{\max} es prácticamente la de la dimensión menor y para placas cuadradas la de la diagonal $x = -y$. Cuando se quiera obtener una seguridad mayor se podrán utilizar estos valores de M_{\max} para calcular vanos continuos de forma alargada.

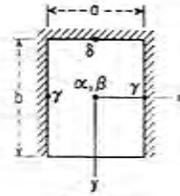


FIG. 120

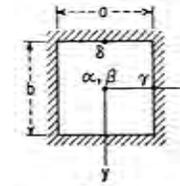


FIG. 121

TABLA 55
Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 5*
 $\nu = 0,2$, $l =$ el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo		Factor
	$M_x = \alpha_s q l^2$ α_s	$M_y = \beta_s q l^2$ β_s	$M_x \gamma_s q l^2$ γ_s	$M_y \delta_s q l^2$ δ_s	
0,5	0,0206	0,0554	-0,0783	-0,114	$q b^2$
0,6	0,0245	0,0481	-0,0773	-0,102	
0,7	0,0268	0,0409	-0,0749	-0,0907	
0,8	0,0277	0,0335	-0,0708	-0,0778	
0,9	0,0274	0,0271	-0,0657	-0,0658	
1,0	0,0261	0,0213	-0,0600	-0,0547	
1,1	0,0294	0,0204	-0,0659	-0,0566	
1,2	0,0323	0,0192	-0,0705	-0,0573	
1,3	0,0346	0,0179	-0,0743	-0,0574	$q a^2$
1,4	0,0364	0,0166	-0,0770	-0,0576	
1,5	0,0378	0,0154	-0,0788	-0,0569	
1,6	0,0390	0,0143	-0,0803	-0,0568	
1,7	0,0398	0,0133	-0,0815	-0,0567	
1,8	0,0405	0,0125	-0,0825	-0,0567	
1,9	0,0410	0,0118	-0,0831	-0,0566	
2,0	0,0414	0,0110	-0,0833	-0,0566	
∞	0,0417	0,0083	-0,0833	-0,0566	

* Los datos de esta tabla se deben principalmente a F. Czerny, *Bautech.-Arch.*, vol. 11, pág. 33, W. Ernest & Sohn, Berlín, 1955.

El método descrito en este apartado es también aplicable si las luces, las rigideces a flexión o las intensidades de carga de un tablero a otro de la placa continua difieren sólo ligeramente. En otros casos se utilizarán métodos más exactos.

De todas formas, debe tenerse en cuenta que la aplicación rigurosa de la teoría al estudio de las losas de piso, continuas, conduce a menudo a cálculos difíciles y la exactitud obtenida es ilusoria teniendo en cuenta varios factores más o menos indeterminados, que afectan al valor de los momentos de la placa. Estos factores son, por ejemplo, la flexibilidad y la rigidez a la torsión de las vigas de apoyo, la influencia de

TABLA 56
Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 6
 $\nu = 0,2$, $l =$ el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo		Factor
	$M_x = \alpha_s q l^2$ α_s	$M_y = \beta_s q l^2$ β_s	$\bar{M}_x = \gamma_s q l^2$ γ_s	$\bar{M}_y = \delta_s q l^2$ δ_s	
0,0	0,0083	0,0417	-0,0571	-0,0833	$q b^2$
0,5	0,0118	0,0408	-0,0571	-0,0829	
0,6	0,0150	0,0381	-0,0571	-0,0793	
0,7	0,0178	0,0344	-0,0569	-0,0736	
0,8	0,0198	0,0299	-0,0559	-0,0664	
0,9	0,0209	0,0252	-0,0540	-0,0588	
1,0	0,0213	0,0213	-0,0513	-0,0513	
1,1	0,0248	0,0210	-0,0581	-0,0538	
1,2	0,0284	0,0203	-0,0639	-0,0554	
1,3	0,0313	0,0193	-0,0687	-0,0563	$q a^2$
1,4	0,0337	0,0181	-0,0726	-0,0568	
1,5	0,0358	0,0169	-0,0757	-0,0570	
1,6	0,0372	0,0157	-0,0780	-0,0571	
1,7	0,0385	0,0146	-0,0799	-0,0571	
1,8	0,0395	0,0136	-0,0812	-0,0571	
1,9	0,0402	0,0126	-0,0822	-0,0571	
2,0	0,0408	0,0118	-0,0829	-0,0571	
∞	0,0417	0,0083	-0,0833	-0,0571	

la coacción de los muros próximos, la anisotropía de la placa misma y la inexactitud en la estimación del valor de constantes, tales como el coeficiente de Poisson ν .

De todas formas se puede simplificar el método de cálculo limitando la serie de Fourier, que representa un momento flector en la placa, a su primer término o sustituyendo los valores reales de los momentos o las pendientes a lo largo de un apoyo cualquiera de la placa por sus valores medios o, finalmente, utilizando el método de distribución de momentos¹.

¹ Para estos métodos, véase C. P. Siess y N. M. Newmark, *Univ. Illinois Bull.*, 43, 1950, donde se ha dado otra bibliografía sobre este asunto. Véase también la memoria de H. M. Westergaard, *Proc. Am. Concrete Inst.*, vol. 22, 1926, que contiene valiosas conclusiones respecto a proyectos de losas continuas.

54. Flexión de placas apoyadas sobre filas de columnas equidistantes (losas fungiformes)

Si las dimensiones de la placa son grandes en comparación con las distancias a y b de las columnas (fig. 122) y la carga transversal está uniformemente repartida, se llega a que la flexión en los vanos interiores de la placa se puede suponer idéntica de modo que se pueda limitar el problema a la flexión de un solo vano. Tomemos los ejes de coordenadas paralelos a las filas de columnas y el origen en el centro del vano, se considera éste como una placa rectangular uniformemente cargada de lados a y b . Por simetría se llega a que la deformada de la placa tiene la forma que indican las líneas de trazos de la figura 122 b). La flecha máxima está en el centro de la placa y la flecha en los vértices es nula. Para simplificar el problema, se supone que las dimensiones de las secciones rectas de las columnas son pequeñas y pueden despreciarse en lo que se refiere a la flecha y los momentos producidos en el centro de la placa¹. Tenemos entonces una placa rectangular uniformemente cargada, apoyada en los

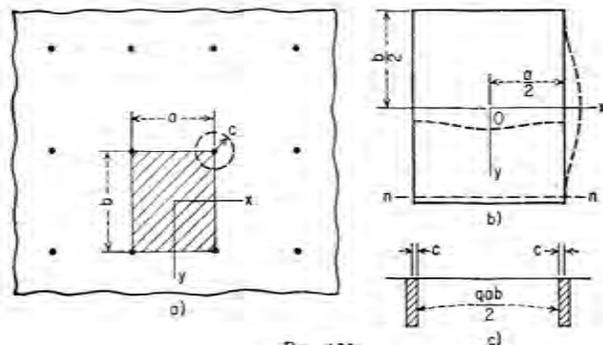


FIG. 122

vértices y se deduce de la simetría que la pendiente de la deformada, en la dirección de la normal al contorno y el esfuerzo cortante son nulos en todos los puntos de los bordes de la placa, salvo en los vértices².

Operando como en el caso de una placa simplemente apoyada (ap. 30) se escribe la flecha total w de la forma

$$w = w_1 + w_2 \quad (a)$$

donde

$$w_1 = \frac{qb^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 \quad (b)$$

¹ Varios autores han estudiado el problema en esta forma simplificada; véase, por ejemplo, A. Nádai, «Über die Biegung durchlaufender Platten», *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, 1922, página 1, y B. G. Galerkin, *Collected Papers*, vol. 2, Moscú, 1953, pág. 29.

² La anulación del momento torsor M_{xy} a lo largo del contorno se sigue del hecho de que la pendiente es nula en la dirección de la normal al contorno.

representa la flecha de una franja uniformemente cargada empotrada en los extremos y $x = b/2$ y satisface la ecuación (103) de la placa así como las condiciones en los bordes

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=\pm a/2} = 0 \quad (Q_x)_{x=\pm a/2} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right)_{x=\pm a/2} = 0 \quad (c)$$

Tomamos la flecha w_2 en forma de una serie

$$w_2 = A_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (d)$$

cada uno de cuyos términos cumple las condiciones (c). Las funciones Y_m deben tomarse de tal manera que cumplan la ecuación homogénea

$$\Delta \Delta w_2 = 0 \quad (e)$$

y de tal manera que w cumpla las condiciones de contorno en los bordes $y = \pm b/2$. La ecuación (e) y las condiciones de simetría se cumplen escribiendo (d) de la forma

$$w_2 = A_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (f)$$

donde las constantes A_0 , A_m y B_m se determinan por las condiciones de borde a lo largo de $y = b/2$. A partir de la condición relativa a la pendiente, es decir

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0$$

se encuentra fácilmente que

$$B_m = -A_m \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{\alpha_m + \operatorname{th} \alpha_m} \quad (g)$$

donde, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (h)$$

Consideremos ahora las condiciones de contorno relativas al esfuerzo cortante, se ve que sobre una sección normal nm [fig. 122 b)] de la placa, muy próxima al contorno $y = b/2$ el esfuerzo Q_y es igual a cero en todos los puntos, salvo en los próximos a la columna y en estos puntos Q_y es infinitamente grande de modo que transmite a la columna la carga finita $\frac{1}{2} qab$ [fig. 122 c)] a lo largo de una distancia infinitamente pequeña entre $x = a/2 - c$ y $x = a/2 + c$. Representando Q_y por una serie trigonométrica que por simetría tiene la forma

$$Q_y = C_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (i)$$

recordando que

$$Q_v = 0 \text{ para } 0 < x < \frac{a}{2} - c$$

y

$$\int_{a/2-c}^{a/2} Q_v dx = -\frac{qab}{4}$$

se encuentra por el método ordinario de cálculo que

$$C_0 = -\frac{qab}{2a} = -\frac{P}{2a}$$

y

$$C_m = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} Q_v \cos \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{P}{a} (-1)^{m/2}$$

donde $P = qab$ es la carga total sobre un vano de la placa. Sustituyendo C_0 y C_m por su valor en la serie (i) la requerida condición de contorno se escribe:

$$\begin{aligned} (Q_v)_{y=b/2} &= -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=b/2} \\ &= -\frac{P}{a} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{m/2} \cos \frac{m\pi x}{a} - \frac{P}{2a} \end{aligned}$$

Sustituyendo w por su valor en (a) y recordando que el segundo término entre paréntesis se anula al tener en cuenta la condición de contorno $\partial w / \partial y$ se obtiene

$$-D \left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} \right)_{y=b/2} = -\frac{P}{a} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{m/2} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

donde utilizando (f) se encuentra que

$$D \frac{m^3 \pi^3}{a^2} [(A_m + 3B_m) \text{sh } \alpha_m + B_m \alpha_m \text{ch } \alpha_m] = \frac{P}{a} (-1)^{m/2} \quad (j)$$

Resolviendo las ecuaciones (g) y (j) obtenemos para A_m y B_m

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{Pa^2}{2m^3\pi^3 D} (-1)^{m/2} \frac{\alpha_m + \text{th } \alpha_m}{\text{sh } \alpha_m \text{ th } \alpha_m} \\ B_m &= \frac{Pa^2}{2m^3\pi^3 D} (-1)^{m/2} \frac{1}{\text{sh } \alpha_m} \end{aligned} \quad (k)$$

La flecha de la placa toma la forma

$$\begin{aligned} w &= \frac{qb^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right)^2 + A_0 + \frac{qa^2b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2} \cos \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \text{sh } \alpha_m \text{ th } \alpha_m} \\ &\quad \left[\text{th } \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \text{sh } \frac{m\pi y}{a} - (\alpha_m + \text{th } \alpha_m) \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \right] \quad (l) \end{aligned}$$

La constante A_0 puede ahora determinarse a partir de la condición de que la flecha se anule en los vértices de la placa. Por consiguiente

$$(w)_{x=0, y=b/2} = 0$$

y

$$A_0 = -\frac{qa^2b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \text{th } \alpha_m}{\text{th}^2 \alpha_m} \right) \quad (m)$$

La flecha en cualquier punto de la placa, se calcula mediante las expresiones (l) y (m). La flecha máxima se produce evidentemente en el centro de la placa, donde se tiene

$$\begin{aligned} (w)_{x=0, y=0} &= \frac{qb^4}{384D} - \frac{qa^2b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2} \alpha_m + \text{th } \alpha_m}{m^3 \text{sh } \alpha_m \text{ th } \alpha_m} \\ &\quad - \frac{qa^2b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \text{th } \alpha_m}{\text{th}^2 \alpha_m} \right) \quad (n) \end{aligned}$$

La tabla 57 da los valores de esta flecha calculados para varios valores de la relación b/a . En ella se encuentran también los momentos flectores $(M_x)_{x=0, y=0}$ y $(M_y)_{x=0, y=0}$ calculados mediante las fórmulas (101) y (l) de la flecha. Se ve que para $b > a$ el máximo momento flector en el centro de la placa difiere poco del momento en el centro de una franja uniformemente cargada de longitud b empotrada en los extremos.

TABLA 57
Flechas y momentos en el centro de un vano (fig. 122)
 $\nu = 0,2$

b/a	$w = \alpha \frac{qb^4}{D}$ α	$M_x = \beta qb^2$ β	$M_y = \beta_1 qb^2$ β_1
1,0	0,00581	0,0331	0,0331
1,1	0,00487	0,0261	0,0352
1,2	0,00428	0,0210	0,0363
1,3	0,00387	0,0175	0,0375
1,4	0,00358	0,0149	0,0384
1,5	0,00337	0,0131	0,0387
2,0	0,00292	0,0092	0,0411
∞	0,00260	0,0083	0,0417

Las reacciones concentradas que actúan en los puntos de apoyo de la placa y los momentos calculados a partir de (l) resultan infinitos. Podemos sin embargo suponer que las reacciones están repartidas uniformemente sobre el área de un círculo que representa la sección recta de la columna. En este caso, los momentos flectores que aparecen en el centro del área de apoyo son finitos y se calculan por un método

similar al utilizado en el caso de placas rectangulares (v. pág. 169). Llevándolo a la figura 122, el resultado viene dado por las fórmulas¹:

$$(M_x)_{z=a/2, y=b/2} = M_0 - \frac{qb^2}{4} \left[\frac{\nu}{3} + (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{n\pi b}{a}} \right] \quad (o)$$

$$(M_y)_{z=a/2, y=b/2} = M_0 + \frac{qb^2}{4} \left[-\frac{1}{3} + (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{n\pi b}{a}} + (1-\nu) \frac{a}{\pi b} \right]$$

En estas expresiones

$$M_0 = -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{2\pi c(1-q^2)(1-q^4) \dots} + 1 \right]$$

$q = e^{-\pi b/a}$ y c representa el radio del círculo que se supone pequeño en comparación a las luces a y b de los vanos. Realizando los cálculos se pueden reducir las ecuaciones (o) a la forma

$$(M_x)_{z=a/2, y=b/2} = -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} - (\alpha + \beta\nu) \right]$$

$$(M_y)_{z=a/2, y=b/2} = -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} - (\beta + \alpha\nu) \right] \quad (p)$$

donde α y β son coeficientes dados por la tabla 58 para varios valores de la relación b/a .

TABLA 58

Valores de los coeficientes α y β de las ecuaciones (p) que dan los momentos sobre los apoyos

b/a	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0
α	0,811	0,822	0,829	0,833	0,835	0,836	0,838
β	0,811	0,698	0,588	0,481	0,374	0,268	-0,256

Los momentos flectores correspondientes al centro de las columnas cuyas secciones transversales son rectangulares se calculan también suponiendo que las reacciones están uniformemente repartidas sobre los rectángulos rayados de la figura 123 que representa las secciones rectas de las columnas². En el caso de vanos y columnas cuadradas tenemos $u/a =$

$\nu/b = k$, y los momentos en el centro de las columnas y en el centro de los vanos se obtienen por las siguientes fórmulas:

$$(M_x)_{z=y=a/2} = (M_y)_{z=y=a/2} = -\frac{(1+\nu)qa^2}{4} \left[\frac{(1-k)(2-k)}{12} \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2 k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^3 \text{sh } m\pi} \text{sh } \frac{m\pi k}{2} \text{ch } \frac{m\pi(2-k)}{2} \text{sen } m\pi k \right] \quad (q)$$

$$(M_x)_{z=y=0} = (M_y)_{z=y=0} \\ = \frac{(1+\nu)qa^2}{4} \left[\frac{1-k^2}{12} + \frac{1}{\pi^2 k^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\text{sh } m\pi k \text{ sen } m\pi k}{m^3 \text{sh } m\pi} \right] \quad (r)$$

La tabla 59 da para diferentes valores de k y para $\nu = 0,2$ los valores de estos momentos así como los de los momentos en los puntos medios de las distancias entre las columnas, obtenidos por las mismas ecuaciones.

TABLA 59

Momentos flectores y esfuerzo cortante máximo en un vano cuadrado de una placa uniformemente cargada (fig. 123)
 $\nu = 0,2$

u/a	k	$(M_x)_{z=y=a/2} = \beta qa^2$ β	$(M_x)_{z=y=0} = \beta_1 qa^2$ β_1	$(M_x)_{z=y=a/2} = \beta_2 qa^2$ β_2	$(M_x)_{z=y=0} = \beta_3 qa^2$ β_3	$Q_{\text{máx}} = \gamma qa^2$ γ
0		$-\infty$	0,0331	-0,0185	0,0512	∞
0,1		-0,196	0,0329	-0,0182	0,0508	2,73
0,2		-0,131	0,0321	-0,0178	0,0489	
0,3		-0,0933	0,0308	-0,0170	0,0458	0,842
0,4		-0,0678	0,0289	-0,0158	0,0415	
0,5		-0,0487	0,0265	-0,0140	0,0361	0,419

Se ve que los momentos en las columnas son mucho mayores que los del centro del vano y su valor depende enormemente de las dimensiones de la sección recta de las columnas. Los momentos en el centro del tablero permanecen prácticamente constantes para valores de k inferiores a 0,2. Por consiguiente, la solución anterior, obtenida suponiendo que las reacciones están concentradas en los vértices de los tableros, es suficientemente aproximada para la parte central de los vanos.

Se puede también hacer mediante las expresiones (p) el cálculo aproximado de los momentos dados por la ecuación (q) en forma de serie. Para ello se utiliza la ecuación (c) (ap. 37) y se sustituye

$$c = \frac{u}{\sqrt{2}} e^{\pi/4-1} = 0,57u$$

es decir, el radio de un círculo equivalente al área del cuadrado dado de lado u en las ecuaciones (p). En el caso particular de vanos cuadrados, los resultados numéricos obtenidos difieren muy poco de los dados en la segunda columna de la tabla 59.

¹ Dadas por A. Nádai en su libro *Elastische Platten*, Berlin, 1925, pág. 154.

² Este caso ha sido estudiado por S. Woinowsky-Krieger, véase *Z. angew. Math. Mech.*, volumen 14, pág. 13, 1934. Véase también los estudios de V. Lewy, *Bauingenieur*, vol. 1, página 631, 1920, y K. Frey, *Bauingenieur*, vol. 7, pág. 21, 1926.

Los esfuerzos cortantes son máximos en el centro de los lados de las columnas en los puntos m de la figura 123. Este máximo en el caso de vanos cuadrados, depende de la relación k y se puede escribir en la forma $Q = \gamma qa^2$.

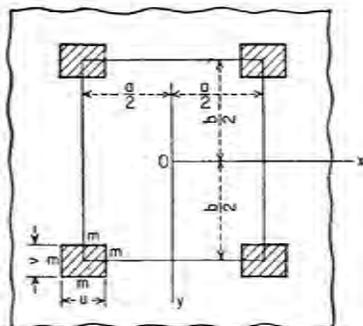


Fig. 123

La tabla 59 da varios valores numéricos del factor γ . Es interesante señalar que hay una diferencia de sólo alrededor del 10 % entre estos valores y los valores medios, obtenidos dividiendo la carga total $qa^2(1 - k^2)$ de la columna por el perímetro $4ka$ de su sección recta.

La carga uniforme en toda placa da la condición más desfavorable para las columnas. Para obtener el momento flector máximo en el centro de un vano, la carga deberá estar distribuida como indican las partes rayadas de la figura 124 a).

La solución se obtiene entonces fácilmente combinando el reparto de carga uniforme de intensidad $a/2$ de la figura 124 b) con la carga $q/2$ de signo combinado, en los vanos consecutivos indicada en la figura 124 c).

La deformada en este último caso es evidentemente la misma que la de una franja uniformemente cargada de longitud a , simplemente apoyada en los extremos. Tomemos, por ejemplo, el caso de vanos cuadrados y utilicemos los valores de la tabla 57, se encuentra para el centro de un vano (fig. 124 a)

$$(w)_{z=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,00581 \frac{a^4}{D} + \frac{5}{384} \frac{q}{2} \frac{a^4}{D} = 0,00942 \frac{qa^4}{D}$$

$$(M_x)_{z=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,0331a^2 + \frac{1}{16} qa^2 = 0,0791qa^2$$

$$(M_y)_{z=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,0331a^2 + \frac{0,2}{16} qa^2 = 0,0291qa^2$$

Además, a partir de la tabla 59 se llega a que

$$(M_x)_{z=0, y=a/2} = \frac{1}{2} q \cdot 0,0512a^2 + \frac{1}{8} qa^2 = 0,0881qa^2$$

Los resultados anteriores se obtienen suponiendo que la placa está libre para girar en los puntos de apoyo. Ordinariamente las columnas están rigidamente unidas con la placa y, en el caso de un reparto de carga (v. fig. 124) producen, no sólo reacciones verticales sino también momentos que disminuyen la flexión de los vanos. Para determinar valores más exactos de los momentos flectores bajo carga alternada, es preciso un estudio conjunto de las losas y las columnas como estructura única¹.

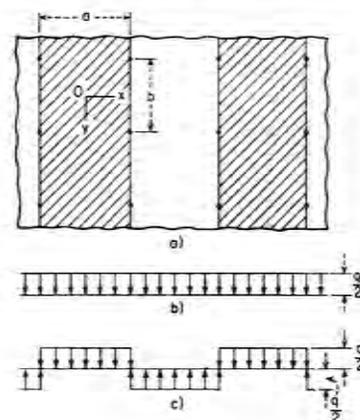


Fig. 124

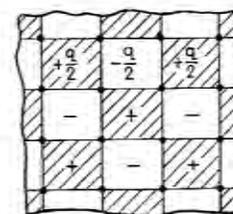


Fig. 125

El caso en el que un vano está uniformemente cargado mientras que los cuatro vanos adyacentes no están cargados, se obtiene superponiendo a una carga $q/2$ otra carga $q/2$ de signo alternado como indica la figura 125. En este caso cada vano se encuentra en las mismas condiciones que una placa simplemente apoyada y la tabla 8 nos dará entonces todos los datos necesarios relativos a la flexión. Para un vano cuadrado, se encuentra en su centro

$$(w)_{z=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,00581 \frac{a^4}{D} + \frac{1}{2} q \cdot 0,00406 \frac{a^4}{D} = 0,00494 \frac{qa^4}{D}$$

$$(M_x)_{z=y=0} = (M_y)_{z=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,0331a^2 + \frac{1}{2} q \cdot 0,0479 \cdot \frac{1,2}{1,3} a^2 = 0,0387qa^2$$

El caso de una losa infinitamente grande, sometida a cargas concentradas iguales, aplicadas en el centro de cada vano, se trata prácticamente de la misma manera que el caso anterior, es decir, utilizando la doble periodicidad de las flechas de la placa².

¹ El método a utilizar ha sido expuesto en varias publicaciones; véase, por ejemplo, H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe*, pág. 310, Berlín, 1932.

² V. Lewe ha estudiado este problema en su obra *Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatte*, Berlín, 1926, y también P. Pozzati, *Rev. Math. Univ. Parma*, vol. 2, pág. 123, 1951.

Se ha estudiado también el problema de la flexión de las losas fungiformes uniformemente cargadas, de tableros oblicuos¹.

55. Losa fungiforme con nueve vanos y losa con dos bordes libres

Hasta aquí se ha supuesto siempre una extensión infinita de losa. Ahora consideraremos una placa simplemente apoyada sobre los muros exteriores, que forman el contorno cuadrado de la placa y sobre cuatro columnas intermedias (fig. 126). Por simetría se llega a que una carga de intensidad q , uniformemente repartida produce iguales reacciones k en las columnas que

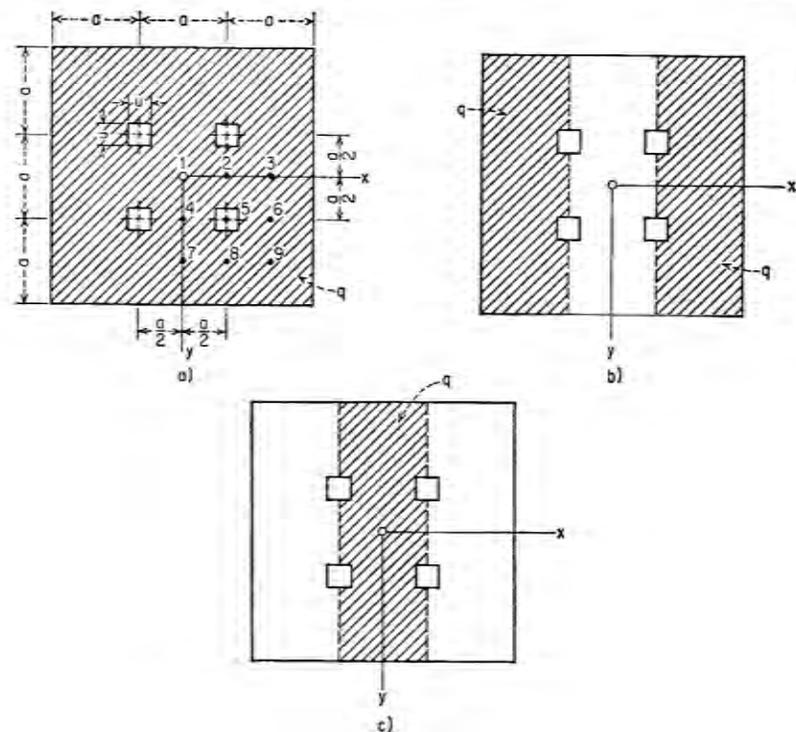


Fig. 126

podemos considerar como accesorias en la construcción dada, estáticamente indeterminada. Si retiramos todas las columnas, se obtiene una placa cuadrada simplemente apoyada que soporta una carga dada q . Las flechas w_0 debidas a esta carga en el centro de las columnas se calculan fácilmente

¹ Véase V. I. Blokh, *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, núm. 5, vol. 73, pág. 45, 1950.

mediante la teoría del capítulo 5. Retiremos ahora la carga q y repartamos una carga $R = 1$ (que actúa hacia abajo) uniformemente sobre cada área cuadrada de lado u , se obtienen nuevas flechas w_1 en los mismos puntos $x = \pm a/2, y = \pm a/2$ que anteriormente. Puesto que en el caso real estos puntos no descienden, se llega a que $w_0 - R w_1 = 0$ que da $R = w_0/w_1$. Basta ahora combinar el efecto de la carga uniforme q con el efecto de cuatro reacciones conocidas sobre los momentos flectores de la placa cuadrada de lado $3a$.

En el caso de una carga parcial como las indicadas en las figuras 126 b) y c), se superpone la mitad de los momentos obtenidos antes a los momentos de una placa, simplemente apoyada de dimensiones a por $3a$, bajo una carga uniformemente repartida $\pm q/2$. La tabla 60 nos da los valores de los momentos flectores calculados por Marcus¹ para esta clase de problemas. La reacción de una columna es, en este caso, $R = 1196qa^2$. Se ha estudiado de la misma forma la flexión de una placa infinita que está apoyada no sólo sobre los bordes paralelos sino también sobre una o varias filas de columnas equidistantes².

TABLA 60

Coefficientes β para el cálculo de momentos flectores $M = \beta qa^2$ en una placa cuadrada simplemente apoyada con cuatro columnas interiores (fig. 126)

$u/a = 0,25, v = 0,2$

Punto	$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{a}$	Carga a		Carga b		Carga c	
			M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
1	0,0	0,0	0,021	0,021	-0,048	-0,004	0,069	0,025
2	0,5	0,0	-0,040	0,038	-0,020	0,019	-0,020	-0,019
3	1,0	0,0	0,069	0,025	0,093	0,027	-0,024	-0,002
4	0,0	0,5	0,038	-0,040	-0,036	-0,036	0,074	-0,004
5	0,5	0,5	-0,140	-0,140	-0,070	-0,070	-0,070	-0,070
6	1,0	0,5	0,074	-0,004	0,092	0,014	-0,018	-0,018
7	0,0	1,0	0,025	0,069	-0,028	0,017	0,052	0,052
8	0,5	1,0	-0,004	0,074	-0,002	0,037	-0,002	0,037
9	1,0	1,0	0,053	0,053	0,066	0,044	-0,013	0,009

Se puede resolver también, sin ninguna dificultad el caso de flexión, de una placa larga rectangular apoyada únicamente sobre dos líneas de columnas equidistantes (fig. 127) para varios tipos de cargas. Comencemos por el caso de una placa flexada por momentos M_y representados por la serie

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = M_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

¹ *Die Theorie elastischer Gewebe*; véase también Lewy, *op. cit.* N. J. Nielsen ha estudiado el caso de una placa cuadrada con un apoyo intermedio, *Bestemmelse of Spaendinger i Plader*, página 217, Copenhagen, 1920.

² Véase a este respecto K. Grein, *Pilzdecken*, Berlin, 1948.

Puesto que no hay carga transversal, la deformada de la placa puede tomarse en forma de la serie

$$w = A_0 + A_1 \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

cuyos coeficientes deben determinarse por las siguientes condiciones de contorno

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=\pm b/2} = M_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

$$D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=\pm b/2} = 0$$

y también por el hecho de que la flecha se anula en las columnas. Sustituyendo (b) en las ecuaciones (c) se encuentra

$$A_1 = -\frac{M_0}{2D}$$

$$A_m = -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D} \frac{(1 + \nu) \operatorname{sh} a_m - (1 - \nu) a_m \operatorname{ch} a_m}{(3 + \nu)(1 - \nu) \operatorname{sh} a_m \operatorname{ch} a_m - a_m(1 - \nu)^2} \quad (d)$$

$$B_m = -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D} \frac{\operatorname{sh} a_m}{(3 + \nu) \operatorname{sh} a_m \operatorname{ch} a_m - a_m(1 - \nu)}$$

Combinando estos resultados con la solución (l), apartado 54, se puede estudiar la flexión de una placa [v. fig. 127 a)] sometida a la acción de una carga uniformemente repartida. Para ello se calculan los momentos flectores M_y por las expresiones (l) y utilizando (101) se encuentra

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = -\frac{qb^2}{12} - \frac{qab}{2\pi} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2}}{m} \left[\frac{1 + \nu}{\operatorname{th} a_m} - \frac{\alpha_m(1 - \nu)}{\operatorname{sh}^2 a_m} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

Igualando este momento al momento (a) cambiado de signo, se obtienen los valores de M_0 y E_m que llevados a las ecuaciones (d) dan las constantes A , A_m y B_m . Sumando la expresión (b) con estos valores de las constantes, a la expresión (l) del apartado 54, se obtiene la solución buscada para una placa uniformemente cargada [fig. 127 a)].

Combinando esta solución con la de una franja de longitud b uniformemente cargada, simplemente apoyada, que está dada por la ecuación

$$w = -\frac{q}{24D} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \left(\frac{5}{4} b^2 - y^2 \right)$$

Se obtiene la solución del caso de la placa flexada por una carga uniformemente repartida a lo largo de los bordes como indica la figura 127 b).

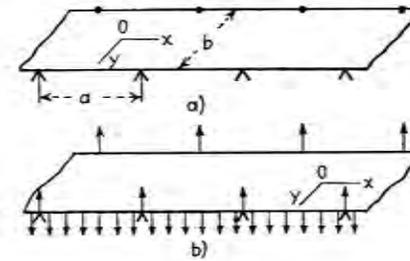


FIG. 127

56. Influencia de la unión rígida con el soporte sobre los momentos de una losa fungiforme.

En el estudio de la flexión de losas fungiformes se ha supuesto siempre que las reacciones de las columnas están concentradas en ciertos puntos o repartidas uniformemente sobre ciertas áreas que representan la sección transversal de las columnas o de sus capiteles. Por regla general, las losas de hormigón están rigidamente fijadas a las columnas como indica la figura 128.

Para estudiar los momentos en estas uniones rígidas, comenzaremos por el caso de una columna circular, siendo c el radio de su sección transversal. El cálculo de los momentos flectores mediante (l) (ap. 54) muestra¹ que en el caso de un vano cuadrado ($a = b$) y para pequeños valores de c/a , los momentos flectores en la dirección radial, se anulan prácticamente a lo largo de un círculo de radio $e = 0,22a$ [fig. 122 a)]. Así, pues, la parte de la placa en torno a la columna y en el interior de este círculo, está

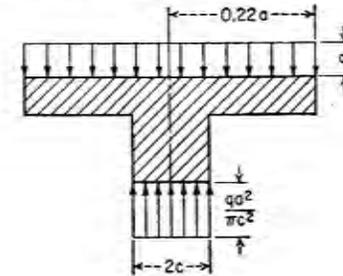


FIG. 128

en las condiciones de una placa anular simplemente apoyada a lo largo de un círculo $r = 0,22a$ y empotrada a lo largo del círculo $r = c$ con desplazamiento transversal de un círculo con respecto al otro. Por consiguiente la tensión de flexión máxima alrededor de la columna puede obtenerse utilizando las fórmulas (75) obtenidas anteriormente para las placas circulares (v. pág. 80) y combinando los casos 3 y 8 de la figura 36.

¹ A. Nádai realizó estos cálculos; véase su libro *Elastische Platten*, pág. 156, Berlin, 1925.

Se debe a F. Tölke¹ un estudio más minucioso del mismo problema. La tabla 61 da los resultados numéricos obtenidos por Tölke para un vano cuadrado y para $c/a = 0,1$ (fig. 129); esta misma tabla da los valores de los momentos flectores para el mismo caso, calculados a partir de la teoría ordinaria.

Tabla 61

Coefficientes β para el cálculo de momentos flectores $M = \beta qa^2$ de un vano cuadrado uniformemente cargado en una losa fungiforme

$$r = 0,2$$

Momento flector	Situación	Columna circular (fig. 129)		Columna cuadrada (fig. 130)	
		Unión rígida con la columna	Teoría ordinaria	Unión rígida con la columna	Teoría ordinaria
$M_x = M_y$	$x = a/2, y = a/2$	0,0292	0,0323	0,0264	0,0321
M_x	$x = a/2, y = 0$	0,0399	0,0494	0,0348	0,0487
M_y	$x = a/2, y = 0$	-0,0161	-0,0179	-0,0146	-0,0178
$M_x = M_y$	$x = 0, y = 0$	-0,143	-0,131
M_x	$x = u/2, y = 0$	-0,0626	-0,0803
M_y	$x = u/2, y = u/2$	$-\infty$	-0,0480
M_x	$r = c$	-0,1682	-0,0629		

Se ve que una unión rígida entre losa y columna tiende a aumentar en valor absoluto los momentos de apoyo y a reducir los momentos positivos de la losa.

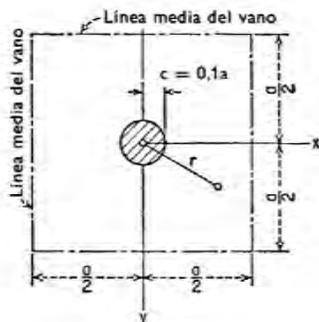


FIG. 129

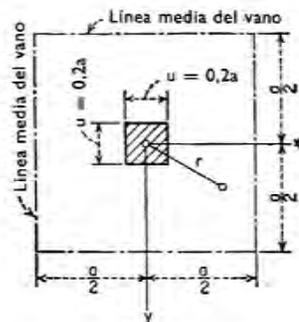


FIG. 130

La misma tabla da también los momentos para una losa fungiforme, fija rigidamente a una columna de sección transversal cuadrada² (fig. 130). En este caso, las tensiones infinitamente grandes que se producen en los ángulos de las columnas, tienen un carácter altamente localizado. Prácticamente, se limitan a una fisuración del hormigón bajo tracción y a un alargamiento local de la armadura de acero.

¹ F. Tölke, *Ingr.-Arch.*, vol. 5, pág. 187, 1934.

² Véase S. Woinowsky-Krieger, *J. Appl. Mechanics*, vol. 21, pág. 263, 1954.

Se puede llegar por este estudio a que: 1) los valores reales de los momentos flectores de una losa fungiforme junto a las columnas están generalmente comprendidas entre los valores dados por la tabla 61 para unión rígida y las dadas por la teoría ordinaria y 2) las columnas circulares aseguran una distribución más uniforme de los momentos de empotramiento que las columnas con sección de apoyo cuadrada³.

³ Véase T. Haas, «Conception et calcul des planchers a dalles champignons», Paris, 1950. La distribución de tensiones en losas fungiformes ha sido estudiada experimentalmente por M. Roš y A. Eichinger, *Proc. Congr. Concrete and Reinforced Concrete*, Lieja, 1930; por R. Camnade y R. L'Hermite, *Ann. Inst. tech. bâtiment et trav. publ.*, febrero 1936, y más recientemente por J. G. Hageman, *Ingenieur*, vol. 65, junio 1953.

Placas sobre cimentación elástica

Tabla 62
Valores de cimentación

Módulo k en kg/cm						
3 4 5 6 7 8 9 10 15 20						
Características del suelo como cimiento, sub-base o base						
Cimiento muy malo	Cimiento malo	Cimiento de aceptable a bueno	Cimiento excelente	Buena sub-base	Buena base	Base ópti.
G = Grava	P = Mal graduado				GW	
S = Arena	L = Compresibilidad baja o media				GC	
M = Arena muy fina, limo	H = Compresibilidad alta				GP	
C = Arcilla					GF	
F = Finos, partículas inferiores a 0,1 mm					SW	
O = Orgánico					SC	
W = Bien graduado		SP				
		SF				
	CH	ML				
	OH	CL				
		OL				
	MH					

En el caso particular en que la placa soporta una carga P en su centro¹, q es nulo en toda la superficie de la placa salvo en el centro. Introduciendo la notación

$$\frac{k}{D} = \frac{1}{l^4} \tag{a}$$

la ecuación (178) deberá ser

$$l^4 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + w = 0 \tag{b}$$

Puesto que k se expresa en kilogramos por centímetro cúbico y D en kilogramos por centímetro, la cantidad l tiene la dimensión de una longitud. Para simplificar el estudio posterior, es conveniente introducir variables adimensionales utilizando las notaciones

$$\frac{w}{l} = z \quad \frac{r}{l} = x \tag{c}$$

Entonces (b) deberá ser

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right) + z = 0 \tag{d}$$

Utilizando el símbolo Δ para

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \tag{e}$$

$$\Delta \Delta z + z = 0$$

se escribe

¹ Este problema fue estudiado por H. Hertz, *Wiedeymann's Ann. Phys. u. Chem.*, vol. 22, página 449, 1884; véase también *Gesammelte Werke*, vol. 1, pág. 288, 1895, y A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, vol. 5, pág. 103, 1928. Es justo señalar que las investigaciones de Hertz corresponden en su mayor parte al problema de una placa flotante más que al de una placa sobre cimentación elástica. Entonces, en este caso, la hipótesis relativa a la constante k se sustituye, siendo k entonces el peso específico del líquido.

57. Flexión simétrica respecto al centro

Una placa cargada transversalmente puede descansar sobre una cimentación elástica, como en el caso de una carretera de hormigón o una pista de aterrizaje. Comenzaremos el estudio de estos problemas, por la hipótesis más sencilla de que la intensidad de la reacción del terreno de apoyo es proporcional a las flechas w de la placa. La expresión kw da esta intensidad. La constante k expresada en kilogramos por centímetro cúbico, se llama *módulo de cimentación*. El valor numérico del módulo depende en gran parte de las propiedades del terreno de apoyo; en el caso de una losa de pavimento de gran extensión, este valor se puede estimar por medio del diagrama de la tabla 62¹.

Comenzaremos por el caso de una placa circular sobre la cual la carga está repartida simétricamente respecto al centro. Utilizando la ecuación (58), sumaremos $-kw$, reacción del terreno, a la carga transversal q . Así se llega a la ecuación diferencial de la placa flexada

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q - kw}{D} \tag{178}$$

¹ Fundada en la clasificación de suelos de Casagrande. Esta tabla no puede sustituir los ensayos de placa de carga. Para más información, véase *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.*, volumen 113, pág. 901, 1948. Véase también K. Terzaghi, *Geotechnique*, vol. 5, pág. 297, 1955. (Harvard Soil Mechanics Series, núm. 51).

Esta es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en la que la solución general se escribe en la forma siguiente

$$z = A_1 X_1(x) + A_2 X_2(x) + A_3 X_3(x) + A_4 X_4(x) \quad (f)$$

donde A_1, \dots, A_4 son las constantes de integración y las funciones X_1, \dots, X_4 son cuatro soluciones independientes de la ecuación (e).

Tratemos ahora de encontrar para (e) una solución en forma de serie de potencias. Sea $a_n x^n$ un término de esta serie. De donde, derivando,

$$\Delta(a_n x^n) = n(n-1)a_n x^{n-2} + na_n x^{n-2} = n^2 a_n x^{n-2}$$

y

$$\Delta\Delta(a_n x^n) = n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4}$$

Para cumplir (e), es preciso que cada término $a_n x^n$ de la serie tenga un término correspondiente $a_{n-4} x^{n-4}$ de tal manera que

$$n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4} + a_{n-4} x^{n-4} = 0 \quad (g)$$

Teniendo en cuenta esta notación, todos los términos de la serie se anulan cuando la serie se sustituye en (e); por consiguiente la serie, si es convergente, representa una solución particular de la ecuación. De la ecuación (g) se deduce,

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2} \quad (h)$$

Recordando que

$$\Delta\Delta(a_0) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta\Delta(a_2 x^2) = 0 \quad (i)$$

se puede llegar a que hay dos series que cumplen (e), a saber

$$X_1(x) = 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots$$

y

$$X_2(x) = x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \frac{x^{14}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} + \dots \quad (j)$$

Observando las notaciones (c) se puede ver que para pequeños valores de la distancia r , es decir para puntos próximos al punto de aplicación de la carga P , la cantidad x es pequeña y las series (j) convergen rápidamente. Se puede ver también que las derivadas sucesivas de las series (j) permanecen finitas en el punto de aplicación de la carga ($x = 0$). Esto indica que las series solas no son suficientes para representar las condiciones tensionales en el punto de aplicación de la carga donde, como se ha visto en los casos estudiados anteriormente, los momentos flectores se hacen infinitos.

Por esta razón la solución particular X_3 de la ecuación (e), se tomará en la forma

$$X_3 = X_1 \ln x + F_3(x) \quad (k)$$

donde $F_3(x)$ es una función de x que puede escribirse también en forma de serie de potencias. Por derivación, se encuentra

$$\Delta\Delta X_3 = \frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x \Delta\Delta X_1 + \Delta\Delta F_3(x)$$

y sustituyendo z por X_3 en (e), se obtiene

$$\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x (\Delta\Delta X_1 + X_1) + \Delta\Delta F_3(x) + F_3(x) = 0$$

Puesto que X_1 satisface (e) y está representado por la primera de las series (j), se obtiene, para determinar $F_3(x)$ la ecuación siguiente:

$$\Delta\Delta F_3(x) + F_3(x) = -\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} = -4 \left(-\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot x^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \right) \quad (l)$$

Tomando $F_3(x)$ en forma de la serie:

$$F_3(x) = b_4 x^4 + b_8 x^8 + b_{12} x^{12} + \dots \quad (m)$$

y sustituyendo esta serie en (l), se obtienen los coeficientes b_4, b_8, b_{12} , de tal manera que se cumpla la ecuación resultante. Recordando que

$$\Delta\Delta(b_4 x^4) = 4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4$$

se encuentra, igualando a cero la suma de los términos que no contengan x , que

$$4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4 = 4 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2}$$

donde

$$b_4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 4^4} = \frac{3}{128}$$

Igualando a cero la suma de los términos que contienen x^4 , se obtiene,

$$b_8 = -\frac{25}{1\,769\,472}$$

En general, se encuentra

$$b_n = (-1)^{n/4-1} \frac{1}{n^2(n-2)^2} \left[b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot n^2} \right]$$

Así, la tercera solución particular de (e), es

$$X_3 = X_1 \ln x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1\,769\,472} x^8 + \dots \quad (n)$$

La cuarta integral particular X_4 de la ecuación (e), se obtiene de la misma manera tomando

$$X_4 = X_2 \ln x + F_4(x) = X_2 \ln x + 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} x^8 - \frac{1}{10^2 \cdot 8^2} \left(4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} + 4 \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot 10^2} \right) x^{10} + \dots \quad (o)$$

Sustituyendo las soluciones particulares (j), (n) y (o) en (f), se obtiene la solución general de (e) en la forma siguiente

$$z = A_1 \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) + A_2 \left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) + A_3 \left[\left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \ln x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \right] + A_4 \left[\left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \ln x + \frac{5}{3456} x^6 - \frac{1540 \cdot 10^{-4}}{442368} x^{10} + \dots \right] \quad (p)$$

Quedan por determinar entonces, en cada caso particular, las constantes de integración A_1, \dots, A_4 de manera que satisfagan las condiciones de contorno.

Consideremos el caso en el que el borde de una placa circular de radio a está enteramente libre. Utilizando la expresión (52) para los momentos radiales y la expresión (55) para los esfuerzos cortantes radiales Q_r , se escriben las condiciones de borde

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} &= 0 \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} &= 0 \end{aligned} \quad (q)$$

Además de estas dos condiciones, tenemos otras dos condiciones válidas en el centro de la placa, a saber, la flecha en el centro debe ser finita y la suma de los esfuerzos cortantes repartidos sobre la superficie lateral de un cilindro circular, infinitamente pequeño, situado en el centro de la placa, debe ser igual a la fuerza concentrada P . De la primera de estas condiciones, resulta que la constante A_3 de la solución general (p), se anula. La segunda condición da

$$\left(\int_0^{2\pi} Q_r r d\theta \right)_{r=\epsilon} + P = 0 \quad (r)$$

o bien, utilizando, la notación (a)

$$-kl^4 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=\epsilon} 2\pi\epsilon + P = 0 \quad (s)$$

donde r es el radio del cilindro infinitamente pequeño. Sustituyendo w por lz en esta ecuación y utilizando la expresión (p) de z , se encuentra que para un valor infinitamente pequeño de x , igual a ϵ/l , la ecuación se reduce a

$$-kl^4 \frac{4A_4}{l\epsilon} 2\pi\epsilon + P = 0$$

de donde se deduce

$$A_4 = \frac{P}{8\pi kl^3} \quad (t)$$

Conociendo los valores de las constantes A_3 y A_4 , las otras dos constantes A_1 y A_2 se obtienen a partir de las ecuaciones (q). Para las dimensiones dadas de la placa y para módulos dados de la placa y de la cimentación, estas dos ecuaciones se transforman en dos ecuaciones lineales en A_1 y A_2 .

Tenemos, por ejemplo, una placa de radio $a = 13$ cm y en la que la rigidez es tal que

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = 13 \text{ cm}$$

Se aplica en el centro, una carga P de forma que

$$A_4 = \frac{P}{8\pi kl^3} = 102 \cdot 10^{-5}$$

Utilizando el valor de A_4 y sustituyendo w por lz , se encuentra mediante (p) y tomando $x = a/l = 1$, que las ecuaciones (q) dan

$$\begin{aligned} 0,500A_1 + 0,250A_2 &= 4,062A_4 = 4,062 \cdot 102 \cdot 10^{-5} \\ 0,687A_1 - 8,483A_2 &= 11,09A_4 = 11,09 \cdot 102 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

De donde

$$A_1 = 86 \cdot 10^{-4} \quad A_2 = -64 \cdot 10^{-5}$$

Sustituyendo estos valores en (p) y no conservando más que los términos que contengan x con una potencia de cuarto orden como máximo, se obtiene la expresión siguiente de la flecha:

$$w = lz = 13 \left[86 \cdot 10^{-4} \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \right) - 64 \cdot 10^{-5} x^2 + 102 \cdot 10^{-5} x^3 \ln x \right]$$

La flecha en el centro ($x = 0$) es entonces

$$w_{\max} = 111,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

y la flecha en el contorno ($x = 1$) es,

$$w_{\min} = 101,7 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

La diferencia entre estas dos flechas es comparativamente pequeña y la distribución de presión sobre la cimentación difiere muy poco de una distribución uniforme.

Si se toma el radio de la placa doble ($a = 26$ cm) con los mismos valores de rigidez D y k , x deberá ser igual a 2 en el contorno y las ecuaciones (q) se reducirán

$$\begin{aligned} 0,826A_1 + 1,980A_2 &= 1,208A_4 \\ 2,665A_1 - 5,745A_2 &= 16,37A_4 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones dan

$$A_1 = 3.93A_4 = 400 \cdot 10^{-5} \quad A_2 = -1.03A_4 = -105 \cdot 10^{-5} \quad (u)$$

La flecha calculada según (p) es

$$w = lz = 13 \left\{ 400 \cdot 10^{-5} \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \right) - 105 \cdot 10^{-5} \left(x^2 - \frac{x^6}{576} \right) + 102 \cdot 10^{-5} \left[\ln x \left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} \right) + \frac{5}{3,456} x^6 \right] \right\}$$

Las flechas en el centro y en el contorno de la placa son respectivamente

$$w_{\max} = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \quad \text{y} \quad w_{\min} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

Se ve entonces que si el radio de la placa es doble que l la distribución de presión sobre la cimentación está lejos de ser uniforme. Se indicará en el apartado 80 la aplicación del método de la energía de deformación, al problema de la flexión de una placa sobre cimentación elástica.

58. Aplicación de las funciones de Bessel al problema de la placa circular

La solución general (f) de la ecuación (e) del apartado anterior se puede también expresar mediante las funciones de Bessel. Para ello, introducimos en la ecuación (e), una nueva variable $\xi = x\sqrt{i}$, se llega así a la ecuación

$$\Delta' \Delta' z - z = 0 \quad (a)$$

en la que Δ' sustituye a

$$\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}$$

La ecuación (a) es entonces equivalente a

$$\Delta'(\Delta' z + z) - (\Delta' z + z) = 0 \quad (b)$$

y también a

$$\Delta'(\Delta' z - z) + (\Delta' z - z) = 0 \quad (c)$$

Por consiguiente, la ecuación (a) se cumple para las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel

$$\Delta' z + z = \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} + z = 0 \quad (d)$$

así como para las soluciones de la ecuación

$$\Delta' z - z = \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} - z = 0 \quad (e)$$

que se transforma en (d) cuando se sustituye ξ por $i\xi$. Por consiguiente combinando (d) y (e), la solución puede escribirse en la forma

$$z = B_1 I_0(x\sqrt{i}) + B_2 I_0(xi\sqrt{i}) + B_3 K_0(x\sqrt{i}) + B_4 K_0(xi\sqrt{i}) \quad (f)$$

siendo I_0 y K_0 respectivamente las funciones de Bessel de primera y segunda especie y de argumento imaginario, mientras que B_1, B_2, \dots son constantes arbitrarias. Siendo el argumento x real, todas las funciones de (f) son complejas. Para separar la parte

real de la solución, introduciremos otras cuatro funciones utilizadas por primera vez por lord Kelvin y definidas por las relaciones¹.

$$\begin{aligned} I_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ber } x \pm i \text{ bei } x \\ K_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ker } x \pm i \text{ kei } x \end{aligned} \quad (g)$$

Poniendo además

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= C_1/l & B_1 - B_2 &= -C_2 i/l \\ B_3 + B_4 &= C_4/l & B_3 - B_4 &= -C_3 i/l \end{aligned}$$

donde las nuevas constantes C_1, C_2, \dots son reales, se obtiene la expresión siguiente para las flechas de la placa

$$w = C_1 \text{ber } x + C_2 \text{bei } x + C_3 \text{kei } x + C_4 \text{ker } x \quad (h)$$

Todas estas funciones están tabuladas² siendo reales para los valores reales del argumento.

Para pequeños valores del argumento tenemos:

$$\begin{aligned} \text{ber } x &= 1 - x^4/64 + \dots \\ \text{bei } x &= x^2/4 - x^6/2,304 + \dots \\ \text{ker } x &= -\ln x + \ln 2 - \gamma + \pi x^2/16 + \dots \\ \text{kei } x &= -(x^2/4) \ln x - \pi/4 + (1 + \ln 2 - \gamma)x^2/4 + \dots \end{aligned} \quad (i)$$

donde $\gamma = 0,5772157\dots$ es la constante de Euler y $\ln 2 - \gamma = 0,11593\dots$ Para valores grandes del argumento tenemos las expresiones asintóticas

$$\begin{aligned} \text{ber } x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{bei } x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \text{sen}\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{ker } x &\sim \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2x/\pi}} \cos\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right) \\ \text{kei } x &\sim -\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2x/\pi}} \text{sen}\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned} \quad (j)$$

donde $\sigma = x/\sqrt{2}$.

La solución general (h) se utiliza para el estudio de cualquier flexión simétrica de placa circular con o sin orificio, apoyada sobre cimentación elástica. Las cuatro constantes C , que corresponden generalmente a cuatro condiciones de contorno, deberán determinarse en cada caso particular³.

¹ Véase, por ejemplo, G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, pág. 81, Cambridge, 1948.

² Véase «Tables of Bessel Functions $J_0(z)$ y $J_1(z)$ for Complex Arguments», Columbia University Press, Nueva York, 1943, y «Tables of Bessel Functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for Complex Arguments», Columbia University Press, Nueva York, 1950. Tenemos:

$$\text{ber } x = \text{Re} [J_0(xe^{i\pi/4})] \quad \text{bei } x = -\text{Im} [J_0(xe^{i\pi/4})]$$

$$\text{ker } x = -\frac{\pi}{2} \text{Re} [Y_0(xe^{i\pi/4})] - \frac{\pi}{2} \text{Im} [J_0(xe^{i\pi/4})]$$

$$\text{kei } x = \frac{\pi}{2} \text{Im} [Y_0(xe^{i\pi/4})] - \frac{\pi}{2} \text{Re} [J_0(xe^{i\pi/4})]$$

³ F. Schleicher da varias soluciones particulares de este problema en su libro *Kreisplatten auf elastischer Unterlage*, Berlín, 1926, que contiene también las tablas de las funciones $Z_1(x) = \text{ber } x$, $Z_2(x) = -\text{bei } x$, $Z_3(x) = -(2/\pi) \text{kei } x$ y $Z_4(x) = -(2/\pi) \text{ker } x$ así como las derivadas primeras de éstas. En el apartado 118, se da una tabla abreviada de las funciones Z y de sus derivadas primeras que están representadas por el símbolo ψ .

Nos limitaremos al caso de una placa infinitamente grande que soporta una carga única P en el punto $x = 0$. Consideremos entonces las cuatro funciones que forman la solución (h), las dos primeras aumentan infinitamente con el argumento, de acuerdo con las ecuaciones (j); y la función $\ker x$ se hace infinitamente grande en el origen, como se puede deducir de las ecuaciones (i). Por consiguiente, poniendo $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, la solución (h) se reduce a

$$w = C_3 \ker x \quad (k)$$

Para determinar C_3 calculamos el esfuerzo cortante [v. ec. (193)] mediante las ecuaciones (i):

$$Q_r = -\frac{D}{l^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} \right) = \frac{C_3 D}{l^3} \left(\frac{1}{x} - \frac{\pi x}{8} + \dots \right)$$

Cuando x decrece, Q_r tiende a $C_3 D/l^3 x = C_3 D/l^3 r$. Por otra parte, al repartir la carga P uniformemente sobre la circunferencia de radio r , tenemos $Q_r = -P/2\pi r$. Igualando estas dos expresiones obtenidas para Q_r , tendremos

$$C_3 = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \quad (l)$$

Sustituyendo C_3 en (k), se encuentra finalmente la solución completa del problema de Hertz:

$$w = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \ker x \quad (179)$$

y la reacción correspondiente del terreno de apoyo está dada por $p = kw = wD/l^2$. La figura 131 muestra la variación de estas magnitudes a lo largo de una sección meridiana de la superficie elástica de la placa, junto con curvas similares obtenidas a partir de la teoría que se estudiará en el apartado 61.

En el origen, tenemos $\ker x = -\pi/4$ y la flecha bajo la carga será

$$w_{\max} = \frac{Pl^2}{8D} \quad (180)$$

Para la reacción del suelo en el mismo punto, obtenemos

$$p_{\max} = \frac{P}{8l^2} \quad (181)$$

Si tomamos una placa infinitamente grande con las condiciones de rigidez y de carga supuestas en la página 291, la flecha bajo la carga será

$$w_{\max} = \frac{Pl^2}{8D} = \frac{P}{8kl^2} = \pi l A_4 = (3,14)(13)(102 \cdot 10^{-3}) = 0,042 \text{ cm}$$

comparable a 0,052 cm, obtenida para una placa circular finita de radio $a = 2l$.

El reparto de momentos flectores debido a la carga concentrada, está indicada en la figura 131 c). Se ve que los momentos radiales pasan a ser negativos a una cierta distancia de la carga, siendo su máximo valor absoluto, del orden de $-0,02P$. Los momentos positivos son infinitamente grandes en el origen pero a una distancia pequeña¹ del punto de aplicación de la carga, se puede calcularlos fácilmente escribiendo la función $\ker x$ en la forma (i). Aplicando las expresiones (52) y (53) a la fórmula (179) se encuentra

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \left(\ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) - \frac{1}{2} (1 - \nu) \right] \\ M_t &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \left(\ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) + \frac{1}{2} (1 - \nu) \right] \end{aligned} \quad (182)$$

¹ Comparable a la longitud característica $l = \sqrt{D/k}$.

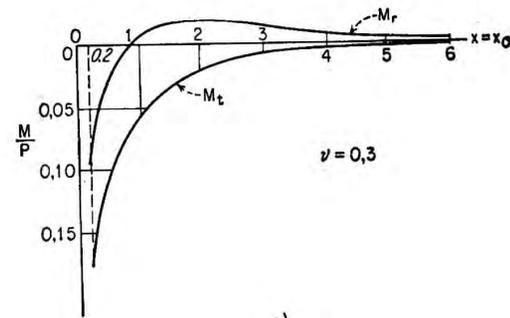
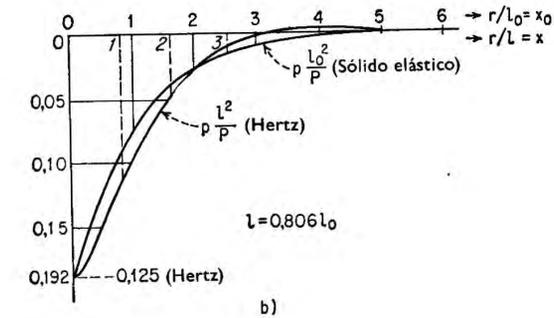
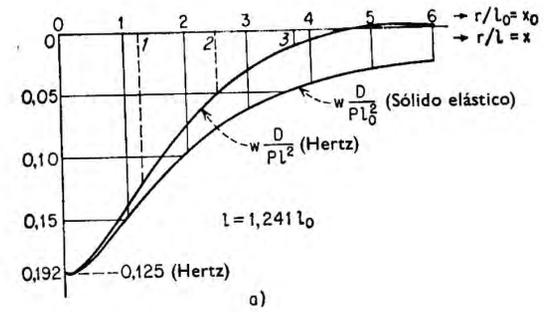


FIG. 131

Comparando estas expresiones con (90) y (91) vemos que el estado tensional de una placa, en las proximidades de la carga en el caso de Hertz, es idéntico al de una placa circular simplemente apoyada de radio $a = 2le^{-\gamma} = 1,123l$, salvo por el momento $M_r = M_t = -P/8\pi(1 - \nu)$ que está superpuesto a los momentos de la placa circular.

Consideremos ahora el caso en el que la carga P está repartida sobre el área de

un círculo de radio c , pequeño con respecto a l . Los momentos flectores en el centro de una placa circular sometida a esta carga, son:

$$M_r = M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} + 1 \right] \quad (m)$$

Esto resulta de la ecuación (83), si despreciamos el término c^2/a^2 con respecto a la unidad. Sustituyendo $a = 2le^{-\gamma}$ en (m) y añadiendo $-P/8\pi(1 - \nu)$, obtenemos el centro del círculo cargado de la placa infinitamente grande, los momentos:

$$M_{\max} = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{2l}{c} - \gamma + \frac{1}{2} \right) \quad (n)$$

o bien

$$M_{\max} = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{l}{c} + 0,616 \right) \quad (183)$$

En el caso de una carga muy concentrada, las tensiones que resultan de (183) deben corregirse mediante la teoría de las placas gruesas. La fórmula para esta tensión corregida se da en la página 302.

En el caso de una carga uniformemente repartida sobre el área de un pequeño rectángulo, se puede operar como se indicó en el apartado 37. En particular, el equivalente de un área cuadrada es un círculo de radio $c = 0,57u$, siendo u la longitud del lado del cuadrado (v. pág. 185). Sustituyendo c por su valor en (183), se encuentra:

$$M_{\max} = \frac{1 + \nu}{4\pi} P \left(\ln \frac{l}{u} + 1,177 \right) \quad (o)$$

Se puede calcular la influencia de cualquier sistema de cargas concentradas, sobre las flechas de las placas infinitas, sumando separadamente las flechas debidas a cada carga.

59. Placas rectangulares y placas continuas sobre cimentación elástica

Un ejemplo de placa apoyada sobre un suelo elástico y al mismo tiempo, sobre un contorno rectangular se indica en la figura 132 que representa una viga de sección transversal rectangular vacía, comprimida sobre una cimen-

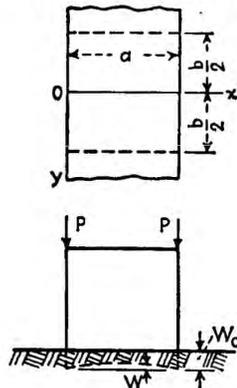


FIG. 132

tación elástica por las cargas P . La placa inferior de la viga, cargada por las reacciones elásticas del suelo, está soportada por los lados verticales de la viga vacía y por los diafragmas transversales representados por las líneas de trazos de la figura. Se supone de nuevo que la intensidad de la reacción p , en un punto cualquiera de esta placa inferior es proporcional a la flecha w en este mismo punto y así $p = kw$, siendo k el módulo de cimentación.

Debido a esta hipótesis, la ecuación en derivadas parciales de la flecha en coordenadas rectangulares, se escribe:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} - \frac{kw}{D} \quad (a)$$

donde q , es la carga transversal.

Comencemos por el caso de la figura 132. Si w_0 representa la flecha en los bordes de la placa inferior y w la flecha de esta placa con respecto al plano de su contorno, la intensidad de la reacción de la cimentación, en un punto cualquiera, es $k(w_0 - w)$ y la ecuación (a) deberá ser,

$$\Delta \Delta w = \frac{k}{D} (w_0 - w) \quad (b)$$

Dispongamos los ejes de coordenadas como indica la figura y supongamos que los bordes de la placa, paralelos al eje y , están simplemente apoyados, y los otros dos empotrados, las condiciones de contorno son

$$(w)_{x=0, x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0, x=a} = 0 \quad (c)$$

$$(w)_{y=\pm b/2} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b/2} = 0 \quad (d)$$

La flecha w se puede escribir en forma de una serie:

$$w = \frac{4kw_0}{D\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (e)$$

La primera serie del segundo miembro es una solución particular de la ecuación (b), que representa la flecha de una franja, simplemente apoyada, descansando sobre una cimentación elástica. La segunda serie es solución de la ecuación homogénea

$$\Delta \Delta w + \frac{k}{D} w = 0 \quad (f)$$

Por consiguiente, las funciones Y_m deberán satisfacer la ecuación diferencial ordinaria:

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right) Y_m = 0 \quad (g)$$

Utilizando las notaciones

$$\frac{m\pi}{a} = \mu_m \quad \frac{k}{D} = \lambda^4 \quad (h)$$

$$2\beta_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} + \mu_m^2 \quad 2\gamma_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} - \mu_m^2 \quad (i)$$

y tomando el resultado de (g) de la forma e^{ν} , se obtiene para r las cuatro raíces siguientes:

$$\beta + i\gamma \quad -\beta + i\gamma \quad \beta - i\gamma \quad -\beta - i\gamma$$

Las cuatro soluciones independientes, particulares de la ecuación (g) son:

$$e^{\beta m y} \cos \gamma m y \quad e^{-\beta m y} \cos \gamma m y \quad e^{\beta m y} \operatorname{sen} \gamma m y \quad e^{-\beta m y} \operatorname{sen} \gamma m y \quad (j)$$

que pueden también escribirse

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \beta m y \cos \gamma m y & \quad \operatorname{sh} \beta m y \cos \gamma m y \\ \operatorname{ch} \beta m y \operatorname{sen} \gamma m y & \quad \operatorname{sh} \beta m y \operatorname{sen} \gamma m y \end{aligned} \quad (k)$$

Se llega, por simetría, a que en nuestro caso, Y_m es una función par de y . Por consiguiente, utilizando las integrales (k) se obtiene

$$Y_m = A_m \operatorname{ch} \beta m y \cos \gamma m y + B_m \operatorname{sh} \beta m y \operatorname{sen} \gamma m y$$

y la flecha de la placa es

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{4kw_0}{D\pi} - \frac{1}{m \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + A_m \operatorname{ch} \beta m y \cos \gamma m y + B_m \operatorname{sh} \beta m y \operatorname{sen} \gamma m y \right] \quad (l)$$

Esta expresión satisface las condiciones de contorno (c). Para cumplir las condiciones (d), deben escogerse las constantes A_m y B_m de forma que satisfagan las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{4kw_0}{D\pi} \frac{1}{m \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + A_m \operatorname{ch} \frac{\beta m b}{2} \cos \frac{\gamma m b}{2} \\ + B_m \operatorname{sh} \frac{\beta m b}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma m b}{2} = 0 \quad (m) \\ (A_m \beta m + B_m \gamma m) \operatorname{sh} \frac{\beta m b}{2} \cos \frac{\gamma m b}{2} \\ - (A_m \gamma m - B_m \beta m) \operatorname{ch} \frac{\beta m b}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma m b}{2} = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores de A_m y B_m en (l), se obtiene la flecha buscada de la placa.

El problema de la placa con los bordes simplemente apoyados se resuelve utilizando la ecuación (a). Tomemos los ejes de coordenadas como en la

figura 59 (pág. 126) y utilizemos las soluciones de Navier, la flecha de la placa será

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (n)$$

De la misma manera, la serie

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (o)$$

representa la distribución de la carga dada, y la serie

$$p = kw = \sum \sum k A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (p)$$

representa la reacción del terreno de asiento. Sustituyendo la serie (n) en el primer miembro y las series (o) y (p) en el segundo miembro de (a), se obtiene

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k} \quad (q)$$

Consideremos, por ejemplo, la flexión de una placa solicitada por una fuerza P concentrada en un punto cualquiera (ξ, η) . En este caso

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi \eta}{b} \quad (r)$$

según la ecuación (b) de la página 133. Sustituyendo (q) y (r) en (n), se obtiene finalmente

$$w = \frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi \eta}{b}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (s)$$

Conociendo la flecha de la placa debida a una fuerza concentrada, la flecha producida por una carga transversal cualquiera se obtiene por el método de superposición. Tomemos, por ejemplo, el caso de una carga uniformemente repartida de intensidad q . Sustituyendo P por $q d\xi d\eta$ en (s) e integrando entre 0 y a , 0 y b , tendremos

$$w = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k \right]} \quad (t)$$

Cuando k es igual a cero, esta flecha se reduce a la dada por la solución de Navier (131) para una placa uniformemente cargada¹.

Consideremos el caso de la figura 133. Una placa grande apoyada sobre una cimentación elástica está sometida a cargas P en puntos equidistantes a lo largo del eje² x .

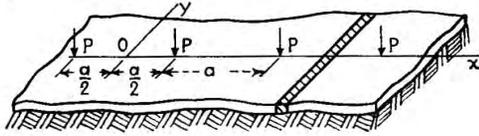


FIG. 133.

Se dispondrán los ejes de coordenadas como indica la figura y se utilizará la ecuación (f) puesto que no hay carga repartida. Tomemos una solución de esta ecuación de la forma

$$w = w_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (u)$$

en la que el primer término

$$w_0 = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}ak} e^{-\lambda y/\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen} \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \right)$$

representa la flecha de una franja de longitud infinita, de ancho unidad, paralela al eje y , cargada en $y = 0$ por la carga P/a [v. ec. (283), pág. 510]. Los otros términos de la serie han de cumplir la condición de simetría, de que la tangente a la deformada en la dirección de las x tenga una pendiente nula en los puntos de aplicación de las cargas y en los puntos equidistantes de los mismos. Se toma para las funciones Y_m las de las integrales particulares (j) que se anulan para valores infinitos de y . Por consiguiente

$$Y_m = A_m e^{-\beta_m y} \cos \gamma_m y + B_m e^{-\beta_m y} \operatorname{sen} \gamma_m y$$

Para cumplir la condición de simetría $(\partial w / \partial y)_{y=0} = 0$ se debe tomar en esta expresión

$$B_m = \frac{\beta_m A_m}{\gamma_m}$$

¹ H. J. Fletcher y C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 361, 1952, han estudiado el caso de una placa rectangular con flechas y momentos aplicados sobre dos bordes opuestos y diversas condiciones en el contorno en los otros dos. En este estudio se dan numerosas curvas.

² H. M. Westergaard ha estudiado este problema; véase *Ingeniøren*, vol. 32, pág. 513, 1923. Westergaard ha estudiado también las aplicaciones prácticas de la solución de este problema para la construcción de losas de pavimento de hormigón, véase *Public Roads*, vol. 7, pág. 25, 1926; vol. 10, pág. 65, 1929, y vol. 14, pág. 185, 1933.

Por consiguiente, introduciendo las nuevas constantes $A'_m = A_m / \gamma_m$, se representan las flechas (w) de la forma siguiente:

$$w = w_0 + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-\beta_m y} (\gamma_m \cos \gamma_m y + \beta_m \operatorname{sen} \gamma_m y) \quad (v)$$

Para calcular las constantes A'_m en función del valor de las cargas P , consideremos el esfuerzo cortante Q_y que actúa a lo largo de la sección normal de la placa según el eje x . Se llega, por simetría, a que Q_y se anula en todos los puntos salvo en los de aplicación de P , donde los esfuerzos cortantes dan una resultante igual a $-P/2$. Se ha demostrado, en el estudio de una distribución semejante de esfuerzos cortantes (ap. 54, pág. 272) que estos esfuerzos pueden ponerse en la forma

$$Q_y = -\frac{P}{2a} - \frac{P}{a} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{m/2} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

El esfuerzo cortante, calculado a partir de (v), es

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} \\ = -\frac{P}{2a} - 2D \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} A'_m \beta_m \gamma_m (\beta_m^2 + \gamma_m^2) \cos \frac{m\pi x}{a}$$

Identificando las dos expresiones de esfuerzos cortantes, tendremos

$$A'_m = \frac{P(-1)^{m/2}}{2aD\beta_m\gamma_m(\beta_m^2 + \gamma_m^2)}$$

donde, utilizando las notaciones (i)

$$A'_m = \frac{P(-1)^{m/2}}{aD\lambda \sqrt{\lambda_m^4 + \mu_m^4}}$$

Sustituyendo en (v), se obtiene finalmente

$$w = w_0 + \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2}}{\sqrt{\lambda_m^4 + \mu_m^4}} \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-\beta_m y} (\gamma_m \cos \gamma_m y + \beta_m \operatorname{sen} \gamma_m y) \quad (w)$$

La flecha máxima se sitúa evidentemente bajo las cargas P y se obtiene sustituyendo $x = a/2$, $y = 0$ en (w), de donde

$$w_{\max} = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}ak} + \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\lambda_m^4 + \mu_m^4}} \quad (184)$$

En el caso particular de una carga P aislada, que actúa sobre una placa infinita, la flecha se obtiene poniendo $a = \infty$ en (184). En este caso, el primer término de la fórmula se anula y utilizando (i), tendremos

$$w_{\max} = \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\pi k} \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4} - \mu_m^2}{\lambda^4 + \mu_m^4}}$$

$$= \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\pi k} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + \mu^4} - \mu^2}{\lambda^4 + \mu^4}} d\mu$$

Utilizando la relación

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{1}{2u\sqrt{u^2+1}}$$

se encuentra

$$w_{\max} = \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\pi k} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}} = \frac{P\lambda^2}{8k} \quad (185)$$

de acuerdo con la ecuación (180). Con ayuda de este valor de la flecha, la presión máxima sobre la cimentación elástica, es

$$(p)_{\max} = kw_{\max} = \frac{P\lambda^2}{8} = \frac{P}{8} \sqrt{\frac{k}{D}} \quad (186)$$

La tensión de tracción máxima se produce en la cara inferior de la placa debajo de la carga. La teoría anterior da un valor infinito al momento flector en este punto y se debe recurrir a la teoría de las placas gruesas (v. ap. 26). En el estudio mencionado de Westergaard, se da la expresión siguiente para el cálculo de la tensión de tracción máxima, en la cara inferior de la placa, establecida mediante la teoría de las placas gruesas:

$$(\sigma_r)_{\max} = 0,275(1 + \nu) \frac{P}{h^2} \log \frac{Eh^3}{kb^4} \quad (x)$$

En esta ecuación h representa el espesor de la placa y

$$b = \sqrt{1,6c^2 + h^2} - 0,675h \quad \text{cuando } c < 1,724h$$

$$= c \quad \text{cuando } c > 1,724h$$

donde c es el radio del círculo sobre el que la carga P se supone uniformemente repartida. Para $c = 0$, estaremos en el caso de una fuerza concentrada.

Para un área cuadrada cargada, de lado u , se sustituye c por $0,57u$ (v. pág. 185).

El caso de cargas equidistantes P , aplicadas a lo largo del borde de una placa semiinfinita puede tratarse de forma parecida (v. fig. 134). La fórmula definitiva para la tensión de tracción máxima, en la cara inferior de la placa, bajo la carga, para a muy grande, es

$$(\sigma_z)_{\max} = 0,529(1 + 0,54\nu) \frac{P}{h^2} \left[\log \left(\frac{Eh^3}{kb^4} \right) - 0,71 \right] \quad (y)$$

donde b se calcula como en el caso anterior y c es el radio del área semi-circular sobre la que P se supone que está uniformemente repartida. Las fórmulas (x) e (y) son muy útiles para proyectar carreteras de hormigón, en este caso, el círculo de radio c representa la superficie de contacto del neumático con la carretera¹.

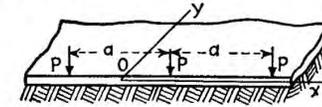


FIG. 134

60. Placa cargada con filas de columnas equidistantes

Como último ejemplo consideremos una placa infinita apoyada sobre cimentación elástica que soporta cargas iguales y equidistantes P , uniformemente repartida cada una de ellas sobre una superficie rectangular u por v , como indica la figura 135. La flexión de tal «forjado-invertido» puede tratarse mediante la solución de Westergaard ya estudiada utilizando una serie sencilla².

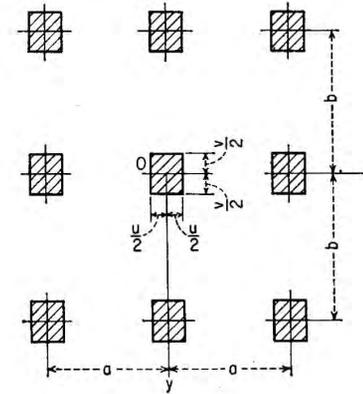


FIG. 135

Mucho más sencilla y también más adecuada, salvo para el caso de cargas fuertemente concentradas, es sin embargo la solución en serie doble por el método de Navier.

¹ El problema de distribución de tensiones en las proximidades de una carga aplicada en la esquina de una placa aún no ha sido resuelto con el mismo grado de seguridad que los problemas vistos. Varias fórmulas empíricas y semiempíricas respecto a este caso pueden encontrarse en *Concrete Pavement Design*, pág. 79, Portland Cement Association, Chicago, 1951. Importantes resultados experimentales sobre este problema han sido obtenidos por M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, vol. 122, pág. 337, 1952. Véase también L. D. Black, *Trans. Eng. Inst. Canada*, vol. 2, pág. 129, 1958, y D. E. Nevel, *ibid.*, pág. 132.

² Véase W. Müller, *Ingr.-Arch.*, vol. 20, pág. 278, 1952, y *Osterr. Ingr.-Arch.*, vol. 6, página 404, 1952.

Las condiciones de simetría nos llevan a representar la carga transversal debida a las columnas mediante una serie de cosenos

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} \quad (a)$$

La intensidad de la carga dada es igual a P/uv dentro de los rectángulos rayados en la figura 135 y cero en el resto. Así procediendo de la forma ordinaria, es decir, multiplicando la ecuación (a) por $\cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} dx dy$ e integrando entre los límites $-a/2, +a/2$ respecto a x y $-b/2, +b/2$ respecto a y , tenemos

$$a_{mn} = \frac{4P\epsilon_{mn}}{\pi^2 mnw} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{b} \quad (b)$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon_{mn} &= 1 & \text{para } m \neq 0, n \neq 0 \\ \epsilon_{mn} &= \frac{1}{2} & \text{para } m = 0, n \neq 0 \quad \text{o} \quad m \neq 0, n = 0 \\ \epsilon_{mn} &= \frac{1}{4} & \text{para } m = n = 0 \end{aligned}$$

En el caso particular de $m = 0$ o $n = 0$ el coeficiente se obtiene fácilmente como límite de la expresión (b).

Ahora según la ecuación (a) tomamos para las flechas la serie

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} \quad (c)$$

y la relación entre los coeficientes a_{mn} y A_{mn} se establece fácilmente por el mismo razonamiento que antes (v. pág. 299). Así, utilizando la notación

$$\alpha_m = \frac{2m\pi}{a} \quad \beta_n = \frac{2n\pi}{b} \quad \gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2 \quad (d)$$

obtenemos

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{D\gamma_{mn}^4 + k} \quad (e)$$

Sustituyéndola en la serie (c) y teniendo en cuenta la ecuación (b) tenemos el resultado final¹.

$$w = \frac{4P}{\pi^2 uv} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{b} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y}{mn(D\gamma_{mn}^4 + k)} \quad (f)$$

Ahora los momentos flectores de la placa se obtienen por derivación como ordinariamente y la distribución de presiones de la placa sobre el terreno se halla multiplicando la expresión (f) por el módulo k .

El caso particular $k = 0$ corresponde a una reacción del cimiento uniformemente repartida, es decir el caso de «forjado invertido» con una carga uniforme $q = P/ab$. Se ve en la ecuación (f) que la introducción del módulo tiende a reducir las flechas y también los momentos flectores de la placa.

El caso de una placa rectangular de dimensiones finitas apoyada sobre cimentación elástica y sometida a la acción de carga concentrada ha sido estudiado por H. Happel². El método de Ritz (v. pág. 375) se ha utilizado para determinar las

flechas de esta placa, y se ha demostrado, en el ejemplo particular de placa cuadrada cargada en el centro, que la serie que da la flecha converge rápidamente y la flecha puede calcularse con aproximación suficiente tomando únicamente unos pocos primeros términos de la serie¹.

61. Flexión de placas apoyadas sobre un sólido elástico semiinfinito

Hasta aquí, se ha supuesto que el asiento del cimiento en cualquier punto es proporcional a la presión entre la placa y el cimiento en ese mismo punto y en consecuencia independiente de la presión en cualquier otro punto. Esto es correcto en el caso de placa flotante considerada por Hertz (v. pág. 287), pero en el caso de cimiento cohesivo tal hipótesis se aproxima sólo groseramente al comportamiento real del cimiento; puede obtenerse algunas veces una mejor aproximación a partir de las siguientes hipótesis:

1. El cimiento tiene las propiedades de un cuerpo elástico semiinfinito.
2. La placa se apoya en el terreno sin rozamiento.
3. Existe contacto perfecto entre la placa y el terreno incluso para presiones negativas.

Esta última hipótesis parece arbitraria, sin embargo una presión negativa entre placa y terreno queda realmente más o menos compensada por el peso propio de la placa.

Las propiedades elásticas de la cimentación elástica pueden caracterizarse, si se admite la isotropía, por un módulo de Young E_0 y un coeficiente de Poisson ν_0 . En la tabla 63 pueden verse los valores numéricos aproximados² de estas constantes que dependen de la naturaleza del cimiento y hallados por ensayos dinámicos; junto a ellos se dan los valores de la constante

$$k_0 = \frac{E_0}{2(1 - \nu_0^2)} \quad (a)$$

usada en lo siguiente.

TABLA 63
Valores de las constantes elásticas según la naturaleza de la cimentación

Terreno	E_0 , kgf/cm ²	ν_0	k_0 , kgf/cm ²
Arcilla	800	0,17	410
Loes y arcilla	900	0,42	550
Arena media	1000-1300	0,33-0,23	550-690
Arena y grava	2800	0,31	1540
Arcilla plástica liásica	2700	0,44	1650
Cal (apagada al aire)	11 500-13 300	0,32-0,38	6440-7700
Roca caliza	112 000	0,26	60 000

Nos limitaremos a considerar el caso de placa infinitamente grande, en estado de simetría axial. Utilizando coordenadas polares r, θ , podemos escribir la ecuación de la placa en la forma

$$D\Delta\Delta w(r) = q(r) - p(r) \quad (b)$$

en la que $p(r)$ representa la carga dada y $q(r)$ la reacción del cimiento.

¹ El problema de una placa cuadrada sobre cimentación elástica ha sido estudiado también experimentalmente; véase la memoria de J. Vint y W. N. Elgood, *Phil. Mag.*, serie 7, vol. 19, página 1, 1935; y la de G. Murphy, *Iowa State Coll. Eng. Expt. Sta. Bull.*, 135, 1937.

² Debidos a E. Schultze y H. Muhs, «Bodenuntersuchungen für Ingenieur bauten», Berlín, 1950. Véase también *Veröffentl. Degebo*, Fascículo 4, pág. 37, 1936.

¹ Debida a V. Lewe, *Bauingenieur*, vol. 3, pág. 453, 1923.

² *Math. Z.*, vol. 6, pág. 203, 1920. Véase también, *Bautechnik*, vol. 26, pág. 181, 1949.

Sea $K_0(r, \varrho, \psi)$ la flecha en el punto $(r, 0)$ del cimientado debida a la carga normal unidad aplicada en el punto (ϱ, ψ) . La forma de la «función de influencia» depende exclusivamente de la naturaleza del cimientado. Utilizando las propiedades de las funciones de Bessel puede demostrarse¹ que la ecuación (b) se satisface siendo

$$w(r) = \int_0^\infty \frac{Q(\alpha) K(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha}{1 + D\alpha^4 K(\alpha)} \quad (c)$$

En la ecuación (c) J_0 representa la función de Bessel de orden cero; el término dependiente de la naturaleza del terreno es

$$K(\alpha) = \int_0^\infty 2\pi s K_0(s) J_0(\alpha s) ds \quad (d)$$

en el que la forma de K_0 está definida por

$$K_0(s) = K_0[(r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}]$$

siendo s la distancia entre los puntos $(r, 0)$ y (ϱ, φ) . Finalmente

$$Q(\alpha) = \int_0^\infty q(\rho) J_0(\alpha \rho) \rho d\rho \quad (e)$$

es el término que depende de la intensidad $q(\varrho)$ de la carga simétrica para $r = \varrho$.

En el caso particular de una carga P uniformemente repartida en una circunferencia de radio c , tenemos

$$Q(\alpha) = \frac{P}{2\pi} J_0(\alpha c) \quad (f)$$

En el caso de la carga P uniformemente repartida en el círculo interior a esa circunferencia la ecuación (e) da

$$Q(\alpha) = \frac{P}{\pi c \alpha} J_1(\alpha c) \quad (g)$$

donde la función de Bessel es de primer orden. Finalmente, cuando la carga está concentrada en el origen ($\varrho = 0$), de la ecuación (f) obtenemos

$$Q(\alpha) = \frac{P}{2\pi} \quad (h)$$

En cuanto a la distribución de las reacciones, la correspondiente función $p(r)$ se obtiene de la ecuación (b), substituyendo previamente el término

$$q(r) = \int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha \quad (i)$$

en función de su transformada de Fourier-Bessel (e). Así obtenemos

$$p(r) = \int_0^\infty \frac{Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha}{1 + D\alpha^4 K(\alpha)} \quad (j)$$

Consideremos ahora dos casos particulares respecto a la naturaleza física del terreno. Para una *placa flotante* (ap. 57) la función de influencia $K_0(s)$ se anula en todo punto excepto en $s = 0$, donde se aplica la fuerza unidad. En cuanto a la ecuación (d) la función $K_0(\alpha)$ debe ser entonces constante. Para obtener de la ecuación

(c) la expresión $w(r) = p(r)/k$, de acuerdo con la definición del módulo, debemos tomar $K_0(\alpha) = 1/k$. Empleando la notación anterior $l^4 = D/k$ (pág. 287), obtenemos de la ecuación (c) la expresión

$$w(r) = \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha}{1 + \alpha^4 l^4} \quad (k)$$

que satisface la ecuación diferencial (178) de la placa flotante.

En el caso de un medio isotrópico semiinfinito, tenemos según Boussinesq¹ $K_0(s) = (1 - \nu^2)/\pi E_0 s$ y por la ecuación (d), $K(\alpha) = 2(1 - \nu_0)^2/E_0 a$, o bien

$$K(\alpha) = \frac{1}{(k_0 \alpha)}$$

donde k_0 es la constante elástica definida por la ecuación (a). Escribiendo para abreviar

$$\frac{k_0}{D} = \frac{E_0}{2D(1 - \nu_0^2)} = \frac{1}{l_0^2} \quad (l)$$

obtenemos finalmente la solución (c) en la forma más específica².

$$w(r) = \frac{1}{k_0} \int_0^\infty \frac{Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha}{1 + \alpha^2 l_0^2} \quad (m)$$

En el caso particular de una carga concentrada en el origen, las expresiones (X) y (h) dan

$$w = \frac{P l_0^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{l_0}\right) d\lambda}{1 + \lambda^2} \quad (187)$$

donde $\lambda = \alpha l_0$. Además la flecha en el punto de aplicación de la carga es

$$w_{\max} = \frac{P l_0^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{P l_0^2 \sqrt{3}}{9D} = 0,192 \frac{P l_0^2}{D} \quad (188)$$

frente al resultado $0,125 P l_0^2 / D$ de Hertz. El reparto de presiones se obtiene fácilmente de la expresión general (j). Tenemos para un punto cualquiera

$$p = \frac{P}{2\pi l_0^2} \int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{l_0}\right) \lambda d\lambda}{1 + \lambda^2} \quad (189)$$

y en especial en el punto de aplicación de la carga

$$p_{\max} = \frac{P}{2\pi l_0^2} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{P \sqrt{3}}{9 l_0^2} = 0,192 \frac{P}{l_0^2} \quad (190)$$

frente al valor $0,125 P / l_0^2$ obtenido por Hertz. Si suponemos los mismos valores de w_{\max} en ambos casos la fórmula (190) da un valor de p_{\max} que es 2,37 veces mayor que el de la fórmula de Hertz (181). En tal caso debe ser $l = 1,241 l_0$ y en la figura 131 a) se dan las curvas de las flechas correspondientes calculadas según las ecuaciones (179) y (187). La figura 131 b) muestra en forma análoga la variación de la presión; en este caso, para obtener valores iguales de p_{\max} según las dos fórmulas, debe tomarse $l = 0,806 l_0$.

¹ Véase, por ejemplo, S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., página 365, Nueva York, 1951.

² Respecto a este resultado, véase también S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, página 250, 1932, y vol. 17, pág. 142, 1949; K. Marguerre, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 17, página 229, 1937; A. H. A. Hogg, *Phil. Mag.*, vol. 25, pág. 576, 1938.

¹ La solución del problema en su forma más general se debe a D. L. Holl, *Proc. Fifth Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 1938.

Puede demostrarse finalmente, que el valor de los momentos flectores en la proximidad de la carga concentrada tiene la misma expresión para ambos tipos de cimentación si se utiliza la variable adimensional $x = r/l$ y $x = r/l_0$ respectivamente. Deducimos de ello que la expresión (183) de los momentos flectores puede utilizarse también para una placa apoyada sobre un medio elástico isótropo si sustituimos l por l_0 . Procediendo de esta forma con la fórmula de la tensión máxima de Westergaard (σ) (pág. 302), llegamos a la fórmula

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 0,366(1 + \nu) \frac{P}{h^2} \left[\log \left(\frac{Eh^3}{k_0 b^3} \right) - 0,266 \right] \quad (n)$$

en la que k_0 está dada por la ecuación (a) y b tiene el mismo valor que en la página 302.

El problema de la flexión de una placa finita circular, lleva a un sistema infinito de ecuaciones lineales para determinar los coeficientes de la serie que da las flechas de la placa¹.

Podría considerarse también el uso del método de diferencias finitas para tratar el problema de placas circulares finitas².

Se han estudiado también la flexión de una placa infinita apoyada sobre una capa elástica, que queda a su vez sobre una base perfectamente rígida³ y el problema de una losa de pavimento semiinfinita⁴.

Las tensiones debidas a cargas superficiales fuertemente concentradas han de corregirse de acuerdo con la teoría de placas gruesas. Independientemente se ha desarrollado una teoría especial de placas gruesas soportadas elásticamente⁵.

¹ Véase H. Borowicka, *Ingr.-Arch.*, vol. 10, pág. 113, 1939; A. G. Ishkova, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 56, pág. 129, 1947; G. Pickett y F. J. McCormick, *Proc. First U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, pág. 331, Chicago, 1951. El efecto de la elevación de la parte exterior de la placa sometida a carga central ha sido estudiado por H. Jung, *Ingr.-Arch.*, volumen 20, pág. 8, 1952. Respecto a flexión de placas rectangulares, véase M. I. Gorbounov-Posadov, *Priklad. Math. Mekhan.*, vol. 4, pág. 68, 1940.

² A. Habel, *Bauingenieur*, vol. 18, pág. 188, 1937; para la aplicación a placas rectangulares, véase G. Pickett, W. C. Janes, M. E. Raville y F. J. McCormick, *Kansas State Coll. Eng. Expt. Sta. Bull.*, 65, 1951.

³ A. H. A. Hogg, *Phil. Mag.*, vol. 35, pág. 265, 1944.

⁴ G. Pickett y S. Badaruddin, *Proc. Ninth Intern. Congr. Appl. Mech.*, vol. 6, pág. 396, Bruselas, 1957.

⁵ El primer estudio del comportamiento estático y dinámico de estas placas se debe a K. Marguerre, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 332, 1933. Véase también I. Szabó, *Ingr.-Arch.*, volumen 19, págs. 128 y 342, 1951; *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, pág. 145, 1952. Respecto a la aplicación de la teoría de E. Reissner, véase P. M. Naghdi y J. C. Rowley, *Proc. First Midwest Conf. Solid. Mech. (Univ. Illinois)*, pág. 119, 1953, y D. Frederick, *J. Appl. Mechanics*, volumen 23, pág. 195, 1956.

Placas de formas diversas

62. Ecuaciones de la flexión de placas en coordenadas polares

Se han utilizado (cap. 3) las coordenadas polares en el estudio de la flexión simétrica de placas circulares. Pueden utilizarse ventajosamente en el caso general de flexión de placas circulares.

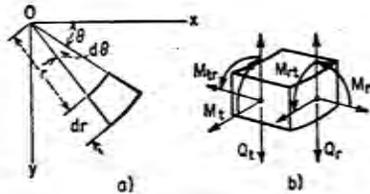


FIG. 136

Si se toman las coordenadas r y θ como indica la figura 136 a), las relaciones entre coordenadas polares y cartesianas son

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (a)$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (b)$$

Utilizando estas expresiones, se obtiene la pendiente de la deformada de una placa, en la dirección de las x

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (c)$$

Puede escribirse una relación similar para la pendiente en la dirección de las y . Para determinar la curvatura en coordenadas polares se precisan las derivadas segundas. Repitiendo dos veces la operación indicada en (c), se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w \sin^2 \theta}{\partial r} \\ &\quad + 2 \frac{\partial w \sin \theta \cos \theta}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 w \sin^2 \theta}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (d)$$

De la misma manera se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w \cos^2 \theta}{\partial r} \\ &\quad - 2 \frac{\partial w \sin \theta \cos \theta}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 w \cos^2 \theta}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w \cos 2\theta}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} - \frac{\partial w \cos 2\theta}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \\ &\quad - \frac{\partial w \sin \theta \cos \theta}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 w \sin \theta \cos \theta}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (f)$$

Con esta transformación de coordenadas, se obtiene

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (g)$$

Repitiendo dos veces esta operación, la ecuación diferencial en derivadas parciales (103) de la deformada de una placa cargada transversalmente resulta, en coordenadas polares:

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (191)$$

Cuando la carga está repartida simétricamente respecto al centro de la placa, la flecha w es independiente de θ y (191) coincide con (58) (v. pág. 72), obtenida en el caso de placas circulares cargadas simétricamente.

Consideremos un elemento determinado en la placa por dos planos axiales adyacentes, que forman un ángulo $d\theta$ y por dos superficies cilíndricas de radios r y $r + dr$ [fig. 136 b)]. Representamos por M_r , M_t y M_{rt} los momentos flectores y torsor que actúan sobre el elemento por unidad y de longitud y tomamos las direcciones positivas como indica la figura. Para expresar estos momentos en función de la flecha w de la placa, suponemos que el eje x coincide con el radio r . Los momentos M_r , M_t y M_{rt} tienen entonces los mismos valores que M_x , M_y y M_{xy} en el mismo punto y sustituyendo θ por 0 en (d), (e) y (f), se tiene

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_t &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \\ M_{rt} &= (1 - \nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = (1 - \nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (192)$$

De la misma manera, con ayuda de (108), se encuentran las expresiones de los esfuerzos cortantes¹:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \quad \text{y} \quad Q_t = -D \frac{\partial (\Delta w)}{r \partial \theta} \quad (193)$$

donde w está dado por la expresión (g).

En el caso de un borde empotrado las condiciones de contorno de una placa circular de radio a , son:

$$(w)_{r=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (h)$$

En el caso de borde simplemente apoyado

$$(w)_{r=a} = 0 \quad (M_r)_{r=a} = 0 \quad (i)$$

Para un borde libre (v. pág. 108)

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad V = \left(Q_r - \frac{\partial M_{rt}}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = 0 \quad (j)$$

La solución general de (191) se escribe, como anteriormente, en forma de una suma

$$w = w_0 + w_1 \quad (k)$$

donde w_0 es una solución particular de (191) y w_1 la solución de la ecuación homogénea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (194)$$

¹ La dirección de Q_r en la figura 136 b) es opuesta a la de la figura 28. Lo que explica el signo negativo de (193).

Esta última se puede escribir mediante la siguiente serie¹:

$$w_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \sin m\theta \quad (195)$$

en la que R_0 , R_1, \dots , R'_1 , R'_2, \dots son funciones únicamente de la coordenada radial r . Sustituyendo esta serie en (194), se obtiene para cada una de estas funciones, una ecuación diferencial ordinaria de la siguiente forma:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} - \frac{m^2 R_m}{r^2} \right) = 0$$

cuya solución general para $m > 1$, es

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2} \quad (l)$$

Para $m = 0$ y $m = 1$ las soluciones son:

$$R_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \log r + D_0 r^2 \ln r$$

y

$$R_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \quad (m)$$

Se pueden escribir expresiones similares para las funciones R'_m . Sustituyendo R_m y R'_m por estas expresiones en la serie (195), se obtiene la solución general de la ecuación (194). Las constantes A_m , B_m, \dots , D_m deben estar determinadas en cada caso particular de forma que cumplan las condiciones de contorno. La solución R_0 que es independiente de θ , representa la flexión simétrica de las placas circulares. En el capítulo 3 se han estudiado varios casos particulares de este tipo.

63. Placas circulares bajo carga que varía linealmente

Si una placa circular está sometida a una carga repartida como indica la figura 137, podemos dividirla en dos partes: 1) una carga uniformemente repartida de intensidad $1/2(p_2 + p_1)$ y 2) una carga que varía linealmente con intensidad nula en el diámetro CD de la placa e intensidades $-p$ y $+p$ en los extremos A y B del diámetro AB . El caso de carga uniforme se ha estudiado en el capítulo 3. Aquí tenemos que considerar únicamente la carga no uniforme representada en la figura por los dos triángulos rayados².

La intensidad de la carga q en un punto de coordenadas r y θ es

$$q = \frac{pr \cos \theta}{a} \quad (a)$$

¹ Solución debida a A. Clebsch en *Theorie der Elasticität fester Körper*, 1862.

² Este problema ha sido estudiado por W. Flugge, *Bauingenieur*, vol. 10, pág. 221, 1929.

La solución particular de la ecuación (191) puede tomarse entonces en la forma siguiente:

$$w_0 = A \frac{pr^3 \cos \theta}{a}$$

que después de sustituir en la ecuación (191), da

$$A = \frac{1}{192D}$$

De donde

$$w_0 = \frac{pr^3 \cos \theta}{192aD} \quad (b)$$

Como solución de la ecuación homogénea (194) tomamos únicamente el término en R_1 de la serie (195) y suponemos

$$w_1 = (A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r) \cos \theta \quad (c)$$

Siendo preferible trabajar con magnitudes adimensionales, introducimos en lugar de r la relación

$$\rho = \frac{r}{a}$$

Con la nueva notación la flecha de la placa resulta

$$w = w_0 + w_1 = \frac{pa^4}{192D} (\rho^3 + A\rho + B\rho^3 + C\rho^{-1} + D\rho \ln \rho) \cos \theta \quad (d)$$

donde ϱ varía de 0 a 1. Las constantes A, B, \dots , en esta expresión deben ahora determinarse a partir de las condiciones de contorno.

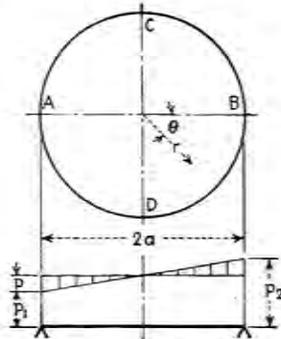


FIG. 137

Comencemos con el caso de una placa simplemente apoyada (fig. 137). En este caso la flecha w y el momento M_r en el contorno se anulan y obtenemos:

$$(w)_{\rho=1} = 0 \quad (M_r)_{\rho=1} = 0 \quad (e)$$

En el centro de la placa ($\varrho = 0$) la flecha w y el momento M_r deben ser finitos. De aquí se deduce simultáneamente que las constantes C y D de la expresión (d) deben ser nulas. Las constantes que quedan A y B se hallan ahora de las ecuaciones (e) que dan:

$$(w)_{\rho=1} = \frac{pa^4}{192D} (1 + A + B) \cos \theta = 0$$

$$(M_r)_{\rho=1} = -\frac{pa^2}{192} [4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B] \cos \theta = 0$$

Como estas ecuaciones deben ser realizadas para cualquier valor de θ , los factores delante del $\cos \theta$ deben anularse. De este modo, resulta:

$$\begin{aligned} 1 + A + B &= 0 \\ 4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B &= 0 \end{aligned}$$

y obtenemos

$$B = -\frac{2(5 + \nu)}{3 + \nu} \quad A = \frac{7 + \nu}{3 + \nu}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (d) obtenemos para la flecha w :

$$w = \frac{pa^4 \rho (1 - \rho^2)}{192(3 + \nu)D} [7 + \nu - (3 + \nu)\rho^2] \cos \theta \quad (f)$$

Para calcular los momentos flectores y esfuerzos cortantes sustituimos la expresión (f) en las ecuaciones (192) y (193) de las cuales:

$$M_r = \frac{pa^2}{48} (5 + \nu)\rho(1 - \rho^2) \cos \theta \quad (g)$$

$$M_t = \frac{pa^2}{48(3 + \nu)} \rho[(5 + \nu)(1 + 3\nu) - (1 + 5\nu)(3 + \nu)\rho^2] \cos \theta$$

$$Q_r = \frac{pa}{24(3 + \nu)} [2(5 + \nu) - 9(3 + \nu)\rho^2] \cos \theta \quad (h)$$

$$Q_t = -\frac{pa}{24(3 + \nu)} \rho[2(5 + \nu) - 3(3 + \nu)\rho^2] \sin \theta$$

Se ve que $(M_r)_{\max}$ se produce para $\varrho = 1/\sqrt{3}$ y vale

$$(M_r)_{\max} = \frac{pa^2(5 + \nu)}{72\sqrt{3}}$$

El valor máximo de M_t se produce para

$$\rho = \sqrt{(5 + \nu)(1 + 3\nu)} / \sqrt{3(1 + 5\nu)(3 + \nu)}$$

y vale

$$(M_t)_{\max} = \frac{pa^2(5 + \nu)(1 + 3\nu)}{72(3 + \nu)}$$

El valor de la reacción vertical en el contorno por unidad de longitud es¹

$$-V = -Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = \frac{pa}{4} \cos \theta$$

El momento de esta reacción respecto al diámetro CD de la placa (fig. 137) es

$$4 \int_0^{\pi/2} \frac{pa}{4} \cos \theta a^2 \cos \theta d\theta = \frac{\pi a^3 p}{4}$$

Este momento compensa el momento de la carga repartida sobre la placa tomado respecto al mismo diámetro.

Como segundo ejemplo consideremos el caso de una placa circular con borde libre. Tal condición se encuentra en el caso de una losa circular de cimentación que sostiene una chimenea. A consecuencia del empuje del viento se transmite a la losa un momento M (fig. 138). Suponiendo que las reacciones correspondientes a este momento se reparten según una ley

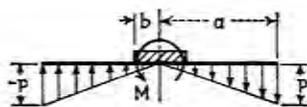


FIG. 138

lineal, como la indicada en la figura, obtenemos la misma clase de carga que en el caso anterior, y la solución general puede tomarse en la misma forma (d) que antes. Las condiciones de contorno en el borde exterior de la placa, que está libre de esfuerzos, son

$$(M_r)_{\rho=1} = 0 \quad (V)_{\rho=1} = \left(Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} \right)_{\rho=1} = 0 \quad (i)$$

La parte de la placa interior a un círculo de radio b se considera absolutamente rígida. Se supone también que el borde de la placa está empotrado a lo largo de la circunferencia de radio b . Por lo tanto para $\rho = b/a = \beta$ deben cumplirse las siguientes condiciones de contorno

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{\rho=\beta} = \left(\frac{w}{\rho} \right)_{\rho=\beta} \quad (j)$$

Sustituyendo la expresión (d) en las ecuaciones (i) y (j) obtenemos las siguientes ecuaciones para determinar las constantes

$$\begin{aligned} 4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B + 2(1 - \nu)C + (1 + \nu)D &= 0 \\ 4(17 + \nu) + 2(3 + \nu)B + 2(1 - \nu)C - (3 - \nu)D &= 0 \\ 4\beta^4 + 2\beta^2 B - 2\beta^{-2}C + D &= 0 \end{aligned}$$

¹ La reacción se considera positiva cuando su sentido es hacia arriba.

De estas ecuaciones

$$\begin{aligned} B &= -2 \frac{4(2 + \nu) + (1 - \nu)\beta^2(3 + \beta^4)}{(3 + \nu) + (1 - \nu)\beta^4} \\ C &= -2 \frac{4(2 + \nu)\beta^4 - (3 + \nu)\beta^2(3 + \beta^4)}{(3 + \nu) + (1 - \nu)\beta^4} \quad D = 12 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (d) y utilizando las ecuaciones (192) y (193), podemos obtener los valores de los momentos y esfuerzos cortantes. La constante A no aparece en estas ecuaciones. El término correspondiente en la expresión (d) representa el giro de la placa, como sólido rígido, respecto al diámetro perpendicular al plano de la figura 138.

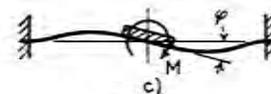


FIG. 139

Si se conoce el módulo de cimentación, el ángulo de giro puede calcularse mediante la condición de equilibrio del momento M y las reacciones del cimiento.

Utilizando la expresión (d) puede resolverse el caso de una placa circular simplemente apoyada, cargada con un momento M en el centro [fig. 139 a)]. En este caso ha de omitirse el término en ρ^5 , que corresponde a la carga repartida. Para evitar una flecha infinita en el centro la constante c debe ser nula. Así la expresión (d) se reduce a

$$w = (A\rho + B\rho^3 + D\rho \ln \rho) \cos \theta \quad (k)$$

Las tres constantes A , B y D se determinan ahora a partir de las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} (w)_{\rho=1} &= 0 \quad (M_r)_{\rho=1} = 0 \\ -a \int_{-\pi}^{+\pi} (M_{r\theta})_{\rho=1} \sin \theta d\theta + a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} (Q_r)_{\rho=1} \cos \theta d\theta + M &= 0 \quad (l) \end{aligned}$$

Las dos primeras representan las condiciones de borde simplemente apoyado; la última establece la condición de equilibrio de las fuerzas y momentos que actúan en el contorno de la placa y el momento exterior M . De las ecuaciones (l) obtenemos

$$A = -\frac{1 + \nu}{3 + \nu} \frac{Ma}{8\pi D} \quad B = \frac{1 + \nu}{3 + \nu} \frac{Ma}{8\pi D} \quad D = -\frac{Ma}{4\pi D}$$

de donde

$$w = -\frac{Ma}{8\pi D(3+\nu)} \rho[(1+\nu)(1-\rho^2) + 2(3+\nu) \ln \rho] \cos \theta \quad (m)$$

A causa del término logarítmico entre corchetes, la pendiente de la deformada, calculada a partir de la ecuación (m) resulta infinita. Para eliminar esta dificultad puede considerarse absolutamente rígida la parte central de radio b . Suponiendo la placa empotrada en su contorno interior, que gira por efecto del momento M [fig. 139 b)], hallamos

$$w = \frac{Ma}{8\pi D[(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4]} \left\{ -[(1+\nu) + (1-\nu)\beta^4]\rho^2 + (1+\nu)(1-\beta^2)^2\rho + 2[(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4]\rho \ln \rho - \beta^2[(1+\nu)\beta^2 - (3+\nu)]\rho^{-1} \right\} \cos \theta \quad (n)$$

donde $\beta = b/a$. Cuando β vale cero, la ecuación (n) se reduce a la ecuación (m) antes obtenida. Sustituyendo la expresión (n) en la ecuación (192) pueden calcularse los momentos flectores M_r y M_t .

El caso en que el contorno exterior de la placa está empotrado [fig. 139 b)] puede estudiarse de modo similar. Este caso tiene interés práctico para el proyecto de acoplamiento de ejes². Las tensiones radiales máximas en los contornos interior y exterior y el ángulo de giro φ de la parte central rígida son en este caso

$$(\sigma_r)_{r=b} = \alpha \frac{h}{a} E \varphi \quad (\sigma_r)_{r=a} = \alpha_1 \frac{h}{a} E \varphi \quad \varphi = \frac{M}{\alpha_2 E h^3}$$

donde α , α_1 , α_2 son constantes cuyos valores figuran en la tabla 64.

TABLA 64

$\beta = b/a$	α	α_1	α_2
0,5	14,17	7,10	12,40
0,6	19,54	12,85	28,48
0,7	36,25	25,65	77,90
0,8	82,26	66,50	314,00

64. Placas circulares bajo carga concentrada

El caso de una carga aplicada en el centro de la placa se ha estudiado en el apartado 19. Supondremos aquí que la carga P está aplicada en un punto A a una distancia b del centro de la placa O (fig. 140)³. Dividiendo

¹ R. J. Roark, *Univ. Wisconsin Bull.*, 74, 1932, ha hecho experiencias con tales placas.

² H. Reissner, *Ingr.-Arch.*, vol. 1, pág. 72, 1929.

³ Este problema ha sido resuelto por Clebsch, *op. cit.* Véase también A. Föppl, *Sitzber. bayer. Akad. Wiss. Jahrg.*, 1912, pág. 155. El estudio del mismo problema en coordenadas esféricas fue hecho por E. Melan, *Eisenbau*, 1920, pág. 190, y por W. Flügge, «Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten», Berlín, 1928. Véase también el trabajo de H. Schmidt, *Ingr.-Arch.*, vol. 1, pág. 147, 1930, y W. Müller, *Ingr.-Arch.*, vol. 13, pág. 355, 1943.

la placa en dos partes por la sección cilíndrica de radio b como indica la línea de puntos en la figura, podemos aplicar la solución (195) a cada una de las partes de la placa. Si el ángulo θ se mide a partir del radio OA sólo deben conservarse los términos en $\cos m\theta$. De ahí obtenemos para la parte exterior de la placa

$$w = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta \quad (a)$$

donde

$$\begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \log r + D_0 r^2 \ln r \\ R_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \end{aligned} \quad (b)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}$$

Para las funciones R'_0, R'_1, \dots, R'_m correspondientes a la parte interior de la placa pueden escribirse expresiones similares. Utilizando los símbolos A'_m, B'_m, \dots en lugar de A_m, B_m, \dots para las constantes de esta parte de la placa, de la condición de que la flecha, la pendiente y los momentos sean finitos en el centro de la placa, obtenemos

$$C'_0 = D'_0 = 0$$

$$C'_1 = D'_1 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B'_m = D'_m = 0$$

Por consiguiente, para cada término de la serie (a) tenemos que determinar cuatro constantes para la parte exterior y dos para la parte interior.

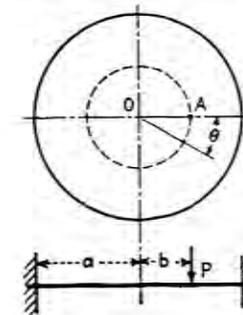


FIG. 140

Las seis ecuaciones necesarias para esta determinación pueden obtenerse a partir de las condiciones de contorno en el borde de la placa y las condiciones de continuidad en el círculo de radio b . Si se supone que el borde exterior está empotrado, las condiciones de contorno son:

$$(w)_{r=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (c)$$

Representando la flecha de la parte interior por w_1 y observando que no hay momentos exteriores aplicados en el círculo de radio b , las condiciones de continuidad dan:

$$w = w_1 \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w_1}{\partial r} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \quad \text{para } r = b \quad (d)$$

La última ecuación se obtiene de la consideración del esfuerzo cortante Q_r a lo largo del círculo de radio b . Este esfuerzo es continuo en todos los puntos del círculo excepto el punto A , donde tiene una discontinuidad debida a la fuerza P . Representando esta fuerza por la serie¹:

$$\frac{P}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right) \quad (e)$$

y para el esfuerzo cortante la primera de las expresiones (193) obtenemos

$$D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w)_{r=b} - D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w_1)_{r=b} = \frac{P}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right) \quad (f)$$

A partir de las seis ecuaciones (c), (d) y (f) pueden calcularse las seis constantes y las funciones R_m y R'_m pueden ponerse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{P}{8\pi D} \left[(r^2 + b^2) \ln \frac{r}{a} + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - r^2)}{2a^2} \right] \\ R'_0 &= \frac{P}{8\pi D} \left[(r^2 + b^2) \ln \frac{b}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2} \right] \\ R_1 &= -\frac{Pb^3}{16\pi D} \left[\frac{1}{r} + \frac{2(a^2 - b^2)r}{a^2b^2} - \frac{(2a^2 - b^2)r^2}{a^4b^2} - \frac{4r}{b^2} \ln \frac{a}{r} \right] \\ R'_1 &= -\frac{Pb^3}{16\pi D} \left[\frac{2(a^2 - b^2)r}{a^2b^2} + \frac{(a^2 - b^2)^2r^2}{a^4b^4} - \frac{4r}{b^2} \ln \frac{a}{b} \right] \\ R_m &= \frac{Pb^m}{8m(m-1)\pi D} \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[(m-1)b^2 - ma^2 + (m-1)r^2 - \frac{m(m-1)b^2r^2}{m+1} \right] + \frac{1}{r^m} \left(r^2 - \frac{m-1}{m+1} b^2 \right) \right\} \\ R'_m &= \frac{Pb^m}{8m(m-1)\pi D} \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[(m-1)b^2 - ma^2 + \frac{a^{2m}}{b^{2m-2}} \right] + (m-1) \frac{r^{m+2}}{a^{2m}} \left[1 - \frac{m}{m+1} \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{m+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} \right] \right\} \end{aligned}$$

Utilizando estas funciones, obtenemos para la flecha bajo el punto de aplicación de la carga:

$$(w)_{r=b, \theta=0} = \frac{P}{16\pi D} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} \quad (196)$$

¹ Esta serie es análoga a la utilizada en el caso de placas continuas (véase pág. 274).

Para $b = 0$ esta fórmula coincide con la fórmula (92) correspondiente a placa bajo carga en el centro. El caso de placa con borde simplemente apoyado puede tratarse de forma parecida.

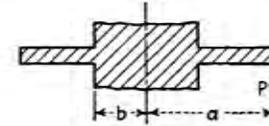


FIG. 141

El problema de una placa anular empotrada en el borde interior y con una carga concentrada P en el contorno exterior (fig. 141) puede resolverse también utilizando la serie (a). En este caso las condiciones de contorno en el borde interior empotrado son

$$(w)_{r=b} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=b} = 0 \quad (g)$$

En el contorno exterior, que está cargado en un solo punto las condiciones son

$$(M_r)_{r=a} = 0$$

$$(V)_{r=a} = \frac{P}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right) \quad (h)$$

Los cálculos hechos para el caso particular $b/a = 2/3$ dan¹ para el máximo momento flector M , en el contorno interior

$$(M_r)_{r=b, \theta=0} = -4.45 \frac{P}{2\pi}$$

En la figura 142 se da la variación del momento a lo largo del contorno interior y a lo largo del círculo de radio $r = 5a/6$. Puede verse que este

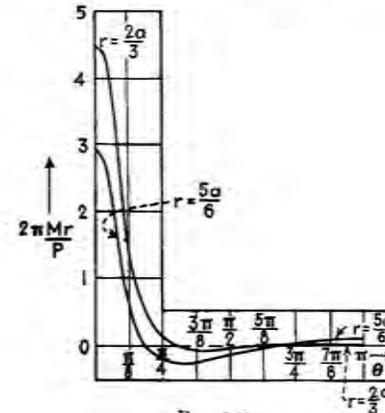


FIG. 142

¹ H. Reissner, *op. cit.*

momento disminuye rápidamente al aumentar el ángulo θ medido a partir del punto de aplicación de la carga. Los casos de carga simétricamente repartida respecto al centro de la placa¹ o los casos de placas anulares pueden abreviarse utilizando la solución general del tipo (a). Para placas circulares completas bajo carga excéntrica, pueden obtenerse soluciones más sencillas por el método de variable compleja² o, cuando la placa está empotrada por el método de inversión³. En este último caso la deformada toma la forma

$$w = \frac{Pa^3}{16\pi D} \left[(1-x^2)(1-\xi^2) + (x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \theta) \ln \frac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \theta}{1 + x^2\xi^2 - 2x\xi \cos \theta} \right] \quad (197)$$

donde $x = r/a$ y $\xi = b/a$ (fig. 140). La expresión (197) es válida en toda la placa y para $x = \xi$ y $\theta = 0$, esto es, en el punto de aplicación de la carga, da el valor (196) obtenido por el método de la serie.

65. Placas circulares apoyadas en varios puntos del contorno

Considerando el caso de una carga simétricamente repartida respecto al centro de la placa, tomamos para la deformada una expresión general de la forma

$$w = w_0 + w_1 \quad (a)$$

en la que w_0 es la flecha de la placa simplemente apoyada en todo el contorno y w_1 satisface la ecuación diferencial homogénea

$$\Delta \Delta w_1 = 0 \quad (b)$$

Representando las reacciones concentradas en los puntos de apoyo 1, 2, 3, ... por N_1, N_2, \dots, N_i y utilizando para representar las fuerzas concentradas, la serie (h) del apartado anterior, tenemos para cada reacción N_i la expresión

$$\frac{N_i}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i \right) \quad (c)$$

donde

$$\theta_i = \theta - \gamma_i$$

¹ El problema de una losa flotante de contorno circular puede resolverse combinando unas reacciones de este tipo con la carga uniformemente repartida; véase K. Hajnal-Konyi, «Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken», Berlin, 1929.

² La placa simplemente apoyada fue tratada en esta forma por E. Reissner, *Math. Ann.*, volumen 111, pág. 777, 1935; para la aplicación del método de Muschelišvili, véase A. I. Lourye, *Bull. Polytech. Inst. Leningrad*, vol. 31, pág. 305, 1928, y *Priklad. Math. Mekhan.*, volumen 4, pág. 93, 1940. Véanse también K. Nasitta, *Ingr.-Arch.*, vol. 23, pág. 85, 1955, y R. J. Roark, *Wisconsin Univ. Eng. Expt. Sta. Bull.*, 74, 1932.

³ J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 34, pág. 223, 1902.

⁴ A. Nádai ha estudiado varios problemas de este tipo, véase *Z. Physik*, vol. 23, pág. 366, 1922. Las placas apoyadas en varios puntos han sido estudiadas también por W. A. Bassali, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 53, pág. 728, 1957, y las placas circulares con condiciones de contorno mixtas por G. M. L. Gladwell, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 11, pág. 159, 1958.

siendo γ_i el ángulo que define la posición del apoyo i (fig. 143). La intensidad de la reacción en cualquier punto del contorno está dada entonces por la expresión

$$\sum_1^i \frac{N_i}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i \right) \quad (d)$$

en la que la suma se extiende a todas las reacciones concentradas (c).

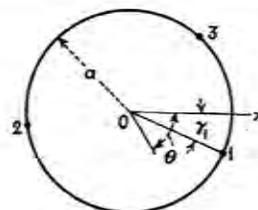


FIG. 143

La solución general de la ecuación homogénea (b) está dada por la expresión (195) (pág. 312). Suponiendo la placa continua y suprimiendo los términos que dan flechas o momentos infinitos en el centro, de la expresión (195) obtenemos

$$w_1 = A_0 + B_0 r^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + C_m r^{m+2}) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m r^m + C'_m r^{m+2}) \sin m\theta \quad (e)$$

Para determinar las constantes tenemos las siguientes condiciones de contorno:

$$(M_r)_{r=a} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0 \quad (f)$$

$$(V)_{r=a} = \left(Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = - \sum_1^i \frac{N_i}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i \right)$$

en las que M_r y Q_r están dados por las ecuaciones (192) y (193).

Consideremos el caso particular en que la placa está apoyada en los extremos de un diámetro. Mediremos θ desde este diámetro. Entonces $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi$ y obtenemos

$$w = w_0 + \frac{Pa^3}{2r(3+\nu)D} \left\{ 2 \ln 2 - 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(2 \ln 2 - \frac{x^2}{12} \right) - \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{m(m-1)} + \frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)(m-1)m^2} - \frac{\rho^2}{m(m+1)} \right] \rho^m \cos m\theta \right\} \quad (g)$$

en la que w_0 es la flecha de la placa cargada simétricamente y simplemente apoyada,

La carga total repartida en la placa $P = \pi a^2 q$. Cuando la carga está aplicada en el centro, suponiendo $\nu = 0,25$, de la expresión (g) obtenemos:

$$(w)_{r=0} = 0,116 \frac{Pa^2}{D}$$

$$(w)_{r=a, \theta=\pi/2} = 0,118 \frac{Pa^2}{D}$$

Para una placa uniformemente cargada obtenemos

$$(w)_{r=0} = 0,289 \frac{qa^4}{D}$$

$$(w)_{r=a, \theta=\pi/2} = 0,371 \frac{qa^4}{D}$$

Combinando dos soluciones del tipo (g) puede resolverse también el caso indicado en la figura 144.

Cuando una placa circular está apoyada en tres puntos con separaciones de 120° , la flecha producida en el centro de la placa, cuando la carga se aplica en el centro es

$$(w)_{r=0} = 0,0670 \frac{Pa^2}{D}$$

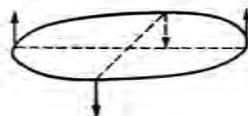


FIG. 144

Cuando la carga está uniformemente repartida, la flecha en el centro es

$$(w)_{r=0} = 0,0362 \frac{Pa^2}{D}$$

donde $P = \pi a^2 q$.

El caso de una placa circular apoyada en tres puntos se ha estudiado experimentalmente con placas de vidrio. Estos ensayos dieron resultados satisfactoriamente concordantes con la teoría¹.

66. Placas en forma de sector

La solución general desarrollada para placas circulares (ap. 62) puede adaptarse también a placas en forma de sector con los bordes rectos simplemente apoyados². Tomemos como ejemplo una placa semicircular simplemente apoyada a lo largo del diámetro AB y uniformemente cargada (fig. 145). La flecha de esta placa es eviden-

temente la misma que se produciría en la placa circular indicada por el contorno de puntos y cargada como indica la figura 145 b). La carga repartida está representada en tal caso por la serie:

$$q = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q}{m\pi} \sin m\theta \quad (a)$$

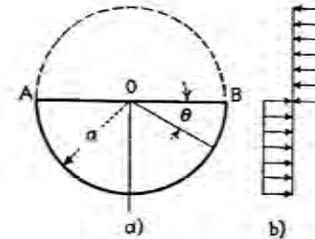


FIG. 145

y la ecuación diferencial de la deformada es

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q}{m\pi} \sin m\theta \quad (b)$$

La solución particular de esta ecuación que satisface las condiciones de contorno a lo largo del diámetro AB es

$$w_0 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4qr^4}{\pi m(16 - m^2)(4 - m^2)D} \sin m\theta \quad (c)$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea (194) que satisface las condiciones de contorno en el diámetro AB es

$$w_1 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{m+2}) \sin m\theta \quad (d)$$

Sumando las expresiones (c) y (d) obtenemos la expresión de la flecha de una placa semicircular. Las constantes A_m y B_m se determinan en cada caso particular mediante las condiciones en el contorno circular de la placa.

En el caso de placa simplemente apoyada tenemos

$$(w)_{r=a} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0 \quad (e)$$

Sustituyendo w por la suma de las series (c) y (d), obtenemos para calcular A_m y B_m las siguientes ecuaciones:

$$A_m a^m + B_m a^{m+2} = - \frac{4qa^2}{\pi m(16 - m^2)(4 - m^2)D}$$

$$A_m a^m [m(m-1) - \nu m(m-1)] + B_m a^{m+2} [m+1][m+2 + \nu(2-m)]$$

$$= - \frac{4qa^2 [12 + \nu(4-m^2)]}{m\pi(16 - m^2)(4 - m^2)D}$$

¹ Experiencias verificadas por Nádai, *ibid.*

² Problemas de este tipo fueron estudiados por Nádai, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 59, pág. 169, 1915. Véase también B. G. Galerkin, *Collected Papers*, vol. 2, pág. 320, Moscú, 1953, que da tablas numéricas para estos casos.

De estas ecuaciones

$$A_m = \frac{qa^4(m+5+\nu)}{a^{m+1}\pi(16-m^2)(2+m)[m+\frac{1}{2}(1+\nu)]D}$$

$$B_m = -\frac{qa^4(m+3+\nu)}{a^{m+1}\pi(4+m)(4-m^2)[m+\frac{1}{2}(1+\nu)]D}$$

Con estos valores de las constantes, la expresión de la flecha toma la forma

$$w = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{4r^4}{a^4} \frac{1}{m\pi(16-m^2)(4-m^2)} + \frac{r^m}{a^m} \frac{m+5+\nu}{m\pi(16-m^2)(2+m)[m+\frac{1}{2}(1+\nu)]} - \frac{r^{m+1}}{a^{m+1}} \frac{m+3+\nu}{m\pi(4+m)(4-m^2)[m+\frac{1}{2}(1+\nu)]} \right\} \text{sen } m\theta$$

Con esta expresión de la flecha, los momentos flectores se obtienen fácilmente mediante las ecuaciones (192).

De forma similar puede obtenerse la solución para cualquier sector con ángulo π/k siendo k un número entero. Las expresiones finales de las flechas y momentos flectores en un punto dado pueden darse en cada caso particular por las fórmulas:

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad M_r = \beta qa^2 \quad M_t = \beta_1 qa^3 \quad (f)$$

en las que α , β , β_1 son factores numéricos. En la tabla 65 se dan varios valores de estos factores para puntos del eje de simetría de un sector.

TABLA 65

Valores de los factores α , β y β_1 para distintos valores π/k del ángulo en el centro de un sector simplemente apoyado en el contorno $\nu = 0,3$

π/k	$r/a = 1/4$			$r/a = 1/2$			$r/a = 3/4$			$r/a = 1$		
	α	β	β_1	α	β	β_1	α	β	β_1	α	β	β_1
$\pi/4$	0,00006	-0,0015	0,0093	0,00033	0,0069	0,0183	0,00049	0,0161	0,0169	0	0	0,0025
$\pi/3$	0,00019	-0,0025	0,0177	0,00080	0,0149	0,0255	0,00092	0,0243	0,0213	0	0	0,0044
$\pi/2$	0,00092	0,0036	0,0319	0,00225	0,0353	0,0352	0,00203	0,0381	0,0286	0	0	0,0088
π	0,00589	0,0692	0,0357	0,00811	0,0868	0,0515	0,00560	0,0617	0,0468	0	0	0,0221

TABLA 66

Valores de los factores α y β para distintos valores π/k del ángulo en el centro de un sector empotrado en el contorno circular y simplemente apoyado en los bordes rectos $\nu = 0,3$

π/k	$r/a = 1/4$		$r/a = 1/2$		$r/a = 3/4$		$r/a = 1$	
	α	β	α	β	α	β	α	β
$\pi/4$	0,00005	-0,0008	0,00026	0,0087	0,00028	0,0107	0	0,0250
$\pi/3$	0,00017	-0,0006	0,00057	0,0143	0,00047	0,0123	0	0,0340
$\pi/2$	0,00063	0,0068	0,00132	0,0272	0,00082	0,0113	0	0,0488
π	0,00293	0,0473	0,00337	0,0446	0,00153	0,0016	0	-0,0756

El caso en que la placa con forma de sector está empotrada en el borde circular y simplemente apoyada en los bordes rectos puede tratarse por el mismo método de solución usado en el caso precedente. En la tabla 66 se dan los valores de los coeficientes α y β para puntos tomados en el eje de simetría del sector.

Puede verse que en este caso la máxima tensión de flexión se produce en el punto medio del borde circular del sector.

Si el borde circular de una placa uniformemente cargada con forma de sector está libre, la flecha máxima se produce en el punto medio de dicho borde. Para el caso en que $\pi/k = \pi/2$ obtenemos

$$w_{\text{máx}} = 0,0633 \frac{qa^4}{D}$$

El momento flector en el mismo punto es

$$M_t = 0,1331qa^2$$

En el caso de una placa con forma de sector circular con bordes radiales empotrados o libres, deben aplicarse métodos aproximados¹. Sin embargo, el problema particular de la placa en forma de cuña con carga lateral puede resolverse rigurosamente (v. ap. 78). Otro problema que permite una solución exacta es el de la flexión de una placa empotrada a lo largo de dos arcos circulares². En este caso deben introducirse coordenadas bipolares; en la tabla 67 se dan los resultados relativos a una placa semicircular empotrada.

TABLA 67

Valores de los factores α , β y β_1 [ecs. (f)] para placa semicircular empotrada en el contorno (fig. 145a) $\nu = 0,3$

Reparto de carga	$r/a = 0$	$r/a = 0,483$	$r/a = 0,486$	$r/a = 0,525$	$r/a = 1$
	β	$\beta_{\text{máx}}$	$\alpha_{\text{máx}}$	$\beta_{t, \text{máx}}$	β
Carga hidrostática q	-0,0731	0,0355	0,00202	0,0194	-0,0584
Carga uniforme y/a	-0,0276	-0,0355

Pueden usarse también con ventaja en el caso de una placa empotrada entre un círculo exterior y uno interior (excéntrico) bajo una carga única³.

¹ Véase G. F. Carrier y F. S. Shaw, *Proc. Symposia Appl. Math.*, vol. 3, pág. 125, 1950; H. D. Conway y M. K. Huang, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 5, 1952; H. R. Hassé, *Quart. Mech. Appl. Math.*, vol. 3, pág. 271, 1950. El caso de una carga concentrada ha sido estudiado por T. Sekiya y A. Saito, *Proc. Fourth Japan. Congr. Appl. Mech.*, pág. 195, 1954. Para placas limitadas por dos radios y dos arcos y empotradas, véase G. F. Carrier, *J. Appl. Mechanics*, volumen 11, pág. A-134, 1944. El mismo problema con distintas condiciones de borde fue estudiado por L. I. Deverall y C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, vol. 18, pág. 359, 1951. La flexión de una placa semicircular uniformemente cargada simplemente apoyada en el borde curvo y libres en el diámetro (un «disfragma» de una turbina de vapor) ha sido estudiado con detalle por D. F. Master y M. A. Sadowsky, *J. Appl. Mechanics*, vol. 23, pág. 329, 1956. Además H. Muggenburg ha tratado un caso similar con el borde curvo empotrado, *Ingr.-Arch.*, volumen 24, pág. 308, 1956.

² La función de Green para estas condiciones de contorno fue obtenida por A. C. Dixon, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, pág. 373, 1920. Para un caso límite interesante, véase W. R. Dean, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 49, pág. 1953. Para los casos de cargas repartidas el uso de la función de Green, bastante engorroso puede evitarse; véase S. Woinowsky-Krieger, *J. Appl. Mechanics*, vol. 22, pág. 129, 1955; e *Ingr.-Arch.*, vol. 24, pág. 48, 1956.

³ Este problema fue estudiado por N. V. Kudriartzer, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, volumen 53, pág. 203, 1946.

67. Placas circulares de espesor no uniforme

Se encuentran a veces placas circulares de espesor no uniforme en el proyecto de elementos de máquinas tales como diafragmas de máquinas de vapor y pistones de máquinas oscilantes. En tales placas normalmente el espesor es función de la distancia al centro y la carga simétrica respecto al mismo. Limitaremos nuestro estudio a este caso de simetría.

Procediendo como se vio en el apartado 15 y utilizando las notaciones de ese apartado, de la condición de equilibrio del elemento indicado en la figura 28 (pág. 71) deducimos la ecuación siguiente:

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Qr = 0 \quad (a)$$

en la que, como anteriormente

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \quad (b)$$

$$M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

donde

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} \quad (c)$$

y Q es el esfuerzo cortante por unidad de longitud de una sección circular de radio r . En el caso de una placa completa Q está dado por la ecuación

$$Q = \frac{1}{2\pi r} \int_0^r q \cdot 2\pi r \, dr \quad (d)$$

en la que q es la intensidad de la carga lateral.

Sustituyendo las expresiones (b), (c) y (d) en la ecuación (a) y observando que la rigidez a flexión D ya no es constante sino función de r , obtenemos la siguiente ecuación

$$D \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{dD}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) = -\frac{1}{r} \int_0^r q \, r \, dr \quad (e)$$

De esta forma el problema de la flexión de placas circulares cargadas simétricamente se reduce a la solución de la ecuación diferencial (e) de segundo orden con coeficientes variables. Para poner la ecuación en forma adimensional utilizamos las siguientes notaciones:

- a = radio exterior de la placa
- h = espesor de la placa en un punto cualquiera
- h_0 = espesor de la placa en el centro

entonces

$$\frac{r}{a} = x \quad \frac{h}{h_0} = y \quad (f)$$

Supongamos también que la carga está uniformemente repartida. Utilizando la notación

$$p = \frac{6(1-\nu^2)a^4q}{Eh_0^3} \quad (g)$$

la ecuación (e) toma entonces la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{d \ln y^{\nu}}{dx} \right) \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\nu}{x} \frac{d \ln y^{\nu}}{dx} \right) \varphi = -\frac{px}{y^{\nu}} \quad (198)$$

En muchos casos la variación de espesor de la placa puede representarse con suficiente aproximación por la ecuación¹.

$$y = e^{-\beta x^{2/3}} \quad (h)$$

en la que β es una constante que debe elegirse en cada caso particular de modo que se obtenga la mejor aproximación posible a las dimensiones reales de la placa. En la figura 146 da la variación de espesor de una placa a lo largo del diámetro para diversos valores de β . Sustituyendo la expresión (h) en la ecuación (198), hallamos

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \beta x \right) \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} + \nu\beta \right) \varphi = -pxe^{\beta x^{2/3}} \quad (i)$$

Puede comprobarse fácilmente que

$$\varphi_0 = -\frac{p}{(3-\nu)\beta} x e^{\beta x^{2/3}} \quad (j)$$

es una solución particular de la ecuación (i). Una de las dos soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (i) puede tomarse en forma de serie de potencias

$$\varphi_1 = a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (1+\nu)(3+\nu) \cdots (2n-1+\nu)}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots 2n \cdot 2n(2n+2)} x^{2n+1} \right] \quad (k)$$

en la que a_1 es una constante arbitraria. La segunda solución de la misma ecuación se hace infinita en el centro de la placa, es decir, para $x=0$ y por consiguiente no debe considerarse en el caso de placas sin agujeros en el centro. Combinando las soluciones (j) y (k) puede ponerse la solución general de la ecuación (i) para una placa completa en la forma siguiente:

$$\varphi = p \left[C\varphi_1 - \frac{x}{(3-\nu)\beta} e^{\beta x^{2/3}} \right] \quad (l)$$

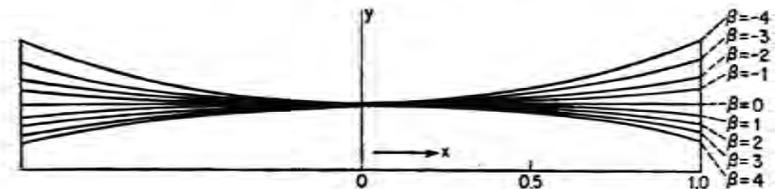


FIG. 146

La constante C en cada caso particular debe determinarse a partir de las condiciones en el contorno de la placa. Puesto que la serie (k) es uniformemente convergente, puede derivarse y obtener las expresiones de los momentos flectores sustituyendo en las ecuaciones (b). Las flechas pueden obtenerse de la ecuación (c).

¹ La primera investigación sobre flexión de placas circulares de espesor no uniforme fue hecha por H. Holzer, *Z. ges. Turbinwesen*, vol. 15, pág. 21, 1918. Los resultados dados en este apartado se han tomado de la tesis doctoral de O. Pichler, «Die Biegung Kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke», Berlin, 1928. Véase también el trabajo de R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, pág. 81, 1937.

En el caso de placa empotrada en el borde, las condiciones de contorno son

$$(w)_{x=1} = 0 \quad (\varphi)_{x=1} = 0 \quad (m)$$

y la constante C en la solución (l) es

$$C = \frac{e^{\beta x}}{(3 - \nu)\beta(\varphi_1)_{x=1}} \quad (n)$$

Para determinar el valor numérico de C para un valor dado de β , que define la forma de la sección diametral (v. fig. 146), debe calcularse la suma de la serie (k) para $x = 1$. En el mencionado trabajo de Pichler se dan los resultados de estos cálculos. Este trabajo da también los valores de la derivada y la integral de la serie (k) mediante los cuales pueden calcularse los momentos y flechas de una placa.

La flecha de la placa en el centro puede darse por la fórmula

$$w_{\max} = \alpha \alpha' p = \alpha \frac{6(1 - \nu^2) a' q}{E h_0^3} \quad (o)$$

en la que α es un factor numérico que depende del valor de la constante β . En la primera línea de la tabla 68 se dan varios valores de este factor, calculados para $\nu = 0,3$.

TABLA 68

Factores α y α' para el cálculo de flechas en el centro de placas circulares de espesor variable $\nu = 0,3$

β	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
α	0,0801	0,0639	0,0505	0,0398	0,0313	0,0246	0,0192	0,0152	0,01195
α'	0,2233	0,1944	0,1692	0,1471	0,1273	0,1098	0,0937	0,0791	0,06605

Las tensiones máximas de flexión para distintas distancias radiales pueden darse por las fórmulas

$$(\sigma_r)_{\max} = \pm \gamma \frac{3qa^2}{h_0^2} \quad (\sigma_t)_{\max} = \pm \gamma_1 \frac{3qa^2}{h_0^2} \quad (p)$$

En las figuras 147 y 148 se dan gráficamente los valores numéricos de los factores γ y γ_1 para distintas proporciones de la placa y varios valores de $x = r/a$. Para $\beta = 0$

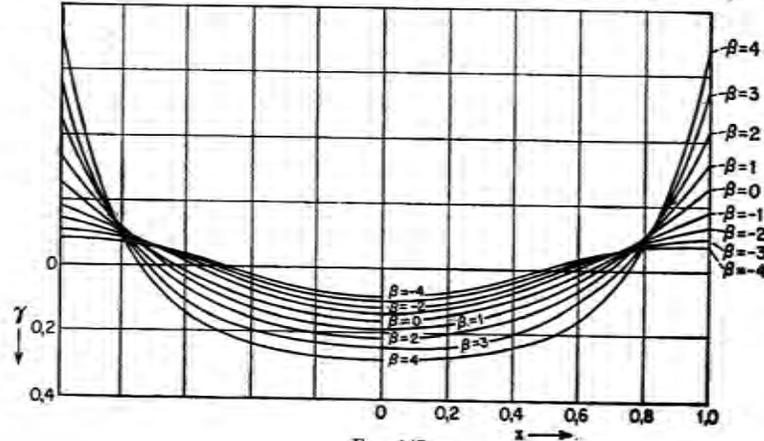


FIG. 147

estas curvas dan los mismos valores de las tensiones ya obtenidas para placas de espesor uniforme (v. fig. 29, pág. 75).

En el caso de una placa simplemente apoyada en el borde, las condiciones de contorno son

$$(w)_{x=1} = 0 \quad (M_r)_{x=1} = 0 \quad (q)$$

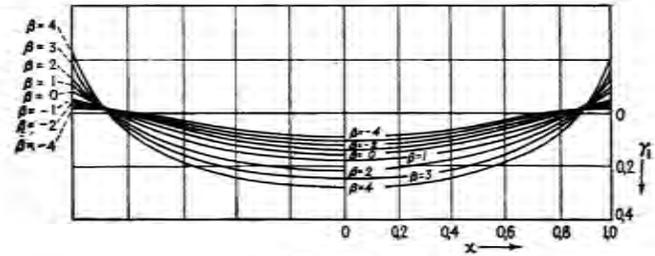


FIG. 148

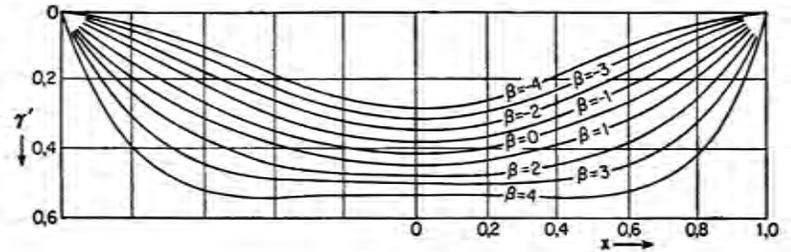


FIG. 149

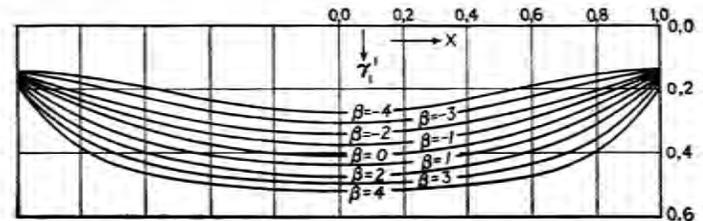


FIG. 150

Se puede demostrar que las flechas y tensiones máximas pueden ponerse también en forma análoga a las ecuaciones (o) y (p). En este caso utilizaremos para las constantes las notaciones α' , γ' , γ'_1 en lugar de α , γ , γ_1 usadas para placas empotradas. Los valores de α' se dan en la última línea de la tabla 68 y los valores de γ' , γ'_1 en las curvas de las figuras 149 y 150 respectivamente.

Para calcular las flechas y tensiones de una placa dada de espesor variable comenzamos eligiendo el valor apropiado de la constante β dado por las curvas en la figura 146. Cuando se ha determinado el valor de β y se conocen las condiciones de contorno, podemos utilizar los valores de la tabla 68 para calcular la flecha en el centro, y las curvas de las figuras 147 y 148 ó 149 y 150 para calcular las tensiones

máximas. Si la forma de la sección diámetro de la placa dada no puede representarse con aproximación satisfactoria por una de las curvas de la figura 146, puede siempre aplicarse un método aproximado para resolver el problema. Este método consiste en dividir la placa en varios anillos mediante círculos concéntricos y utilizar para cada anillo las fórmulas deducidas para una placa anular de espesor constante. El procedimiento de cálculo es entonces similar al propuesto por R. Grammel para calcular tensiones en discos rotatorios¹.

68. Placas anulares con variación lineal de espesor

Consideremos una placa circular con un agujero circular y cuyo espesor varía en la forma que se indica en la figura 151. La placa soporta una carga superficial

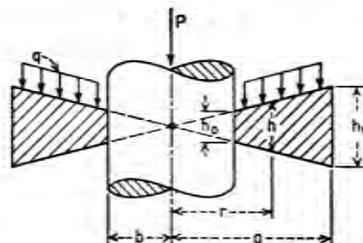


FIG. 151

uniformemente repartida q y una carga $p = P/2\pi b$ uniformemente repartida en el borde del agujero². Siendo $D_0 = Eh_0^3/12(1 - \nu^2)$ la rigidez a flexión para $r = b$, tenemos a cualquier distancia r del centro

$$D = \frac{D_0 r^3}{b^3} \quad (a)$$

Sustituyendo en la ecuación (e) del apartado 67 y teniendo en cuenta el esfuerzo cortante adicional $P/2\pi r$ debido a la carga del borde, llegamos a la ecuación diferencial

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + 4r \frac{d\varphi}{dr} + (3\nu - 1)\varphi = -\frac{qb^3}{2D_0} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{Pb^3}{2\pi D_0 r^2} \quad (b)$$

La solución de la ecuación homogénea correspondiente a (b) se obtiene fácilmente haciendo $\varphi = r^\alpha$. Combinando esta solución con una solución particular de (b) llegamos a

$$\varphi = Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2} + \frac{qb^3}{2D_0(1-3\nu)} - \frac{qb^3}{6(1-\nu)D_0 r^2} + \frac{Pb^3}{6\pi(1-\nu)D_0 r^2} \quad (c)$$

en la que

$$\alpha_1 = -1,5 + \sqrt{3,25 - 3\nu} \quad \alpha_2 = -1,5 - \sqrt{3,25 - 3\nu} \quad (d)$$

¹ R. Grammel, *Dinglers Polytech. J.*, vol. 338, pág. 217, 1923. La analogía entre el problema de un disco rotatorio y el problema de la flexión lateral de una placa circular de espesor variable fue indicada por L. Föppl, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 92, 1922. La flexión no simétrica de placas circulares de espesor no uniforme fue estudiada por R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 10, pág. 14, 1939.

² Este caso ha sido estudiado por H. D. Conway, *J. Appl. Mechanics*, vol. 15, pág. 1, 1948. Los resultados numéricos dados en la tabla 69 se han tomado de este trabajo.

En el caso especial $\nu = 1/3$ la expresión (c) debe sustituirse por

$$\varphi = A + \frac{B}{r^2} - \frac{qb^3}{6D_0} \ln \frac{r}{b} - \frac{qb^3}{4D_0 r^2} + \frac{Pb^3}{4\pi D_0 r^2} \quad (e)$$

Las constantes arbitrarias A y B deben determinarse de las condiciones de contorno en cada caso. La última columna de la tabla 69 contiene las condiciones de contorno y valores especiales de q y P en seis casos distintos, escribiendo para abreviar q_0 en lugar de $(\varphi)_{r=0}$ y M_0 en lugar de $(M_r)_{r=0}$. La misma tabla da los

TABLA 69

Valores de los coeficientes de las ecuaciones (f) para distintos valores de la relación a/b (fig. 151) $\nu = 1/3$

Caso (número correspondiente a la tabla 3)	Coeficiente	a/b						Condiciones de contorno
		1,25	1,5	2	3	4	5	
3	 k k_1	0,249	0,638	3,96	13,64	26,0	40,6	$P=Q^*$ $q_0=0$ $M_0=0$
4	 k k_1	0,149	0,991	2,23	5,57	7,78	9,16	$P=0$ $q_0=0$ $M_0=0$
5	 k k_1	0,1275	0,515	2,05	7,97	17,35	30,0	$P=Q^*$ $q_0=0$ $q_a=0$
6	 k k_1	0,159	0,396	1,091	3,31	6,55	10,78	$q=0$ $q_b=0$ $q_a=0$
8	 k k_1	0,353	0,933	2,63	6,88	11,47	16,51	$q=0$ $q_b=0$ $M_0=0$
-	 k k_1	0,0785	0,208	0,52	1,27	1,94	2,52	$P=0$ $q_0=0$ $q_a=0$

*Cuando $Q = \pi q(a^2 - b^2)$.

valores de los coeficientes k y k_1 calculados mediante la solución (e) y definidos por las expresiones siguientes de las máximas tensiones y flechas de la placa

$$(\sigma_r)_{\max} = k \frac{qa^2}{h_1^3} \quad \text{o} \quad (\sigma_r)_{\max} = k \frac{P}{h_1^3} \quad (f)$$

$$w_{\max} = k_1 \frac{qa^4}{Eh_1^3} \quad \text{o} \quad w_{\max} = k_1 \frac{Pa^2}{Eh_1^3}$$

En la tabla 3 se han dado resultados numéricos válidos para placas similares de espesor constante

69. Placas circulares con variación lineal de espesor

Para estudiar la flexión de la placa circular indicada en la figura 152¹ tenemos que considerar separadamente dos partes de placa.

1. La superficie anular $b < r < a$. Si $\nu \neq 1/3$ la pendiente $\varphi = dw/dr$ viene dada de nuevo por la expresión (c) del apartado 68, pero sin su penúltimo término.
2. La superficie central $r < \varphi$. Aquí tenemos $dD/dr = 0$ y la ecuación (e) del apartado 67 se reduce a

$$r^2 \frac{d^2 \varphi_i}{dr^2} + r \frac{d\varphi_i}{dr} - \varphi_i = -\frac{qr^2}{2D_0} - \frac{Pr}{2\pi D_0} \quad (a)$$

donde el subíndice i se refiere a la parte central de la placa. La solución general de la ecuación (a) es

$$\varphi_i = A_i r + \frac{B_i}{r} - \frac{qr^2}{16D_0} - \frac{Pr}{8\pi D_0} (2 \log r + 1) \quad (b)$$

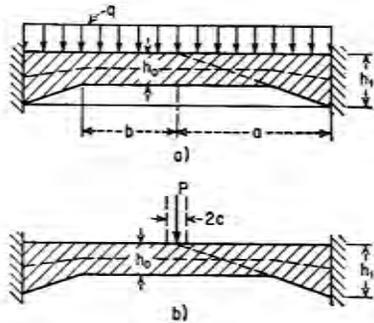


FIG. 152

Las constantes A_i , B_i de esta ecuación y las constantes A , B de la ecuación (c) del apartado 68 pueden obtenerse de la condición de contorno

$$(\varphi)_{r=a} = 0$$

y las condiciones de continuidad

$$(\varphi_i)_{r=b} = 0 \quad (\varphi - \varphi_i)_{r=b} = 0 \quad \left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\varphi_i}{dr} \right)_{r=b} = 0$$

¹ Placas de esta forma empotradas y simplemente apoyadas fueron estudiadas por H. Favre, *Bull. Tech. Suisse romande*, vol. 75, 1949. Los resultados numéricos dados más adelante se deben sustancialmente a H. Favre y E. Chabloz, *Bull. Tech. Suisse romande*, vol. 78, 1952.

Las tablas 70 y 71 dan la flecha w_{\max} y los valores de los momentos flectores en dos casos de carga. Para calcular el momento flector en el centro en el caso de carga central P , suponemos la carga uniformemente repartida en una superficie circular de radio c . El momento $M_r = M_t$ para $r = 0$ puede ponerse entonces en la forma

$$M_{\max} = M_0 - \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{2a^2} \right) + \gamma_1 P \quad (c)$$

En esta fórmula M_0 está dado por la ecuación (83), válida para placa apoyada de espesor constante; el segundo término representa el efecto del momento de borde, y el tercer término, debido a la variación de espesor de la placa, está dado en la tabla 71.

TABLA 70

Flechas y momentos flectores de placas circulares empotradas uniformemente cargadas (fig. 152a) $\nu = 0,25$

$\frac{b}{a}$	$w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{Eh_0^3}$	$M_r = \beta qa^2$			$M_t = \beta_1 qa^2$		
		$r = 0$	$r = b$	$r = a$	$r = 0$	$r = b$	$r = a$
	α	β	β	β	β_1	β_1	β_1
0,2	0,008	0,0122	0,0040	-0,161	0,0122	0,0078	-0,040
0,4	0,042	0,0332	0,0007	-0,156	0,0332	0,0157	-0,039
0,6	0,094	0,0543	-0,0188	-0,149	0,0543	0,0149	-0,037
0,8	0,148	0,0709	-0,0591	-0,140	0,0709	0,0009	-0,035
1,0	0,176	0,0781	-0,125	-0,125	0,0781	-0,031	-0,031

TABLA 71

Flechas y momentos flectores de placas circulares empotradas bajo carga central (fig. 152b) $\nu = 0,25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{\max} = \alpha \frac{Pa^2}{Eh_0^3}$	$M_r = M_t$ $r = 0$	$M_r = \beta P$		$M_t = \beta_1 P$	
			$r = b$	$r = a$	$r = b$	$r = a$
	α	γ_1^*	β	β	β_1	β_1
0,2	0,031	-0,114	-0,034	-0,129	-0,028	-0,032
0,4	0,093	-0,051	-0,040	-0,112	-0,034	-0,028
0,6	0,155	-0,021	-0,050	-0,096	-0,044	-0,024
0,8	0,203	-0,005	-0,063	-0,084	-0,057	-0,021
1,0	0,224	0	-0,080	-0,080	-0,020	-0,020

* En la ecuación (c).

En el caso de cargas fuertemente concentradas que requieren el empleo de la teoría de placas gruesas, la tensión en el centro de la cara inferior de la placa está dada por la expresión

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \frac{6P\gamma_1}{h_0^2} \quad (d)$$

en la que σ_0 puede calcularse mediante la expresión (97).

Suponiendo, como generalización, una placa en que la rigidez a flexión varía según la ley

$$D = D_0 \left(1 - \frac{r}{a_0} \right)^m \quad (e)$$

en la que a_0 representa una longitud igual o mayor que el radio de la placa, llegamos en general a una pendiente φ que puede expresarse mediante una función hipergeométrica¹. La hipótesis particular $m = 1/\nu$ lleva sin embargo a una solución finita. Tomando además $\nu = 1/3$ llegamos de nuevo a una placa con variación lineal de espesor².

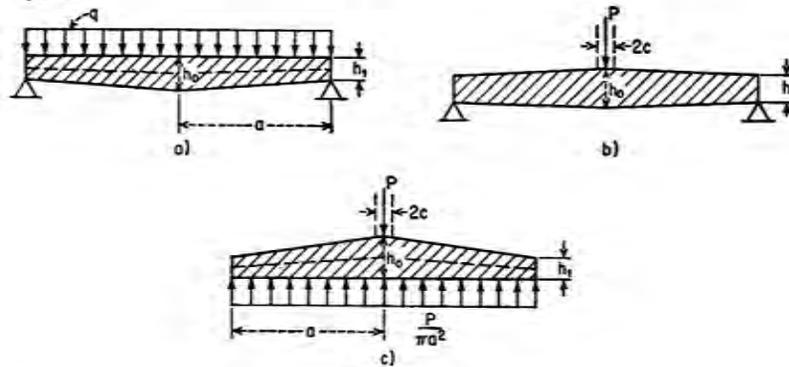


FIG. 153

La deformación simétrica de placas tales como las indicadas en la figura 153 puede estudiarse también por un método de variación de parámetros análogo al descrito en el apartado 39. En las tablas 72 y 73 se dan algunos resultados numéricos³ obtenidos de esta forma.

TABLA 72

Flechas y momentos flectores de placas simplemente apoyadas bajo carga uniforme (fig. 153a) $\nu = 0,25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{\max} = a \frac{qa^3}{Eh_0^3}$	$M_r = \beta qa^2$		$M_t = \beta_1 qa^2$		
		$r = 0$	$r = a/2$	$r = 0$	$r = a/2$	$r = a$
α	α	β	β	β_1	β_1	β_1
1,00	0,738	0,203	0,152	0,203	0,176	0,094
1,50	1,26	0,257	0,176	0,257	0,173	0,054
2,33	2,04	0,304	0,195	0,304	0,167	0,029

Para los momentos flectores y tensiones de tracción bajo carga central P [fig. 153 b)], pueden usarse las expresiones

$$M_{\max} = M_0 + \gamma_2 P \quad (f)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \frac{6P\gamma_2}{h_0^2} \quad (g)$$

¹ R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, pág. 270, 1937.

² Véase en particular H. D. Conway, *J. Appl. Mechanics*, vol. 18, pág. 140, 1951, y volumen 20, pág. 564, 1953.

³ Debidos, así como el propio método a H. Favre y E. Chabloz, *Z. angew. Math. u. Phys.*, volumen 1, pág. 317, 1950, y *Bull. Tech. Suisse romande*, vol. 78, 1952.

análogas a las ecuaciones (c) y (d). M_0 está dado una vez más por la expresión (83), σ_0 representa el valor calculado mediante la expresión (96), y γ_2 está dado en la tabla 73.

TABLA 73

Flechas y momentos flectores de placas circulares simplemente apoyadas bajo carga central (fig. 153b) $\nu = 0,25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{\max} = a \frac{Pa^2}{Eh_0^3}$	$M_r = M_t$	$M_r = \beta P$	$M_t = \beta_1 P$	
		$r = 0$	$r = a/2$	$r = a/2$	$r = a$
α	α	γ_2	β	β_1	β_1
1,00	0,582	0	0,069	0,129	0,060
1,50	0,93	0,029	0,088	0,123	0,033
2,33	1,39	0,059	0,102	0,116	0,016

Tiene también interés práctico la combinación de cargas indicadas en la figura 153 a) y b). Tomando $q = -P/\pi a^2$, tenemos el estado de equilibrio de un apoyo circular que soporta una carga central P y sometido a una reacción del terreno uniformemente repartida [fig. 153 c)]. En la tabla 74⁴ se dan datos relativos a este caso, en particular valores del factor γ_2 a emplear en las fórmulas (f) y (g).

TABLA 74

Momentos flectores en una zapata circular con carga central y reacción del terreno uniformemente repartida (fig. 153c) $\nu = 0,25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$M_r = M_t$	$M_r = \beta P$	$M_t = \beta_1 P$	
	$r = 0$	$r = a/2$	$r = a/2$	$r = a$
α	γ_2	β	β_1	β_1
1,00	-0,065	0,021	0,073	0,030
1,50	-0,053	0,032	0,068	0,016
2,33	-0,038	0,040	0,063	0,007

70. Problemas no lineales en la flexión de placas circulares

Por la teoría de la flexión de vigas es ya sabido que, si las condiciones de apoyo o la carga varían con la flecha, esta flecha no será ya proporcional a la carga y ya no es aplicable el principio de superposición⁵. Problemas

⁴ Respecto a datos más amplios sobre placas circulares de espesor variable, véase W. Gittelman, *Aircraft Eng.*, vol. 22, pág. 224, 1950, y J. Paschoud, *Schweiz. Arch.*, vol. 17, pág. 305, 1951. P. F. Chenea y P. M. Naghdi han dado un método gráfico de proyecto, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 561, 1952.

⁵ Se ha estudiado un ejemplo de estos problemas en S. Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 69, 1956.

similares pueden presentarse en la flexión de placas¹. En la figura 154 se indica un ejemplo sencillo de este tipo. Una placa circular de radio a está comprimida por una carga q contra una cimentación absolutamente rígida. Si se aplican momentos de intensidad M_a en el borde de la placa, una parte de ella, de forma anular, puede flexar como indica la figura, mientras la parte central, de radio b permanece plana.

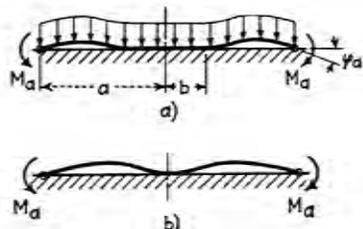


FIG. 154

Tales condiciones se presentan por ejemplo, en la placa de fondo de un recipiente cilíndrico lleno de líquido. Los momentos M_a representan en este caso el efecto de la pared cilíndrica del recipiente que sufre una flexión local en el fondo. Aplicando a la parte anular del fondo de la placa la solución conocida para una placa circular uniformemente cargada [v. expresión (m) del apartado 62], obtenemos la flecha

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D} \quad (a)$$

Para determinar las constantes de integración C_1, \dots, C_4 tenemos las siguientes condiciones de contorno en el borde exterior:

$$(w)_{r=a} = 0 \quad (M_r)_{r=a} = -M_a \quad (b)$$

En todo el círculo de radio b la flecha y la pendiente se anulan. El momento flector debe ser también nulo en su circunferencia puesto que la parte interior de la placa permanece plana. Por consiguiente las condiciones en la circunferencia de radio b son

$$(w)_{r=b} = 0 \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = 0 \quad (M_r)_{r=b} = 0 \quad (c)$$

Aplicando las condiciones (b) y (c) a la expresión (a) obtenemos las cinco condiciones siguientes

¹ Véase K. Girkmann, *Stahlbau*, vol. 18, 1931. Varios ejemplos de tales problemas han sido estudiadas por R. Hofmann, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 18, pág. 226, 1938.

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a &= -\frac{qa^4}{64D} \\ C_1 + C_2 \ln b + C_3 b^2 + C_4 b^2 \ln b &= -\frac{qb^4}{64D} \\ C_2 \frac{r-1}{a^2} + C_3 2(r+1) &+ C_4(3 + 2 \ln a + 2r \ln a + r) = -\frac{qa^2}{16D}(3+r) + \frac{M_a}{D} \quad (d) \\ C_2 \frac{r-1}{b^2} + C_3 2(r+1) &+ C_4(3 + 2 \ln b + 2r \ln b + r) = -\frac{qb^2}{16D}(3+r) \\ C_2 \frac{1}{b} + C_3 2b + C_4 b(2 \ln b + 1) &= -\frac{qb^3}{16D} \end{aligned}$$

Eliminando de estas ecuaciones las constantes C_1, \dots, C_4 obtenemos una ecuación que relaciona el momento M_a con la relación b/a , mediante la cual puede calcularse el radio de la parte plana para cada valor dado de M_a . Con este valor de b pueden calcularse las constantes de integración y obtenerse de la ecuación (a) la expresión de la flecha de la placa. Representando el momento M_a y el ángulo de giro φ_a del borde de la placa por las ecuaciones

$$M_a = \alpha \frac{qa^2}{32} \quad \text{y} \quad \varphi_a = \beta \frac{qa^3}{32D} \quad (e)$$

y repitiendo los cálculos mencionados para distintos valores del momento M_a , podemos representar gráficamente la relación entre los factores α y β , como se indica en la figura 155, para el caso particular² $\nu = 0$. En esta figura se ve que β no varía proporcionalmente a α y la resistencia de la placa

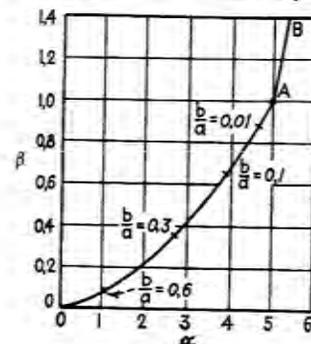


FIG. 155

² Este caso ha sido estudiado en la citada obra de Hofmann.

al giro en el borde disminuye cuando disminuye b/a . Esta condición es válida hasta el valor $a = 5$, para el cual $\beta = 1$, $b/a = 0$, y la placa toca el terreno únicamente en el centro como se ve en la figura 154 b). Para valores mayores de a , esto es, para momentos mayores que $M_a = 5qa^2/32$, la placa no toca el terreno y la relación entre a y β está representada por la línea recta AB. El valor $M_a = 5qa^2/32$ es el valor para el cual la flecha en el centro de la placa producida por los momentos M_a es igual a la flecha de una placa uniformemente cargada simplemente apoyada en su borde [v. ec. (68)].

En la figura 156 se indica otro ejemplo del mismo tipo.

Una placa circular uniformemente cargada está simplemente apoyada en el borde y queda en su centro sobre una cimentación absolutamente rígida. Nuevamente puede tratarse la parte anular de radio exterior a y radio interior b como placa uniformemente cargada y puede utilizarse la

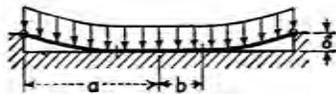


FIG. 156

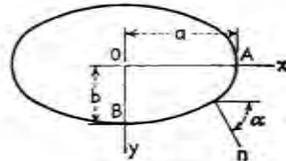


FIG. 157

solución (a). La relación b/a depende de la flecha δ y la intensidad de carga q .

71. Placas elípticas

Placa elíptica uniformemente cargada con borde empotrado

Tomando las coordenadas como indica la figura 157, la ecuación del contorno de la placa es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a)$$

La ecuación diferencial

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad (b)$$

y las condiciones de contorno

$$w = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (c)$$

se verifican tomando para la flecha w la expresión¹

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \quad (d)$$

Debe notarse que debido a la ecuación (a) del contorno la expresión (d) y sus primeras derivadas respecto a x e y se anulan en el contorno. Sustituyendo (d) en la ecuación (b) vemos que la ecuación se satisface también así

$$w_0 = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2 b^2} \right)} \quad (199)$$

Así pues, la expresión (d) que satisface la ecuación (b) y las condiciones de contorno, representa la solución rigurosa de una placa elíptica uniformemente cargada empotrada en el borde. Sustituyendo en la expresión (d) $x = y = 0$ hallamos que w_0 dada por la expresión (199) es la flecha en el centro de la placa. Si $a = b$ obtenemos para la flecha el valor ya obtenido para una placa circular empotrada [ec. (62), pág. 74]. Si $a = \infty$ la flecha w_0 se hace igual a la flecha de una franja uniformemente cargada con extremos empotrados y luz $2b$.

Los momentos flectores y torsor se obtienen sustituyendo la expresión (d) en las ecuaciones (101) y (102). De este modo hallamos

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -4w_0 D \left[\frac{3x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{a^2} + \nu \left(\frac{x^2}{a^2 b^2} + \frac{3y^2}{b^4} - \frac{1}{b^2} \right) \right] \quad (e)$$

Para el centro de la placa y para los extremos del eje horizontal obtenemos respectivamente

$$(M_x)_{x=0, y=0} = 4w_0 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \quad \text{y} \quad (M_x)_{x=a, y=0} = -\frac{8w_0 D}{a^2} \quad (f)$$

De modo análogo encontramos para los momentos M_y en el centro y en los extremos del eje menor

$$(M_y)_{x=0, y=0} = 4w_0 D \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \quad \text{y} \quad (M_y)_{x=0, y=b} = -\frac{8w_0 D}{b^2} \quad (g)$$

Se ve que las tensiones de flexión máximas se producen en los extremos del eje menor de la elipse. Conociendo los momentos M_x , M_y y M_{xy} , los valores del momento flector M_n y el momento torsor M_{nt} en cualquier

¹ Esta solución y la solución para una carga q con variación uniforme fueron obtenidas por G. H. Bryan; véase el libro de A. E. H. Love, *Theory of Elasticity*, 4.ª ed., pág. 484. El caso de placa elíptica de espesor variable fue estudiado por R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, volumen 9, pág. 108, 1938.

punto del contorno se obtienen mediante las ecuaciones (c) (ap. 22, pág. 107) sustituyendo en ellas

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \quad \text{sen } \alpha = -\frac{dx}{ds} = \frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \quad (h)$$

Los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y en cualquiera punto se obtienen sustituyendo la expresión (d) en las ecuaciones (106) y (107). En el contorno el esfuerzo cortante Q_n se obtiene mediante la ecuación (d) (ap. 22, pág. 107), y la reacción V_n mediante la ecuación (g) del mismo apartado. De esta forma encontramos que la reacción por unidad de longitud es máxima en los extremos del eje menor de la elipse y su valor absoluto es

$$(V_n)_{\text{máx}} = \frac{a^2 b (3a^2 + b^2) q}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2 b^2} \quad \text{para } a > b \quad (i)$$

El mínimo valor absoluto de V_n se presenta en los extremos del eje mayor de la elipse donde

$$(V_n)_{\text{mín}} = \frac{ab^2(a^2 + 3b^2)q}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2 b^2} \quad (j)$$

Para un círculo, $a = b$ y tenemos $(V_n)_{\text{máx}} = (V_n)_{\text{mín}} = qa/2$.

Placa elíptica con borde empotrado y carga con intensidad que varía linealmente

Suponiendo $q = q_0 x$, hallamos que la ecuación (b) y las condiciones de contorno (c) se satisfacen tomando

$$w = \frac{q_0 x}{24D} \left(\frac{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{\frac{5}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}} \right)^2 \quad (200)$$

A partir de esta expresión pueden calcularse los momentos flectores y las reacciones en el contorno como en el caso anterior.

Placa elíptica simplemente apoyada en su borde bajo carga uniforme

La solución de este caso es más complicada que para borde empotrado¹ por ello únicamente damos aquí los resultados numéricos finales. Suponiendo $a/b > 1$, la flecha y los momentos flectores en el centro vienen dados por las fórmulas

$$(w)_{x=y=0} = \alpha \frac{qb^4}{Eh^3} \quad M_x = \beta qb^2 \quad M_y = \beta_1 qb^2 \quad (k)$$

En la tabla 75 se dan los valores de las constantes α , β y β_1 para distintos valores de la relación a/b y $\nu = 0,3$.

La comparación de estos valores numéricos con los obtenidos antes para placas rectangulares (tabla 8, pág. 141) pone de manifiesto que para valores idénticos de la razón de los lados de una placa rectangular y la razón a/b de los semiejes de una placa

¹ Véase B. G. Galerkin, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 3, pág. 113, 1923.

Tabla 75

Factores α , β , β_1 de las fórmulas (k) para placas elípticas simplemente apoyadas uniformemente cargadas
 $\nu = 0,3$

a/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	4	5	∞
α	0,70	0,83	0,96	1,07	1,17	1,26	1,58	1,88	2,02	2,10	2,28
β	0,206	0,215	0,219	0,223	0,223	0,222	0,210	0,188	0,184	0,170	0,150
β_1	0,206	0,235	0,261	0,282	0,303	0,321	0,379	0,433	0,465	0,480	0,500

elíptica, los valores de la flecha y los momentos en el centro difieren muy poco. También está estudiado el caso de placa semielíptica limitada por el eje transversal¹.

72. Placas triangulares

Placa en forma de triángulo equilátero simplemente apoyada en sus bordes

Ya se ha estudiado (v. pág. 114) la flexión de este tipo de placa triangular por momentos M_n uniformemente repartidos en el contorno. Se ha demostrado que la deformada de la placa coincide con la de una membrana uniformemente tensada y uniformemente cargada y viene dada por la ecuación

$$w = \frac{M_n}{4aD} \left[x^2 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right] \quad (a)$$

en la que a representa la altura del triángulo y los ejes coordenados se han tomado como indica la figura 158.

En el caso de una placa uniformemente cargada la deformada es²

$$w = \frac{q}{64aD} \left[x^2 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right] \left(\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right) \quad (201)$$

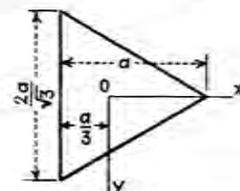


FIG. 158

¹ B. G. Galerkin, *Messenger Math.*, vol. 52, pág. 99, 1923. Respecto a flexión de placas elípticas empotradas bajo cargas concentradas, véase H. Happel, *Math. Z.*, vol. 6, pág. 203, 1920, y C. L. Perry, *Proc. Symposia Appl. Math.*, vol. 3, pág. 131, 1950. Véase también H. M. Sengupta, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 41, pág. 163, 1949, y vol. 43, pág. 123, 1950; este último trabajo contiene una corrección del anterior. B. Sen ha obtenido soluciones para placas uniformemente cargadas empotradas en contornos diversos utilizando coordenadas curvilíneas, véase *Phil. Mag.*, vol. 33, pág. 294, 1942.

² El problema de la flexión de una placa en forma de triángulo equilátero fue resuelto por S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 254, 1933.

Derivando hallamos

$$\Delta w = -\frac{q}{4aD} \left[x^2 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \quad (b)$$

En las expresiones (201) y (b) puede verse que la flecha y el momento flector se anulan en el contorno, puesto que la expresión entre corchetes se anula en él. Una nueva derivación da

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad (c)$$

Por lo tanto se satisfacen también la ecuación diferencial de la deformada y la expresión (201) representa la solución del problema. Teniendo la expresión de las flechas, pueden obtenerse fácilmente las expresiones de los momentos flectores y los esfuerzos cortantes. Los máximos momentos flectores se producen en las bisectrices. Considerando los puntos del eje x y tomando $\nu = 0,3$, hallamos

$$\begin{aligned} (M_x)_{\max} &= 0,0248qa^2 \text{ para } x = -0,062a \\ (M_y)_{\max} &= 0,0259qa^2 \text{ para } x = 0,129a \end{aligned} \quad (202)$$

En el centro de la placa

$$M_x = M_y = (1 + \nu) \frac{qa^2}{54} \quad (203)$$

El caso de una fuerza concentrada que actúa sobre la placa puede resolverse mediante el método de imágenes (v. pág. 179). Consideremos el

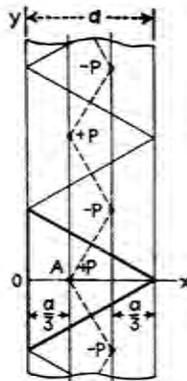


FIG. 159

caso en que el punto de aplicación de la carga sea el centro A de la placa (fig. 159). Considerando la placa indicada en la figura con líneas gruesas como una parte de una placa rectangular infinitamente larga de ancho a ,

aplicamos las cargas ficticias P de signos alternos como indica la figura. Las líneas nodales de la deformada producida por dicha carga, evidentemente dividen la placa infinitamente larga en triángulos equiláteros, cada uno de los cuales está exactamente en las mismas condiciones que la placa dada. Así pues, nuestro problema se reduce al de la flexión de una placa infinitamente larga cargada con dos filas de cargas equidistantes $+P$ y $-P$. Conociendo la solución para una carga concentrada (v. ap. 36) y utilizando el método de superposición, pueden calcularse fácilmente la flecha en el punto A y las tensiones en las proximidades de este punto, puesto que el efecto de las fuerzas ficticias sobre la flexión decrece rápidamente cuando su distancia al punto A aumenta. De esta forma hallamos en el punto A la flecha

$$w_0 = 0,00575 \frac{Pa^2}{D} \quad (204)$$

Los momentos flectores a una distancia pequeña del punto A que representaremos por c , vienen dados por las expresiones

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{a\sqrt{3}}{\pi c} - 0,379 \right) - \frac{(1 - \nu)P}{8\pi} \\ M_y &= \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{a\sqrt{3}}{\pi c} - 0,379 \right) + \frac{(1 - \nu)P}{8\pi} \end{aligned} \quad (205)$$

Puesto que para una placa circular de radio a_0 simplemente apoyada y cargada en el centro los momentos tangencial y radial a una distancia c del centro son respectivamente (v. pág. 87),

$$M_r = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \ln \frac{a_0}{c} \quad (d)$$

y

$$M_t = \frac{(1 + \nu)P}{4\pi} \ln \frac{a_0}{c} + \frac{(1 - \nu)P}{4\pi}$$

puede concluirse que los primeros términos del segundo miembro de las ecuaciones (205) son idénticos a los términos logarítmicos correspondientes a una placa circular de radio

$$a_0 = \frac{a\sqrt{3}}{\pi} e^{-0,379} \quad (e)$$

Por lo tanto las tensiones locales junto al punto de aplicación de la carga pueden calcularse utilizando la teoría de placas gruesas desarrollada para placas circulares (v. ap. 19).

Placa en forma de triángulo equilátero con dos o tres bordes empotrados

Las placas triangulares se utilizan con frecuencia como placas de fondo de carboneras y silos. En tal caso cada placa triangular está rigidamente empotrada en

los dos bordes inclinados y elásticamente empotrada en el borde horizontal (fig. 160). Solamente presentan interés práctico la carga uniformemente repartida o la carga de tipo hidrostático. Los máximos momentos flectores en el vano y el momento de empotramiento en el centro de un borde empotrado vienen dados por

$$M = \beta qa^2 \quad \text{o} \quad M = \beta_1 qa^2 \quad (f)$$

según el tipo de carga (fig. 160). La tabla 76 da los coeficientes β y β_1 , obtenidos por el método de diferencias finitas¹.

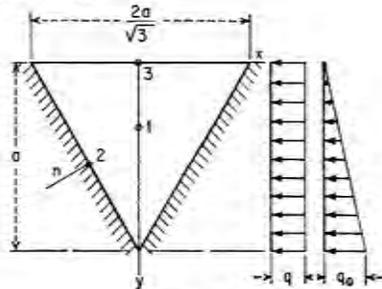


FIG. 160

TABLA 76

Valores de los factores β , β_1 en las ecuaciones (f) para placas en forma de triángulo equilátero (fig. 160)

$\nu = 0,20$

Reparto de carga	Borde $y = 0$ simplemente apoyado				Borde $y = 0$ empotrado			
	M_{x_1}	M_{y_1}	M_{x_2}	M_{y_2}	M_{x_1}	M_{y_1}	M_{x_2}	M_{y_2}
Uniforme . . . β	0,0126	0,0147	-0,0285	0	0,0113	0,0110	0,0238	0,0238
Hidrostática . . β_1	0,0053	0,0035	-0,0100	0	0,0051	0,0034	0,0091	0,0060

Debe notarse finalmente, que una placa triangular con ángulos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$ y con todos sus bordes simplemente apoyados puede considerarse como la mitad de una placa equilátera (fig. 158) cargada en forma antisimétrica respecto al eje x . El problema de la flexión de esta placa puede estudiarse por diversos métodos, por ejemplo por el método de imágenes².

Placa en forma de triángulo rectángulo isósceles con bordes simplemente apoyados

Esta placa puede considerarse como la mitad de una placa cuadrada, como se indica en la figura 161 con línea de trazos y pueden aplicarse los métodos ya vistos para placas rectangulares³. Si existe una carga P aplicada en un punto A de coorde-

¹ Véase A. Smotrov, «Solutions for Plates Loaded According to the Law of Trapezes», Moscú, 1936.

² Para la solución de este problema en serie doble, véase R. Girtler, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, vol. 145, pág. 61, 1936. La flexión de placas en forma de triángulo equilátero con espesor variable ha sido estudiada por H. Göttlicher, *Ingr.-Arch.*, vol. 9, pág. 12, 1938.

³ Este método de solución se debe a A. Nádai, *Elastische Platten*, pág. 178, 1925. Otra forma de tratar el mismo problema fue dada por B. G. Galerkin, *Bull. acad. sci. Russ.*, pág. 223, 1919, y *Bull. Polytech. Inst.*, vol. 28, pág. 1, San Petersburgo, 1919.

nadas ξ , η (fig. 161) suponemos una carga ficticia $-P$ aplicada en A' , que es la imagen del punto A respecto a la línea BC . Estas dos cargas producen evidentemente una deformada tal que en ella BC es una línea nodal. Así la parte OBC de la placa cuadrada se encuentra en las mismas condiciones que la placa triangular OBC sim-

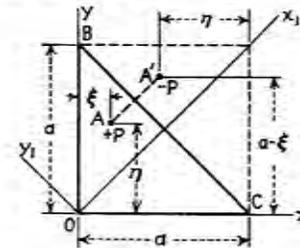


FIG. 161

plemente apoyada. Considerando la carga $+P$ y utilizando la solución de Navier para la placa cuadrada (pág. 132), obtenemos la flecha

$$w_1 = \frac{4Pa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{n\pi\eta}{a}}{(m^2 + n^2)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{a} \quad (g)$$

Del mismo modo, considerando la carga $-P$ y poniendo $a - \eta$ en lugar de ξ y $a - \xi$ en lugar de η , tenemos

$$w_2 = -\frac{4Pa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{n\pi\xi}{a}}{(m^2 + n^2)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{a} \quad (h)$$

La flecha completa de la placa triangular se obtiene sumando las expresiones (g) y (h):

$$w = w_1 + w_2 \quad (i)$$

Para obtener la flecha de la placa triangular producida por una carga uniformemente repartida de intensidad q , sustituimos en lugar de $P q d\xi d\eta$ e integramos la expresión (i) sobre la superficie del triángulo OBC . De esta forma obtenemos

$$w = \frac{16qa^4}{\pi^4 D} \left[\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{n \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{a}}{m(n^2 - m^2)(m^2 + n^2)^2} + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{a}}{n(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)^2} \right] \quad (j)$$

Esta serie converge rápidamente y puede utilizarse para calcular la flecha y los momentos flectores en cualquier punto de la placa. Tomando el eje de simetría del triángulo de la figura 161 como eje x_1 y representando las flechas y momentos M_{x_1} y M_{y_1} a lo largo de este eje por las fórmulas

$$w = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3} \quad M_{x_1} = \beta qa^2 \quad M_{y_1} = \beta_1 qa^2 \quad (k)$$

los valores de los factores numéricos α , β , β_1 son los dados en las figuras 162 y 163. Comparando estos resultados con los dados en la tabla 8 para una placa cuadrada uniformemente cargada, puede deducirse que para el mismo valor de a el momento flector máximo de la placa triangular es algo menor que la mitad del momento flector máximo de la placa cuadrada.

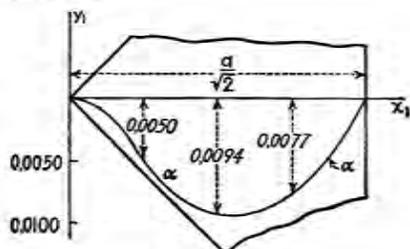


FIG. 162

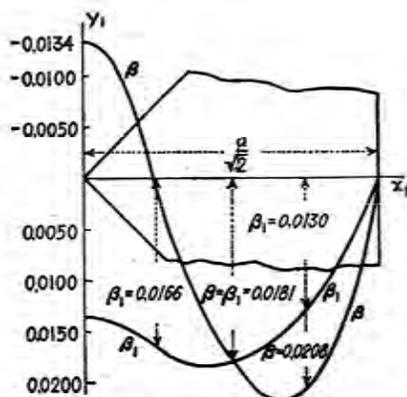


FIG. 163

Para simplificar el cálculo de flechas y momentos puede transformarse la serie doble (j) en una serie sencilla¹. Para ello usemos la conocida serie

$$U_m(x) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 + m^2)^2} = -\frac{2}{m^4} + \frac{\pi}{2m^3} \frac{\operatorname{ch} m \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi m}{2}} + \frac{\pi^2}{4m^3} \frac{\operatorname{ch} mx}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi m}{2}} + \frac{\pi x}{2m^2} \frac{\operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi m}{2}} \quad (l)$$

¹ Esta transformación fue comunicada a S. Timoshenko por J. V. Uspensky.

que puede ponerse en la forma siguiente

$$U_m(x) = (\alpha_m + \beta_m x) \operatorname{ch} mx + (\gamma_m + \delta_m x) \operatorname{sh} mx = \frac{2}{m^4} \quad (m)$$

Considerando ahora la serie

$$V_m(x) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 + m^2)^2(n^2 - m^2)} \quad (n)$$

obtenemos

$$\frac{dV_m}{dx} = - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} nx}{(n^2 + m^2)^2(n^2 - m^2)} \quad (o)$$

y

$$\frac{d^2V_m}{dx^2} + m^2V_m = - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 + m^2)^2} = -U_m \quad (p)$$

Integrando la ecuación (p) hallamos

$$V_m = A_m \cos mx + B_m \operatorname{sen} mx + \frac{1}{m} \int_0^x U_m(\xi) \operatorname{sen} m(\xi - x) d\xi \quad (q)$$

y

$$\frac{dV_m}{dx} = -mA_m \operatorname{sen} mx + mB_m \cos mx - \int_0^x U_m(\xi) \cos m(\xi - x) d\xi \quad (r)$$

Las constantes A_m y B_m pueden determinarse a partir de las condiciones

$$\left(\frac{dV_m}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad \text{y} \quad V_m(0) = V_m(x) \quad (s)$$

que se deducen de las series (o) y (n). Con estos valores de las constantes la expresión (r) da la suma de la serie (o), que reduce la serie doble de la expresión (j) a una serie sencilla.

73. Placas sesgadas

Se han utilizado placas en forma de paralelogramo oblicuo como losas de forjado en puentes sesgados. Tales losas ordinariamente están simplemente apoyadas en los estribos, en tanto, los otros lados quedan libres o elásticamente apoyados en las vigas.

En la mayoría de los casos es recomendable utilizar un sistema de coordenadas oblicuas elegido de acuerdo con el ángulo de inclinación dado; en algunos casos particulares pueden tratarse con ventaja las placas sesgadas en coordenadas rectangulares y en general el método de diferencias finitas se presenta como el más prometededor. Los resultados numéricos siguientes para placas sesgadas uniformemente cargadas se han obtenido de esta forma¹. En el centro de una placa sesgada con todos los bordes simplemente apoyados [fig. 164 a)] es

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad M_{\max} = \beta qa^2 \quad (a)$$

¹ La mayoría de los datos se deben a V. P. Jensen, *Univ. Illinois Bull.*, 332, 1941, y V. P. Jensen y J. W. Allen, *Univ. Illinois Bull.*, 369, 1947. Véase también C. P. Siess, *Proc. ASCE*, volumen 74, pág. 323, 1948. H. Favre ha aplicado métodos analíticos, véase *Schweiz. Bauztg.*, vol. 60, pág. 35, 1942; P. Lardy, *Schweiz. Bauztg.*, vol. 67, pág. 207, 1949; igualmente J. Krettnner, *Ingr.-Arch.*, vol. 22, pág. 47, 1954, donde se da la bibliografía más amplia. Respecto a uso del método de la energía, véase A. M. Guzmán y C. J. Luisoni, *Publ. Univ. Nacl. Buenos Aires*, pág. 452, 1953. La flexión pura de placas sesgadas ha sido estudiada por E. Reissner, *Quart. Appl. Math.*, vol. 10, pág. 395, 1953. Modelos de placas sesgadas han sido ensayados por L. Schmerber, G. Brandes, y H. Schambeck, *Bauingenieur*, vol. 33, pág. 174, 1958. Respecto al empleo de la diferencias finitas, véase también el apartado 83.

El momento flector $M_{m\acute{a}x}$ actúa en una dirección muy aproximada a la del vano menor de la placa.

Si los bordes $y = 0$ e $y = a$ están libres y los otros dos bordes simplemente apoyados [fig. 164 b)] la parte central de la placa soporta una carga en dirección normal a los estribos. Siendo w_0 y $(M_0)_{m\acute{a}x}$ la flecha y momento flector en el centro

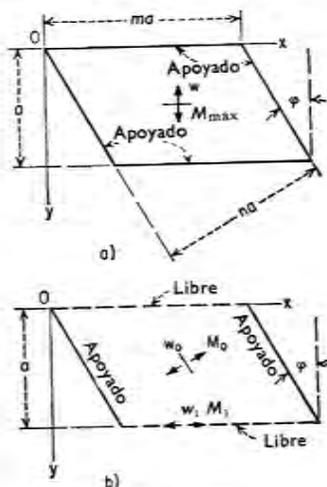


FIG. 164

de la placa respectivamente y $(w_1)_{m\acute{a}x}$ y $(M_1)_{m\acute{a}x}$ los valores correspondientes en el borde libre, podemos expresar estas cantidades en la forma

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha_0 \frac{qa^4}{D} & (M_0)_{m\acute{a}x} &= \beta_0 qa^2 \\ (w_1)_{m\acute{a}x} &= \alpha_1 \frac{qa^4}{D} & (M_1)_{m\acute{a}x} &= \beta_1 qa^2 \end{aligned} \quad (b)$$

Los valores numéricos de los coeficientes están dados en la tabla 77.

TABLA 77

Valores de los coeficientes de las ecuaciones (a) y (b) para el cálculo de flechas y momentos flectores de placas oblicuas uniformemente cargadas
 $\nu = 0,2$

φ°	m	n	Placa de la figura 164a		Placa de la figura 164b			
			α	β	α_0	α_1	β_0	β_1
0	2	2	0,01013	0,0999	0,214	0,224	0,495	0,508
30	2,02	1,75	0,01046	0,0968				
30	1,92	1,67	0,1183	0,1302	0,368	0,367
45	2	1,414	0,00938	0,0898	0,0708	0,0869	0,291	0,296
60	2	1	0,00796	0,0772	0,0186	0,0396	0,166	0,152
75	2	0,518	0,00094	0,0335				

74. Distribución de tensiones alrededor de agujeros

Para estudiar la distribución de tensiones alrededor de un agujero, es más sencillo considerar una placa de gran extensión; los resultados obtenidos de este modo son aplicables a placas de cualquier forma sin error apreciable, siempre que el ancho del agujero sea pequeño en comparación con las dimensiones totales de la placa.

Tomemos como ejemplo una placa infinitamente larga en estado uniforme de tensiones definidas por los momentos

$$M'_z = M_0 \quad M'_y = 0 \quad (a)$$

que corresponden a una deformada

$$w' = \frac{M_0(x^2 - \nu y^2)}{2D(1 - \nu^2)} = -\frac{M_0 r^2}{4D(1 - \nu^2)} [1 - \nu + (1 + \nu) \cos 2\theta] \quad (b)$$

Para obtener la perturbación producida en tal estado de flexión pura por un agujero circular de radio a (fig. 165) suponemos que se ha suprimi-

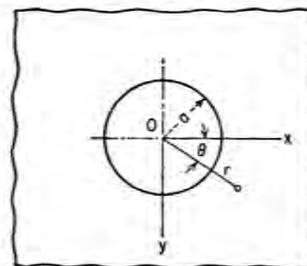


FIG. 165

do el material en el interior del círculo. Entonces tenemos que sustituir la acción de las tensiones iniciales a lo largo del contorno del agujero por la acción de los momentos y fuerzas exteriores

$$\begin{aligned} (M'_r)_{r=a} &= \frac{M_0}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ (V'_r)_{r=a} &= \frac{M_0}{a} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (c)$$

que se obtienen fácilmente derivando la expresión (b) de acuerdo con las ecuaciones (192).

Al estado inicial de tensiones superponemos ahora un estado adicional de tensiones tal que: 1) los momentos y esfuerzos resultantes se anulen para $r = a$, y 2) las tensiones añadidas se anulen en el infinito ($r = \infty$).

Podemos cumplir ambas condiciones tomando como flecha adicional

$$w'' = -\frac{M_0 a^2}{2D} \left[A \ln r + \left(B + C \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \quad (d)$$

Esta ecuación satisface también la ecuación diferencial homogénea (194) y da los siguientes esfuerzos en el contorno del agujero:

$$(M_r'')_{r=a} = -\frac{M_0}{2} [(1-\nu)A + [4\nu B - 6(1-\nu)C] \cos 2\theta] \quad (e)$$

$$(V_r'')_{r=a} = \frac{M_0}{a} [(6-2\nu)A + 6(1-\nu)C] \cos 2\theta$$

Puesto que las expresiones (c) y (e) de M_r contienen un término constante y un término proporcional a $\cos 2\theta$ en tanto que ambas expresiones para V_r sólo constan de un término es necesario satisfacer tres ecuaciones para que se cumplan las condiciones requeridas $M_r' + M_r'' = 0$ y $V_r' + V_r'' = 0$ en el contorno del agujero. Resolviendo estas ecuaciones respecto a los coeficientes indeterminados A , B y C obtenemos las flechas finales $w = w' + w''$ y los siguientes esfuerzos en el contorno

$$M_t = M_0 \left[1 - \frac{2(1+\nu)}{3+\nu} \cos 2\theta \right] \quad (f)$$

$$Q_t = \frac{4M_0}{(3+\nu)a} \sin 2\theta$$

Para $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi/4$, obtenemos respectivamente

$$(M_t)_{\max} = \frac{5+3\nu}{3+\nu} M_0 \quad (g)$$

$$(Q_t)_{\max} = \frac{4}{(3+\nu)a} M_0$$

Es normal representar el mayor valor de una tensión debida a la perturbación local en la forma

$$\sigma_{\max} = k\sigma \quad (h)$$

donde σ representa el valor medio de esa tensión en la misma sección y k es el denominado factor de concentración de tensiones. Pensando en la máxima tensión de flexión en el contorno del agujero, podemos poner también $k = (M_t)_{\max}/M_0$, siendo M_0 el valor inicial del momento para $\theta = \pi/2$, donde se produce la tensión máxima. Así en el caso de flexión pura tenemos

$$k = \frac{5+3\nu}{3+\nu} \quad (i)$$

que para el acero ($\nu = 1/3$) vale 1,80.

De modo parecido podrían obtenerse factores de concentración de tensiones para otros estados uniformes de tensiones y para agujeros de forma distinta de la circular¹. Sin embargo tales resultados resultan de escaso valor por la siguiente razón.

¹ Véase J. N. Goodier, *Phil. Mag.*, vol. 22, pág. 69, 1936, y G. N. Savin, «Stress Concentration around Holes», Moscú, 1951.

Mientras las tensiones de flexión (para referirnos únicamente al caso visto) no pasan de valor $\sigma_{\max} = 6M_0k/h^2$, el valor máximo de la tensión tangencial correspondiente está dado por

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2h} Q_{\max} = \frac{6M_0}{(3+\nu)ah} = \frac{\sigma_{\max}}{(3+\nu)k} \frac{h}{a} \quad (j)$$

Así, disminuyendo la relación a/h podemos aumentar la relación $\tau_{\max}/\sigma_{\max}$ indefinidamente. De esta forma llegamos enseguida a tensiones cortantes de tal valor que su efecto sobre la deformación de la placa deja de ser despreciable frente al efecto de los momentos. En consecuencia, para

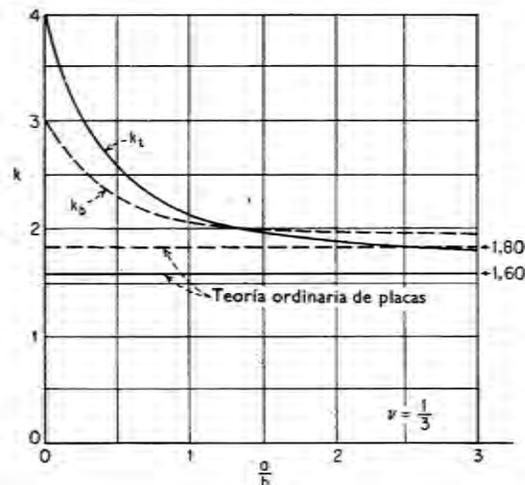


FIG. 166

obtener resultados confiables, tenemos que recurrir a teorías especiales que tengan en cuenta la deformación transversal.

En la figura 166 se han llevado en función de a/h los factores de concentración de tensiones obtenidos¹ mediante la teoría de E. Reissner (v. ap. 39). La curva k_b es válida en el caso de flexión pura antes considerado; la curva k_t da la concentración de tensiones en el caso de torsión uniforme, producida por momentos $M_x = M_0$, $M_y = -M_0$ en el estado inicial de tensiones. Los valores $k_b = 1,80$ y $k_t = 1,60$ dados para estos casos por la teoría ordinaria, que figuran como líneas rectas, dan aproximaciones asintóticas de ambas curvas, cuando la relación a/h crece indefinidamente.

¹ E. Reissner, *J. Appl. Mechanics*, vol. 12, pág. A-75, 1945. El caso ha sido estudiado con más rigor por J. B. Alblas, «Theorie van de driedimensionale Spanningstoestand in een doorborde plaat», Amsterdam, 1957. Respecto a flexión de una placa cuadrada con un agujero circular, véase M. El-Hashimy, «Ausgewählte Plattenprobleme», Zürich, 1956, donde se aplica la teoría ordinaria.

mente. Se ve en la figura que aun para agujeros de radio tres veces mayor que el espesor de la placa el error resultante de la aplicación de la teoría ordinaria supera el 10 % del verdadero valor de k_0 . Es también digno de notarse que para agujero cuyo diámetro se anula, el valor límite $k_0 = 3$ del factor de concentración de tensiones resulta igual al que se obtiene en estado plano de tensiones cuando se considera una tensión uniforme en una dirección.

Si el agujero (fig. 165) se llena con un material elástico distinto del de la placa, tenemos el caso de una «inclusión elástica». El agujero vacío y la inclusión rígida pueden considerarse como casos límites de inclusión elástica en que el material de relleno tiene módulo de Young cero o infinito respectivamente. En lo que sigue se considera brevemente el efecto de una inclusión rígida.

Exactamente como en el caso de un agujero, tenemos que combinar un estado inicial de tensiones con otro suplementario; sin embargo, ahora las condiciones que han de cumplirse en el contorno del agujero $r = a$ son (en el caso simétrico)

$$(w)_{r=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (k)$$

donde w es la flecha total de la placa. De las expresiones (192) de los esfuerzos, concluimos fácilmente que en la periferia de la inclusión, debe verificarse $M_r = \nu M_t$, en tanto que los momentos M_{t1} se anulan.

En el caso particular de flexión pura, supuesto en la página 59, obtenemos en torno a la inclusión rígida una distribución de momentos radiales dada por¹

$$M_r = M_0 \left(\frac{1}{1 + \nu} + \frac{2 \cos 2\theta}{1 - \nu} \right) \quad (l)$$

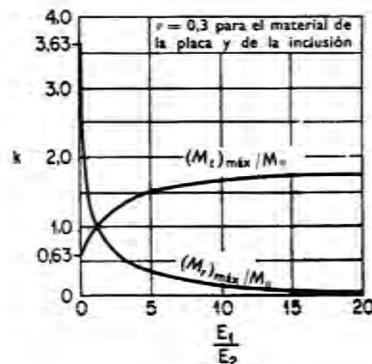


FIG. 167

El factor de concentración de tensiones correspondientes es igual a $k = (3 + \nu)/(1 - \nu^2)$, esto es, para el acero 3,63. En este resultado no se incluye el efecto de la deformación tangencial, por lo que sólo es válido para valores altos de a/h .

¹ M. Goland, *J. Appl. Mechanics*, vol. 10, pág. A-69, 1943. La figura 167 se ha tomado de este estudio. Véase también Yi-Yuan Yu, *Proc. Second U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, página 381, Ann Arbor, Mich., 1954.

Se ve que en las proximidades de una inclusión rígida, los momentos radiales M_r superan notablemente los momentos tangenciales M_t , esto está en notable contraste con el estado de tensiones en torno a un agujero, caso en el que los momentos M_t superan a los momentos M_r .

Como puede verse en la figura 167, ambos momentos difieren menos en el caso de una inclusión elástica. En la figura E_1 representa el módulo de Young de la placa y E_2 el del relleno.

Una inclusión elástica puede sustituirse sin cambiar sustancialmente su efecto, por una inclusión elástica anular. Reforzando un agujero con un anillo de rigidez elegida adecuadamente, puede reducirse notablemente la concentración de tensiones en torno al agujero.

² Respecto a análisis de tensiones y datos numéricos relativos a este caso, véase Savin, *op. cit.*

Métodos especiales y aproximados en la teoría de placas

75. Singularidades en la flexión de placas

Se dice que el estado tensional de una placa presenta una singularidad en un punto¹ (x_0, y_0) si alguna de las tensiones en ese punto se hace infinitamente grande. De las expresiones (101), (102) y (108) de los momentos y esfuerzos cortantes se deduce que no se producen singularidades mientras la flecha $w(x, y)$ y sus derivadas hasta la de cuarto orden sean funciones continuas de x e y .

Se producen ordinariamente singularidades en los puntos de aplicación de fuerzas o momentos concentrados. En algunos casos se pueden presentar singularidades en las esquinas de la placa, debidas a las reacciones, independientemente de la forma de reparto de las cargas.

Para lo que sigue tomemos como origen de coordenadas el punto de la placa en que se presenta la singularidad. Las expresiones dadas antes por la flecha dan (después de las derivaciones oportunas) tensiones que son grandes en comparación con las tensiones producidas por cargas aplicadas en otros puntos o por los esfuerzos de borde, siempre que x e y sean pequeñas.

Fuerza aislada en un punto interior de una placa

Si la distancia del punto considerado al contorno y a otras cargas concentradas es bastante grande, tenemos aproximadamente un estado de

¹ Más exactamente, en un punto (x_0, y_0, z) .

simetría axial en torno a la carga concentrada P . En consecuencia, el esfuerzo cortante radial a una distancia r de la carga P es

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi r}$$

Observando la expresión (193) de Q_r podemos verificar fácilmente que la flecha correspondiente está dada por

$$w_0 = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{a} \quad (206)$$

en la que a es una longitud arbitraria. El término correspondiente $r^2 \ln a$ da tensiones despreciables cuando la relación r/a permanece pequeña.

Momento aislado en un punto interior de una placa

Apliquemos una fuerza aislada $-M_1/\Delta x$ en el origen y una fuerza aislada $+M_1/\Delta x$ en el punto $(-\Delta x, 0)$, suponiendo que M_1 es un momento conocido. Según los resultados anteriores [ec. (206)] la flecha debida a la acción combinada de ambas fuerzas es

$$w = \frac{M_1}{8\pi D} \frac{(x + \Delta x)^2 + y^2}{\Delta x} \ln \frac{[(x + \Delta x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}{a} - \frac{M_1}{8\pi D} \frac{x^2 + y^2}{\Delta x} \log \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \quad (a)$$

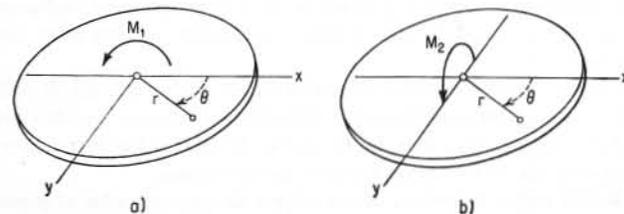


FIG. 168

Cuando Δx tiende a cero, obtenemos el caso de un momento M_1 concentrado en el origen [fig. 168 a)] y la flecha es

$$w_1 = \lim [w]_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{M_1}{P} \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

donde w_0 es la flecha dada por la expresión (206). Verificando la derivación, obtenemos

$$w_1 = \frac{M_1 x}{8\pi D} \left(\ln \frac{x^2 + y^2}{a^2} + 1 \right) \quad (b)$$

la acción de una fuerza transversal o de un momento en un punto del borde libre¹.

Fuerza aislada que actúa en un punto próximo a un borde empotrado (fig. 170)

La flecha de una placa cantilever semiinfinita cargada con una carga concentrada P en un punto (ξ, η) está dada por la expresión

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[4x\xi - r^2 \ln \frac{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}{r_1^2} \right] \quad (d)$$

donde $r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Nos limitaremos a considerar el momento de empotramiento en el origen. Derivando la expresión (d) se obtiene

$$M_x = -\frac{P}{\pi} \cos^2 \varphi \quad (209)$$

en $x = y = 0$, siempre que ξ y η no se anulen simultáneamente. Se ve que en general el momento de empotramiento M_x depende únicamente de la relación η/ξ . Sin embargo, si $\xi = \eta = 0$, el momento M_x se anula, y así queda probado que la función $M_x(\xi, \eta)$ es discontinua en el origen.

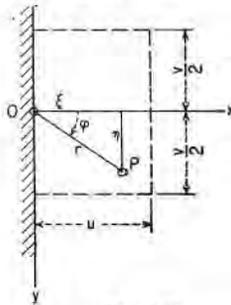


FIG. 170

Carácter parecido tiene la acción de una carga cerca de un borde rígido o elásticamente empotrado, independientemente de la forma de apoyo de la placa en otros puntos. Esto lleva también a la forma característica de las superficies de influencia dibujadas para momentos en el contorno de placas empotradas o continuas sobre este contorno (figs. 171 y 173).

Para esfuerzos cortantes o reacciones, que actúen en $x = y = 0$ obtenemos de forma similar en la figura 170

$$Q_x = \frac{2P}{\pi r} \cos^3 \varphi \quad (210)$$

donde $r^2 = \xi^2 + \eta^2$.

¹ Véase A. Nádai, «Elastische Platten», pág. 203, Berlín, 1925.

Superficie de influencia del momento de borde de una placa circular empotrada (fig. 171)

Representando la flecha (197), página 321, en la forma $w = PK(x, 0, \xi, \theta)$, podemos considerar K como función de influencia de la flecha en un punto $(x, 0)$ siendo (ξ, θ) la posición instantánea de la carga unidad. Para calcular el momento de borde M_x en $x = r/a = 1$, $y = 0$ debemos notar que en la expresión correspondiente de las (192) a lo largo del borde empotrado $x = 1$ se anulan todos los términos excepto el siguiente, que da

$$M_r = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right)_{x=1} = -\frac{1}{4\pi} \frac{(1 - \xi^2)^2}{\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1} \quad (e)$$

Utilicemos la notación abreviada $\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1 = \eta^2$ e introduzcamos el ángulo φ [fig. 171 a)]. Tenemos $\xi^2 = 1 - 2\eta \cos \varphi + \eta^2$ y

$$M_r = -\frac{1}{4\pi} (2 \cos \varphi - \eta)^2$$

que para valores despreciables de η coincide con la expresión (209). La superficie de influencia del momento M_x está representada en la figura 171 b) por curvas de nivel con las cotas multiplicadas por 4π .

Superficie de influencia del momento flector M_x en el centro de una placa cuadrada simplemente apoyada

Es conveniente emplear las superficies de influencia de los valores $M_{x0} = -D\partial^2 w/\partial x^2$ y $M_{y0} = -D\partial^2 w/\partial y^2$ con el fin de llegar a los resultados finales mediante las ecuaciones (101).

La superficie de influencia de M_{x0} puede construirse basándose en la figura 76. El efecto de la carga aislada $P = 1$ actuando en el origen está dado por la primera de las ecuaciones (151) y la ecuación (152). Esta última expresión incluye también la singularidad del tipo dado por la ecuación (206), necesaria en el origen. El efecto de otras cargas puede calcularse mediante la primera de las ecuaciones (149), siendo la serie rápidamente convergente. La superficie de influencia aparece en la figura 172 con sus cotas multiplicadas por 8π .

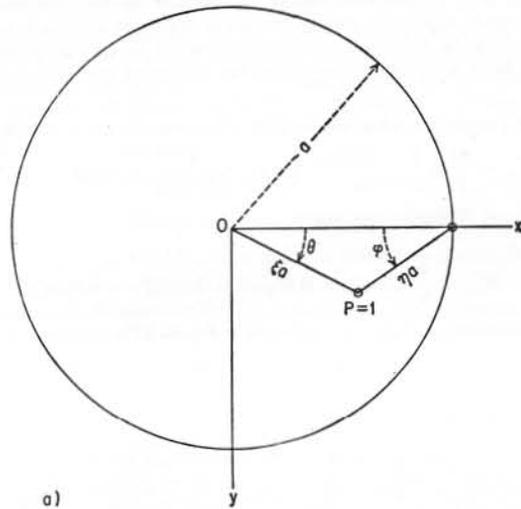
Calculemos el momento flector M_x para dos cargas P_1 y $P_2 < P_1$ situadas a una distancia fija igual a $0,25a$, estando cada carga uniformemente repartida sobre una superficie $0,1a \times 0,1a$. Fuera de estas superficies la placa puede soportar una carga viva uniformemente repartida de una intensidad $q < P_2/0,01a^2$.

La superficie de influencia (fig. 172) para M_{x0} y la distribución de carga que da el máximo valor de M_{x0} están dadas en esa figura con líneas continuas. A causa de la singularidad, las ordenadas de la superficie son infinitamente grandes en el centro de la placa; por otra parte es más sencillo calcular el efecto de la carga P_1 , separadamente, mediante las ecuaciones (163) y (165) junto con las tablas 26 y 27¹.

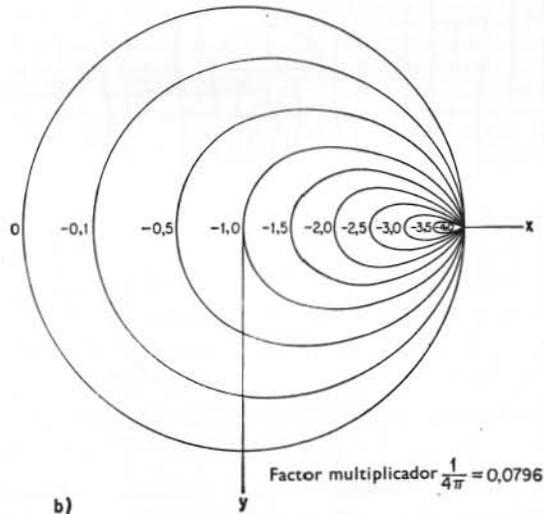
¹ M. El-Hashimy en «Angsgewählte Plattenprobleme», Zürich, 1956, dio diversas superficies de influencia para placas circulares empotradas.

² El conjunto más extenso de superficies de influencia de placas rectangulares con distintas condiciones de borde se debe a A. Pucher, «Einflussfelder elastischer Platten», 2.^a ed., Viena, 1958. Véase también su memoria en «Federhofer-Girkmann-Festschrift», pág. 303, Viena, 1950. Respecto a superficies de influencia de placas continuas, véase G. Hocland, *Ingr.-Arch.*, vol. 24, pág. 124, 1956.

³ El efecto de la carga central puede calcularse también mediante las líneas de influencia similares a las usadas en el próximo ejemplo o mediante la tabla 20.



a)



b)

FIG. 171

Para este caso tenemos $\nu = 0$, $\nu/\mu = k = 1$, $q = 1,5708$, $\psi = 0$, $\lambda = 2,669$ y $\mu = 0$, que dan $N = 0$ y un valor de M que calculamos inmediatamente. El efecto de la carga P_2 puede suponerse proporcional a la ordenada 2,30 de la superficie en el centro del área cargada. Introduciendo únicamente los excesos de ambas cargas sobre las cargas debidas a q , tenemos que sumar las siguientes participaciones en el valor final de M_{x_0} :

1. Carga P_1 : según las ecuaciones (163), (165) con $\xi = a/2$, $d = 0,1 \sqrt{2a}$,

$$M'_{x_0} = \frac{M}{2} = \frac{P_1 - 0,01qa^2}{8\pi} \left(2 \ln \frac{4}{0,1\pi \sqrt{2}} + 2,669 - 1,571 \right) = 0,219(P_1 - 0,01qa^2)$$

2. Carga P_2 :

$$M''_{x_0} = \frac{1}{8\pi} 2,30(P_2 - 0,01qa^2) = 0,092(P_2 - 0,01qa^2)$$

3. Carga uniforme q : según los datos de la figura 172,

$$M''' = 0,0369qa^2$$

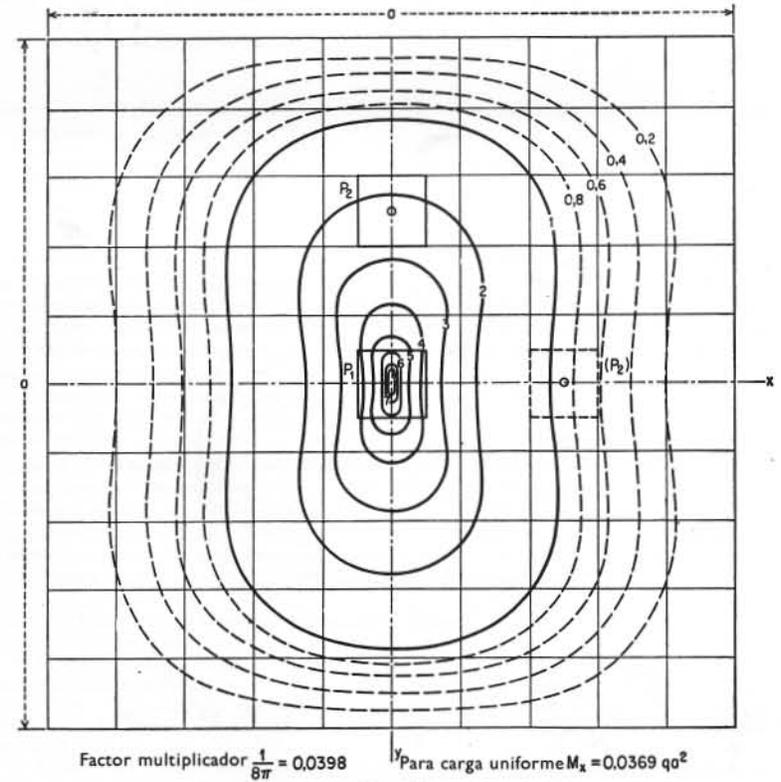


FIG. 172

Por lo tanto

$$M_{x_0} = 0,219P_1 + 0,092P_2 + 0,0338qa^2$$

A causa de la forma cuadrada de la placa y la simetría de las condiciones de contorno, estamos en situación de utilizar la misma superficie de influencia para calcular M_{y_0} . La situación de la carga P_2 correspondiente a la situación antes supuesta respecto a la superficie de influencia de M_{x_0} , está dada por la línea de trazos, y la contribución de P_2 resulta ahora igual a $M_{y_0} = 0,035(P_2 - 0,01qa^2)$ en tanto que las participaciones de P_1 y q no varían. Esto da

$$M_{y_0} = 0,219P_1 + 0,035P_2 + 0,0344qa^2$$

Suponiendo ahora por ejemplo $\nu = 0,2$ tenemos el resultado final

$$M_x = M_{x_0} + 0,2M_{y_0} = 0,263P_1 + 0,099P_2 + 0,0407qa^2$$

Superficie de influencia del momento M_x en el centro del soporte entre dos vanos interiores de una placa continua en la dirección x y simplemente apoyada en $y = \pm b/2$

Este caso se presenta en el proyecto de losas de puente apoyadas en muchas vigas de forjado y dos vigas principales. En el supuesto de que las flechas y las rigideces a torsión de todas las vigas sean despreciables, obtenemos la superficie de influencia indicada¹ en la figura 173.

En el caso de un puente de carretera, la carga de cada rueda está uniformemente repartida sobre una superficie rectangular u por v . Se han dibujado cinco líneas de influencia (correspondientes a valores de v/b de 0,05 a 0,40) para cargas que se mueven según la línea central de la losa $y = 0$ y se dan las ordenadas máximas que nos permiten determinar sin dificultad la posición de la carga preponderante en el proyecto. Tanto la superficie como las líneas se han dado con sus ordenadas multiplicadas por 8π .

Ejemplo de cálculo. Sea $a = b = 7,20$ m; además para el neumático posterior $P_r = 7000$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 75$ cm y para el neumático anterior $P_f = 1800$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 37,5$ cm. Supondremos que el efecto de reparto debido al pavimento y al espesor de la losa está incluido en los valores adoptados para u y v .

Para el neumático posterior tenemos $v/b \approx 0,10$ y para el anterior $v/b \approx 0,05$. Suponiendo que damos a los neumáticos posteriores las posiciones sucesivas correspondientes a las abscisas $\xi = 0,20a, 0,25a, 0,30a, 0,35a$ y $0,40a$, las posiciones respectivas de los neumáticos anteriores quedan fijadas por la distancia entre ejes, sea $4,20$ m = $0,583a$.

El cálculo mediante la superficie de influencia da, para cada posición particular de la carga, una serie de valores del momento que se han dibujado en la figura 173 como funciones de la abscisa ξ mediante la línea de trazos. La curva presenta un máximo aproximadamente para $\xi = 0,30a$. Vamos a ver el procedimiento de cálculo únicamente para esta posición.

Las líneas de influencia correspondientes a 0,10 y 0,05 dan la contribución de las dos cargas centrales (en $y = 0$) que vale

$$-(7000 \times 3,24 + 1800 \times 3,32) = -28\,656 \text{ kgf}$$

y la superficie de influencia de la contribución de las seis cargas restantes que es

$$-7000(1,66 + 2,25 + 0,44) - 1800(1,59 + 2,25 + 0,41) = -38\,100 \text{ kgf}$$

Finalmente, teniendo en cuenta el factor multiplicador $1/8\pi = 0,0398$, tenemos

$$(M_x)_{\min} = -0,0398(28\,656 + 38\,100) = -2657 \text{ m kgf/m}$$

¹ Respecto a métodos para su construcción, véanse las referencias dadas en el apartado 52.

Por lo tanto

$$M_{x_0} = 0,219P_1 + 0,092P_2 + 0,0338qa^2$$

A causa de la forma cuadrada de la placa y la simetría de las condiciones de contorno, estamos en situación de utilizar la misma superficie de influencia para calcular M_{y_0} . La situación de la carga P_2 correspondiente a la situación antes supuesta respecto a la superficie de influencia de M_{x_0} , está dada por la línea de trazos, y la contribución de P_2 resulta ahora igual a $M_{y_0} = 0,035(P_2 - 0,01qa^2)$ en tanto que las participaciones de P_1 y q no varían. Esto da

$$M_{y_0} = 0,219P_1 + 0,035P_2 + 0,0344qa^2$$

Suponiendo ahora por ejemplo $\nu = 0,2$ tenemos el resultado final

$$M_x = M_{x_0} + 0,2M_{y_0} = 0,263P_1 + 0,099P_2 + 0,0407qa^2$$

Superficie de influencia del momento M_x en el centro del soporte entre dos vanos interiores de una placa continua en la dirección x y simplemente apoyada en $y = \pm b/2$

Este caso se presenta en el proyecto de losas de puente apoyadas en muchas vigas de forjado y dos vigas principales. En el supuesto de que las flechas y las rigideces a torsión de todas las vigas sean despreciables, obtenemos la superficie de influencia indicada¹ en la figura 173.

En el caso de un puente de carretera, la carga de cada rueda está uniformemente repartida sobre una superficie rectangular u por v . Se han dibujado cinco líneas de influencia (correspondientes a valores de v/b de 0,05 a 0,40) para cargas que se mueven según la línea central de la losa $y = 0$ y se dan las ordenadas máximas que nos permiten determinar sin dificultad la posición de la carga preponderante en el proyecto. Tanto la superficie como las líneas se han dado con sus ordenadas multiplicadas por 8π .

Ejemplo de cálculo. Sea $a = b = 7,20$ m; además para el neumático posterior $P_r = 7000$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 75$ cm y para el neumático anterior $P_f = 1800$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 37,5$ cm. Supondremos que el efecto de reparto debido al pavimento y al espesor de la losa está incluido en los valores adoptados para u y v .

Para el neumático posterior tenemos $v/b \approx 0,10$ y para el anterior $v/b \approx 0,05$. Suponiendo que damos a los neumáticos posteriores las posiciones sucesivas correspondientes a las abscisas $\xi = 0,20a, 0,25a, 0,30a, 0,35a$ y $0,40a$, las posiciones respectivas de los neumáticos anteriores quedan fijadas por la distancia entre ejes, sea $4,20$ m = $0,583a$.

El cálculo mediante la superficie de influencia da, para cada posición particular de la carga, una serie de valores del momento que se han dibujado en la figura 173 como funciones de la abscisa ξ mediante la línea de trazos. La curva presenta un máximo aproximadamente para $\xi = 0,30a$. Vamos a ver el procedimiento de cálculo únicamente para esta posición.

Las líneas de influencia correspondientes a 0,10 y 0,05 dan la contribución de las dos cargas centrales (en $y = 0$) que vale

$$-(7000 \times 3,24 + 1800 \times 3,32) = -28\,656 \text{ kgf}$$

y la superficie de influencia de la contribución de las seis cargas restantes que es

$$-7000(1,66 + 2,25 + 0,44) - 1800(1,59 + 2,25 + 0,41) = -38\,100 \text{ kgf}$$

Finalmente, teniendo en cuenta el factor multiplicador $1/8\pi = 0,0398$, tenemos

$$(M_x)_{\min} = -0,0398(28\,656 + 38\,100) = -2657 \text{ m kgf/m}$$

¹ Respecto a métodos para su construcción, véanse las referencias dadas en el apartado 52.

Esfuerzo cortante máximo debido a una carga uniformemente repartida en la superficie de un rectángulo

En la figura 170 se indica con líneas de trazos una carga de este tipo adyacente al borde empotrado de una placa cantilever indefinida. Este problema se presenta también en el proyecto de forjados de puente. Mediante el resultado (210) y el principio de superposición obtenemos el siguiente esfuerzo cortante en $x = y = 0$.

$$(Q_x)_{\text{máx}} = \frac{2P}{\pi u v} \int_0^u d\xi \int_{-v/2}^{v/2} \frac{\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} d\eta$$

que da $(Q_x)_{\text{máx}} = \alpha \frac{P}{v}$ (f)

con $\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\frac{v}{u} \ln \left(\frac{4u^2}{v^2} + 1 \right) + 2 \arctg \frac{v}{2u} \right]$ (g)

En la tabla 78 se dan los valores numéricos del factor α . Como la influencia de las cargas de otras ruedas sobre Q_x ordinariamente es despreciable, no es necesaria la superficie de influencia de Q_x . El resultado (f) puede utilizarse con suficiente aproximación para losas de dimensiones finitas y también como valor máximo posible para borde elásticamente empotrado.

TABLA 78
Valores del factor α de la ecuación (f)

v/u	α	v/u	α
0,1	0,223	1,2	0,852
0,2	0,357	1,4	0,884
0,3	0,459	1,6	0,909
0,4	0,541	1,8	0,927
0,5	0,607	2,0	0,941
0,6	0,662	2,5	0,964
0,7	0,708	3	0,977
0,8	0,747	4	0,989
0,9	0,780	5	0,994
1,0	0,807	10	0,999

77. Funciones de influencia y funciones características

Es interesante hacer notar la estrecha relación existente entre la función de influencia (o función de Green) de la placa flexada y el problema de las vibraciones transversales libres. Estas últimas obedecen a la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W = - \frac{\mu}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (a)$$

en la que $W(x,y,t)$ es la flecha, μ la masa por unidad de área y t el tiempo. Con la hipótesis $W = w(x,y) \cos pt$ obtenemos para la función w la ecuación diferencial

$$D\Delta\Delta w - \lambda w = 0 \quad (b)$$

en la que $\lambda = p^2 \mu$. Para determinadas condiciones de contorno la ecuación (b) sólo admite solución para una serie definida de valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ del parámetro λ , valores llamados *números característicos* (o *valores propios*) del problema. Las soluciones correspondientes forman una serie de funciones características $w_1(x,y), w_2(x,y), \dots, w_k(x,y), \dots$. Estas funciones son ortogonales entre sí, es decir

$$\iint_A w_i(x,y) w_k(x,y) dx dy = 0 \quad (c)$$

para $i \neq k$, estando extendida la integral a toda la superficie de la placa. Como las funciones $w_k(x,y)$ están definidas salvo un factor constante, pueden «normalizarse» eligiendo este factor de modo que se satisfaga la condición

$$\iint_A w_k^2(x,y) dx dy = a^2 b^2 \quad (d)$$

La forma elegida para el segundo miembro de (d) es la apropiada para el caso de placa rectangular de lados a y b , pero cualquiera que sea el contorno de la placa, w_k debe tener la dimensión de una longitud. Establecida la serie de valores λ_k y la correspondiente serie de funciones normalizadas $w_k(x,y)$ puede demostrarse¹ que el desarrollo

$$K(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a^2 b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(x,y) w_k(\xi,\eta)}{\lambda_k} \quad (e)$$

es válido para la función de influencia de una placa con condiciones de contorno que se satisfacen por las funciones características.

Aplicando el resultado (e) a las ecuaciones (a) y (b) del apartado anterior concluimos que, independientemente de cuál sea la distribución de las cargas, la flecha de la placa puede siempre representarse mediante una combinación lineal de funciones características.

Consideremos, como ejemplo, una placa rectangular simplemente apoyada (fig. 59). Las funciones propias que satisfacen la ecuación (b) junto con las condiciones de contorno $w = \Delta w = 0$ y la condición (d) son

$$w_k = 2 \sqrt{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (f)$$

siendo m y n dos números enteros arbitrarios.

El valor propio correspondiente de la ecuación (b) es

$$\lambda_k = \pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (g)$$

La sustitución de estas expresiones en el desarrollo (e) conduce inmediatamente al resultado (134). Pueden obtenerse de modo parecido funciones de influencia para placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, con condiciones arbitrarias en los otros bordes. Sin embargo, en tal caso resulta necesario el cálculo previo de los valores λ_k a partir de la ecuación de frecuencia trascendente correspondiente. Un nuevo ejemplo de función de influencia que puede obtenerse en forma de desarrollo en serie es el caso de placa circular, cuyas formas de vibración, expresables mediante funciones de Bessel, son bien conocidas.

¹ Véase, por ejemplo, R. Courant y D. Hilbert, «Methods of Mathematical Physics», vol. 1, página 370, Nueva York, 1953.

en la que $\lambda = p^2 \mu$. Para determinadas condiciones de contorno la ecuación (b) sólo admite solución para una serie definida de valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ del parámetro λ , valores llamados *números característicos* (o *valores propios*) del problema. Las soluciones correspondientes forman una serie de funciones características $w_1(x,y), w_2(x,y), \dots, w_k(x,y), \dots$. Estas funciones son ortogonales entre sí, es decir

$$\iint_A w_i(x,y)w_k(x,y) dx dy = 0 \quad (c)$$

para $i \neq k$, estando extendida la integral a toda la superficie de la placa. Como las funciones $w_k(x,y)$ están definidas salvo un factor constante, pueden «normalizarse» eligiendo este factor de modo que se satisfaga la condición

$$\iint_A w_k^2(x,y) dx dy = a^2 b^2 \quad (d)$$

La forma elegida para el segundo miembro de (d) es la apropiada para el caso de placa rectangular de lados a y b , pero cualquiera que sea el contorno de la placa, w_k debe tener la dimensión de una longitud. Establecida la serie de valores λ_k y la correspondiente serie de funciones normalizadas $w_k(x,y)$ puede demostrarse¹ que el desarrollo

$$K(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a^2 b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(x,y)w_k(\xi,\eta)}{\lambda_k} \quad (e)$$

es válido para la función de influencia de una placa con condiciones de contorno que se satisfacen por las funciones características.

Aplicando el resultado (e) a las ecuaciones (a) y (b) del apartado anterior concluimos que, independientemente de cuál sea la distribución de las cargas, la flecha de la placa puede siempre representarse mediante una combinación lineal de funciones características.

Consideremos, como ejemplo, una placa rectangular simplemente apoyada (fig. 59). Las funciones propias que satisfacen la ecuación (b) junto con las condiciones de contorno $w = \Delta w = 0$ y la condición (d) son

$$w_k = 2 \sqrt{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (f)$$

siendo m y n dos números enteros arbitrarios.

El valor propio correspondiente de la ecuación (b) es

$$\lambda_k = \pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (g)$$

La sustitución de estas expresiones en el desarrollo (e) conduce inmediatamente al resultado (134). Pueden obtenerse de modo parecido funciones de influencia para placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, con condiciones arbitrarias en los otros bordes. Sin embargo, en tal caso resulta necesario el cálculo previo de los valores λ_k a partir de la ecuación de frecuencia transcendente correspondiente. Un nuevo ejemplo de función de influencia que puede obtenerse en forma de desarrollo en serie es el caso de placa circular, cuyas formas de vibración, expresables mediante funciones de Bessel, son bien conocidas.

¹ Véase, por ejemplo, R. Courant y D. Hilbert, «Methods of Mathematical Physics», vol. 1, página 370, Nueva York, 1953.

Puesto que la intensidad de la carga está dada por $f(\eta) = P/v$ para $-v/2 < \eta < v/2$ y por cero en todo otro punto tenemos

$$f(y) = \frac{2P}{\pi v} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha v}{2} \cos \alpha y}{\alpha} d\alpha \quad (d)$$

Por otra parte, la función $f(y)$ es igual a la diferencia de esfuerzos cortantes Q_x a ambos lados de la sección $x = \xi$. Así pues, mediante las ecuaciones (108), tenemos

$$D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_1 - \Delta w_2) = f(y) \quad (e)$$

en que $x = \xi$. De acuerdo con la ecuación (d) representamos las flechas w_1 y w_2 por las integrales

$$w_i = \int_0^{\infty} X_i(x,\alpha) \cos \alpha y d\alpha \quad i = 1, 2 \quad (f)$$

en las que la función

$$X_i(x,\alpha) = (A_i + B_i x) \operatorname{ch} \alpha x + (C_i + D_i x) \operatorname{sh} \alpha x$$

tiene la misma forma que la función Y_m de la página 136.

Basta ahora sustituir las expresiones (f) en las ecuaciones (a), (b) y (e) para determinar los coeficientes A_1, B_1, \dots, D_2 independientes de y y funciones de α .

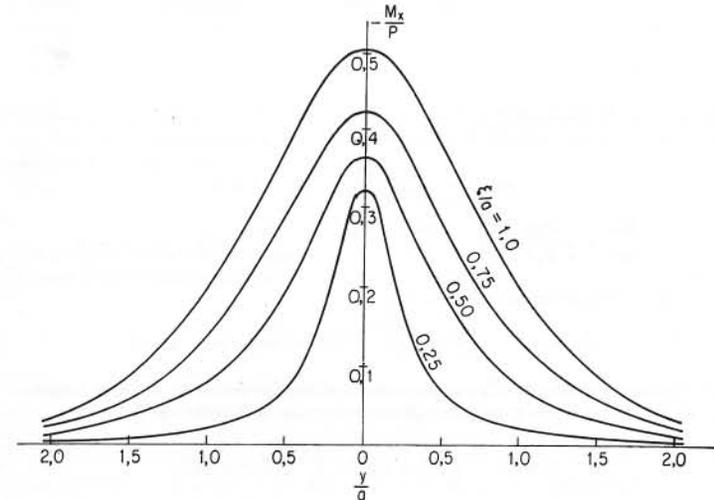


FIG. 175

En la figura 175 se muestra la distribución de momentos flectores en el borde empotrado, calculada mediante la solución anterior para diversas posiciones de la carga y para los valores $v = 0$ y $v = 0,3$.

Transformación de Mellin

La aplicación de esta transformación es apropiada en placas en forma de sector de condiciones homogéneas en los bordes $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$ (fig. 176). Consideremos como ejemplo el borde $\theta = 0$ empotrado y el borde $\theta = \alpha$ libre y con una carga concentrada en él en $r = r_0$ ¹.

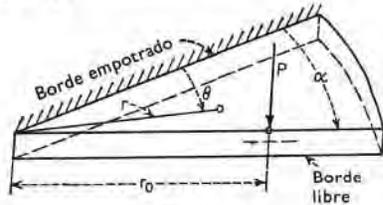


FIG. 176

Utilizamos coordenadas polares (v. ap. 62) y comenzamos tomando la solución general de la ecuación diferencial $\Delta \Delta w = 0$ en la forma

$$W(s) = r^{-s} \Theta(\theta, s) \quad (g)$$

donde s es un parámetro y

$$\Theta(\theta, s) = A(s) \cos s\theta + B(s) \sin s\theta + C(s) \cos (s+2)\theta + D(s) \sin (s+2)\theta \quad (h)$$

La flecha y la pendiente en el borde empotrado se anulan si

$$[W(s)]_{\theta=0} = 0 \quad \frac{1}{r} \left[\frac{\partial W(s)}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = 0 \quad (i)$$

El momento flector M_t en el borde libre se anula a condición de que

$$\left[\nu \frac{\partial^2 W(s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W(s)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(s)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\alpha} = 0 \quad (j)$$

Ahora bien, una función $f(r)$ puede representarse mediante la fórmula de Mellin en la forma siguiente:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} r^{-s} ds \int_0^{\infty} \rho^{s-1} f(\rho) d\rho \quad (k)$$

en la que σ es una constante real sometida a algunas limitaciones. Para el caso específico de una fuerza P concentrada en $r = r_0$, obtenemos

$$f(r) = \frac{P}{2\pi i r_0} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-(s+1)} ds \quad (l)$$

¹ El problema fue estudiado por S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 20, pág. 391, 1952. Le hizo algunas correcciones W. T. Koiter, *Ingr.-Arch.*, vol. 21, pág. 381, 1953. Para placa con los dos bordes empotrados, véase Y. S. Uflyand, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, volumen 84, pág. 463, 1952. Véase también W. T. Koiter y J. B. Alblas, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, serie B, vol. 57, núm. 2, pág. 259, 1954.

Esto sugiere la forma siguiente para la flecha de la placa:

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} r^{-s} \Theta(\theta, s) ds \quad (m)$$

Ahora bien, las fuerzas que actúan hacia abajo en el borde $\theta = \alpha$ están dadas por

$$(V_i)_{\theta=\alpha} = \left(Q_t - \frac{\partial M_{rt}}{\partial r} \right)_{\theta=\alpha} \quad (n)$$

Esto mediante el uso de las debidas expresiones de Q_t y M_{rt} (v. págs. 310 y 311) así como la expresión (m), da

$$(V_i)_{\theta=\alpha} = -\frac{D}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} \left\{ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + [s^2 + (1-\nu)(s+1)(s+2)] \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right\}_{\theta=\alpha} r^{-(s+3)} ds \quad (o)$$

Finalmente igualamos las expresiones (l) y (o) y así obtenemos, junto con las ecuaciones (i) y (j) cuatro condiciones para determinar $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ y $D(s)$. La

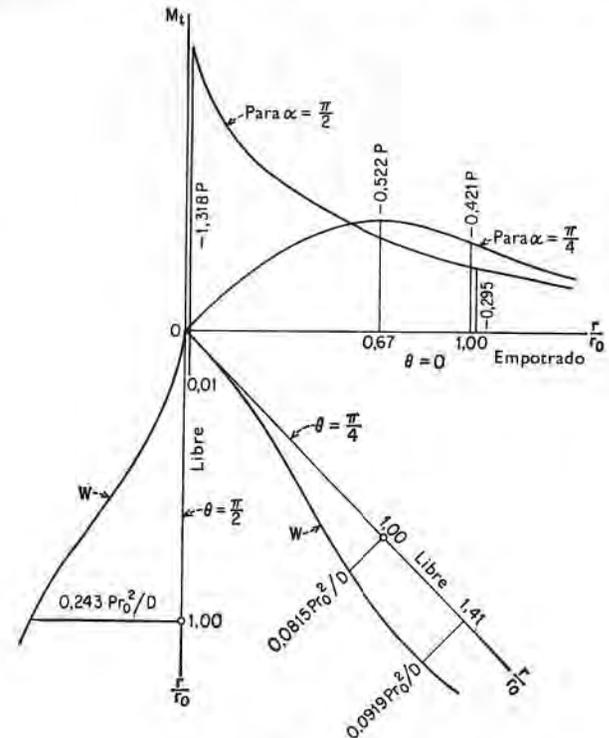


FIG. 177

sustitución de estos coeficientes en las expresiones (h) y (m) y la introducción de una nueva variable $u = -(s+1)i$, donde $i = \sqrt{1}$, da la siguiente expresión de la flecha:

$$w = \frac{2Pr r_0}{\pi D} \int_0^\infty \frac{G \cos\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right) + H \operatorname{sen}\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right)}{Nu(1+u^2)} du \quad (p)$$

en la que G y H son funciones de α , θ y u , y N es función de u y u .

La figura 177 da la variación de flechas en el borde libre y la distribución de momentos M_t en el borde $\theta = 0$ en los casos particulares de $\alpha = \pi/4$ y $\alpha = \pi/2$.

Transformación de Hankel

Sea una placa circular de radio a flexada según una superficie de revolución por una carga $q(r)$ simétricamente repartida. Multiplicamos la ecuación diferencial $\Delta \Delta w = q/D$ de esa placa por $r \mathcal{Y}_0(\lambda r) dr$ e integramos por partes entre 0 e ∞ . Dado que $w = 0$ para $r > a$, el resultado es

$$\lambda^4 \int_0^\infty w(r) r \mathcal{Y}_0(\lambda r) dr = g(\lambda) \quad (q)$$

donde

$$g(\lambda) = (C_1 + \lambda^2 C_2) J_0(\lambda a) + (\lambda C_3 + \lambda^3 C_4) J_1(\lambda a) + \frac{1}{D} \int_0^a q(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho \quad (r)$$

\mathcal{Y}_0 y \mathcal{Y}_1 son las funciones de Bessel de orden cero y uno, y C_i son constantes. Aplicando el teorema recíproco de Hankel a la ecuación (q) tenemos

$$w = \int_0^\infty g(\lambda) \frac{1}{\lambda^3} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (s)$$

Ahora pueden obtenerse las constantes C_i de las condiciones en el contorno de la placa $r = a$ y de la condición de que la función $g(\lambda)/\lambda^4$ debe ser acotada. En el caso de placa anular¹ es preciso modificar ligeramente la expresión (r). En el apartado 61 se han dado ejemplos de aplicación de soluciones del tipo (s) a problemas de placas apoyadas elásticamente.

Transformación seno

Hemos utilizado soluciones del tipo

$$w(x, y) = \Sigma Y(y, \alpha) \operatorname{sen} \alpha x$$

en el caso de placas rectangulares y de la forma

$$w(r, \theta) = \Sigma R(r, \beta) \operatorname{sen} \beta \theta$$

en placas en forma de sector.

Las transformaciones finitas en seno de la función w , tomada respecto a x y θ respectivamente e introducida junto con las derivadas transformadas de w y la ecuación diferencial transformada de la placa, aparecen entonces como útiles para el cálculo de las constantes de las funciones Y o R a partir de las condiciones de contorno de la placa dada².

¹ Respecto al fundamento del método, véase H. Lung, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, página 46, 1952, donde se da una extensa relación de transformadas necesarias para su aplicación.

² La aplicación del método se debe a L. I. Deverall y C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, volumen 18, págs. 152 y 359, 1951.

79. Método de variable compleja

Tomando como variables independientes $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ la ecuación diferencial (104) de la placa flexada toma la forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{1}{16D} q(z, \bar{z}) \quad (a)$$

Tomemos $w = w_0 + w_1$, donde w_0 es la solución general de la ecuación

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0$$

y w_0 una solución particular de la ecuación (a). Entonces tenemos¹

$$w_1 = \Re[\mathcal{Z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (b)$$

donde φ y χ son funciones analíticas en la región considerada. Generalmente se introduce con χ la derivada $\psi = d\chi/dz$.

En el caso de una carga concentrada P que actúa en $z_0 = x_0 + iy_0$ puede elegirse la solución w_0 en la forma

$$w_0 = \frac{P}{16\pi D} (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) \ln [(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)] \quad (c)$$

que es equivalente en esencia a la expresión (206). Una expresión adecuada para una carga uniforme sería

$$w_0 = \frac{qz^2\bar{z}^2}{64D}$$

Si el contorno interior o exterior de la placa es un círculo, podemos sustituirlo por un círculo unidad $z = e^{i\theta}$ o en forma abreviada $z = \sigma$. Las condiciones de contorno en $z = \sigma$ deben expresarse también en forma compleja. Las funciones φ y ψ pueden tomarse en forma de series de potencias, con términos adicionales si es preciso, según los valores que tomen los esfuerzos en el borde interior de la placa. Multiplicando las condiciones de contorno por $[2\pi i(\sigma - z)]^{-1} d\sigma$ integrando a lo largo de $z = \sigma$ obtenemos las funciones buscadas φ y ψ ².

Para contornos distintos del círculo puede usarse una función $z = w(\zeta) = w(e^{i\theta})$ tal que transformarse el contorno en el círculo unidad $\zeta = e^{i\theta} = \sigma$. La determinación de las funciones $\varphi_1(\zeta) = \varphi(z)$ y $\psi_1(\zeta) = \psi(z)$ a partir de las condiciones de contorno en $\zeta = \sigma$ se reduce entonces al problema considerado antes. El método de Muschelišvili antes esbozado es eficiente de un modo particular en los casos relativos a distribución de tensiones en torno a agujeros³; en este caso la función $w(\zeta)$ tiene que reducir la parte infinita de placa al interior del círculo unidad.

¹ \Re representa la parte real de la solución. Esta forma de solución de la ecuación bi-potencial se debe a E. Goursat, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 26, pág. 236, 1898.

² Respecto al cálculo de las integrales del tipo Cauchy que implica este procedimiento, véase N. I. Muschelišvili, «Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity», Groningen, 1953.

³ Una amplia aplicación de este método al problema de concentración de tensiones se debe a G. N. Savin; véase su «Stress Concentration around Holes», Moscú, 1951. Véase también Yi-Yuan Yu, *J. Appl. Mechanics*, vol. 21, pág. 129, 1954, y *Proc. Ninth Intern. Congr. Appl. Mech.*, vol. 6, pág. 378, Bruselas, 1957; también L. I. Deverall, *J. Appl. Mechanics*, vol. 24, página 295, 1957. A. C. Stevenson utilizó un método ligeramente distinto aplicable también a algunos problemas de la teoría de placas gruesas, véase *Phil. Mag.*, vol. 33, pág. 639, 1942.

El método de variable compleja nos permite también expresar en forma finita las funciones de Green de una placa circular con diversas condiciones de contorno¹.

En otros casos tales como el de una placa cuadrada, es preciso conformarse con una determinación aproximada de las funciones de Green².

Cuando la deformación de la placa pueda ponerse en forma de doble serie trigonométrica, podrá expresarse también mediante una serie sencilla haciendo uso de las propiedades de doble periodicidad de las funciones elípticas. Para el valor de Δw que satisface la ecuación potencial $\Delta(\Delta w) = 0$, tal expresión resulta especialmente conveniente a causa de la última conexión entre la función de Green de la expresión Δw y la función que reduce al círculo unidad la superficie de la placa dada³. Determinada Δw los esfuerzos cortantes de la placa están dados inmediatamente por las derivadas de esta función, en virtud de las ecuaciones (108).

80. Aplicación del método de la energía de deformación al cálculo de flechas

Consideremos de nuevo el problema de la placa rectangular simplemente apoyada. Del estudio hecho en el apartado 28 se deduce que la flecha de dicha placa (fig. 59) puede ponerse siempre en forma de una doble serie trigonométrica⁴.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (a)$$

Los coeficientes a_{mn} pueden considerarse como las coordenadas que definen la forma de la deformada y puede aplicarse a su determinación el principio de los trabajos virtuales. Para la aplicación de este principio necesitamos la expresión de la energía de deformación (v. pág. 108):

$$V = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (b)$$

Sustituyendo w por su expresión (a) el primer término de la integral en (b) toma la forma

$$\frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy \quad (c)$$

¹ E. Reissner, *Math. Ann.*, vol. 111, pág. 777, 1935; A. Lourye, *Priklad. Mat. Mekhan.*, volumen 4, pág. 93, 1940.

² F. Schultz-Grunoz, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 33, pág. 227, 1953.

³ Courant y Hilbert, *op. cit.*, vol. 1, pág. 377. Han sido usadas de un modo especial las funciones elípticas por A. Nádai, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 1, 1922 (forjados), por F. Tölke, *Ingr.-Arch.*, vol. 5, pág. 187, 1934 (placas rectangulares); y también por B. D. Aggarwala, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 34, pág. 226, 1954 (placas poligonales y, en particular, placas triangulares).

⁴ Los términos de esta serie son funciones características de la placa considerada (véase apartado 77).

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^a \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} dx = \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b} dy = 0$$

si $m \neq m'$ y $n \neq n'$, deducimos que para calcular la integral (c) tenemos que considerar únicamente los términos cuadráticos de la serie que aparece entre corchetes. Empleando la fórmula

$$\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$

el cálculo de la integral (c) da

$$\frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

Dado que

$$\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$

puede deducirse que el segundo término de la integral de la expresión (b) se anula al verificar la integración. Por consiguiente la energía total de deformación está dada en este caso por la expresión (c) y es

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (d)$$

Consideremos la deformada de una placa (fig. 59) debida a una fuerza concentrada P perpendicular a la placa y aplicada en el punto $x = \xi$, $y = \eta$. Para tener un desplazamiento virtual que cumpla con las condiciones de contorno damos a cualquier coeficiente $a_{m'n'}$ de la serie (a) una variación elemental $\delta a_{m'n'}$. Como consecuencia de ello la flecha (a) sufre una variación.

$$\delta w = \delta a_{m'n'} \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b}$$

y la carga P produce un trabajo virtual

$$P \delta a_{m'n'} \operatorname{sen} \frac{m'\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi \eta}{b}$$

Del principio de los trabajos virtuales se deduce que este trabajo debe ser igual a la variación de la energía potencial (d) debida a la variación $\delta a_{m'n'}$. Por lo tanto

$$P \delta a_{m'n'} \operatorname{sen} \frac{m'\pi \xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi \eta}{b} = \frac{\partial V}{\partial a_{m'n'}} \delta a_{m'n'}$$

Sustituyendo V por su expresión (d), obtenemos

$$P \delta a_{m'n'} \text{sen} \frac{m'\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{n'\pi\eta}{b} = \frac{\pi^4 ab}{4} D a_{m'n'} \left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right)^2 \delta a_{m'n'} \quad (e)$$

de donde

$$a_{m'n'} = \frac{4P \text{sen} \frac{m'\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{n'\pi\eta}{b}}{\pi^4 ab D \left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right)^2} \quad (f)$$

Sustituyendo en la expresión (a), obtenemos una vez más el resultado (133).

En lugar de utilizar el principio de los trabajos virtuales para calcular los coeficientes a_{mn} en la expresión (a) de la flecha, podemos obtener el mismo resultado considerando la energía total del sistema. Si un sistema está en una posición de equilibrio estable, su energía total es un mínimo. Aplicando este acento al estudio de la flexión de placas, observamos que la energía total en tales casos consta de dos partes: la energía de deformación debida a la flexión, dada por la expresión (b) y la energía potencial de la carga que actúa sobre la placa. Definiendo la posición del elemento de carga $q \, dx \, dy$ por su distancia vertical w al plano xy , la energía potencial correspondiente puede ponerse en la forma $-wq \, dx \, dy$, y la energía potencial de la carga total es

$$- \iint wq \, dx \, dy \quad (g)$$

Entonces la energía total del sistema es

$$I = \iint \left(\frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - wq \right) dx \, dy \quad (h)$$

El problema de la flexión de una placa se reduce en cada caso particular a la determinación de una función w de x e y que satisfaga las condiciones de contorno dadas y haga que la integral (h) sea mínima. Si aplicamos a este problema el cálculo de variaciones obtenemos para w la ecuación (104) en derivadas parciales, que ya habíamos deducido de la consideración del equilibrio de un elemento de la placa. Sin embargo, puede utilizarse ventajosamente la integral (h) en el estudio aproximado de la flexión de placas. Para ello sustituyamos el problema de cálculo de variaciones por la determinación del mínimo de una cierta función, suponiendo que la flecha w puede ponerse en la forma

$$w = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + a_3 \varphi_3(x, y) + \dots + a_n \varphi_n(x, y) \quad (211)$$

en la que las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ se han elegido en la forma apropiada¹ para representar la deformada y cumplir al mismo tiempo las condiciones

¹ Por la experiencia se sabe aproximadamente la forma de la deformada y nos guiamos por esta información para elegir la forma apropiada de las funciones φ .

de contorno. Sustituyendo la expresión (211) en la integral (h), obtenemos después de integrar una función de segundo grado en los coeficientes a_1, a_2, \dots . Ahora basta elegir estos coeficientes de modo que la integral (h) sea un mínimo, de donde se deduce que

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \quad (i)$$

Lo que nos da un sistema de n ecuaciones lineales en a_1, a_2, \dots, a_n y puede calcularse fácilmente estos valores en cada caso particular. Si las funciones φ son tales que la expresión (211) puede representar una función arbitraria dentro del contorno de la placa¹, este método de cálculo de flechas w nos lleva a aproximaciones cada vez mejores cuando aumenta el número n de términos y tomando n infinito obtenemos una solución exacta del problema.

Aplicando el método al caso de una placa rectangular simplemente apoyada, tomamos la flecha mediante la serie trigonométrica (a). Entonces, utilizando la expresión (d) de la energía de deformación, la integral (h) queda en la forma siguiente:

$$I = \frac{\pi^4 ab D}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \int_0^a \int_0^b q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dx \, dy \quad (j)$$

y las ecuaciones (i) tienen la forma

$$\frac{\pi^4 ab D}{4} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \int_0^a \int_0^b q \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dx \, dy = 0 \quad (k)$$

En el caso de una carga P aplicada en un punto de coordenadas ξ, η , la intensidad de la carga q es nula en toda la placa salvo en el punto (ξ, η) en el que tenemos $q \, dx \, dy = P$. Entonces la ecuación (k) coincide con la ecuación (e) antes deducida mediante el principio de los trabajos virtuales. A efectos prácticos debe tenerse en cuenta que la integral

$$\iint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx \, dy \quad (l)$$

contenida en las expresiones (b) y (h) se anula si la placa está rigidamente empotrada en el contorno. La misma simplificación es válida para una placa

¹ Hemos visto que una doble serie trigonométrica (a) tiene esta propiedad respecto a las flechas w de una placa rectangular simplemente apoyada. Por lo tanto, puede usarse para obtener una solución exacta del problema. El método de resolver problemas de flexión de placas mediante la integral (h) fue desarrollado por W. Ritz; véase *J. reine angew. Math.*, volumen 135, 1908, y *Ann. Physik*, serie 4, vol. 28, pág. 737, 1909.

Para aclarar la aplicación del método consideremos una placa rectangular uniformemente cargada con todos los bordes empotrados (fig. 91). Escribiendo para abreviar $2x/a = u$, $2y/b = v$, usaremos las expresiones

$$\begin{aligned} U_1 &= u^4 - 2u^2 + 1 & V_1 &= v^4 - 2v^2 + 1 \\ U_2 &= u^6 - 2u^4 + u^2 & V_2 &= v^6 - 2v^4 + v^2 \end{aligned} \quad (e)$$

La sucesión de funciones

$$\varphi_1 = U_1 V_1 \quad \varphi_2 = U_1 V_2 \quad \varphi_3 = U_2 V_1 \quad \varphi_4 = U_2 V_2 \quad (f)$$

verifica entonces las condiciones

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial w}{\partial u} = 0 & \text{en } u &= \pm 1 \\ w &= \frac{\partial w}{\partial v} = 0 & \text{en } v &= \pm 1 \end{aligned}$$

Desarrollemos el cálculo para el caso particular de una placa cuadrada. Como u y v son intercambiables, tenemos $a_2 = a_3$ y, en consecuencia,

$$\varphi_3 = \varphi_2 = U_1 V_2 + U_2 V_1$$

Poniendo $qa^4/16D = N$ tomamos la expresión (211) en la forma

$$w = a_1 U_1 V_1 + a_2 (U_1 V_2 + U_2 V_1) + a_4 U_2 V_2 \quad (g)$$

Sustituyendo consecutivamente en las ecuaciones (d) con los factores φ_1 , φ_2 y φ_4 y teniendo en cuenta la notación (e), tenemos entonces que calcular las integrales entre los límites $u = \pm 1$, $v = \pm 1$. Llegamos así al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6,087345a_1 + 1,215879a_2 + 0,0675488a_4 &= 0,1422221N \\ 1,215879a_1 + 2,743525a_2 + 0,218235a_4 &= 0,0406349N \\ 0,0675488a_1 + 0,218235a_2 + 0,00590462a_4 &= 0,00290249N \end{aligned} \quad (h)$$

Para la primera aproximación tenemos

$$a_1 = \frac{0,1422221}{6,087345} N = 0,02127N$$

Resolviendo el sistema (h) completo tenemos

$$a_1 = 0,02023N \quad a_2 = 0,00535N \quad a_4 = 0,00625N$$

para la tercera aproximación.

Los resultados numéricos obtenidos mediante la expresión (g) para la flecha en el centro, los momentos $M_x = M_y$ en el centro, y el momento M_x en $x = a/2$, $y = 0$ son respectivamente:

Primera aproximación

$$0,001320qa^4/D, 0,0276qa^2, -0,0425qa^2$$

Tercera aproximación

$$0,001264qa^4/D, 0,0228qa^2, -0,0512qa^2$$

Como comparación, tenemos los valores dados por la tabla 35

$$0,00126qa^4/D, 0,0231qa^2, -0,0513qa^2$$

Los momentos en el centro se han calculado para $\nu = 0,3$.

Se ve que, mientras la primera aproximación no es suficiente satisfactoria, la tercera aproximación parece suficiente aun por lo que se refiere a los momentos flectores.

82. Diversos métodos aproximados

Método combinado¹

El método descrito en el apartado anterior puede limitarse a una variable, y por ejemplo, obteniéndose así una ecuación diferencial ordinaria respecto a la otra variable x . Consideremos de nuevo una placa cuadrada empotrada sometida a carga uniforme (fig. 91).

Limitándonos a la primera aproximación, tomamos en esta ocasión

$$w = \varphi(x)\psi(y) = \varphi(x)(a^4 - 8a^2y^2 + 16y^4) \quad (a)$$

verificando así la función $\psi(y)$ las condiciones de contorno $w = dw/dy = 0$ para $y = \pm a/2$. Probemos ahora a satisfacer la condición (c) del apartado 81 tomando la variación en la forma

$$\delta w = \psi(y) \delta \varphi(x) \quad (b)$$

Sustituyendo en la ecuación (c) del apartado 81, tenemos

$$\int \left[\int \left(\Delta \Delta w - \frac{q}{D} \right) \psi(y) dy \right] dx \delta \varphi(x) = 0 \quad (c)$$

que se verifica si

$$\int_{-a/2}^{a/2} \left(\Delta \Delta w - \frac{q}{D} \right) \psi(y) dy = 0 \quad (d)$$

A continuación sustituimos la expresión (a) en esta última ecuación y obtenemos para la función incógnita $\varphi(x)$ la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{a^4}{504} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \frac{a^2}{21} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi = \frac{q}{384D} \quad (e)$$

Una solución particular inmediata de esta ecuación es $\varphi = q/384D$. Para la ecuación homogénea que corresponde a la ecuación (e) cuando $q = 0$ tenemos que tomar $\varphi = e^{\lambda x}$. Obteniendo $\lambda = \pm \alpha \pm \beta i$ con $\alpha = 4,1503$ y $\beta = 2,2858$. A causa de la simetría de la deformada respecto al eje y , las soluciones de la ecuación (e) deben ser funciones pares respecto a x ; de acuerdo con ellos tenemos

$$\varphi = \frac{q}{384D} \left(1 + C_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{a} \cos \frac{\beta x}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{a} \operatorname{sen} \frac{\beta x}{a} \right) \quad (f)$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 utilizamos las condiciones de contorno $\varphi = \partial \varphi / \partial x = 0$ para $x = \pm a/2$. Así obtenemos $C_1 = -0,50227$, $C_2 = -0,04396$, que dan definitivamente la forma de la función (f) y la solución (a).

De aquí deducimos los siguientes resultados numéricos para el centro de la placa: $w = 0,001296qa^4/D$ y (para $\nu = 0,3$) $M_x = 0,0241qa^2$ y $M_y = 0,0261qa^2$.

Se ve, pues, que el uso parcial de la ecuación diferencial da para la primera aproximación resultados más exactos que los obtenidos en el apartado 81 por la pura aplicación del método de la energía de deformación. Para obtener una mayor aproximación, tenemos que tomar

$$w = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \dots \quad (g)$$

¹ Debido a L. V. Kantorovich, *Izvest. Akad. Nauk S.S.S.R.*, núm. 5, 1933.

donde todas las funciones $\psi(y)$ tienen que cumplir las condiciones de contorno en $y = \pm a/2$. La utilización de la ecuación (c) con variaciones $\delta w_1 = \psi_1 \delta q_1, \delta w_2 = \psi_2 \delta q_2, \dots$ nos llevaría esta vez a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes para determinar las funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$. La solución de tal sistema, aunque en principio no presenta dificultad, puede resultar pesada para aproximaciones de orden superior; sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos es suficiente la segunda aproximación.

Método de retroceso

Puede utilizarse en la forma siguiente una solución (211) que cumpla únicamente las condiciones de contorno del problema. En lugar de calcular mediante la ecuación diferencial (103) las flechas correspondientes a un reparto dado de carga, utilizamos la misma ecuación para calcular la carga

$$q = D\Delta\Delta w \quad (h)$$

que resulta de una expresión (211) de la flecha. Según nuestra hipótesis la expresión (211) no representa la solución rigurosa del problema y por lo tanto, la carga (h) no coincidirá con la cargada q . Sin embargo, podemos elegir los parámetros a_1, a_2, \dots , de la expresión (211) de modo que se igualen los valores medios de q y \bar{q} en diversas partes de la superficie de la placa.

Consideremos, por ejemplo, una placa rectangular (fig. 178) con condiciones de contorno y reparto de carga simétricos respecto a los ejes x y y . Si subdividimos la

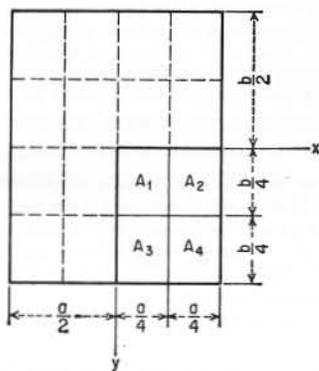


FIG. 178

placa en 16 rectángulos iguales, basta por razón de simetría considerar cuatro de ellos, tales como A_1, A_2, A_3 y A_4 . Según ello la expresión (211) puede reducirse a cuatro términos, es decir, a

$$w = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4 \quad (i)$$

Imponiendo ahora a q y \bar{q} en cada área parcial la condición

$$\iint_{A_n} (q - \bar{q}) dx dy = 0 \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (j)$$

obtenemos cuatro ecuaciones lineales respecto a los cuatro parámetros A_n y la resolución de este sistema da a la expresión (i) su forma definitiva¹.

Métodos de aproximación de las condiciones de contorno

Si disponemos de una solución que cumple la ecuación diferencial (103) junto con una de las condiciones de contorno, la segunda condición puede satisfacerse determinando un grupo de parámetros elegidos en forma adecuada. Para resolver el problema planteado en el apartado 44, se introdujeron como tales parámetros los coeficientes de las dos series trigonométricas que dan la variación de los momentos de borde de la placa. Se empleó el desarrollo en serie de Fourier² de la pendiente $\partial w / \partial N$ a lo largo del contorno, con el fin de anular esta pendiente de acuerdo con las condiciones del problema. Utilizando esta última condición podían calcularse los parámetros. Para cumplir en forma aproximada las condiciones de contorno puede aplicarse algún principio de mínimo, por ejemplo el método de mínimos cuadrados. La aplicación de un principio semejante requiere una consideración más detallada cuando deben cumplirse simultáneamente dos condiciones de contorno³.

Cuando se utiliza una solución que únicamente cumple la ecuación diferencial del problema, resulta a veces más sencillo satisfacer las condiciones de contorno únicamente en un determinado número de puntos del contorno adecuadamente elegidos. Al elegir tales puntos deben tenerse en cuenta las condiciones de simetría cuando haya lugar a ello. Para satisfacer todas las condiciones de contorno en m puntos debemos disponer de $2m$ parámetros.

En el caso más general⁴ podemos utilizar una expresión de la flecha que no cumpla ni la ecuación diferencial de la placa flexada ni las condiciones de contorno del problema. Entonces elegiremos un número de puntos n en el contorno e interiores en los que debe satisfacerse la ecuación diferencial. Entonces para obtener la solución del problema serán necesarios $2m + n$ parámetros.

Método de Weinstein⁵

En el caso específico de una placa empotrada en el contorno, podemos comenzar buscando una solución de la ecuación diferencial $\Delta\Delta w_1 = q/D$, tal que la solución sea válida para la carga dada q y para condiciones de contorno $w_1 = 0, \Delta w_1 = 0$, en lugar de las condiciones reales. En el apartado 24 se ha visto que este último procedimiento equivale a resolver sucesivamente dos problemas, cada uno de los cuales corresponde al equilibrio de una membrana cargada.

La solución de nuestro problema puede tomarse en la forma

$$w = w_1 + \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k \quad (k)$$

donde a_k son constantes y φ_k funciones de x e y que se anulan en el contorno y cumplen la ecuación diferencial $\Delta\Delta \varphi_k = 0$. La condición de contorno requerida

¹ Puede hallarse un ejemplo aclaratorio de la aplicación del método en C. B. Biezeno y R. Grammel, *Technische Dynamik*, 2.^a ed., vol. 1, pág. 147, Berlín, 1953.

² A. Nádai ha utilizado para cumplir una condición de contorno un sistema más general de funciones orthogonalizadas a lo largo de un borde; véase «Elastische Platten», pág. 180, Berlín, 1925.

³ E. Berger ha contribuido notablemente en este problema; véase *op. cit.*, pág. 39.

⁴ El método fue estudiado por C. J. Thorne y J. V. Atanasoff, *Iowa State Coll. J. Sci.*, volumen 14, pág. 333, 1940.

⁵ A. Weinstein y D. H. Rock, *Quart. Appl. Math.*, vol. 2, pág. 262, 1944.

$\partial w / \partial N = 0$ (donde N es la normal al contorno) puede modificarse mediante el teorema de Green, que conduce al siguiente sistema de m ecuaciones lineales que nos permite calcular los coeficientes a_k :

$$\iint \frac{q\varphi_1}{D} dx dy + \sum_{k=1}^m a_k \iint \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_k dx dy = 0, \quad (l)$$

$$\iint \frac{q\varphi_2}{D} dx dy + \sum_{k=1}^m a_k \iint \Delta\varphi_2 \Delta\varphi_k dx dy = 0$$

donde todas las integrales se extienden a toda la superficie de la placa. El método puede usarse ventajosamente cuando las condiciones de contorno $w = 0$, $\Delta w = 0$ sugieren una solución del problema mucho más sencilla que las condiciones reales $w = 0$, $\partial w / \partial N = 0$.

83. Aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas a la flexión de placas simplemente apoyadas

En nuestro estudio anterior (ap. 24) se ha demostrado que la ecuación diferencial de la flexión de las placas podía sustituirse por dos ecuaciones que tuvieran la forma de la ecuación de la flecha de una membrana uniformemente tensada. Hay que añadir también que esta última ecuación se resuelve con una aproximación suficiente sustituyéndola por una ecuación en diferencias finitas. Para ilustrar este método de resolución, comenzaremos por el caso de una placa larga rectangular uniformemente cargada. A una distancia muy grande de los extremos de la placa, la deformada puede considerarse cilíndrica. Entonces, tomando el eje x paralelo a la anchura de la placa, las ecuaciones diferenciales (120), toman la forma

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M}{D} \quad (a)$$

Estas dos ecuaciones tienen la misma forma que la ecuación de una cuerda flexible tensada y cargada transversalmente.

Sea AB (fig. 179) la deformada de la cuerda tendida por las fuerzas S y uniformemente cargada por una carga vertical de intensidad q . Para deducir la ecuación de esta curva consideramos un elemento infinitamente pequeño mn en equilibrio. Las fuerzas de tracción en los puntos m y n están dirigidas según las tangentes a la deformada, en estos puntos (fig. 179). Proyectando estas fuerzas así como la carga $q dx$ sobre el eje z , se obtiene

$$-S \frac{dw}{dx} + S \left(\frac{dw}{dx} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) + q dx = 0 \quad (b)$$

de donde

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{q}{S} \quad (c)$$

Esta ecuación es idéntica a las ecuaciones (a), deducidas para una placa infinitamente larga. La deformada se obtiene entonces integrando la ecuación (c), obteniendo la parábola

$$w = \frac{4\delta x(a-x)}{a^2} \quad (d)$$

que satisface la condición $w = 0$ en los extremos y tiene una flecha δ en el centro.

El mismo problema puede resolverse gráficamente, sustituyendo la carga uniforme por un sistema de fuerzas concentradas $q\Delta x$ equidistantes,

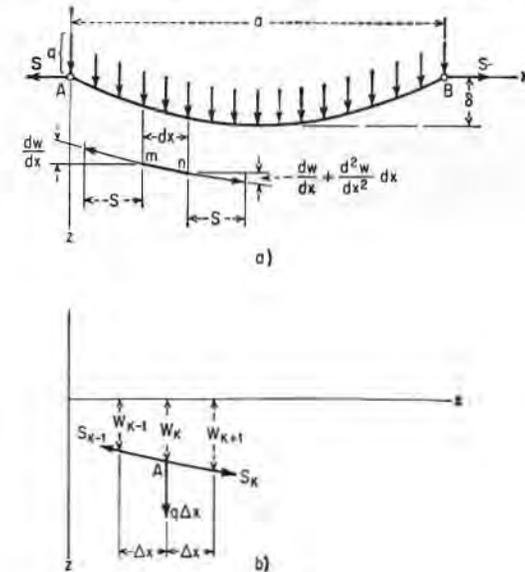


FIG. 179

siendo Δx la distancia entre dos fuerzas adyacentes, y construyendo el polígono funicular de estas fuerzas. Si A (fig. 179) es uno de los vértices de este polígono y S_{k-1} , S_k las tracciones sobre dos lados adyacentes del polígono, las proyecciones horizontales de estas fuerzas son iguales a S y la suma de sus proyecciones verticales equilibra la carga $q\Delta x$ lo que da

$$-S \frac{w_k - w_{k-1}}{\Delta x} + S \frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta x} + q \Delta x = 0 \quad (e)$$

En esta ecuación w_{k-1} , w_k y w_{k+1} , son las ordenadas correspondientes a tres vértices consecutivos del polígono funicular y $(w_k - w_{k-1})/\Delta x$, $(w_{k+1} - w_k)/\Delta x$ son las pendientes de los dos lados adyacentes. Se puede utilizar la ecuación (e) para calcular las ordenadas consecutivas $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, w_k, \dots, w_n$ del polígono funicular. Para ello construiremos el cuadro (j)

0	w_0	Δw_0	
Δx	w_1		
.....
.....
$(k-1)\Delta x$	w_{k-1}	Δw_{k-1}	
$k\Delta x$	w_k		
$(k+1)\Delta x$	w_{k+1}	Δw_k	$\Delta^2 w_k$
.....		

En la primera columna del cuadro entramos con las abscisas de los puntos sucesivos que dividen el vano.

En la segunda, se encuentran las ordenadas sucesivas de los vértices del polígono. Hallando las diferencias de las ordenadas consecutivas, $w_1 - w_0, \dots, w_k - w_{k-1}, w_{k+1} - w_k, \dots$, se obtienen las *primeras diferencias* representadas por $\Delta w_0, \dots, \Delta w_{k-1}, \Delta w_k, \dots$, en la tercera columna. Las *segundas diferencias* se obtienen restando los números consecutivos de la tercera columna. Por ejemplo, para el punto k de abscisa $k\Delta x$, la segunda diferencia es

$$\Delta^2 w_k = \Delta w_k - \Delta w_{k-1} = w_{k+1} - w_k - (w_k - w_{k-1}) = w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} \quad (g)$$

Con ayuda de estas notaciones, la ecuación (e) se escribe

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = -\frac{q}{S} \quad (h)$$

Esta es la ecuación en diferencias finitas correspondiente a la ecuación diferencial (c) y que tiende cada vez más hacia ella cuando el número de puntos que divide el vano aumenta.

De igual forma, se pueden sustituir las ecuaciones diferenciales (a) por las ecuaciones en diferencias finitas

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 M}{\Delta x^2} &= -q \\ \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \quad (i)$$

Para aplicar estas ecuaciones al cálculo de las flechas de una placa, dividiremos el vano de esta en ocho partes iguales, es decir, $\Delta x = 1/8a$. Las ecuaciones (i), toman la forma

$$\begin{aligned} \Delta^2 M &= -\frac{qa^2}{64} \\ \Delta^2 w &= -\frac{Ma^2}{64D} \end{aligned}$$

Estableceremos las segundas diferencias de los puntos de división consecutivos w_1, w_2, w_3 y w_4 como indica la ecuación (g), recordando que en nuestro caso $w_0 = 0, M_0 = 0$ y por simetría $w_3 = w_5, M_3 = M_5$, obtenemos los dos grupos de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned} M_2 - 2M_1 &= -\frac{qa^2}{64} & w_2 - 2w_1 &= -\frac{M_1 a^2}{64D} \\ M_3 - 2M_2 + M_1 &= -\frac{qa^2}{64} & w_3 - 2w_2 + w_1 &= -\frac{M_2 a^2}{64D} \\ M_4 - 2M_3 + M_2 &= -\frac{qa^2}{64} & w_4 - 2w_3 + w_2 &= -\frac{M_3 a^2}{64D} \\ M_5 - 2M_4 + M_3 &= -\frac{qa^2}{64} & w_5 - 2w_4 + w_3 &= -\frac{M_4 a^2}{64D} \end{aligned} \quad (j)$$

Resolviendo el primer grupo, tenemos los valores de M siguientes:

$$M_1 = \frac{7qa^2}{2 \cdot 64} \quad M_2 = 6 \frac{qa^2}{64} \quad M_3 = \frac{15qa^2}{2 \cdot 64} \quad M_4 = 8 \frac{qa^2}{64} \quad (k)$$

Estos valores coinciden exactamente con los de los momentos flectores de una franja uniformemente cargada, calculados por la ecuación conocida

$$M = \frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

Sustituyendo los valores (k) de los momentos en el segundo grupo de las ecuaciones (j), se obtiene

$$\begin{aligned} w_2 - 2w_1 &= -\frac{1}{8}N \\ w_2 - 2w_2 + w_1 &= -6N \\ w_4 - 2w_3 + w_2 &= -\frac{1}{8}8N \\ w_3 - 2w_4 + w_5 &= -8N \end{aligned}$$

donde

$$N = \frac{qa^4}{64^2 D}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen en los puntos de división, las flechas siguientes:

$$w_1 = 21N \quad w_2 = 38,5N \quad w_3 = 50N \quad w_4 = 54N \quad (l)$$

Los valores exactos de estas flechas calculados mediante la ecuación conocida

$$w = \frac{qx}{24D} (a^3 - 2ax^2 + x^3)$$

de la flecha de una franja uniformemente cargada de anchura a a título de comparación son:

$$w_1 = 20,7N \quad w_2 = 38N \quad w_3 = 49,4N \quad w_4 = 53,3N$$

Se ve que dividiendo la luz en ocho partes, el error en el valor de la flecha máxima, obtenida por las ecuaciones en diferencias finitas (i) es del orden de 1,25 %. Aumentando el número de divisiones, la exactitud obtenida será todavía mayor, pero esto exige más trabajo puesto que el número de ecuaciones del sistema (j) aumenta con el número de divisiones (fig. 180).

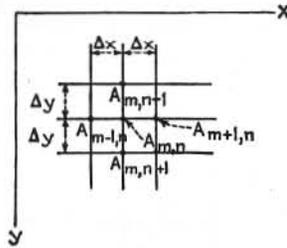


FIG. 180

Consideremos ahora una placa rectangular de longitud finita. En este caso, las flechas son funciones de x e y , y las ecuaciones (a) deben ser sustituidas por las ecuaciones generales (120). Sustituyendo estas últimas por las ecuaciones en diferencias finitas, se han de tener en cuenta las diferencias correspondientes en las variaciones de las dos coordenadas x e y . Indicando sobre la figura 180, la notación utilizada para designar los puntos adyacentes, se utilizarán para las primeras diferencias en un punto A_{mn} de coordenadas $m\Delta x$ y $n\Delta y$ las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} \Delta_x w_{m-1,n} &= w_{mn} - w_{m-1,n} & \Delta_x w_{mn} &= w_{m+1,n} - w_{mn} \\ \Delta_y w_{m,n-1} &= w_{mn} - w_{m,n-1} & \Delta_y w_{mn} &= w_{m,n+1} - w_{mn} \end{aligned}$$

Conociendo las primeras diferencias, se calculan las tres clases de segundas diferencias, como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} w_{mn} &= \Delta_x w_{mn} - \Delta_x w_{m-1,n} = w_{m+1,n} - w_{mn} - (w_{mn} - w_{m-1,n}) \\ &= w_{m+1,n} - 2w_{mn} + w_{m-1,n} \\ \Delta_{yy} w_{mn} &= \Delta_y w_{mn} - \Delta_y w_{m,n-1} = w_{m,n+1} - w_{mn} - (w_{mn} - w_{m,n-1}) \\ &= w_{m,n+1} - 2w_{mn} + w_{m,n-1} \\ \Delta_{xy} w_{mn} &= \Delta_y w_{mn} - \Delta_y w_{m-1,n} = w_{m,n+1} - w_{mn} - (w_{m-1,n+1} - w_{m-1,n}) \\ &= w_{m,n+1} - w_{mn} - w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n} \end{aligned} \quad (m)$$

Con estas notaciones las ecuaciones diferenciales (120) se sustituyen por las siguientes ecuaciones en diferencias finitas

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{xx} M}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy} M}{\Delta y^2} &= -q \\ \frac{\Delta_{xx} w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy} w}{\Delta y^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \quad (n)$$

En el caso de una placa rectangular simplemente apoyada, M y w son nulos en el contorno y pueden resolverse sucesivamente las ecuaciones (n) sin ninguna dificultad.

Para ilustrar el método del cálculo de momentos y flechas, consideremos el caso muy simple de una placa cuadrada uniformemente cargada (fig. 181). Se obtiene una fuerte aproximación de M y w , dividiendo la placa en dieciséis pequeños cuadrados (v. fig. 181), y tomando $\Delta x = \Delta y = a/4$ en las ecuaciones (n). Por razón de simetría, es evidente que basta hacer los cálculos para la octava parte de la superficie de la placa, es decir

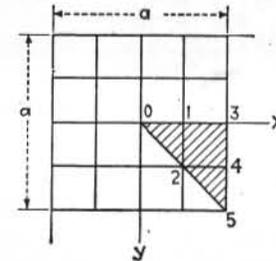


FIG. 181

el triángulo rayado en la figura. Sobre esta área no se hacen los cálculos más que para los tres puntos 0, 1, 2, para los que M y w son distintos de cero. Estos últimos valores son nulos en los puntos 3, 4, 5 debido a las condiciones de contorno. Comenzando por la primera de las ecuaciones (n) y considerando el punto 0 centro de la placa, se encuentran utilizando las ecuaciones (m) y las condiciones de simetría, los valores siguientes de las segundas diferencias en este punto:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} M_0 &= 2M_1 - 2M_0 \\ \Delta_{yy} M_0 &= 2M_1 - 2M_0 \end{aligned}$$

en las que M_1 y M_0 son los valores de M en 1 y 0. De igual forma para 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} M_1 &= M_3 - 2M_1 + M_0 = -2M_1 + M_0 \\ \Delta_{yy} M_1 &= 2M_2 - 2M_1 \end{aligned}$$

Las segundas diferencias en el punto 2 se calculan de la misma manera. Sustituyendo estas expresiones de las segundas diferencias en la primera de las ecuaciones (n), se obtiene para los puntos 0, 1 y 2, las tres ecuaciones siguientes:

$$4M_1 - 4M_0 = -\frac{qa^2}{16}$$

$$2M_2 - 4M_1 + M_0 = -\frac{qa^2}{16}$$

$$-4M_2 + 2M_1 = -\frac{qa^2}{16}$$

de donde se deduce

$$M_0 = \frac{9}{2} \frac{qa^2}{64} \quad M_1 = \frac{7}{2} \frac{qa^2}{64} \quad M_2 = \frac{11}{4} \frac{qa^2}{64}$$

Sustituyendo estos valores de los momentos en la segunda de las ecuaciones (n), se obtienen para el cálculo de las flechas w_0, w_1, w_2 , las tres ecuaciones

$$4w_1 - 4w_0 = -\frac{3}{8}N$$

$$2w_2 - 4w_1 + w_0 = -\frac{7}{8}N$$

$$-4w_2 + 2w_1 = -\frac{1}{4}N$$

donde

$$N = \frac{qa^4}{16 \cdot 64D}$$

De estas ecuaciones obtenemos para las flechas los valores

$$w_0 = \frac{9}{128}N \quad w_1 = \frac{4}{128}N \quad w_2 = \frac{3}{128}N$$

El valor de la flecha en el centro es

$$w_0 = \frac{66}{16}N = \frac{66qa^4}{16 \cdot 16 \cdot 64D} = 0,00403 \frac{qa^4}{D}$$

Comparando este valor con $0,00406qa^4/D$ dado en la tabla 8, se llega a que el error de la flecha calculada es inferior al 1%. Para el momento flector en el centro hallamos

$$M_x = M_y = \frac{M_0(1 + \nu)}{2} = \frac{1,39}{2} \frac{qa^2}{64} = 0,0457qa^2$$

inferior en 4,5% al valor exacto $0,0479qa^2$.

Consta que en este caso un pequeño número de subdivisiones de la placa permite una exactitud que satisface las aplicaciones prácticas. Doublando el número de subdivisiones, es decir $\Delta x = \Delta y = a/8$, el valor del momento flector difiere en el 1% del valor exacto.

Consideremos la flexión de una placa oblicua simplemente apoyada, que soporta una carga uniforme de intensidad q (fig. 182). Las subdivisiones en este caso son $\Delta x = b/6$ y $\Delta y = b/3$.

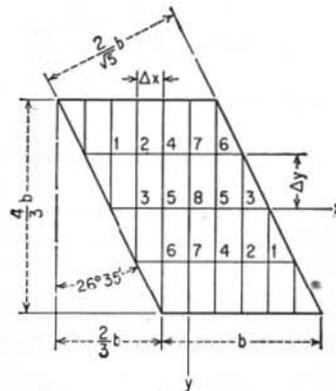


FIG. 182

En consecuencia la primera de las ecuaciones (n) puede escribirse en la forma

$$4\Delta_{xx}M + \Delta_{yy}M = -\frac{qb^2}{9} \quad (o)$$

Aplicamos sucesivamente esta ecuación en los puntos 1 al 8 y utilizemos las expresiones (m) de las diferencias, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned} -10M_1 + 4M_2 &= -\frac{qb^2}{9} \\ 4M_1 - 10M_2 + M_3 + 4M_4 &= -\frac{qb^2}{9} \\ M_2 - 10M_3 + 4M_5 &= -\frac{qb^2}{9} \\ 4M_2 - 10M_4 + M_5 + 4M_7 &= -\frac{qb^2}{9} \\ 4M_3 + M_4 - 10M_5 + M_6 + 4M_8 &= -\frac{qb^2}{9} \\ M_5 - 10M_6 + 4M_7 &= -\frac{qb^2}{9} \\ 4M_4 + 4M_6 - 10M_7 + M_8 &= -\frac{qb^2}{9} \\ 8M_5 + 2M_7 - 10M_8 &= -\frac{qb^2}{9} \end{aligned} \quad (p)$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} M_1 &= 0,29942 \frac{qb^2}{9} & M_5 &= 0,66191 \frac{qb^2}{9} \\ M_2 &= 0,49854 \frac{qb^2}{9} & M_6 &= 0,39387 \frac{qb^2}{9} \\ M_3 &= 0,41462 \frac{qb^2}{9} & M_7 &= 0,56920 \frac{qb^2}{9} \\ M_4 &= 0,59329 \frac{qb^2}{9} & M_8 &= 0,74337 \frac{qb^2}{9} \end{aligned} \quad (q)$$

La segunda de las ecuaciones (m) toma entonces la forma

$$4\Delta_{xx}w + \Delta_{yy}w = -\frac{Mb^2}{9D} \quad (r)$$

teniendo en cuenta los valores (q), esta ecuación nos da el segundo grupo de ecuaciones

$$\begin{aligned} -10w_1 + 4w_2 &= -0,29942N \\ 4w_1 - 10w_2 + w_3 + 4w_4 &= -0,49854N \\ w_2 - 10w_3 + 4w_5 &= -0,41462N \\ 4w_2 - 10w_4 + w_5 + 4w_7 &= -0,59329N \\ 4w_3 + w_4 - 10w_5 + w_6 + 4w_8 &= -0,66191N \\ w_5 - 10w_6 + 4w_7 &= -0,39387N \\ 4w_4 + 4w_6 - 10w_7 + w_8 &= -0,56920N \\ 8w_6 + 2w_7 - 10w_8 &= -0,74337N \end{aligned} \quad (s)$$

donde

$$N = \frac{qb^4}{81D}$$

Lo que da las flechas

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,13176N & w_5 &= 0,38549N \\ w_2 &= 0,25455N & w_6 &= 0,20293N \\ w_3 &= 0,22111N & w_7 &= 0,31249N \\ w_4 &= 0,32469N & w_8 &= 0,44523N \end{aligned} \quad (t)$$

Debe notarse que la integración de la ecuación diferencial de la placa por métodos analíticos tendría, en este caso, dificultades considerables.

Para calcular los momentos en el punto central 8, se utilizan las expresiones (101) y (102), en las que las primeras derivadas están sustituidas por las diferencias correspondientes. Así pues utilizando¹ las expresiones (m), los valores (t) de las flechas y para $\nu = 0,2$, obtenemos

$$\begin{aligned} (M_x)_8 &= -D \left(\frac{w_6 - 2w_8 + w_5}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_7 - 2w_8 + w_1}{\Delta y^2} \right) = 0,0590qb^2 \\ (M_y)_8 &= -D \left(\frac{w_7 - 2w_8 + w_1}{\Delta y^2} + \nu \frac{w_5 - 2w_8 + w_6}{\Delta x^2} \right) = 0,0401qb^2 \\ (M_{xy})_8 &= (1 - \nu)D \frac{w_4 - w_6 - w_8 + w_4}{4\Delta x \Delta y} = 0,0108qb^2 \end{aligned}$$

¹ Véanse también los diagramas de las figuras 184, para el caso particular $\Delta x = \Delta y$.

El círculo de Mohr (fig. 183) da¹ entonces en el punto 8, los momentos principales siguientes:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} = 0,0639qb^2 \\ M_{\min} &= \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} = 0,0352qb^2 \end{aligned}$$

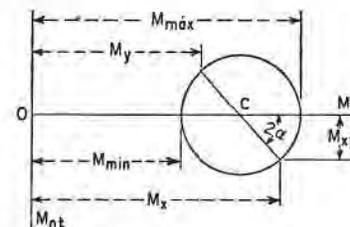


FIG. 183

La dirección de las tensiones debidas a estos momentos, está dada respecto a los ejes de coordenadas x , y por

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} = 24^{\circ}25'$$

De la figura 182 se deduce que las tensiones debidas a M_{\max} en el centro actúan casi exactamente en la dirección del vano menor de la placa.

La planta de la placa de la figura 182 era tal que se podía utilizar una muralla rectangular de subdivisiones constantes Δx y Δy . En el caso más general, para el análisis de una losa oblicua se debe utilizar una malla triangular².

Se puede aplicar el método de diferencias finitas a placas de bordes empotrados o libres y finalmente a las placas con condiciones de contorno mixtas³. Puesto que en el caso general el valor de M en el contorno no es fijo su utilización es menos ventajosa y las flechas w se calculan directamente mediante una serie de ecuaciones de diferencias finitas equivalentes a la ecuación diferencial $\Delta \Delta w = q/D$ de la placa flexada. Para mayor comodidad la diferencia finita equivalente al operador $\Delta \Delta(\dots)$ está representada en la figura 184 con otros operadores útiles. El diagrama está fundado en la hipótesis $\Delta x = \Delta y = \lambda$. Cada número debe multiplicarse por el símbolo w_k que representa la flecha en el punto k correspondiente y la suma de estos productos debe estar dividida por la expresión dada en el pie.

¹ Véase la diferencia de notación de las figuras 183 y 22. Los momentos principales de la figura 183 se llaman M_{\max} y M_{\min} . Nótese también que en ambos diagramas si el punto se desplaza sobre el círculo en el sentido de las agujas del reloj, la normal a la sección correspondiente se desplazará en el mismo sentido.

² V. P. Jensen, en *Univ. Illinois Bull.*, 332, 1941, utiliza con gran profusión estas mallas y de esta revista se ha tomado el anterior ejemplo numérico.

³ Se encuentran varios ejemplos de esta clase en la obra de H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2.^a ed., Berlín, 1938; véase también N. J. Nielsen, «Bestemmelse of Spaendinger i Pladers», Copenhagen, 1920.

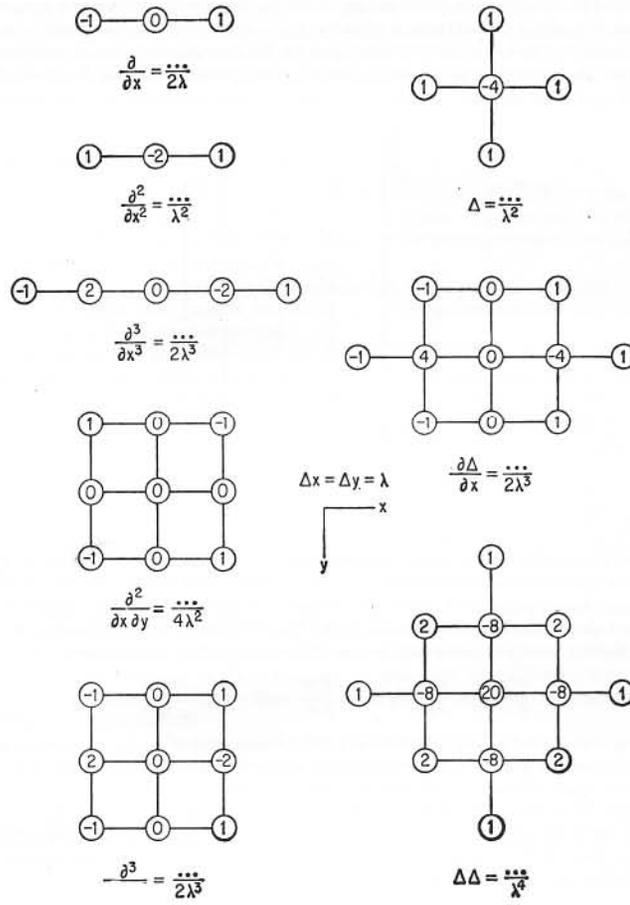


FIG. 184

Para formular las condiciones de contorno para un borde en el que las flechas son nulas establecemos la ecuación para un punto interior 7, próximo al borde (fig. 185). Aplicando el operador $\Delta\Delta(\dots)$ tenemos

$$[w_1 + w_8 + w_9 + w_{13} + 2(w_2 + w_4 + w_{10} + w_{12}) - 8(w_3 + w_6 + w_8 + w_{11}) + 20w_7] \frac{1}{\lambda^4} = \frac{q_7}{D} \quad (u)$$

en la que $w_2 = w_3 = w_4 = 0$. Debemos eliminar ahora la flecha w_1 en el punto ficticio 1, obtenido prolongando la malla más allá del contorno de la placa. Esto se

hace fácilmente mediante la relación $w_1 = -w_7$, cuando la placa está simplemente apoyada en el punto 3 y mediante la relación $w_1 = w_7$, cuando la placa está empotrada. Así no quedan en la ecuación (n) más que las flechas de los puntos interiores y el número total de estas flechas desconocidas no sobrepasa el número de ecuaciones del tipo (n) de que disponemos.

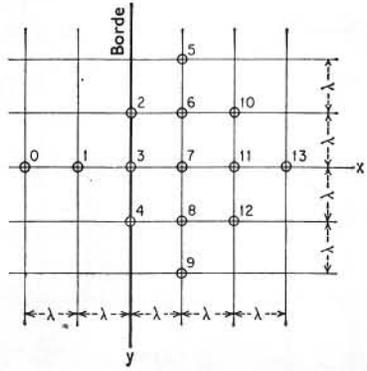


FIG. 185

En el caso de un borde libre el número de las ecuaciones en diferencias aumenta en el número de puntos, tales como 2, 3, 4, ..., del contorno en los que la flecha ya no es nula. Los operadores correspondientes $\Delta\Delta w$ se extienden ahora a puntos exteriores a una distancia λ y también 2λ del borde libre. Correspondiendo a cada par de estas flechas desconocidas w_0, w_1 se encontrarán dos condiciones de contorno:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

expresadas con ayuda de las diferencias y calculadas para el punto 3 opuesto a los dos puntos exteriores 0 y 1. Por consiguiente, el número total de ecuaciones será también en este caso igual al número de flechas desconocidas.

Cuando los valores de M en el interior de la placa no son independientes de las flechas w , las ecuaciones en diferencias finitas de las flechas resultan más complicadas que en los casos de los dos ejemplos precedentes. Para este tipo de ecuaciones, tendrá interés utilizar el método de relajación¹.

84. Métodos experimentales

Para placas de forma irregular, de espesor variable o aligeradas por numerosos orificios es más eficaz el empleo de métodos experimentales de investigación que los

¹ Respecto a este método debido a R. V. Southwell, véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.^a ed., pág. 468, Nueva York, 1951. Véase también F. S. Shaw, «An Introduction to Relaxation Methods», Dover Publication, Nueva York, 1953, donde se encuentra más bibliografía. H. Liebman, «Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und Komformer Abbildungen», *Sitzber. München Akad.*, pág. 385, 1918, ha desarrollado otro método de aproximaciones sucesivas utilizando las ecuaciones en diferencias finitas. La convergencia de este método fue estudiada por F. Wolf, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 118, 1926, y por R. Courant, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 322, 1926. Para un método perfeccionado, véase también R. Zurmühl, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 37, pág. 1, 1957.

métodos puramente analíticos. Para la determinación de la deformación de una placa flexada, se utilizan los dispositivos habituales tales como deformalímetros (strain-gauge) eléctricos y extensómetros de todo tipo¹.

Los métodos brevemente reseñados aquí son apropiados a condiciones especiales, correspondientes a la flexión de placas elásticas delgadas.

Uso de la fotoelasticidad²

Este método, generalmente utilizado en los problemas de tensión plana, debe modificarse si se utiliza en el caso de flexión de placas. De hecho, las tensiones normales en una placa delgada flexada son iguales y de sentido opuesto en dos fibras simétricas respecto al plano medio de la placa.

De acuerdo con ello, el efecto óptico producido en la zona de tracción sobre un rayo de luz polarizada que pasa a través de la placa queda anulado por el efecto opuesto debido a la zona de compresión.

La influencia de la segunda zona se elimina uniendo dos placas idénticas de material fotoelástico, mediante una hoja de metal reflectante. Para ello se plantea la cara interna de una o de las dos placas³. Los cálculos demuestran que el efecto óptico de estas dos placas unidas formando una placa de espesor h es aproximadamente el mismo que el de una sola placa de espesor $h/2$ sometida a una tensión plana igual a la tensión de la fibra extrema de la placa flexada.

Otra forma⁴ de hacer efectivas las propiedades fotoelásticas de una placa flexada, consiste en unir dos placas de material fotoelástico de distintas propiedades elásticas. En este tipo de placa la ley de reparto de tensiones debidas a la flexión no es lineal, por consiguiente al flexar produce un efecto óptico sobre un haz de luz polarizada.

Según un tercer método se unen hojas de materia fotoelástica a la superficie reflectante de una placa de cualquier material elástico y cualesquiera dimensiones⁵. El comportamiento de estas hojas respecto a un haz de luz polarizada da todos los datos relativos a la deformación en las fibras extremas de la placa probada. Este método nos permite estudiar la deformación de una losa que forma parte de una construcción existente, sometida a carga real, en lugar de limitarnos al estudio sobre un modelo reducido de la losa.

Empleo de luz reflejada⁶

El efecto de la superficie reflexiva de una placa deformada sobre dos rayos luminosos próximos puede utilizarse para calcular las curvaturas $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$, $\partial^2 w / \partial x \partial y$, y en consecuencia los valores de los momentos flectores y torsor de la placa.

¹ W. Andrá, F. Leonhard y R. Krieger, *Bauingenieur*, vol. 33, pág. 107, 1958, han utilizado un método electromecánico para medir las curvaturas de una losa flexada.

² Véase, por ejemplo, Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 131.

³ Véase J. N. Goodier y G. H. Lee, *J. Appl. Mechanics*, vol. 8, pág. A-27, 1941, y M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, pág. 281, 1952.

⁴ Véase H. Favre, *Schweiz. Bauztg.*, 1950. Respecto a la aplicación del método a una placa cantilever de espesor variable, véase H. Schwieger y G. Haberland, *Z. angew. Math. Mech.*, volumen 36, pág. 287, 1956.

⁵ Este método de fototensión se debe en su principio a A. Menager, 1930, pero sus aplicaciones prácticas no se han llevado a cabo hasta fechas más recientes; véase, por ejemplo, F. Zandman y M. R. Wood, *Prod. Eng.*, setiembre 1956. Respecto a la aplicación a las placas del llamado método de congelación, véase D. C. Drucker, *J. Appl. Mechanics*, vol. 9, página A-161, 1942.

⁶ Respecto a la teoría y aplicación del método a diversos problemas de flexión de placas, véase M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, 1940 y 1952. Véase también G. Bowen, *Eng. News-Record*, vol. 143, pág. 70, 1949.

Con el mismo fin puede utilizarse la distorsión de una malla luminosa rectangular proyectada sobre la superficie inicialmente plana de la placa. Los resultados obtenidos por este procedimiento son especialmente interesantes para placas, sobre cimentación elástica, cuyas propiedades mecánicas no pueden expresarse perfectamente en forma analítica.

Método de interferencia

Similar al método clásico utilizado para la determinación del módulo de Poisson de vigas, el método de interferencia se ha aplicado también a la medición de las flechas de una placa flexada⁷.

Analogía entre tensión plana y flexión de placas⁸

Existe una analogía entre la flecha de una placa, regida por la ecuación diferencial $\Delta \Delta w = 0$, en el caso particular de que actúen únicamente fuerzas de borde, y la función de Airy φ que satisface la ecuación $\Delta \Delta \varphi = 0$. Mientras la función w da las curvaturas de la deformada, la función de Airy da las tensiones $\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2$, $\sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2$ y $\tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y$ del estado plano en el sólido elástico. Si el contorno $f(x, y) = 0$ es el mismo en ambos casos, podemos poner

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K \sigma_y \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K \sigma_x \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -K \tau_{xy}$$

en las que K es una constante arbitraria tal que las curvaturas sean pequeñas.

Las flechas medidas w pueden usarse para el cálculo de las tensiones en el estado de tensión plana y viceversa si se cumplen ciertas condiciones de analogía en los contornos de la placa y el sólido elástico⁹.

⁷ Véase R. Landwehr y G. Grabert, *Ingr.-Arch.*, vol. 18, pág. 1, 1950.

⁸ Establecida por K. Wieghardt, *Mitt. Forschungsarb. Ingenieurwesens*, vol. 49, 1908. Para una explicación más exacta de la analogía, véase H. Schaefer, *Abhandl. Braunschweig. wiss. Ges.*, vol. 8, pág. 142, 1956.

⁹ Una formulación sencilla de estas condiciones se debe a M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, página 386, 1952. Respecto a métodos basados en analogía con fenómenos eléctricos, véase R. H. MacNeal, *J. Appl. Mechanics*, vol. 18, pág. 59, 1951, y K. Wotruba, *Czechoslov. J. Phys.*, vol. 2, pág. 56, 1953. Puede encontrarse más información sobre diversos métodos experimentales en L. Föppl y E. Mönch, «Praktische Spannungsoptik», 2.^a ed., Berlin, 1959.