

Apellido y nombres: Legajo:

Corrigió:..... Revisó:.....

La condición para aprobar este examen final es tener como mínimo 3 ejercicios correctamente resueltos

1	2	3	4	5	Calificación

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. NO USE LÁPIZ.

1) Sean los planos : $\pi_1 : ay + \frac{1}{2}z = 1$; $\pi_2 : 2x + y + 2z = 2$

- a) Halle $a \in \mathbb{R}$ tal que la distancia del punto $P\left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ al plano π_1 sea cero. Para el valor de a hallado, obtenga la ecuación de la recta $r: \pi_1 \cap \pi_2$. Grafique ambos planos y la recta como intersección entre ellos; indique en el gráfico el punto P.
- b) Obtenga el plano del haz $\pi_1 + \beta \pi_2 = 0$, si existe, que contiene al eje y.

2) Dada la ecuación $\sigma: Ax^2 + y^2 + z^2 + 4Ax = 4 - A$ en $\mathbb{R}^3$ Halle los valores de A de manera que la ecuación corresponda a:

- a) Un cilindro, e indique el tipo y realice el gráfico correspondiente.
- b) Un hiperboloide de una hoja tal que: $\sigma \cap (x = -2) = \{(x, y, z) = (-2, \cos(t), \sin(t)) ; t \in [0, 2\pi]\}$
Grafique

3) Defina una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que cada punto de $\mathbb{R}^3$ tenga su imagen en el plano $\alpha: 2x + y - z = 0$, de modo que: la imagen de la recta $L: \frac{x}{2} = y = -z$ sea el origen, la imagen del eje x sea la traza del plano α con el plano $x = 0$, y la imagen del eje y sea la traza del plano α con el plano $z = 0$. Justifique enunciando el teorema que utiliza y verifique sus hipótesis.

4) Sea la ecuación $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$

- a) Identifique la curva y grafíquela
- b) Parametrice el arco de curva incluida en el primer cuadrante recorrida en dirección horaria

5) Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que sus autovectores son: $\vec{v}_1 = (2, -1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 2)$ correspondientes a los autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ respectivamente.

a) Identifique la curva $(x \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k$ para: a1) $k = 0$; a2) $k = 1$

Grafique la curva en el sistema de coordenadas en que queda expresada en forma canónica, superpuesto al sistema de coordenadas original, cuando $k = 1$

b) Calcule: $\left| (A^{-1})^8 \right|$ Nota: No es necesario obtener la matriz A

UTN. FRBA EXAMEN FINAL ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
FECHA: 24 de Febrero 2012

Tema: 1

Apellido y nombres del alumno: Legajo:
Corrigió:.....

1	2	3	4	5	Calificación final

La condición para aprobar el examen es tener como mínimo tres ejercicios correctamente resueltos. Usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios para justificar sus respuestas. NO USE LAPIZ.

- 1) a) Sea el haz de planos determinado por los planos : $\pi_1 : x - z = 4$ y $\pi_2 : y = 0$
Halle la ecuación general de los planos del haz cuya distancia al origen sea igual a 2. Grafique los planos hallados.
b) Encuentre la proyección del punto $M(2, 0, -1)$ sobre el plano:
 $\pi : 3x - y - 4z + 16 = 0$

- 2) Utilizando los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine el valor de verdad de:
 $A^6 = 32A$

- 3) a) Sea la transformación lineal:

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^4 / T \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z, kw)$$

Encuentre el valor de "k", si existe, para que la dimensión del núcleo de T sea igual a 1.

- b) Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que el núcleo de F es el subespacio:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\} \text{ y } F(1, 2, 3) = (-2, -4, -6)$$

Encuentre, si es posible, una base B de $\mathbb{R}^3$ de modo que la matriz de F respecto de dicha base sea una matriz diagonal.

- 4) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

- a) La gráfica en el plano complejo del conjunto solución de la ecuación

$$|z| + |z - 2| = 4, \text{ es la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:}$$

$$(x; y) = (1 + 2 \cos t; \sqrt{3} \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y la dimensión del espacio columna de A es "n" y $B \in \mathbb{R}^{n \times n} / |B| = 0 \Rightarrow$
 $k.A + B$ es una matriz inversible para todo k real

- 5) Sea la ecuación en $\mathbb{R}^3$: $x^2 + Ay^2 + Bz^2 = C$

- a) Determine todos los valores de A, B y C para que la ecuación represente una superficie cónica cuya intersección con el plano $z = 4$ sea una circunferencia de radio 4.

- b) Para $A = B = -1$ y $C = 4$, identifique y grafique la superficie.

Apellido y nombres del alumno:

Legajo:

Corrigió:

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo, tres ejercicios completos, de los cuales, por lo menos uno debe ser de Geometría Analítica.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar, en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios. NO USE LÁPIZ.

1) Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $S = \{(x, y, z, w) / z-x = 0 \wedge w = 0\}$ y $T = \text{gen} \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\}$. ¿Es posible definir una transformación lineal $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Nu}(F) = S + T$ y F sea sobreyectiva? **Justifique.**

2) Analice la verdad de las siguientes proposiciones, **demostrando** en cada caso:

$$a) \left[A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \wedge A = (A_1, A_2, A_3) \wedge |A| = 4 \wedge B = (3A_1 + 2A_2, A_3, A_1) \right] \Rightarrow \left| \frac{1}{2} A^{-1} B^t \right| = 1$$

Nota: A_1, A_2, A_3 ; son las columnas de la matriz A .

b) Sean los números reales λ y k y la matriz cuadrada real A . Si λ es un autovalor real de la matriz cuadrada A correspondiente a un autovector v , entonces el número $\lambda - k$ es un autovalor de la matriz $B = A - kI$ y v es un autovector de B correspondiente a $\lambda - k$.

Nota: I es la matriz identidad del mismo orden que A .

3) Determine el conjunto de puntos del plano complejo que satisfacen la inecuación:

$$|z-2i|^2 - \text{Re}(z^2) \leq 2[\text{Im}(z)]^2 - \text{Re}(z). \text{ Represente gráficamente dicho conjunto.}$$

$$4) \text{ Dados el plano } \pi : x - 3y - z + (2k+1) = 0 \text{ y la recta } L: \begin{cases} x = 0 \\ y = h + (k-1)\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

a) Halle los valores de h y k tales que la proyección de la recta L sobre el plano π sea una recta que pase por el punto $P(1, h-3, -1)$ y resulte paralela a la recta L .

b) Para $h=k=1$, encuentre las ecuaciones simétricas de la recta proyección de L sobre el plano π .

5) Dada la ecuación $hx^2 + ky^2 - 6z = 0$,

a) Calcule los valores de h y k para que la ecuación represente un paraboloide elíptico cuyo corte con el plano $z=1$ sea la curva C dada por:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Identifique la curva C .

b) Represente gráficamente, en forma aproximada, la superficie correspondiente para $h=1$ y $k=-1$

Apellido y nombres del alumno:

Legajo:

Corrigió:

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo, tres ejercicios completos, de los cuales, por lo menos uno debe ser de Geometría Analítica.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar, en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios. NO USE LÁPIZ.

1) Dados el plano $\pi : x - 3y - z + (2h+1) = 0$ y la recta $L: \begin{cases} x = 0 \\ y = k + (h-1)t, \text{ con } t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$

a) Encuentre los valores de h y k tales que la proyección de la recta L sobre el plano π sea una recta paralela a la recta L y que, además, pase por el punto $P(1, k-3, -1)$

b) Si $h=k=1$, halle las ecuaciones simétricas de la recta proyección de L sobre el plano π .

2) Dada la ecuación $Ay^2 + Bx^2 - 6z = 0$,

a) Calcule los valores de A y B para que la ecuación represente un paraboloide elíptico cuya intersección con el plano $z-1=0$ sea la curva D de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Identifique la curva D .

b) Represente gráficamente la superficie correspondiente para $A = -1$ y $B = 1$, en forma aproximada.

3) Determine el conjunto de puntos del plano complejo que satisfacen la inecuación: $|z-2i|^2 + \operatorname{Re}(z) \leq 2[\operatorname{Im}(z)]^2 + \operatorname{Re}(z^2)$. **Represente gráficamente dicho conjunto.**

4) Sean los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $T = \operatorname{gen} \{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0)\}$ y

$W = \{(x, y, z, w) \mid z = x \wedge w = 0\}$. Responda si posible definir una transformación lineal $G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobreyectiva tal que $\operatorname{Nu}(G) = T + W$? **Justifique.**

5) Analice la verdad de las siguientes proposiciones, **demonstrando** en cada caso:

a) Considere los números reales λ y h y la matriz cuadrada real B . Si λ es un autovalor real de la matriz B correspondiente a un autovector X , entonces el número $\lambda - h$ es un autovalor de la matriz $A = B - hI$ y X es un autovector de A correspondiente a $\lambda - h$

Nota: I es la matriz identidad del mismo orden que B .

b) $\left[B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \wedge B = (B_1, B_2, B_3) \wedge |B| = 4 \wedge A = (3B_1 + 2B_2, B_3, B_1) \right] \Rightarrow \left| \frac{1}{2} B^{-1} A^t \right| = 1$

Nota: B_1, B_2, B_3 ; son las columnas de la matriz B .

Apellido y nombres del alumno: Legajo:

1	2	3	4	5	Calificación final

La condición para aprobar el examen es tener como mínimo tres ejercicios correctamente resueltos. Usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios para justificar sus respuestas. NO USE LAPIZ.

1) Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ / la matriz asociada es $M_{E'E}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & b & -b \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix}$

E : base canónica de $\mathbb{R}^3$, $E' = \{1, x, x^2\}$ base de P_2

a) Encuentre, si existen, los valores de $b \in \mathbb{R}$ tales T no sea epimorfismo (sobreyectiva).

b) Para $b = 0$ obtenga $T^{-1}(1 - x^2)$

2) Analice la verdad o la falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique sus respuestas.

a) Si el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$ y $S = \{(X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} / 2x_1 + x_2 - x_3 = 0)\}$ es autoespacio de A , entonces A es diagonalizable.

b) Sea $F: V \rightarrow W$ una transformación lineal y $\{v_1, v_2\} \subset V$. Si $\{F(v_1), F(v_2)\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente.

3) Dada la recta $r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ Halle las ecuaciones de las rectas paralelas a r , que

contienen al punto $(1, t, -2)$ y tales que su distancia a r vale $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

4) Sea la ecuación en $\mathbb{R}^3$: $Ax^2 - y^2 + Bz^2 = D$

Halle la ecuación canónica, identifique y grafique la superficie cuya traza con el plano XZ es

la curva $C: \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t \\ y = 0 \\ z = 3 \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ y que pasa por el punto $(0, 1, 6)$.

5) Verifique que la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero es

diagonalizable en $\mathbb{C}$. Aplique el proceso de diagonalización para demostrar que $M^k = I$ si k es múltiplo de 4.

Tema 1

Apellido y nombres del alumno:

Legajo:

Corrigió:

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo:

a) Dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) Dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar, en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios.

NO USE LÁPIZ.

1) Sea el haz de planos $x + 2y + z - 1 + \alpha(2x - y) = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y la recta $s: \begin{cases} y = \frac{x-k}{3} \\ z = -2 \end{cases}$

a) Halle $k \in \mathbb{R}$, si existe, para que la recta s esté incluida en alguno de los planos del haz.b) Para $k = -3$ obtenga, si existe, la intersección de la recta s con el eje del haz.

2) Halle la ecuación canónica y grafique:

a) el paraboloide hiperbólico de eje z , vértice en el origen y que pasa por los puntos $P(2,1,1)$ y $Q(4,3,-1)$.

b) la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -2 - \frac{t^2}{2} \\ y = 1 + t \end{cases}$ con $t \geq 0$. Identifique la curva e indique el sentido de recorrido en el gráfico de la misma.

3) Determine justificando su respuesta, el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal y $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V , entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ es una base de W .b) Si los vectores columna de una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son unitarios y ortogonales, entonces A es inversible y $A^{-1} = A^t$.4) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + 3z - t = 0 \wedge x - 3z = 0\}$ y $S_2 = \text{gen}\{(3, 0, 1, 0), (3, -1, 0, 1)\}$, halle una base de $S_1 + S_2^\perp$. ¿La suma es directa? Justifique su respuesta.

5) a) Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / -1 y 4 son autovalores de T asociados a los autovectores $(3, -1)$ y $(2, 0)$ respectivamente, determine justificando, si existe una única transformación lineal que cumpla con los datos indicados.

b) ¿ T es diagonalizable? En caso afirmativo halle una matriz A y otra diagonal D , distintas, semejantes entre sí y ambas asociadas a T .

Apellido y nombres del alumno:

Legajo:

Corrigió:

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo:

- a) Dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o
b) Dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar, en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios.
NO USE LÁPIZ.

1) Sea el haz de planos $-x + 3y + 2z + 1 + \alpha(-2y + z) = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y la recta $r: \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{-z + h}{5} \end{cases}$

a) Halle $h \in \mathbb{R}$, si existe, para que la recta r esté incluida en alguno de los planos del haz.

b) Para $h = -4$ obtenga, si existe, la intersección de la recta r con el eje del haz.

2) Halle la ecuación canónica y grafique:

a) el paraboloide hiperbólico de eje z , vértice en el origen y que pasa por los puntos $A(-2, 3, -1)$ y $B(-1, 1, 1)$.

b) la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - \frac{t^2}{5} \end{cases}$ con $t \geq 0$. Identifique la curva e indique el sentido de recorrido en el gráfico de la misma.

3) Determine justificando su respuesta, el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

a) Si los vectores fila de una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son unitarios y ortogonales, entonces A es matriz ortogonal ($A^{-1} = A^t$).

b) Si $F: V \rightarrow W$ es una transformación lineal y $\{u_1, u_2\}$ es una base de V , entonces $\{F(u_1), F(u_2)\}$ es una base de W .

4) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$: $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / -x + 2y + z + t = 0 \wedge 3y - z = 0\}$ y

$W = \text{gen}\{(0, -1, -2, 0), (-1, 0, 4, 1)\}$, halle una base de $S + W^\perp$. ¿La suma es directa? Justifique su respuesta.

5) a) Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / 3 y -1 son autovalores de T asociados a los autovectores $(0, -2)$ y $(-5, 1)$ respectivamente, determine justificando, si existe una única transformación lineal que cumpla con los datos indicados.

b) ¿ T es diagonalizable? En caso afirmativo halle una matriz A y otra diagonal D , distintas, semejantes entre sí y ambas asociadas a T .

Apellido y nombre del alumno: Leg.:
 Corrigió: Revisó:

La condición para aprobar esta evaluación es tener bien resueltos como mínimo tres ejercicios.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. No use lápiz.

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $S = \{ X \in \mathbb{R}^{4 \times 1} / AX = A^t X \}$

Definir un subespacio $T \subset \mathbb{R}^{4 \times 1}$ tal que: $S \oplus T = \mathbb{R}^{4 \times 1}$

2) Dada la ecuación: $2x^2 + Ay^2 = Bz$

Encontrar los valores de A y B para los cuales la ecuación representa un paraboloide cuya intersección con el plano $z = -2$ es una circunferencia de radio 3.

Dar una parametrización de dicha circunferencia. Graficar la superficie.

3) Graficar la región del plano complejo definida por: $\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(4/z) > 1, \operatorname{Im}(iz^2) \leq 1 \}$

4) Dado el haz de planos: $\alpha(x - y + 3) + \beta(x + y + z - 1) = 0$

Definir una transformación lineal $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente:

- i) La imagen de F es uno de los planos del haz.
- ii) El núcleo de F está contenido en la imagen de F.
- iii) $(1, -2, 0)$ es autovector de F asociado al autovalor 2.

Nota: No es necesario hallar la fórmula de F. Es suficiente justificar claramente por qué la transformación lineal propuesta queda bien definida.

5) Analizar la validez de cada una de las siguientes proposiciones:

a) La ecuación $3x^2 + kxy + 3y^2 = 1$ (en $\mathbb{R}^2$) representa una elipse para cualquier k real.

b) Sea $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ tal que el conjunto solución del sistema $AX = 0$ es un subespacio de dimensión 4.

Si $\det(A - 2I) = 0$, entonces A es diagonalizable.

Apellido y nombre del alumno:..... Leg.:

Corrigió: Revisó:

La condición para aprobar esta evaluación es tener bien resueltos como mínimo tres ejercicios.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas. No use lápiz.

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $S = \{ X \in \mathbb{R}^{4 \times 1} / AX = A^t X \}$

Definir un subespacio $T \subset \mathbb{R}^{4 \times 1}$ tal que: $S \oplus T = \mathbb{R}^{4 \times 1}$

2) Dada la ecuación: $Ax^2 + 4z^2 = By$

Encontrar los valores de A y B para los cuales la ecuación representa un paraboloides cuya intersección con el plano $y = -4$ es una circunferencia de radio 5.

Dar una parametrización de dicha circunferencia. Graficar la superficie.

3) Graficar la región del plano complejo definida por: $\{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(6/z) > 1, \operatorname{Im}(iz^2) \leq 4 \}$

4) Dado el haz de planos: $\alpha(x + 2y + 1) + \beta(2x + y - z - 3) = 0$

Definir una transformación lineal $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente:

- i) La imagen de F es uno de los planos del haz.
- ii) El núcleo de F está contenido en la imagen de F .
- iii) $(-1, 1, 2)$ es autovector de F asociado al autovalor 4.

Nota: No es necesario hallar la fórmula de F . Es suficiente justificar claramente por qué la transformación lineal propuesta queda bien definida.

5) Analizar la validez de cada una de las siguientes proposiciones:

a) La ecuación $5x^2 + kxy + 5y^2 = 1$ (en $\mathbb{R}^2$) representa una elipse para cualquier k real.

b) Sea $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ tal que el conjunto solución del sistema $AX = 0$ es un subespacio de dimensión 5.

Si $\det(A - 3I) = 0$, entonces A es diagonalizable.



FINAL ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

FECHA: 2 octubre 2012

Tema: 2

Apellido y nombres del alumno: Legajo:

1	2	3	4	5	Calificación final

La condición para aprobar el examen es tener como mínimo tres ejercicios correctamente resueltos. Usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios para justificar sus respuestas. NO USE LAPIZ.

- 1) Sean las transformaciones lineales : $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / G(x, y, z) = (2x, 2y)$
 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / M_{EE'}(F) = \begin{pmatrix} 2k & k \\ 2k & -2k \\ -4k & 2 \end{pmatrix}$ siendo $M_{EE'}(F)$ la matriz de F respecto de las bases estándar del dominio y del codominio.

Halle, si existen, todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que dimensión del Núcleo de $F \circ G$ sea 1.

- 2) 2.1) Sean los complejos $z = x + i.y$. Represente en el plano complejo la región que satisface simultáneamente las siguientes condiciones :

$$1 \leq |z| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{7\pi}{4} \quad \wedge \quad \text{Im}(z) \leq -1 \quad \text{Nota : } |z| \text{ es el módulo del conjugado de } z$$

- 2.2) Parametrice y grafique el arco de curva definido por : $\begin{cases} y^2 + x - 2y - 1 = 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$

- 3) Sea la ecuación en $\mathbb{R}^3$: $A(x-1)^2 + (y-2)^2 + B(z-3)^2 = C$

Encuentre los valores de A , B y C para que la ecuación represente una superficie cónica cuya intersección con el plano $z = 6$ sea una elipse de eje focal paralelo al eje y , excentricidad igual a $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y semi eje mayor igual a 9. Grafique la superficie para los valores hallados.

- 4) 4.1) Encuentre una transformación lineal : $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente las siguientes condiciones :

i) el núcleo de F es el complemento ortogonal del subespacio $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = t ; y = z\}$

ii) $\lambda = -2$ es autovalor de F y su correspondiente autoespacio es S .

Obsevación : No hace falta hallar la expresión analítica

- 4.2) La transformación lineal hallada, ¿es diagonalizable? Justifique su respuesta.

- 5) Analice la validez de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta

- 5.1) las rectas $L_1 : \begin{cases} x - y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$; $L_2 : (x, y, z) = (-3\lambda, -1 - 3\lambda, 0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$; determinan un plano que pasa por el punto $M(2, 3, -3)$

- 5.2) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $\forall \beta \in \mathbb{R}$:
 $\{A ; B\}$ es linealmente independiente $\Rightarrow \{\alpha A + B ; A + \beta B\}$ es linealmente dependiente

JTN

Evaluación final: Álgebra y Geometría Analítica

Fecha: 3 /12/2012
Tema 1

Apellido y nombres del alumno:

Legajo:

Corrigió:

La condición para aprobar este examen es tener bien resueltos, como mínimo:

a) Dos ejercicios de Geometría Analítica y uno de Álgebra, o

b) Dos ejercicios de Álgebra y uno de Geometría Analítica.

1	2	3	4	5	Calificación final

IMPORTANTE: usted debe presentar, en las hojas que entrega, **el desarrollo de todos los ejercicios.**
NO USE LÁPIZ.

1) Sean $r: \begin{cases} x = 1 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$ y $t: (x; y; z) = (-2; -6; 0) + \lambda(3; 1; 1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

1-1) Halle el punto intersección de las rectas.

1-2) Obtenga la proyección de $P(-2; 1; 1)$ sobre el plano determinado por las rectas.

2) Sea la superficie de ecuación $A(x+2)^2 + 2y + C(z-3)^2 = H$.

Obtenga los valores reales de A , C y H sabiendo que la superficie es un paraboloide de vértice $V(-2; 4; 3)$ y su intersección con el plano $y = 6$ es una elipse de eje focal paralelo al eje z , cuyo semidiámetro mayor mide 1 y el semidiámetro menor mide $\frac{1}{2}$.
Grafique la superficie y la elipse.

3) Sea $F: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / F(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 - a_1; 3a_1 + a_0)$ una transformación lineal y las bases $B_1 = \{x^2 + 1; x; 1\}$ y $B_2 = \{(1; 1), (1; 0)\}$.

3.1) Obtenga la matriz asociada $M_{B_2, B_1}(F)$.3.2) Utilizando la matriz hallada, obtenga $F(x^2 + 5x - 3)$.

4) Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. Justifique.

En caso afirmativo proporcione la matriz P que la diagonaliza y la matriz diagonal semejante a A .

5) 5-1) Obtenga, si existe, $k \in \mathbb{R}$ para que la transformación lineal:

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x; y; z) = (x - y + 2z; 2x - y + 5z; kx + 3y - z)$ sea monomorfismo

5-2) Para $k = 1$, proporcione la dimensión del $\text{Nu}(T)$ y una base de $\text{Im}(T)$.

¿Es T isomorfismo para $K = 1$?

Apellido y nombres:Nro de Legajo.....

Corrigió:.....Revisó:.....

1		2		3		4		5		Calificación
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	

Por favor: **No use lápiz y mantenga el celular apagado.**

1) Dada la recta L que contiene a los puntos A(1,0,0) y B(2,1,0).

a) Encuentre el plano que contiene a la recta L y es perpendicular al plano xy, grafique indicando las trazas del plano.

b) Calcule la distancia del plano al origen.

2) Sabiendo que el núcleo de una transformación en $\mathbb{R}^3$ es $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ y que la imagen es su complemento ortogonal.

a) Defina una Transformación Lineal que cumpla las condiciones anteriores, indique en que teorema se basa para definirla y justifique que se cumple su hipótesis.

b) Si $M(T)_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a una T.L. con las condiciones dadas, escriba una posible base B y justifique.

3)

a) Halle las matrices asociadas a dos endomorfismos F y G de $\mathbb{R}^2$, tal que F provoque una simetría con respecto al eje y, y G una dilatación al doble en la dirección de x y una contracción de coeficiente $\frac{1}{2}$ en la dirección de y.

b) Obtenga FoG, indique los autovalores y autovectores y realice un gráfico que muestre la imagen a través de FoG de un cuadrado unitario.

4) Dado el conjunto $A = \{z = x + yi \in \mathbb{C} / z\bar{z} + z + \bar{z} = 4\operatorname{Im}(z)\}$

a) Grafique el lugar geométrico de los puntos del plano complejo pertenecientes al conjunto A.

b) Parametrice la curva definida por el conjunto A e indique su trayectoria.

5) Dada la ecuación $\sigma: x^2 + Ay^2 + (A+1)z^2 = A^2 + 1$ en $\mathbb{R}^3$

Halle los valores de A de manera que la ecuación corresponda a:

a) Un cilindro, e indique el tipo y realice un gráfico aproximado en cada caso.

b) Una superficie tal que: $\sigma \cap (x=3) = \{(x, y, z) = (3, \sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t)) \wedge t \in [0, 2\pi)\}$, identifique la superficie y grafíquela.

FINAL ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

FECHA: 17 de diciembre 2012

Tema: 1

Apellido y nombres del alumno: Legajo N°.....

1	2	3	4	5	Calificación final

La condición para aprobar el examen es tener como mínimo tres ejercicios correctamente resueltos. Usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios para justificar sus respuestas. NO USE LAPIZ

- 1) Dada la superficie de ecuación: $A(x-1)^2 + B(y-2)^2 + Cz^2 = 1$
- Encuentre la ecuación canónica, identifique y grafique la superficie que cumple simultáneamente las condiciones i) e ii):
 - la intersección de la superficie con el plano $x = 1$ es la curva de ecuación $(x, y, z) = (1; 2 + 2\cos t; 3\sin t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$
 - la intersección de la superficie con el plano $z = 0$ es una hipérbola equilátera.
 - Identifique y grafique para $A=0$; $B=1$ y $C=1$

- 2) Halle una parametrización de la trayectoria de un punto que se mueve sobre la cónica de ecuación: $y^2 + 2y + 2x + 3 = 0$ comenzando el movimiento en el punto $(-3, -3)$ y finalizando en el punto $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

- 3) Sea una transformación lineal $F: P_2 \rightarrow P_2 / M_{BB}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- siendo $B = \{1; x; x+x^2\}$ base de P_2
- Encuentre, si existen, todos los polinomios $p(x) = a + bx + cx^2$ tales que: $F(p(x)) = 3x + 3x^2$
 - ¿Es F un isomorfismo? En caso afirmativo, defina la transformación inversa de F .

- 4) Sean $S_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / (x, y, z) = (t, 2t, -3t); t \in R\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in R^3 / x - k = y = z\}$
- Halle "k" para que S_2 sea un subespacio de R^3 y para el valor de "k" hallado, encuentre una base y la dimensión de la suma: $S_1 + (S_2)^\perp$

- 5) Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:
- Si $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ entonces $z^{36} = 1$
 - $\forall A \in R^{m \times n} \forall B \in R^{m \times n}: \text{rango}(A+B) = \text{rango}(A) + \text{rango}(B)$