Ingreso UTN

Unidad VII

Vectores:

1. De acuerdo al siguiente gráfico halle:

   Usando la regla del paralelogramo hallamos las sumas y las restas correspondientes (recomiendo primero resolver las que están adentro de los paréntesis) también recorda que los escalares solo alargan o contraen los vectores, y si tienen un menos le cambian el sentido pero no la dirección.

2. Sean α y β números reales…

   a) $-\vec{a}$ Es un vector, multiplicado por el escalar -1.
   b) $\left|\vec{a}\right|$ Es un escalar.
   c) $\vec{a}+\vec{b}$ Suma de dos vectores te da otro vector.
   d) $\vec{a}.\vec{b}$ Multiplicar miembro a miembro y sumarlos. Es un escalar.
   e) $\alpha.\vec{a}.\vec{b}$ También te da un escalar.
   f) $\alpha.\vec{a}$ En este caso como no hay p. i. un vector por un escalar te da un vector.
   g) $\alpha.\beta$ Escalar.
   h) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ El módulo de un vector siempre da un escalar.
   i) $\vec{a}.\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ Escalar.
   j) $\dfrac{\vec{a}}{\beta}$ Vector por escalar te da un vector.

3. Determine la relación que existe…

   a) $\overline{M}+\overline{N}=\overline{0}\rightarrow\overline{M}=-\overline{N}$
   b) $\overline{M}-\overline{N}=\overline{0}\rightarrow\overline{M}=\overline{N}$
   c) $\overline{M}+\overline{N}=4.\left(\overline{M}-\overline{N}\right)\rightarrow 5.\overline{N}=3.\overline{M}\rightarrow\overline{M}=\dfrac{5}{3}.\overline{N}$

4. Determine…

   Para $\overline{a}=\left(-2,5\right)$ y $\overline{b}=\left(2,-8\right)$

$\frac{2}{5}.(-2,5)=\left(-\frac{4}{5},2\right)$, $3.[(-2,5)+(2,-8)]=3.(0,-3)=(0,-9)$,

$|4.(-2,5)-3.(2,-8)|=|(-6,20)-(6,-24)|=|(-12,44)|=\sqrt{(-12)^2+44^2}=\sqrt{2080}$

5. Dados los vectores…

$\overline{u}=\lambda.\overline{v}+\beta.\overline{w}\rightarrow(5,-4)=(4\lambda,\lambda)+(\beta,2\beta)\rightarrow(5,-4)=(4\lambda+\beta,\lambda+2\beta)$

De acá podemos armar un sistema:

$\begin{cases}5=4\lambda+\beta\\-4=\lambda+2\beta\end{cases}\rightarrow\beta=5-4\lambda\rightarrow-4=\lambda+10-8\lambda\rightarrow7\lambda=14\rightarrow\lambda=2$ y $\beta=-3$

6. Determine las componentes…

$3.\overline{a}-5.\overline{b}+2.\overline{x}=\overline{0}\rightarrow(-9,3)-(-10,25)+(2x_1,2x_2)=\overline{0}$

$(2x_1,2x_2)=(-1,22)$ Entonces queda $x_1=-\frac{1}{2},x_2=11$

7. Determine los valores de t…

$\overline{a}=t\hat{i}+(t+1)\hat{j}\rightarrow|\overline{a}|=\sqrt{\left[t\hat{i}\right]^2+\left[(t+1)\hat{j}\right]^2}$ Sabemos que los versores al cuadrado son igual a 1 entonces cuando hacemos el módulo de un vector podemos olvidarnos de estos.

$\sqrt{t^2+t^2+2t+1}=\sqrt{5}\rightarrow t^2+t^2+2t+1=5\rightarrow2t^2+2t-4=0$ Resolvemos la cuadrática:

$t_1=1,t_2=-2$

8. Determine el vector de módulo 4…

$\overline{a}=-6\hat{i}+8\hat{j}$ Para que tenga la misma dirección y sentido, necesitamos que el vector buscado sea un múltiplo de a. Entonces primero calculemos el módulo de a:

$|\overline{a}|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{100}=10$ Necesitamos que el módulo sea igual a 4. Entonces planteamos:

$10.x=4\rightarrow x=\frac{2}{5}$ Entonces para que el módulo de nuestro vector sea 4 y tenga mismo sentido y dirección solo es necesario multiplicar a por x:

$x.\overline{a}=\frac{2}{5}\left(-6\hat{i}+8\hat{j}\right)\rightarrow x.\overline{a}=-2,4\hat{i}+3,2\hat{j}$

La dirección y el sentido no cambian por que un vector por un escalar positivo modifica solamente su módulo. Mantiene dirección y sentido igual.

9. Dados los vectores…

a) $\overline{p}.\overline{q}=\left(-3\hat{i},1\hat{j}\right).\left(2\hat{i},3\hat{j}\right)=-6+3=-3$

b) Para ver el ángulo que determinan tenemos que saber usar la fórmula:

$\cos(\alpha)=\frac{\overline{p}.\overline{q}}{|\overline{p}|.|\overline{q}|}$ Reemplazamos $\frac{(-3,1).(2,3)}{\sqrt{9+1}.\sqrt{4+9}}=\frac{-3}{\sqrt{130}}$ usamos la inversa del coseno para ver el ángulo $\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{130}}\right)=105^{o}15'$

c) La proyección de P sobre Q. Sabemos que $\Pr_q(p)=\frac{\overline{p}.\overline{q}}{|\overline{q}|^2}.\overline{q}$ reemplazamos, usando los valores que ya sabemos de los puntos anteriores, para llegar a $\Pr_q(p)=\frac{-3}{13}.(2,3)\rightarrow \Pr_q(p)=\left(\frac{-6}{13},\frac{-9}{13}\right)$

d) La otra proyección. De nuevo planteamos $\Pr_p(q)=\frac{\overline{p}.\overline{q}}{|\overline{p}|^2}.\overline{p}$ reemplazamos:

$$\Pr_p(q)=\frac{-3}{10}.(-3,1)\rightarrow \Pr_p(q)=\left(\frac{9}{10},\frac{-3}{10}\right)$$

10. Determine la proyección…

Para determinar quien es V, sabiendo el punto de origen y el punto extremo hacemos la resta del origen menos el extremo: $\overline{v}=(-2,4)-(-5,1)\rightarrow \overline{v}=(3,3)$
Una vez que tenemos quien es, solo basta usar la formula usada antes:
$$\Pr_v(u)=\frac{-9}{18}.(3,3)\rightarrow \Pr_v(u)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

11.

a) Calcule el producto escalar…
$\overline{b}=-\frac{1}{2}.\overline{a}$ Entonces el producto escalar va a quedar como: $\overline{a}.\overline{b}=-\frac{1}{2}.\overline{a}.\overline{a}\rightarrow \overline{a}.\overline{b}=-\frac{1}{2}.\overline{a}^2$
Sabemos que el módulo de a es la raíz de la suma cuadrada de cada término:
$|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ Entonces si elevamos al cuadrado ambos miembros nos queda:
$$\left(|\overline{a}|\right)^2=\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2\rightarrow \overline{a}^2=\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2\rightarrow \overline{a}^2=\left(|\overline{a}|\right)^2\rightarrow \overline{a}^2=9$$
Volviendo al producto escalar nos queda: $\overline{a}.\overline{b}=-\frac{1}{2}.9\rightarrow \overline{a}.\overline{b}=-\frac{9}{2}$

b) Determine un vector ortogonal…
Para que sea un vector ortogonal necesitamos que el producto escalar sea igual a 0:
$\overline{a}.\overline{b}=0$ Una forma fácil de determinar b, gracias a la definición de producto escalar, es intercambiar de lugar los coeficientes y agregarle a uno de ellos un menos. Como por ejemplo $\overline{b}=(-7,1)$ para ver que se comprueba hacemos $(1,7).(-7,1)=-7-7=0$. También funcionaría con el $\overline{b}=(7,-1)$

12. Calcule el módulo de x…

Planteamos $\overline{a}.\left(\overline{x}-\overline{a}\right)=0\rightarrow \overline{a}.\overline{x}-\overline{a}^2=0\rightarrow \overline{a}.\overline{x}=\overline{a}^2\rightarrow \overline{a}.\overline{x}=4$
Y del dato del ángulo llegamos a:

$$\cos(\alpha)=\frac{\bar{a}.\bar{x}}{|\bar{a}|.|\bar{x}|}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{2.|\bar{x}|}\rightarrow|\bar{x}|=2.\sqrt{2}$$

13. Encuentre el ángulo…

Como v es ortogonal a w: $\bar{v}.\bar{w}=0\rightarrow(-2,v_2).(6,4)=0\rightarrow-12+4v_2=0\rightarrow v_2=3$

Entonces $\bar{v}=(-2,3)$, solo falta ver el ángulo:

$$\cos(\alpha)=\frac{\bar{u}.\bar{v}}{|\bar{u}|.|\bar{v}|}\rightarrow\cos(\alpha)=\frac{6}{5.\sqrt{13}}\rightarrow\alpha=70^{\circ}33'$$

14. Dados los puntos…

a) Para ver el perímetro necesitamos los lados del triángulo. O sea tenemos que restar los vectores para que nos den los vectores correspondientes a ese lado y después calcularles el módulo:

$$l_1=|\bar{A}-\bar{B}|\rightarrow l_1=|(3,-2)|\rightarrow l_1=\sqrt{13}$$

$$l_2=|\bar{C}-\bar{A}|\rightarrow l_2=|(2,4)|\rightarrow l_2=\sqrt{20}$$

$$l_3=|\bar{B}-\bar{C}|\rightarrow l_3=|(-5,-2)|\rightarrow l_3=\sqrt{29}$$

Entonces: $P=\sqrt{13}+\sqrt{20}+\sqrt{29}$

b) Para ver los ángulos tenemos que usar los teoremas de la práctica anterior.
Específicamente el teorema del coseno (si no te lo acordas revisa la práctica anterior):
Usando el teorema del coseno llegamos a:

$$13=29+20-2.\sqrt{29}.\sqrt{20}.\cos(\alpha)\rightarrow\cos(\alpha)=\frac{18}{2.\sqrt{145}}\rightarrow\alpha=41^{\circ}38'$$

$$29=13+20-2.\sqrt{13}.\sqrt{20}.\cos(\beta)\rightarrow\cos(\beta)=\frac{2}{2.\sqrt{65}}\rightarrow\beta=82^{\circ}52'$$

$$20=13+29-2.\sqrt{13}.\sqrt{29}.\cos(\gamma)\rightarrow\cos(\gamma)=\frac{11}{\sqrt{377}}\rightarrow\gamma=55^{\circ}29'$$

15. Dados los vectores…

Necesitamos encontrar $(v_1,v_2)+(w_1,w_2)=(3,5)$ tal que el vector v sea en la misma dirección que a (o sea proyectamos b sobre a) y que w sea ortogonal a a (que el producto interno sea 0).

$$\mathrm{Pr}_a(b)=\frac{13}{5}.(1,2)\rightarrow\mathrm{Pr}_a(b)=\left(\frac{13}{5},\frac{26}{5}\right)$$

Ahora un proceso más fácil que el producto interno igualado a 0 es plantear:

$$\bar{b}-(v_1,v_2)=(w_1,w_2)\rightarrow(w_1,w_2)=\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

Estática:

1. Un cuerpo rígido…

a) Suponiendo que el módulo de la fuerza F_1 es de 50N, para escribirla de forma cartesiana hay que proyectar esta fuerza en el eje x y en el eje y:
Sabemos que el ángulo α respecto del eje x es de 210º.
Una manera muy fácil de proyectar es haciendo Pitágoras con el ángulo y formando triángulos rectángulos con los ejes cartesianos.
Por ejemplo para proyectar en el eje y:
$F_y = \left|\overline{F}\right|.\sin(\alpha) \to F_y = -25$
Lo mismo para el eje x:
$F_x = \left|\overline{F}\right|.\cos(\alpha) \to F_x = -25.\sqrt{3}$
Juntando todo queda: $\overline{F} = -25\sqrt{3}N\hat{i} - 25N\hat{j} = \left(-25\sqrt{3}, -25\right)N$

b) Al solo trasladar la fuerza no cambia el módulo, por lo tanto las proyecciones son las mismas, solo que en otro punto. Tampoco cambia el sentido.

2. Dadas las fuerzas…

$\overline{F_1} = (6,0)N$ Para ver la intensidad $\left|\overline{F_1}\right| = \sqrt{6^2} = 6N$, para ver el ángulo:

$6.\cos(\alpha) = 6 \to \cos(\alpha) = 1 \to \alpha = 0$ haces el proceso inverso a la proyección, planteas el módulo de la fuerza por el coseno, o seno, del ángulo igual a la componente cartesiana correspondiente. Y de esa ecuación despejas el ángulo, puede hacer tanto para la componente en eje x o y, solo cambia el seno o coseno.

$\overline{F_2} = (-20,0)N \quad \left|\overline{F_2}\right| = 20N \quad 20.\cos(\beta) = -20 \to \cos(\beta) = -1 \to \beta = 180^o$

$\overline{F_3} = (0,10)N \quad \left|\overline{F_3}\right| = 10N \quad 10.\sin(\delta) = 10 \to \delta = 90^o$

$\overline{F_4} = (0,-30)N \quad \left|\overline{F_4}\right| = 30N \quad 30.\sin(\varepsilon) = -30 \to \varepsilon = -90$ (Si queremos el ángulo positivo es 270º)

$\overline{F_5} = (3,4)N \quad \left|\overline{F_5}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad 5.\sin(\phi) = 4 \to \phi = 53^o$

$\overline{F_6} = (-20,10)N \quad \left|\overline{F_6}\right| = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500}N \quad \sqrt{500}\cos(\varphi) = -20 \to \varphi = 153^o$

$\overline{F_7} = (-6,-3)N \quad \left|\overline{F_7}\right| = \sqrt{45} \quad \sqrt{45}\cos(\gamma) = -6 \to \gamma = 153^o$ (Si hacemos 360º-153º=206º)*

$\overline{F_8} = (20,-100)N \quad \left|\overline{F_8}\right| = \sqrt{10400} \quad \sqrt{10400}\sin(\eta) = -100 \to \eta = -78^o$ (360º-78º=281º)*

*(Para los vectores que tienen la componente negativa en el eje y es necesario sumarle o restarle 360º para que quede el ángulo medido desde el eje x en sentido anti horario)

3. En un cuerpo rígido actúan…

Como estamos en $\mathbb{R}^2$ el sistema de fuerzas va a estar en un plano.
Para ver si está en equilibrio o no, proyectamos todas las fuerzas en los ejes.
Eje x:

$$\sum_{1}^{3} F_i \cos(\alpha_i) = 50\cos(210^o) + 100\cos(0^o) + 61{,}97\cos(156{,}2^o) = -43{,}30 + 100 - 56{,}70 = 0$$

Eje y:

$$\sum_{1}^{3} F_i \sin(\alpha_i) = 50\sin(210^o) + 100\sin(0^o) + 61{,}97\sin(156{,}2^o) = -25 + 0 + 25 = 0$$

Ambas sumatorias dan 0, por lo tanto el sistema se encuentra en equilibrio.

4. Considere que el cuerpo rígido…

   Para ver si está en equilibrio o no tenemos que ver si las siguientes sumatorias dan 0:

$$\sum_{1}^{2} F_i \cos(\alpha_i) = 50\cos(210^o) + 100\cos(0^o) = -43{,}30 + 100 = 56{,}7$$

$$\sum_{1}^{3} F_i \sin(\alpha_i) = 50\sin(210^o) + 100\sin(0^o) = -25 + 0 = -25$$

$$\sum_{1}^{2} M_{ci} = -100Nm$$

   Por lo tanto el sistema no se encuentra en equilibrio.
   Para lograr el equilibrio hay que agregar una fuerza que compense estas sumatorias.
   O sea que escrita en forma cartesiana sea $\overline{F_E} = (-56.7, 25)N$
   Y que el momento sea igual a 100Nm.

5. Considere el sistema de fuerzas…

   Para que el sistema se encuentre en equilibrio
   $-75N + 25N + Y = 0 \rightarrow Y = 50N$ La fuerza tiene que tener 50N en el eje y.
   Como no hay fuerzas en el eje x, esta fuerza no puede tener ninguna componente en dicho eje si no se rompería el equilibrio ahí.
   Por ahora tenemos $\overline{F_E} = (0, 50)N$
   Falta ver el punto de aplicación:
   $|75|.|2-0| - |25|.|5-0| - |50|.|x-0| = 0 \rightarrow -50x = -25 \rightarrow x = 0{,}5$ Es el punto de aplicación de la fuerza en el eje x. Es 0 en el eje y.

6. Dado el siguiente sistema…

   Como todas las fuerzas están aplicadas en el mismo punto solo basta plantear las sumatorias en el eje x e y:

$$100\cos(30^o) + 20\cos(120^o) + 100\cos(240^o) + 200\cos(0^o) = 50\sqrt{3} - 10 - 50 + 200 = 50\sqrt{3} + 140$$

$$100\sin(30^o) + 20\sin(120^o) + 100\sin(240^o) + 200\sin(0^o) = 50 + 10\sqrt{3} - 50\sqrt{3} + 0 = 50 - 40\sqrt{3}$$

   Por lo tanto la fuerza equilibrante tiene que estar aplicada en el punto $(0,0)$ y las proyecciones tienen que compensar las sumatorias.
   $\overline{F_E} = (-226.6, 19.28)N$ Calculamos el módulo $|\overline{F_E}| = 227{,}42N$ y el ángulo

$$\cos(\alpha) = -\frac{226{,}6}{227{,}42} \rightarrow \alpha = 175{,}1^o$$

7. Un sistema plano de fuerzas…

La fuerza equilibrante va a tener que ser $\overline{F_E}=(-10,10)N$ para poder compensar las fuerzas proyectadas en x e y. Mientras que su momento va a tener que ser $M_E=100Nm$.

Para ver el ángulo respecto de x: $\frac{-10}{\sqrt{200}}=\cos(\alpha)\rightarrow\alpha=135^{\circ}$

8. Equilibre la fuerza…

Planteamos las sumatorias.
La proyección de la fuerza P en el eje x es nula, tiene un ángulo de 270º, entonces en esa sumatoria aparecen solo las F_1 y F_2 mientras que en el eje y tenemos:

$100\sin(270^{\circ})+F_1\sin(180^{\circ}-37^{\circ})+F_2\sin(53^{\circ})=-100+0,6F_1+0,799F_2$

Para el x:

$F_1\cos(143)+F_2\cos(53)=0,6F_2-0,799F_1$ De acá despejamos F_2 en función de F_1:

$0,6F_2=0,799F_1\rightarrow F_2=1,33F_1$ Lo metemos en la sumatoria del eje y

$-100+0,6F_1+0,799.1,33F_1=-100+1,66F_1\rightarrow F_1=60$ Tenemos el módulo de F_1, ahora veamos el de F_2: $F_2=1,33.60\rightarrow F_2=80$ (En todas las cuentas se aproxima)

Para ver las componentes cartesianas solo basta reemplazar en las sumatorias:

$F_1=(-48,36)$ y $F_2=(48,64)$

9. En una placa rígida…

Simplemente planteamos la sumatoria de los momentos:

$\sum_1^4 M_i=-10+20+30-15=25Nm$ Como es distinto de 0, el sistema no está en equilibrio. Y la cupla necesaria para que este en equilibrio es $M_E=-25Nm$

10. Una Barra rígida…

El mejor punto de apoyo para la fuerza equilibrante (donde es necesario menos fuerza) es el otro extremo de la barra, el punto $(3,0)$ una vez sabido esto plateamos la sumatoria de fuerzas en el eje y:

Cabe destacar que si la articulación de la barra estaba en un punto simétrico (estaba en el medio) la fuerza necesaria para tener el equilibrio era la misma que la fuerza ya aplicada en el otro extremo.
Como la barra tiene longitud 3m y del lado izquierdo hay 2m. Se puede ver que vamos a necesitar el doble de fuerza para obtener el equilibrio.
Analíticamente:

$M_x=|800|.|0-2|-|F|.|3-2|=1600-|F|\rightarrow|F|=1600$

Observación: El signo de cada fuerza lo deducimos parándonos en el punto de reducción, e imaginar en qué sentido giraría cada fuerza por separado. Si es anti horario el signo correspondiente en la sumatoria es un +, y si es horario el signo correspondiente es un -.

Para que se logre el equilibrio de esta barra se deduce gráficamente que la dirección de la fuerza aplicada tiene que ir en –y. Entonces $\overline{F}=(0,-1600)N$

11. En la barra del ejercicio 10…

Suponemos que la cupla de fuerzas esta toda compuesta en el eje y, o que las proyecciones del eje x se cancelan solas. Y todavía no se puso la fuerza equilibrante que encontramos en el ejercicio 10.
Entonces planteamos la sumatoria de los momentos:
$M_x = |800|.|0-2| + 100 = 1700Nm$ Entonces necesitamos que el momento de nuestra fuerza equilibrante sea de -1700. $M_E = |F|.|1-2| = |F| \to |F| = -1700$ Por convención de que el momento tiene un – se deduce que la fuerza va en el eje y positivo (para que gire en sentido horario y al ver el momento lleve un menos).

12. En la barra del ejercicio 10…

    De la misma manera que en el ejercicio anterior se llega a $M_x = |800|.|0-2| + 1000 = 2600Nm$
    Entonces la cupla necesaria para impedir el giro tiene que tener un momento:
    $M_E = -2600Nm$ (Se necesita que la sumatoria total sea igual a 0)

Cinemática:

1. Una partícula se mueve…

   a) Para ver la posición iniciar de la partícula basta con, en la ecuación de movimiento, reemplazar el tiempo por 0: $x(t) = t^2 - t - 2 \to x(t=0) = -2$
   b) Veamos las raíces de la cuadrática: $x_1 = 2s, x_2 = -1$ Como todavía no definimos los tiempos negativos, descartamos este valor y nos quedamos solo con x_1.
   c) Nuevamente reemplazamos el tiempo por 5: $x(t=5) = 25 - 5 - 2 = 18m$
   d) Recordamos la ecuación de velocidad media: $\overline{v_m} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{4-0}{3-2} = \frac{4m}{1s} = 4\frac{m}{s}$

2. El diagrama…
   a) Durante el primer segundo se mueve según la ecuación $x = 2t$ la velocidad media es $\overline{v_m} = 2\frac{m}{s}$ y la aceleración es constante.
   Para el siguiente tramo tenemos que la velocidad es 0, ya que la posición se mantiene constante. Por lo tanto la aceleración también tiene que ser 0 en ese tramo.
   Después vuelve a aumentar a la misma recta que estaba antes, pero como se "atraso" 1 segundo queda como: $x = 2t - 2$ Donde tiene la misma velocidad media y la misma aceleración constante hasta que llega al otro tramo.
   Donde ahora la ecuación de movimiento es $x(t) = -4t + 16$ (para llegar a esta ecuación plantea una recta $x(t) = mt + b$ evalúa en los 2 puntos conocidos y despeja el sistema). Para este tramo la velocidad y la aceleración pasan a ser negativos. Con $\overline{v_m} = -4\frac{m}{s}$

3. Un vehículo…

   Teniendo la ecuación horaria: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

   a) Suponemos las condiciones iniciales $x_0 = 0, v_0 = 15\frac{m}{s}$

$$x(6)=15\frac{m}{s}.6s+\frac{1}{2}1\frac{m}{s^2}6^2s^2=90m+18m=108m$$

b) Solo cambia la aceleración, entonces: $x(6)=15\frac{m}{s}.6s+\frac{1}{2}(-)1\frac{m}{s^2}6^2s^2=90m-18m=72m$

Para ver el tiempo que tarda en detenerse veamos v=0

$$v(t)=at+v_0\rightarrow 0=-1\frac{m}{s^2}t+15\frac{m}{s}\rightarrow t=15\frac{s^2}{s}\rightarrow t=15s$$

4. La velocidad de un tren se reduce…

a) Para encontrar la aceleración planteamos

$$(v_F)^2-(v_0)^2=2a.(x_f-x_0)\rightarrow 25\frac{m^2}{s^2}-144\frac{m^2}{s^2}=a.200m\rightarrow a=-\frac{119m^2}{200ms^2}\rightarrow a=-0,595\frac{m}{s^2}$$

b) Una vez teniendo la aceleración solo basta plantear:

$$v(t)=at+v_0\rightarrow 0=-0,595t+12\rightarrow t=\frac{12}{0,595}\rightarrow t=20,1s$$

Y luego meter todo en la ecuación horaria

$x(20,1s)=12t+\frac{1}{2}at^2=241,2-120,2\rightarrow x(20,1s)=121m$ A esto hay que agregarle el dato de que en la primera parte recorrió 100m. Entonces la distancia que recorrió después de ese cambio de velocidades planteado es de 21m.

5. Un cuerpo, partiendo del reposo…

Primero veamos las condiciones iniciales $x_0=0$ $v_0=0$ y ponemos nuestro sistema de ejes en el plano inclinado. Sabemos también $x(3)=9$. Ahora averigüemos la aceleración:

$9=\frac{1}{2}a3^2\rightarrow a=2\frac{m}{s^2}$ Ahora que tenemos la aceleración, $v=at\rightarrow 24=2t\rightarrow t=12s$

6. Un automóvil está parado en un semáforo…

Primero veamos la ecuación horaria para el automóvil:

$x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\rightarrow x(t)=\frac{1}{2}.2t^2\rightarrow x(t)=t^2$ Mientras que para la velocidad queda:

$v(t)=at+v_0\rightarrow v(t)=2t\rightarrow v(t)=2t$ Ahora veamos la posición y la velocidad a los 15 segundos:

$$x(15s)=225m \quad v(15s)=30\frac{m}{s}$$

Veamos que la velocidad del camión era $v=60\frac{km}{s}=60.\frac{1000m}{3600s}=16,7\frac{m}{s}$ entonces como la velocidad del auto es mayor que la del camión podemos afirmar que en algún t, el auto va a alcanzarlo.

La ecuación horaria para el camión queda como: $x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\rightarrow x(t)=33,4m+16,7\frac{m}{s}t$

La posición inicial la sacas haciendo v_0x2s, esto lo hacemos para tener el mismo tiempo que el auto. Una vez que llegamos a este punto, para plantear el encuentro debemos pararnos en t=17s para el camión y t=15s para el auto donde este se mueve a velocidad constante. Y ver las ecuaciones horarias.

Auto: $x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \to x(t)=225m+30\frac{m}{s}t$

Camión: $x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \to x(t)=283{,}9m+16{,}7\frac{m}{s}t$

Y ahora si igualar las 2 ecuaciones:

$$283{,}9m+16{,}7\frac{m}{s}t=225m+30\frac{m}{s}t \to 13{,}3\frac{m}{s}t=58{,}9m \to t=4{,}43s$$

Entonces: $x(t=4{,}43s)=225m+30\frac{m}{s}.4{,}43s=357{,}9m$

7. Desde un punto situado…

   a) Otro problema de encuentro, veamos las ecuaciones horarias:

   $x_1(t)=100m+50\frac{m}{s}t-4{,}9\frac{m}{s^2}t^2$

   $x_2(t)=150\frac{m}{s}t-4{,}9\frac{m}{s^2}t^2$ Esta tiene un tiempo diferente a la otra, para eso veamos que pasa 2 segundos después en x_1

   $x_1(2)=100m+50\frac{m}{s}.2s-4{,}9\frac{m}{s^2}.2^2s^2=200m-19{,}6m=180{,}4m$ Ahora este va a ser nuestro x_0.

   Y redefinimos x_1 como: $x_1(t)=180{,}4m+30{,}4\frac{m}{s}t-4{,}9\frac{m}{s^2}t^2$ la velocidad se saca de $v(t)=at+v_0$

   Una vez que tenemos los mismos tiempos igualamos las ecuaciones:

   $$180{,}4m+30{,}4\frac{m}{s}t-4{,}9\frac{m}{s^2}t^2=150\frac{m}{s}t-4{,}9\frac{m}{s^2}t^2 \to \frac{180{,}4m}{119{,}6m}s=t \to t=1{,}51s$$

   b) Veamos x_2 evaluado en el t encontrado:

   $x_2(1{,}5)=150\frac{m}{s}.1{,}5s-4{,}9\frac{m}{s^2}.1{,}5^2s^2=225m-11m=214m$

   c) Planteamos las ecuaciones de velocidad correspondientes para ese tiempo:

   $v_2(1{,}5)=-14{,}7\frac{m}{s}+150\frac{m}{s}=135{,}3\frac{m}{s}$

   $v_1(1{,}5)=-14{,}7\frac{m}{s}+30{,}4\frac{m}{s}=15{,}7\frac{m}{s}$

   d) Para ver la altura máxima 1º tenemos que ver velocidad igual a 0:

   $v_1(t)=0=-9{,}8\frac{m}{s^2}t+30{,}4\frac{m}{s} \to t=\frac{30{,}4ms^2}{9{,}8ms}=3{,}1s$

   Y ahora que tenemos el tiempo correspondiente a la altura máxima veamos la horaria pero de x_2:

   $x_2(3{,}1)=150\frac{m}{s}.3{,}1s-4{,}9\frac{m}{s^2}.3{,}1^2s^2=465m-47m=418m$

   e) Primero igualamos la horaria a 0 y buscamos las raíces: $t_1=-3{,}7s, t_2=9{,}9s$ La t_1 al ser negativa no nos interesa. Entonces nos quedamos con t_2.
   Ahora que tenemos el tiempo veamos la horaria de la segunda:

$$x_2(9,9)=150\frac{m}{s}.99s-4,9\frac{m}{s^2}.9,9^2s^2=1485m-480m=1005m$$

8. Se lanza un cuerpo…

a) Planteamos en la ecuación horaria:

$$0=50m+v_0t+4.9\frac{m}{s^2}.15^2s^2\rightarrow-50+1102,5=v_0t\rightarrow t=70,16\frac{m}{s}$$

b) $v(13s)=-9,8.13+70\rightarrow v(13s)=-57,24\frac{m}{s}$

c) $v(15s)=-9,8.15+70\rightarrow v(15s)=-76,9\frac{m}{s}$

d) $v(t)=-9,8t+70=0\rightarrow t=\frac{70}{9.8}s\rightarrow t=7,14s$ Evaluamos ese tiempo en la horaria:

$$x(7,14)=50m+70,16.7,14-4,9.7,14^2=50m+500,9m-249,8m=301m$$

9. Se golpea una pelota de golf…

Sabemos que en el eje x tenemos un MRU y en el eje y tenemos un MRUV

$x(t)=x_0+v_xt$ La ecuación horaria en x.

$y(t)=y_0+v_yt-\frac{1}{2}gt^2$ La ecuación horaria en y, evaluamos en el instante que llega al suelo

$0=y_0+v_yt-\frac{1}{2}gt^2$ sacamos factor común t (y_0=0) $0=t.\left(v_y-\frac{1}{2}gt\right)$ o bien t=0, es el instante inicial, o

$v_y-\frac{1}{2}gt=0\rightarrow t_f=\frac{2v_y}{g}$ donde t_f es el tiempo donde la pelota cae al suelo. Ahora sustituimos ese en la ecuación de x:

$$x=x_0+v_x.\frac{2v_y}{g}\rightarrow\frac{(x-x_0)g}{2}=v_xv_y$$

Proyectemos la velocidad en los ejes: $v_0=v_0\cos(45^o)\hat{x}+v_0\sin(45^o)\hat{y}$ (x_0=0)

Entonces queda $\frac{gx}{2}=v_0^2\cos(45^o).\sin(45^o)\rightarrow\frac{180m.g}{2}=v_0^2.\frac{1}{2}\rightarrow|v_0|=\sqrt{1764\frac{m^2}{s^2}}\rightarrow|v_0|=42\frac{m}{s}$

Para ver el tiempo volvamos a $t_f=\frac{2v_y}{g}=2\frac{v_0\sin(45)}{g}=6,06s$

10. Se dispara un cañón…

a) Veamos la ecuación horaria en el eje x:

$x(t)=v_{0x}t$ Necesitamos el tiempo. Así que veamos la el eje y:

$y(t)=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$ Igualamos a 0, $100\frac{m}{s}t-4,9\frac{m}{s^2}t^2=0\rightarrow t_1=0s,t_2=20,4s$

El t_2 es el instante en que llega al suelo, volvemos a la otra ecuación:

$$x(20,4)=173,2\frac{m}{s}.20,4s=3533,4m$$

b) En el eje x sabemos que la velocidad no cambia por ser un MRU y en el eje y al no haber rozamiento y ser un tiro vertical perfecto sabemos que la velocidad de caída es igual a la de salida. Entonces en ambos ejes la velocidad va a ser igual en puntos simétricos de la trayectoria.

Entonces: $v_f=200\frac{m}{s}$

c) También se sabe que a la mitad del recorrido se alcanza la altura máxima, entonces solo basta saber la altura máxima para determinar si logra pasar la montaña o tropezar con ella:

$$v_y=0\rightarrow 0=-9,8\frac{m}{s^2}t+100\frac{m}{s}\rightarrow t=\frac{100}{9,8}s=10,2s$$

$$y_m=100\frac{m}{s}.10,2s-4,9\frac{m}{s^2}.104,04s^2=1020m-509,8m=510,2m$$

Por lo tanto no llega a superar la altura de la montaña.

11. Calcule el ángulo…

De las ecuaciones horarias llegamos a:

$5000m=400\frac{m}{s}\cos(\alpha)t\rightarrow t=\frac{12,5}{\cos(\alpha)}$ Vamos a la ecuación de y evaluada en el instante final:

$$0=400\frac{m}{s}t-4,9\frac{m}{s}t^2\rightarrow 0=5000\frac{m}{s^2}.\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}-4,9.\frac{25^2}{4}\frac{m}{s^2}.\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

Denominador común:

$\frac{20000\sin(\alpha)\cos(\alpha)-3062,5}{4\cos^2(\alpha)}=0$ Entonces el numerador tiene que ser 0:

$$20000\sin(\alpha)\cos(\alpha)-3062,5=0\rightarrow\sin(\alpha)\cos(\alpha)=0,15\rightarrow\frac{\sin(2\alpha)}{2}=0,15$$

$$\sin(2\alpha)=0,3\rightarrow 2\alpha=\sin^{-1}(0,3)\rightarrow\alpha=8,8^{\circ}$$

12. Se lanza una piedra…

Primero veamos el tiempo en el que llega a los 120m usando la ecuación horaria de x:

$120m=40\frac{m}{s}\cos(26)t\rightarrow t=3,3s$ Ahora pongamos ese tiempo en la ecuación de horaria y:

$$y=1m+40\frac{m}{s}\sin(26)t-4,9\frac{m}{s^2}t^2\rightarrow y=1+57,86m-53,36m=5,4m$$

Por lo tanto para 3,4m por arriba del muro.

13. Un estudiante quiere…

Igual que en el ejercicio anterior:

$20m=40\frac{m}{s}\cos(45)t\rightarrow t=0,7s$ Luego vemos la horaria en y:

$$y=1,2m+40\frac{m}{s}\sin(45)t-4,9\frac{m}{s^2}t^2\rightarrow y=1,2m+19,8m-2,4m=18,6m$$

Por lo tanto la pelota choca con la casa a la altura de 18,6m.

Y parece que ya terminamos, eso fue todo! Espero que este material te haya servido! Cualquier corrección está más que bienvenida, esperamos ir mejorando con cada aporte.

Saludos y mucho éxito en tu carrera.